

BIBLIOTEKA
PW
SP
KRAKÓW

799

Dr. J. Zgorzalewicz

WSKAZÓWKI METODYCZNE

KRAKÓW

Nakładem J. M. Himmelblaua



L. inv. $\frac{154}{11}$ - ~~5309~~



Wielmożnemu Panu Dyrektorowi
Andrzejowi Nisiołowi
na pamiątkę

ofiaruję

autor.

WSKAZÓWKI METODYCZNE

jak uczyć należy

RACHUNKÓW

w szkołach ludowych pospolitych

dla użytku

kandydatów i kandydatek Seminarjów nauczycielskich
tudzież dla nauczycieli i nauczycielek sposobiących się do egzaminu
kwalifikacyjnego

ułożył

DR. JULIAN ZGORZALEWICZ

profesor c. k. Seminarjum nauczycielskiego żeńskiego w Krakowie
i członek komisji egzaminacyjnej dla szkół ludowych pospolitych i wydziałowych.

~~450.~~ ~~B. Juv~~ ~~315~~
II. 305.

KRAKÓW.

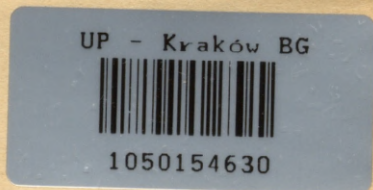
Nakład i własność Księgarni J. M. Himmelblaua.

1892.

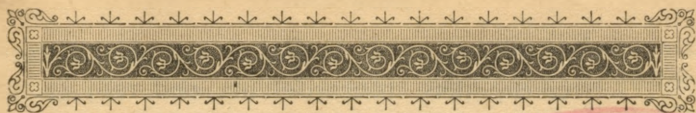


37

799



CZCIONKAMI Drukarni Związkowej w Krakowie
pod zarządem A. Szyjewskiego.



CZEŚĆ I.

Zakres liczb od 1 do 20.

W pierwszym roku nauki rachunków uczy się czterech działań zasadniczych w zakresie liczb od 1 do 20 z pamięci i cyframi, a zaznajamia z monetami, miarami i wagami, opierającymi się w swym podziale na tymże zakresie.

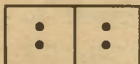
Nauka rozpoczyna się od nadania pojęcia liczb po sobie następujących, używając do tego odpowiednich środków uzmysławiających, n. p. kostek, gałek, kropek, krósek i t. d. Po zbadaniu, czy dzieci liczbę pojęły, uczy się pisania znaku liczby (cyfry).

Następnie w zakresie poznańej liczby przerabia się cztery działania, a to w ten sposób, że każdą liczbę rozkłada się na jedyńki i z tego rozkładu, uwidocznionego kropkami na tablicy szkolnej, przez składanie dochodzi się do operacji rachunkowej z jedyńką. Rozkład na dwójki prowadzi do dodawania, mnożenia, odejmowania dwójki i tak dalej.

Do wyprowadzenia każdej prawdy arytmetycznej, np. że $2 + 2 = 4$ nauczyciel używa następujących środków:

1) Rozkład liczby kropkami na tablicy ścienniej,

n. p.:



- 2). Dodawanie, przeprowadzone na różnych rzeczach, które nauczyciel ma pod ręką (n. p. kostki, gałki, rysiki, centy i t. d.)
- 3). Dodawanie liczb mianowanych (więc bez środka uzmysławiającego).
- 4). Abstrakcja czyli liczba bezwzględna.
- 5). Napisanie wypadku cyframi.
- 6). Zastosowanie do przykładu praktycznego.
- 7). Prędkie rachowanie liczbami bezwzględnymi, jako powtórzenie na końcu przerobionej liczby.

Liczba 1. | | | |---|---| | • | 1 | |---|---|

Nauczyciel pokazuje książkę i mówi: To jest *je-dna* książka. Ile to jest książek? Odpow. To jest jedna książka. Nauczyciel wskazuje na kilka książek i mówi: Tu jest *kilka* książek. To samo przerabia z kostką, rysikiem, jabłkiem, gałką. Kręśli na tablicy jedną kropkę, kręskę, krzyżyk. Dzieciom każe nakręślić na tabliczce jedną kręskę, etc. Następnie pyta się dzieci o różne przedmioty w szkole będące, ile ich jest? N. p. o piec, tablicę, drzwi i odróżnia jeden od kilku, n. p.: jedna ławka — kilka ławek. W końcu poucza dzieci o tém, że znają teraz liczbę „*jeden*“, która oznacza się znakiem **1**. Nauczyciel pisze ten znak najpierw na tablicy i omawia jak? Potém dzieci piszą to samo na tabliczkach etc.

Liczba 2. | | | |---|---| | : | 2 | |---|---|

1. Pojęcie. Tu jest jeden rysik, a tu jest jeszcze jeden rysik. Składając oba rysiki do jednej ręki, mówi nauczyciel: Teraz mam więcej, niż jeden rysik, mam

dwa rysiki. Jeden rysik i jeden rysik są dwa rysiki. Powtórz! Jedna kostka i jedna kostka, ile jest kostek? Jedna gałka i jedna gałka, ile jest gałek? Na tablicy kréski, kropki krésłąc nauczyciel, pyta: jedna kréska i jedna kréska? etc. Potém *jeden* i *jeden* jest ile? Pytania następują: Ile masz ócz, rąk, nóg? Ile gołąb ma nóg? etc. W końcu pisze znak na liczbę dwa:

:	2
---	---

2. Rozkład. Nauczyciel krésli na tablicy 2 kropki obok siebie i otacza je czterema liniami:

••

 Ile tu jest kropek? Przedzielam te dwie kropki kréską:

•		•
---	--	---

 Ile jest kropek po lewéj, ile po prawéj stronie kréski? Dwie kropki rozłożyć można na jedną kropkę i jedną kropkę. To samo z kostkami. W końcu mówi: dwa rozłożyć można na jeden i jeden.

3. Dodawanie. $1 + 1 = 2$

•		•
---	--	---

Jedna kostka i jedna kostka są dwie kostki. Dzieci zliczają. Tak samo dwie gałki, dwa centy, dwie kréski i dwie kropki na obrazie rozkładowym. Potém mianowane liczby: jeden koń *więcej* jeden koń? jeden orzech *więcej* jeden orzech? W końcu: *Uważać!* *Jeden* *więcej* *jeden* ile jest? Powtarza kilku uczniów, potém wszyscy powstają i chórem powtarzają.

Napisanie. To, cośmy teraz wyrachowali, napiszemy na tablicy. Co mamy napisać? Co najpierw? Nauczyciel pisze na tablicy, a dzieciom wszystkim każe to samo napisać na tabliczkach. Co teraz mamy napisać? (*więcej*). Poucza się dzieci, jak oznacza się *więcej* (+). Tak nauczyciel kolejno pyta się, co napisać i poucza

z początku, jak się pisze. Gdy napisano $1 + 1 = 2$, następuje przeczytanie z tablicy szkolnej, potem wywołane dzieci czytają ze swych tabliczek, w końcu wszystkie chórem z tabliczek czytają. (Nauczyciel winien przeglądać tabliczki i przy wydobywaniu tabliczek i rysików używać komendy odpowiedniej).

Zastosowanie. Jaś kupił za 1 ct. rysik i za 1 ct. ołówek; ile centów Jaś wydał razem? Kilku powtarza pytanie. Co masz wyrachować? Jak? Rachujcie wszyscy! Ile? Kilku odpowiada. Sprawozdanie dlaczego?

4. Mnożenie. $2 \times 1 = ?$

Kręślę raz 1 kręskę, drugi raz 1 kręskę. Ile razy nakręśliłem po 1 kręsce? Dwa razy po 1 kręsce, ile to kręsek? To samo z kostkami: Kładę raz 1 kostkę, drugi raz jedną kostkę etc. Odsuwam raz 1 gałkę, drugi raz 1 gałkę. Liczcie, ile tu jest razy po jednej kropce? Jest 2 razy po jednej kropce?

Bez środków uzmysławiających: 2 razy po 1 cencie? 2 razy po 1 ołówku? 2 razy po 1 jabłku? *Uważać!* Dwa razy jeden jest ile? Powtórzyć szczegółowo i chórem.

Pisanie: Co i jak? **Nauka:** Jak pisze się razy? ($\times$ krzyżyk leżący).

Przykłady. 1 bułka kosztuje 1 ct., ile zapłaci się za 2 bułki? Za każdą bułkę płaci się 1 ct., 2 bułki jest to 2 razy po 1 bułce, więc też zapłaci się 2 razy po 1 cencie. Rachujcie wszyscy, ile to jest 2 razy po 1 cencie? Dlaczego?

Później nauczyciel domaga się, aby dzieci same wyrachowały ile wypadnie za 2 rysiki po 1 cencie.

5. Odejmowanie. $2 - 1 = 1$

Ile kostek jest na stole? (2) Jedną podnoszę i pytam, ile wziąłem? ile pozostało? Czy jeszcze są 2 kostki? Czy więcej, czy mniej? O ile mniej? *Więc* 2 kostki mniej jedna kostka, ile jest kostek? To samo z innymi rzeczami, potem na obrazie rozkładowym przez zakrywanie: 2 kropki, mniej 1 kropka, jest 1 kropka. Następnie liczba mianowana, a w końcu abstrakcja: $2 - 1 = 1$.

Pisanie z wyjaśnieniem jak pisze się *mniej* (kręska pozioma —).

Przykład. Staś miał 2 centy; 1 centa dał ubogiemu, ile mu pozostało centów? Inne zwroty mowy: Jaś od ojca otrzymał 2 jabłka, a Zosia 1 jabłko; ile jabłek ma Jaś więcej od Zosi? Ile Zosia ma mniej jabłek od Jasia?

6. Mieszczenie. $2 : 1 = 2$

Do uzmysłowienia mieszczenia nadają się miary długości i objętości. Prócz tego pytanie „ile razy można brać“ prowadzi także do wniosku ile razy się mieści. Z miar długości potrzebny jest 1 cały metr, podzielony króskami na 10 równych części i następnie jeszcze listewki na 1 dm., 2 dm., 3 dm. aż do 9 dm., wyraźnie króską podzielone na dm., oraz cyframi oznaczone.

Pokazując metr nauczyciel poucza o tém, do czego metr służy; następnie pokazuje dm. (mała miara) i listewkę na 2 dm. Gdy już wyjaśnił, że jedna z listewek jest 1 dm., a druga 2 dm., przystępuje do nauki mieszczenia. Przykładając 1 dm. do 2 dm., każe liczyć, ile razy w 2 dm. mieści się 1 dm.? Odp. Teraz pokazuje nauczyciel $\frac{1}{4}$ litra z blachy i poucza, co to jest i do czego służy? Nazwę da „jedna kwaterka“. Następnie

bierze pudełko zrobione z tektury, którego dno ma 1 dm². a wysokość $\frac{1}{4}$ dm., mierzy piaskiem i okazuje, że do tego pudełka wejdzie 1 kwaterka. Na ścianie tego pudełka napisana jest cyfra 1. Ponieważ w nim zmieści się 1 kwaterka, nazywać będą dzieci to naczynie *kwaterką*. Drugie takie pudełko, dwa razy wyższe, zawiera 2 kwaterki, a na ścianie jednej jest gruba krępka pozioma, w samym środku poprowadzona, a dolna część ściany oznaczona cyfrą 1, górna cyfrą 2. Że do tego pudełka wejdą 2 kwaterki, nauczyciel okaże, przesypując piasek z blaszanej kwaterki. Teraz przystępuje do rzeczy. Ile to kwatererek? (2). Ile to kwatererek? (1). Liczcie dzieci, ile razy w 2 kwaterkach mieści się „jedna kwaterka?” (Nauczyciel przykłada jedną kwaterkę do drugiej od dołu). W 2 kwaterkach ile razy mieści się 1 kwaterka? Ile kostek? (2); liczcie, ile razy z 2ch kostek mogą brać po 1 kostce? (2 razy). W 2 kostkach mieści się 1 kostka ile razy? *Mianowane liczby:* W 2ch centach mieści się 1 cent ile razy? Orzechy, metry etc.

Uważać! „W 2 mieści się 1 ile razy?” Powtórzenie jak wyżej.

Napisanie. Co napisać? W czym masz mieścić? Napiszcie 2; teraz znak na „mieści się“ (:). Co teraz? (1) A teraz napiszcie dwie krępki poziome =, potem, ile razy się mieści. Napisano $2:1=2$ nauczyciel objaśnienia, jak to czytać należy. (Dzieci często czytają: „w 2 mieści się 1 jest 2“).

Przykład. Ile jabłek dostaniesz za 2 centy, jeżeli 1 jabłko kosztuje 1 centa? Powtórz.

Nauczyciel wyjaśnia najpierw: Ile razy dasz 1 ct., tyle razy otrzymasz 1 jabłko. Z 2 centów można 2 razy brać po 1 cencie (dlaczego? dlatego, że w 2 centach

mieści się 1 cent 2 razy), przeto też otrzymam 2 razy po 1 jabłku, t. j. 2 jabłka.

Uwaga. Do dalszych liczb trzeba mieć pudełka na 3, 4, 5 do 9 i 10 kwaterek. Rozwiązanie zadań na mieszczzenie sprawia dzieciom trudność, niechaj tedy nauczyciel z początku nie odrzuca odpowiedzi na pytanie „dlaczego za 2 centy 2 jabłka?“ dlatego, że $2 \times 1 = 2$. Później, np. przy liczbie 6, dzieci już lepiej rzecz zrozumieją i powiedzą: „za 6 centów otrzymam tyle różków po 2 centy, ile razy w 6 mieści się 2.“

7. Dzielenie. $2:2=1$ | | | |---|---| | • | • | |---|---|

Ile tu jest kropek? Dwie. Na ile części podzielone? Czy równe? Dwie kropki podzielone na 2 równe części, ile w każdej części? Jedna z tych 2ch równych części zowie się także połową. Ile jest połowa 2 kropek? To samo z kostkami. Dwie kostki podzielone na 2 równe części jest ile? Połowa 2 kostek jest ile? Dwa centy, dwie bułki etc.

Potém nauczyciel mówi: Dwa jabłka podzielone na 2 równe części jest ile? Dwa jabłka podzielone *przez* dwa? dwa złote podzielone przez 2? dwie kwatunki podzielone przez 2? *W końcu:* Uważać! Dwa podzielone przez dwa jest ile? $2:2=1$. Powtórzyć etc.

Napisanie. Co i jak, wraz z objaśnieniem, jak pisze się „podzielone“. Z tego wypływa, że ten sam znak na mieszczzenie, co i na dzielenie.

Przykład. Jeżeli za 2 kwatunki wina zapłacono 2 dziesiątaki, ile kosztuje 1 kwatunka? (dziesiątak pokazać). Nauczyciel wyjaśnia najpierw. Co masz wyrachować? i jak? 1 kwatunka jest połową 2 kwatunek, więc też kosztować będzie połowę tego, co kosztowały

2 kwatunki. Rachujcie dzieci, ile jest połowa 2? i t. d. Dlaczego?

Innego rozkładu przy liczbie 2 nie ma. Nauczyciel powtarza rzecz i przechodzi do trójki.

Liczba 3. | | | |---|---| | ⋮ | 3 | |---|---|

1. **Pojęcie.** 2 kostki + 1 kostka = 3 kostki etc. i znak.

2. **Rozkład** jest dwojaki:

•	•	•
---	---	---

 i

⋮	•
---	---

z

•	•	•
---	---	---

 wyprowadzi się operacje rachunkowe:

$$1 + 1 + 1 = 3 \quad 3 : 1 = 3 \text{ (mieszczenie)} \quad (1 \text{ trzecia część}).$$

$$3 \times 1 = 3 \quad 3 : 3 = 1 \text{ (dzielenie)}$$

z

⋮	•
---	---

 wysnuje się: $2 + 1 = 3 \quad 3 - 1 = 2$

$$1 + 2 = 3 \quad 3 - 2 = 1$$

$$1 \times 2 + 1 = 3 \quad 3 : 2 = 1 \text{ (1)}$$

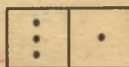
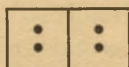
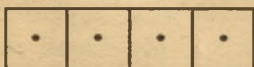
Ostatnie czyta się: w 3 mieści się 2 raz i zostaje 1.

W końcu powtórzenie na wzorach rozkładowych.

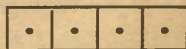
Liczba 4. | | | | |---|---|---| | ⋮ | ⋮ | 4 | |---|---|---|

1. Daje się pojęcie liczby; gdy do trzech krósek dodam jeszcze 1 króskę, będzie więcej krósek, a mia-nowiecie cztery króski. Tak samo 3 gałki + 1 gałka są 4 gałki etc. Pisanie cyfry 4.

2. **Rozkład** liczby cztery jest trojaki:

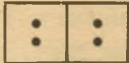


Z pierwszego rozkładu na jedyńki wyprowadzić należy:



$$1 + 1 + 1 + 1 = 4 \quad 4 - 1 = 3 \quad \text{i} \quad 4 : 4 = 1$$

$$4 \times 1 = 4 \quad 4 : 1 = 4 \quad \text{nauka „czwarta część“}$$

Z drugiego  rozkładu otrzyma się:

$$2 + 2 = 4 \quad 4 - 2 = 2$$

$$2 \times 2 = 4 \quad 4 : 2 = 2 \quad \text{w znaczeniu}$$

mieszczenia i dzielenia.

Szczegółowe przeprowadzenie mierzenia 2-ką.

a) **Dodawanie.** Na obrazie rozkładowym: Dwie kropki a dwie kropki są 4 kropki. Kostki, centy, kasztany. — Mianowane: metry, książki, litry. — Abstrakcja: $2 + 2 = 4$. Napisanie. Przykład.

b) **Mnożenie.** Liczcie, ile razy tu jest po 2 kropki? Więc 2 razy po dwie kropki, ile jest kropek? Biorę raz 2 kostki, drugi raz 2 kostki. Ile razy brałem po 2 kostki? Ile to jest? etc. Mianowana liczba, potem abstrakcja: $2 \times 2 = 4$. Napisanie i przykłady. Wniosek cały wygłosić: Np. 2 ołówki po 2 centy. Jeżeli 1 ołówek kosztuje 2 centy, to za 2 ołówki zapłaci się 2 razy po 2 centy $= 4$ centy. Dlatego, że $2 \times 2 = 4$.

c) **Odejmowanie.** Ile tu jest gałek? (4). Ile odsuwam? (2). Ile zostało? Więc 4 gałki mniej 2 gałki, ile jest gałek? To samo z innymi rzeczami, potem liczba mianowana, a na koniec $4 - 2 = 2$ i napisanie. Przykład: Antoś miał czworaka i kupił za 2 centy śliwek; ile mu pozostało pieniędzy? i t. p.

d) **Mieszczenie.** Używa się do poglądu 4 dm. i 2 dm., potem 4 kwart i 2 kwart z tektury. Następnie pytanie, ile razy można z 4 kropek, 4 kostek brać po 2, więc ile razy w 4 kropkach mieszczą się 2 kropki.

W końcu liczba mianowana i bezwzględna. $4:2=2$.
 Napisanie i przykład, Na kaftanik potrzeba 2 m. perkalu; ile kaftaników uszyć można z 4 metrów tego samego perkalu? (Gdy odetniesz 2 m., zrobisz 1 kaftanik. Ile razy z 4 m. odciąć można 2 m.? Dlaczego? Więc ile kaftaników?) Dwa litry masła starczą na 1 tydzień; na ile tygodni starczą 4 litry?

e) **Dzielenie.**

•	•
---	---

 Ile kropek razem? Na ile części podzielone kręską? Czy równe części? Ile wynosi jedna z tych dwóch części? Więc 4 kropki podzielone na 2 równe części, ile to kropek? Ile połowa 4 kropek? Potem 4 centy, 4 kasztany, a później liczba mianowana, wygłaszając: 4 litry podzielone przez 2, aby do pisania przysposobić. W końcu bezwzględnie $4:2=2$. Napisanie i przykład.

Za 2 centy Jaś otrzymał 4 orzechy; ile za 1 ct.? (1 cent jest połową 2 centów, to też za 1 centa otrzyma się połowę 4ch orzechów). Wniosek ma być taki: Jeżeli za dwa centy otrzyma się 4 orzechy, to za 1 centa dostaniemy połowę 4ch orzechów, t. j. 2 orzechy. Dlaczego?

Potem rozkład trzeci

•	•
---	---

 da następujące działania:

$3 + 1 = 4$	$1 \times 3 + 1 = 4$	$4:3=1 \quad (1)$
$1 + 3 = 4$	$4 - 1 = 3$	
	$4 - 3 = 1$	

Do przykładów wprowadzać należy miary, wagi i monety z tego zakresu, tudzież inne jednostki, np. miesiąc = 4 tygodnie, litr = 4 kwaterki.

Powtarzanie odbywa się przez odpytanie całej nauki na *obrazie rozkładowym*. Dzieci powinny z czasem nauczyć się tyle, żeby *same* za wskazówką nauczyciela z owych kropek prawdy arytmetyczne wygłaszać

mogły, tym sposobem nabędą biegłości w rachowaniu. Mając już zakres liczb rozszerzony do 4ki, może nauczyciel urządzać „prędkie rachowanie“, polegające na doraźnej odpowiedzi na zadane pytanie rachunkowe. Z początku łączy się ze sobą 2 liczby, a otrzymany wypadek dołącza do następnej nowej liczby.

N. p. z zakresu liczby 4:

$4 - 3 = ?$ (Odpow. 1), a 2 (Odpow. 3), mniej 1 (Odpow. 2), etc.

Potém 3 i więcej liczb.

$4 - 2 + 1 = ?$, Połowa $4 - 2 + 1 + 3 = ?$

Przy liczbie 10 nauczyciel poucza, że 1 zł. = 10 dziesiątaków, 1 dziesiątak = 10 centów, 1 l. = 10 dl., 1 dkg. = 10 g.

Liczby od 10 do 20.

Liczby od 10 do 20 przerabia się w ogóle tym samym trybem, co zakres liczb od 1 do 10, tylko pamiętać należy, że uzmysłowanie bywa coraz szczuplejsze. Obraz rozkładowy złożony z kropek i liczydło o odpowiedniej liczbie gałek wystarczą.

Najpierw daje się pojęcie liczby. Np. dla liczby 11. Ustawia się 10 gałek w jednym rzędzie i poucza, że 10 gałek = 1 dziesiątce. Na drugim drucie dodaje się 1 gałkę i mówi: 1 dziesiątka i 1 jednostka = 11. Tak samo kręśli się na tablicy 11 kropek, w pierwszym rzędzie 10 a w drugim 1 kropkę. Potém odpytanie, że 11 składa się z 1 dziesiątki i 1 jednostki. Nauka pisania nawiązuje się do znaney cyfry na 10. Gdzie pisze się dziesiątkę, a gdzie jednostkę?

Po daniu pojęcia liczby następuje rozkład i operacye rachunkowe.

U liczby 12 nawięzuje się rzecz do 11. Ustawia się 11 gałek na dwóch drutach, a potem dodaje 1 gałkę i uczy, że $11 \text{ gałek} + 1 \text{ gałka} = 12 \text{ gałek}$.

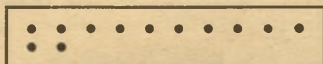
12 składa się z 1 dziesiątki i 2 jednostek.

1 dziesiątka i 2 jednostki $= 12$ jednostek. Pisanie liczby 12 i omawianie, dlaczego tak się pisze.

Rozkład liczby 12, przedstawiony na kropkach, prowadzi do operacyj rachunkowych, które *należy zwięźle przerabiać*, z ograniczeniem do najniezbędniejszych elementów, inaczej bowiem w jednym roku nie możnaby skończyć całego pensum.

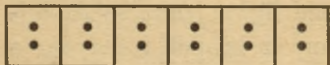
Pierwsze przedstawienie liczby jest zawsze wedle systemu dziesiątkowego, więc n. p.:

$$12 =$$



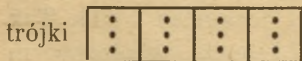
Z tego przez liczenie kropek wyprowadza się najpierw prawdę, że $12 \times 1 = 12$ i że w 12 mieści się 1 dwanaście razy.

Następujące rozkłady są na dwójki:



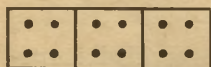
Na tym wzorze nauczyciel uczy dodawania 2ki, potem $6 \times 2 = 12$, w 12 mieści się 2 sześć razy i $\frac{1}{6}$ część 12tu jest dwa.

Prawdy wysnute każe się napisać i *daje się odpowiedni przykład*. Następnie kręśli się rozkład na

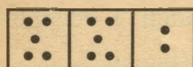


trójki i uczy dodawania: 3 kropki a 3 kropki, etc., — potem: $4 \times 3 = 12$, 3 w 12 mieści się 4 razy i $\frac{1}{4}$ część 12 jest 3, i odpowiednie przykłady.

Dalsze rozkłady są:

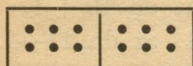


$4 + 4 + 4 = ?$ $3 \times 4 = ?$ 4 w 12
i $\frac{1}{3}$ część 12 $= ?$
 $12 - 4 = 8$, $8 - 4 = 4$.



$$5 + 5 + 2 = 12 \quad 5 \text{ w } 12 = ?$$

$$2 \times 5 + 2 = 12$$



$$6 + 6 = 12 \quad 12 - 6 = 6 \quad 12 : 2 = 6$$

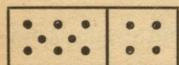
$$2 \times 6 = 12 \quad 12 : 6 = 2 \text{ razy}$$



$$7 + 5 = 12 \quad 12 - 5 = ? \quad 12 : 7 = ?$$

$$5 + 7 = 12 \quad 12 - 7 = ? \quad (\text{mieszczanie})$$

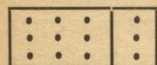
$$1 \times 7 + 5 = 12$$



$$8 + 4 = 12 \quad 12 - 4 = ? \quad 12 : 8 = ?$$

$$3 + 8 = 12 \quad 12 - 8 = ? \quad (\text{mieszczanie})$$

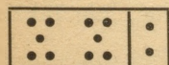
$$1 \times 8 + 4 = 12$$



$$9 + 3 = 12 \quad 12 - 3 = ? \quad 12 : 9 = ?$$

$$3 + 9 = 12 \quad 12 - 9 = ?$$

$$1 \times 9 + 3 = 12$$



$$10 + 2 = 12 \quad 12 - 2 = ? \quad 12 : 10 = ?$$

$$2 + 10 = 12 \quad 12 - 10 = ?$$

$$1 \times 10 + 2 = 12$$

Wzory $7 + 5$, $8 + 4$, $9 + 3$ oraz $12 - 6$, $12 - 5$, $12 - 4$ etc., *dobrze jest uzmystawiać na liczydło*, np. $7 + 5$.

Do 7 gałek najpierw dodać 3 gałki, będzie 10 gałek, a do 10 potem jeszcze 2, jest razem 12 gałek.

Odejmowanie $12 - 5$ na liczydło. Najpierw od 12 gałek odjąć 2, a potem od pozostałych 10ciu odjąć 3 gałki, będzie 7 gałek. Przyczyna leży w systemie dziesiętkowym liczb.

W zakresie liczb od 1 do 20 główny nacisk kładzie się na *dodawanie* i *odejmowanie*, a zwłaszcza na przejście z jednej dziesiątki do drugiej, gdyż pewność i biegłość w tych działaniach stanowi podwalinę do całego późniejszego dodawania i odejmowania. Zaleca się w tym celu plan taki:

Przy liczbie 11 ćwiczyć w dodawaniu i odejmowaniu *1ki* szeregami, a więc:

$1 + 1, 2 + 1, 3 + 1, 4 + 1$ etc., aż do $10 + 1$.

$2 - 1, 3 - 1, 4 - 1, 5 - 1, 6 - 1$, aż do $11 - 1$.

Przy liczbie 12 ćwiczy się *2kę*, przy liczbie 13 *3kę* i t. d., tak n. p. przy liczbie 18 będzie *8ka*:

$1 + 8, 2 + 8, 3 + 8, 4 + 8, 5 + 8$ aż do $10 + 8$.

$9 - 8, 10 - 8, 11 - 8, 12 - 8$, aż do $18 - 8$.

Na ćwiczenia pisemne daje stę zagadnienia kombinowane, n. p.: $5 \times 3 - 7 = ?$

Powtórzenie liczb z zakresu 10 — 20 odbywa się szybko na obrazach rozkładowych, złożonych z kropek. Sposób ten jest bardzo skuteczny, dlatego też przez wielu pedagogów zalecanym bywa. Uczniowie te wzory mają nie tylko drogą uzmysłownienia poznać, ale także w pamięci sobie przyswoić.

Doprowadziwszy naukę do liczby 20tu, następuje ogólne powtórzenie, przy którym prócz na dodawanie i odejmowanie, u niektórych liczb należy zwrócić uwagę na części wielokrotne, n. p.:

ile jest $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ i $\frac{1}{6}$ część tuzina, czyli 12 sztuk?

„ „ $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{5}$ część 15tu?

„ „ $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ i $\frac{1}{8}$ część 16tu i t. d.

W końcu zwraca się uwagę na rachunek wnioskowania w tym zakresie. Ćwiczyć należy w wnioskowaniu z jedności na wielość, z wielości na jedność i z wielości na inną wielość. Do pierwszych dwóch potrzeba mnożenia lub dzielenia, a trzecie jest kombinacją obu działań. Podczas ćwiczeń tych należy uwzględniać właściwości systemu metrycznego miar, wag i monet.

Jakie zagadnienia i jak je przerabiać, wskażą następujące przykłady:

a) Wniosek z jedności na wielość.

1. 1 m. sukna kosztuje 3 zł.; ile za 4 m.? Jeżeli 1 m. sukna kosztuje 3 zł., to za 4 m. zapłacić należy 4 razy po 3 zł. Rachujcie! Ile? Powtórzenie pytania i odpowiedzi.
2. 1 kg. cukru kosztuje 3 dziesiątaki i 5 ct.; ile za 3 kg.? Jeżeli 1 kg. kosztuje 3 dz. i 5 ct., to za 3 kg. zapłaci się trzy razy po 3 dz. i trzy razy po 5 ct. Rachujcie! Ile? 9 dz. i 15 ct. 15 ct. = 1 dz. i 5 ct., razem tedy 10 dz. i 5 ct., czyli 1 zł. i 5 ct.
3. Za 1 zł. otrzyma się 2 l. i 3 dl. wina; ile za 4 zł.? (Nauczyciel winien pokazać litr i decylitr).

Stósunki odwrotne:

4. Jeżeli 1 robotnik zorze pole w 6 dniach; w ilu dniach 3 robotników zorze to samo pole? (Jeżeli 1 robotnik potrzebuje 6 dni do zorania, to 3 robotników pracować będzie 3 razy mniej dni).
 5. Jeżeli sukno jest 1 łokieć szerokie, to na ubranie potrzeba 12 łokci; ile potrzeba łokci sukna na to samo ubranie, jeżeli sukno ma 2 łok. szerokości?
-
6. Jeżeli 1 dm. kosztuje 1 ct., ile 1 m.? (10 ct., czyli 1 dziesiąta).
 7. Jeżeli 1 dm. kosztuje 6 ct.; ile 1 m.? Z przykładu 6go wniosek: „*Ile centów dm., tyle dziesiątaków metr.*“
 8. Jeżeli 1 dl. spirytusu kosztuje 7 ct.; ile 1 l.?
 9. Jeżeli 1 dm. sukna kosztuje 3 dziesiątaki; ile 1 m.?
 10. Jeżeli 1 gram kosztuje 4 dziesiątaki i 3 ct.; ile 1 dekagram?
 11. Za 1 centa dostanie 3 dm.; ile za 1 dziesiątaka?
 12. Za 1 dziesiątaka dostanie 5 dm.; ile za 1 zł.?

b) Wniosek z wielości na jedność.

1. Jeżeli 3 l. kosztowały 15 ct.; ile 1 l.?

Uzmysłować można na tablicy, rysując 3 l. i pod tém jeden litr, a obok tego 15 ct. piątkami i dołem 5 centów.

Wniosek: Jeżeli 3 l. kosztują 15 ct., to 1 l. kosztować będzie trzecią część 15 ct. Rachujcie! Ile? Dlaczego?

2. Jeżeli 3 m. kosztowały 9 dziesiątaków i 6 ct.; ile 1 m.? (Jeden metr kosztować będzie trzecią część 9 dzies. i trzecią część 6ciu cent.). Rachujcie, etc.
3. Jeżeli za 5 centów otrzymano 20 dkg. i 5 g.; ile za 1 centa?
4. Jeżeli za 4 zł. dostanie 12 m. 8 dm.; ile za 1 zł.?
5. Jeżeli 4 robotników ukończy pracę w 3 dniach; jak długo pracować będzie 1 robotnik? (*Stosunek odwrotny*).
6. Jeżeli 1 m. kosztuje 1 zł.; ile 1 dm.?
7. Jeżeli 1 m. kosztuje 3 zł., ile 1 dm.?
(Nauka: ile złr. metr, tyle dziesiątaków dm.)
8. Jeżeli 1 dm. kosztuje 7 dziesiątaków, ile 1 cm.?
9. Jeżeli 1 litr kosztuje 6 dzies.; ile 1 decylitr?
10. Jeżeli 1 dkg. kosztuje 1 dzies.; ile 1 g.? i t. d.
11. Jeżeli 1 m. kosztuje 3 zł. 4 dzies.; ile 1 dm.?
12. Jeżeli za 1 zł. otrzyma się 3 m. 5 dm., ile za 1 dziesiątaka?

c) Wnioski z wielości na inną wielość.

1. Za 4 litry zapłacono 8 dziesiątaków; ile zapłaci się za 5 litrów? Zadanie należy napisać na tablicy w formie: 4 l — 8 dziesiątaków

5 l — ?

Po powtórzeniu zagadnienia, nauczyciel zadaje jako pierwsze pytanie:

1. Co mamy wyrachować? Odpow.
2. Aby wyrachować, ile kosztuje 5 l., co musisz wiedzieć? (Ile 1 l. kosztuje?)
3. Czy tu podane jest, ile kosztuje 1 l.? (Nie).
4. Ilu litrów cena tu jest podana?
5. Czy z ceny 4 litrów można dowiedzieć się, ile kosztuje 1 l.? Jak? Jeżeli 4 l. kosztują 8 dzies., to 1 l. kosztuje czwartą część 8 dzies. Rachujcie! Ile?
6. Co wyrachowano? (Że 1 l. kosztuje 2 dzies.)
7. Co teraz mamy obliczyć? (Za 5 l.) Jak? Jeżeli 1 l. kosztuje 2 dz., to za 5 l. zapłaci się 5 razy po 2 dzies. Rachujcie! Ile? etc.
8. Powtórz całe.

Tego trybu pytań trzymać się należy ściśle i dążyć do tego, aby w końcu dzieci *same wnioskowały* bez ciągłego pomagania ze strony nauczyciela. *Ustawiczne naprowadzanie uczniów nie rozwija i przeszkadza lepszym postępom w nauce.*

2. Za 3 m. zapłacono 9 złr. i 6 dzies., ile za 4 m.?
(1 m. kosztuje $\frac{1}{3}$ część 9 złr. i $\frac{1}{3}$ część 6 dzies.).
Rachujcie! Ile? Co wyrachowano? Co teraz? Jak?
(Jeżeli 1 m. kosztuje 3 złr. i 2 dzies., to za 4 m. zapłaci się 4 razy po 3 złr. i 4 razy po 2 dzies.
Rachujcie! Ile? Dla czego? Powtórzenie.

Co się tyczy pisemnego rachunku, to w tym zakresie przy wnioskowaniu tylko wypadki notuje się na tablicy.

3. Jeżeli dzieci już biegle rachują przykłady wzoru 1go i 2go, można się odważyć przerobić następujące zadanie:

2 m. kosztują 6 złr. 4 dzies.

4 m. 3 dm. ?

Wypadki należy na tablicy notować.

Przy obliczeniu ceny 4 m. napisać cenę obok. Co się tyczy 3 dm., to pytamy się tak: aby wyrachować, ile kosztują 3 dm., co musisz wiedzieć? Ile 1 dm. Z czego dowiesz się, ile kosztuje 1 dm.? Naprowadza się, że z ceny 1 m. tj. z 3 złr. 2 dzies.

W końcu napisane jest:

Za 4 m. . . . 12 złr. 8 dzies.

za 3 dm. . . 9 dzies. 6 ct.

Razem za 4 m. 3 dm. 13 złr. 7 dzies. 6 ct.

Na takim przykładzie można poprzestać.





CZEŚĆ II.

Zakres liczb od **1** do **100**.

W zakresie tym przerobić się ma: Cztery działania rachunkowe z pamięci i cyframi, zaznajomienie ze systemem dziesiętnym miar, wag i monet opierających się w podziale swym na tymże zakresie liczb i pojęcie ułamków dziesiętnych tudzież ułamków zwyczajnych z małym mianownikiem.

Pojęcie setki.

1. Na liczydłe ustawia się 10 gałek. Jeden rząd taki, to jedna dziesiątka, czyli 10 jednostek. Potém przysuwa się na drugim drucie drugi rząd gałek i uczy: dwie dziesiątki = 20 jedn. Następnie trzeci rząd. Ile jest razem dziesiątek? Trzy dziesiątki to 30 jednostek. Powtórz itd. aż do 10 dziesiątek czyli stu jednostek.
2. Nauczyciel przesuwając gałki, a uczeń liczy 1 dzies., 2 dzies., 3 dzies., itd. 10 dzies.
3. Potém uczeń wygłasza 10 jedn., 20 jedn., 30 jedn. itd. do 100 jednostek.
4. Wywołany uczeń na liczydłe ustawia 40, inny 70, inny 50 itd. Odsuń 6 dziesiątek gałek, ile to jednostek?

5. Licz z pamięci dziesiątkami, wygłaszając ile jednostek np. 10, 20, 30, 40 itp. do 100. Licz od 100 dziesiątkami w odwrotnym porządku do 10.
6. Nauka, jak się pisze. W pierwszym roku nauczono pisanie 10 i 20, to też teraz łatwo nauczą się dzieci napisania 30, 40 itd. aż do ostatniej liczby, którą nauczyciel bliżej wyjaśnia.

Dobrze jest liczenie to dziesiątkami zastosować do systemu miar i monet. Np.:

1 m. ile ma dm? 2 m. ile dm.? 3 m. ile dm. itd. do 10 m.

1 dziesiątak ile ma centów? 2 dzies. ile ct.? itd.

1 złr. ile ma dziesiątaków? 2 złr. ile dziesiątaków? 3 złr. ile dziesiątaków? itd.

1 dkg. ile ma gramów? 2 dkg., 3 dkg. itd.

1 kg. = 100 dkg., 1 hl. = 100 l.

Cztery działania rachunkowe w zakresie liczb od 1 do 100.

W pierwszym roku nauki przy każdej liczbie przeobrażało się w zakresie téj liczby wszystkie cztery działania.

Zakres liczb od 1 do 100 dzieli się na grupy: najpierw od 1 do 20, potem od 1 do 30, następnie od 1 do 40 itd. przybiera się po jednej dziesiątce więcej. W każdej grupie uczy się kolejno 4 działań; najpierw dodawania, potem odejmowania, mnożenia i dzielenia. Dla każdego zakresu przeznaczają się na te działania pewną specjalną liczbą jako operacyjną i tak dla

zakresu liczb od 1 do 20, który w drugim roku tylko powtarza się z roku poprzedniego, przeznaczoną jest *2ka* jako specjalna liczba operacyjna. Znaczy to, że w tym zakresie mamy *prócz innych ćwiczeń* głównie nacisk położyć na dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie *2ki*, a nawet z nauki ułamków zwyczajnych wziąć się ma tylko połówki. Jakież tedy będzie plan specjalny dla liczb od 1 do 50? Oto dodawanie, odejmowanie itd. *5ki*, a dla liczb od 1 do 80 przypada jako operacyjna liczba specjalna *8ka*. Plan taki nauczyciel łatwo spamięta i pewien będzie, że idąc tym torem materiały wyczerpie.

Co się tyczy ułamków dziesiętnych, to ograniczyć się należy tylko na jedném miejscu dziesiętném i naukę wtrącić do zwykłego trybu jako nowy sposób pisania liczb wielorakich systemu metrycznego dopiero w tym czasie, gdy dzieci ukończyły liczby do 50 lub do 60. Pojęcie drugiego miejsca dziesiętnego dać można dopiero po ukończeniu 100ki, przeto lepiej to przerabiać wtedy, gdy dzieci rachują w zakresie liczb od 1 do 1000. Jeżeli nauczyciel ułamki dziesiętne wprowadzi dopiero po ukończeniu całej setki, może wziąć już i setne części; ale na wyćwiczenie będzie mało czasu, dla tego zaleca się wcześniej dzieci zapoznać z tém nowém pisanem liczb wielorakich i rachowaniem ułamkami dziesiętnymi o jedném miejscu dziesiętném.

Jako wzór metody téj niechaj posłuży instrukcyja do nauki liczb od 1 do 40.

Zakres liczb od 1 do 40.

I. Liczenie i pisanie.

Nauczyciel ustawia 30 gałek i pyta, ile tu gałek, ile dzies., jed.? Do tych 30 gałek dodaje na 4tym drucie 1 gałkę i mówi: $30 + 1 = 31$ gałek, następnie przysuwając po 1 gałce każe liczyć krótko: 32, 33 itd. 39 i 40. Uczeń wywołany sam liczy przesuując gałki. Podczas tego nauczyciel zadaje czasem pytanie n. p. przy 34, ile dziesiątek i jednostek? W końcu dzieci piszą te liczby cyframi.

II. Dodawanie.

1. Specyalne ćwiczenia dodawania szeregiem 4ki. Rozpocząć można od 1, od 2, od 3 i od 4ech.
2. Dalsze ćwiczenia odnoszą się do takich liczb, których suma wynosi liczbę od 30 do 40. Suma taka powstać może z dodania jednostek lub pełnych dziesiątek lub też liczby dwucyfrowej do innej daniej liczby. Z tego powodu należy zachować ten porządek w każdym zakresie:

a) *Dodawanie jednostek.* Odróżnia się dwa przypadki:

$$1) \quad 32 + 5 = ? \quad 33 + 6 = ? \quad 31 + 8 = ? \quad \text{i}$$

$$2) \quad 27 + 6 = ? \quad 29 + 8 = ? \quad 25 + 9 = ?$$

Zagadnienia wygłasza się w liczbach mianowanych, a drugi przypadek np. $27 + 6$ na jednym przykładzie wyjaśnia się na liczydło, że trzeba rachować $27 + 3 = 30$, a $30 + 3 = 33$, więc $27 + 6 = 33$. Potem bez liczydła.

b) *Dodawanie pełnych dziesiątek* np.

$$17 + 10, \quad 18 + 20, \quad 10 + 30.$$

c) *Dodawanie dwucyfrowej liczby złożonej z dziesiątek i jednostek.* Tu znowu zachodzą 2 przypadki:

1) $14 + 23$, $24 + 15$, $13 + 27$ i

2) $18 + 17$, $12 + 19$, $16 + 16$.

Uzmysławia się to na liczydło. Mając np. dodać $14 + 23$, ustawia się na 3cim i 4tym drucie 14 gałek a niżej nieco 23 gałek. Do 14 gałek dodają najpierw 20 i te ustawiam nad 14oma, otrzymam 34, a do 34 potem pozostałe 3, będzie 37. Tak samo przedstawia się drugi wzór $18 + 17$. Nauka z tego taka: „*do danej liczby dodaje się najpierw dziesiątki a potem jednostki*“.

3. Przykłady na dodawanie przerabia się ustnie na liczbach mianowanych np. 12 ct. i 19 ct. ile? tudzież pisemnie na tablicy. Przy dodawaniu pisemném podpisuje się liczby pod sobą i zaczyna dodawanie od jednostek, przy czém poucza się, że gdy więcej jednostek niż 9 np. 10, 11, 12, zamienić je należy na dziesiątki itd. W końcu pytanie, czy pisemny rachunek zgadza się z ustnym i jaka różnica rachunku; od czego zaczyna się dodawanie przy ustném a od czego przy pisemném?

III. Odejmowanie.

1. Specyalne ćwiczenie odejmowania 4ki rozpoczynając od 40, 39, 38 i 37.
 2. Taki sam plan jak przy dodawaniu. Odjemna jest liczbą między 30—40.
- a) *Odjemnik liczbą jednocyfrową.* Odróżnia się dwa przypadki:

1) $38 - 5$, $37 - 6$, $39 - 7$

2) $32 - 6$, $35 - 8$, $36 - 9$

Uzmysłowienie na liczydło na jednym przykładzie.

b) *Odjemnik jest pełną dziesiątką* np.:

$$\begin{array}{r} 40 - 30, \quad 40 - 20, \quad 40 - 10 \\ 39 - 20, \quad 38 - 10 \end{array}$$

c) *Odjemnik jest liczbą dwucyfrową.* Odróżnia się dwa przypadki:

1) $39 - 12, \quad 38 - 16, \quad 35 - 14, \quad 38 - 26.$

2) $35 - 19, \quad 32 - 27, \quad 31 - 16.$

Uzmysłowienie na liczydło np. $39 - 12$.

Ustawia się 39 gałek; od tych mam odjąć 12 gałek. Najpierw biorę 10 gałek z pierwszego drutu, zostaje 29 gałek, w końcu od 29 odejmuję 2, odsuwając je od 9ciu, pozostaje 27. Nauka z tego: *Najpierw odejmuje się od całej odjemnej dziesiątki a potem jednostki.*

3. Przykłady różne ustnie i pisemnie. Przy pisemnym rachunku uczy się odejmowania najpierw na przykładzie:

$$\begin{array}{r} 39 \\ -12 \\ \hline 27 \end{array} \quad \text{a potem} \quad \begin{array}{r} 32 \\ -15 \\ \hline 17 \end{array}$$

omawiając to, że 5 jednostek od 2 jednostek odjąć nie można, i że 1 dzies. zamienia się na 10 jed. itp.

IV. Mnożenie.

W zakresie liczb od 1 do 20 wszystkie kombinacye przerobiono, a między nimi też mnożenie 2ki i przez 2. W drugim roku nauki nauczyciel zakres ten, jak wyżej powiedziano, ma powtórzyć, a mnożenie 2ki i 2ką i inne ćwiczenia ująć w całość. Dla liczb od 1 do 40 przeznacza się jako specjalne ćwiczenie mnożenie 4ki i mnożenie przez 4. Do uzmysłowienia nauki

używa się liczydła i kropek na tablicy nakręslonych. Pisanie rezultatu łączy się zaraz z poglądem.

Postępowanie jest następujące:

1. Na pierwszym drucie liczydła odsuwa się 4 gałki i pyta, ile odsunięto gałek, ile razy po 4 gałki; raz cztery gałki, ile jest gałek? Potem na tablicy kręśli się cztery kropki i obok tego pisze $1 \times 4 = 4$. Następnie wskazuje się na te same 4 kropki i pyta, ile tu razy jest po 1 kropce? Po otrzymanej odpowiedzi, że $4 \times$ po 1 kropce są 4 kropki, pisze się obok poprzedzającego wypadku $4 \times 1 = 4$. Tym sposobem na tablicy napisze się dwa szeregi:

.....	$1 \times 4 = 4$	$4 \times 1 = 4$
.....	$2 \times 4 = 8$	$4 \times 2 = 8$
.....	$3 \times 4 = 12$	$4 \times 3 = 12$
.....	$4 \times 4 = 16$	$4 \times 4 = 16$
.....	$5 \times 4 = 20$	$4 \times 5 = 20$
.....	$6 \times 4 = 24$	$4 \times 6 = 24$
.....	$7 \times 4 = 28$	$4 \times 7 = 28$
.....	$8 \times 4 = 32$	$4 \times 8 = 32$
.....	$9 \times 4 = 36$	$4 \times 9 = 36$
.....	$10 \times 4 = 40$	$4 \times 10 = 40$

Dzieci przekonują się naocznie, że

$$5 \times 4 = 4 \times 5 \text{ i t. d.}$$

2. Przy układaniu téj tabliczki dzieci kolejno 4kę do poprzedniego iloczynu dodawały. Teraz chodzi o wyuczenie się tego na pamięć. Nauczyciel odpytuje o pierwszy szereg z góry na dół i z dołu do góry, potem ścięra gąbką wypadki i każe je uczniowi wywołanemu napisać na tablicy, reszta dzieci pisze na tabliczkach. W końcu po zmaza-

niu powtórném, uczeń pisze iloczyny mimo porządku za wskazówką nauczyciela.

3. Wszystko z tablicy zmasać i odpytać z pamięci w porządku. Kilku uczniów powtarza.

Następnie na wyrywki. Aby zaoszczędzić sobie mozołu pytania, może nauczyciel napisać na tablicy kilka liczb mimo porządku i wskazując na nie linijką domagać się doraźnej odpowiedzi. Takim sposobem nauczy się dziecko biegle tabliczki mnożenia 4ek.

4. Ponieważ iloczyny drugiego szeregu są te same, więc łatwo dzieci drugi szereg wygłoszą z pamięci i napiszą na tabliczkach.

5. Przykłady praktyczne:

1 czworak ma 4 centy; ile jest centów 3, 7, 5, 8, itd. czworaków? Uczniowie odpowiadają ile i dla czego?

1 zeszyt kosztuje 4 centy; ile centów za 4, 6, 9, 10 zeszytów?

Ile za 4 litry po 3 centy, 5 ct., 8 ct., 6 ct., 9 ct.?
i dla czego?

Za 1 centa 4 orzechy; ile za 5 centów, 8 ct., 6 ct., 9 ct., 10 ct.?

Na ćwiczenie pisemne daje się zagadnienia kombinowane np. $6 \times 4 + 12 = ?$ $4 \times 9 - 15 = ?$

6. Mnożenie liczb 2cyfrowych przez jednocyfrowe.
Np. 1 m. kosztuje 13 ct.; ile za trzy metry?

Ustnie. 3 razy po 10 ct. = 30 ct., 3 razy po 3 ct. = 9 ct., razem 39 ct.

Pisemnie. Uczyc należy, że mnożenie rozpoczyna się od jednostek.

$$\begin{array}{r} 13 \text{ ct.} \times 3 \\ \hline 39 \text{ ct.} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 18 \text{ m.} \times 2 \\ \hline 36 \text{ m.} \end{array}$$

V. Mieszczenie.

1. Nauka mieszczenia *4ki* opiera się na znajomości tabliczki mnożenia czwórek, a mianowicie na pierwszym szeregu. Poglądu nie potrzeba do tego działania.

Nauczyciel zadaje pytania następujące:

20, ile to jest razy po 4? Odpowiedź: 20 jest 5 razy po 4. Więc w 20 mieści się 4 ile razy? Dla czego? Dla tego, że 5×4 jest 20. Wypadek ten pisze się na tablicy: $20 : 4 = 5$.

Następują inne pytania mimo porządku. Następnie nauczyciel odpytuje ustnie o całą tabliczkę w porządku i mimo porządku i każe napisać na tabliczkach.

2. *Zagadnienia praktyczne.*

1 zeszyt kosztuje 4 centy; ile zeszytów kupić można za 24 cent.? Odpow. Jeżeli 1 zeszyt kosztuje 4 centy, to za 24 ct. otrzyma się tyle zeszytów, ile razy 4 centy mieszczą się w 24 centach. Rachujcie! Ile! Dla czego?

Potém krótko bez wniosków od razu odpowiedź.

1 litr kosztuje 4 centy; ile litrów za 12 ct., za 24 ct., za 32 ct., za 28 ct. itd.

3. *Mieszczenie z resztą.*

Prócz w liczbach stanowiących wielokrotność czwórki, mieszczenie w innych liczbach od 1 do 40 przerobić należy. Uczeń ma powiedzieć na pytanie, ile razy mieści się 4 w 33, w której mniejszej liczbie od 33 mieści się 4 bez reszty. Reszty mogą być 1, 2, 3; do tego należy odpowiednio

układać zagadnienia. Po odpytaniu na wyrywki następują praktyczne przykłady.

VI. Dzielenie.

1. Operacyjną liczbą dzielenia ma być głównie 4ka. Nauka opiera się na znajomości drugiej tabliczki mnożenia tj. mnożenia liczb od 1 do 10 przez 4.

Nauczyciel zadaje pytania:

24 jest 4 razy po ile? Odp.: $24 = 4 \times$ przez 6.

Więc $\frac{1}{4}$ część 24 ile to jest? Odpowiedź: $\frac{1}{4}$ cz. 24 jest 6. Dla czego? Dla tego że 4 razy 6 jest 24.

Tak samo $32 = 4$ razy po ile? i inne iloczyny z tabliczki mnożenia czwórek. Wypadki pisze się na tablicy. Następuje odpytanie w porządku i na wyrywki.

Potem pisanie na tabliczkach. Nauczyciel na tablicy pisze kolejno $4:4 = 8:4 = 12:4 =$ i t. d. jedno pod drugim, a uczeń wywołany pisze wypadek.

Przy pisaniu czyta się: $12:4 =$ „12 podzielone przez 4“. Następują potem ćwiczenia w napisaniu wypadku z iloczynów nie w porządku na tablicy naznaczonych n. p. 16, 24, 12, 28, 36, 8, 20, 32, 40.

2. Zagadnienia praktyczne bez podania wniosku i z dodaniem toku całego rozumowania.

Np. Jeżeli robotnik w 4 tygodniach zarobił 36 złr., ile zarobił w 1 tygodniu? Cały wniosek: Jeżeli robotnik w 4 tygodniach zarobił 36 złr., to w 1 tygodniu zarobił czwartą część 36 złr.

Rachujcie wszyscy, ile to jest $\frac{1}{4}$ część 36 złr.? Ile? Ile? Dla czego? Pytanie i odpowiedź.

Krótsze przeprowadzenie przykładów innych jest takie: Za 4 zeszyty zapłacono 20 ct.; ile za 1 zeszyt? Odpowiedź od razu 5 ct. A gdyby 4 zeszyty kosztowały 28 ct.? po czemu 1 zeszyt? itd.

3. *Dzielenie z resztą.* Wielokrotności 4ki powinny dzieci dobrze znać, dla tego można domagać się, aby dzieci przy każdej liczbie od 1 do 40 nie podzielnej przez 4 bez reszty, wymieniły najbliższą mniejszą, która da się podzielić przez 4 bez reszty.

Pytania zatem, ile jest $\frac{1}{4}$ część 13, 21, 37, 34, 26, 38, 35, 27, 39 nie trudno będzie rozwiązać ustnie i pisemnie. Przy mieszczeniu $34:4$ mówiło się 4 mieści się w 34 ośm razy i zostaje się 2. Przy dzieleniu reszty pozostałe należy podzielić dokładnie, zatem należy uczyć ułamków. W zakresie liczb od 1 do 40, dzielnikiem jest 4ka a reszty 1, 2, 3 prowadzą do ułamków $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, i $\frac{3}{4}$. W planie dla drugiego roku zaznaczyliśmy, że w zakresie liczb od 1 do 20, gdzie dzielnik operacyjny był 2, uczyć będziemy połówek; w zakresie liczb od 1 do 30 przypadają trzecie części całości, więc w zakresie liczb od 1 do 40 przerabia się specjalnie czwarte części.

VII. Ułamki zwyczajne. (Czwarte części).

Nauka rozpoczyna się od przykładu dzielenia 5 jabłek na 4 równe części. Dla 4 chłopców dała mama 5 jabłek; ile każdy otrzyma? Najpierw każdy po 1 jabłku i zostanie 1 jabłko. To jedno jabłko dzieli się

na 4 równe części i poucza, że zowie się $\frac{1}{4}$ częścią całego jabłka, więc jeden chłopiec otrzymał $1\frac{1}{4}$ jabłek. Nauczyciel uczy pisania i mówi jedna czwarta pisze się tak: $\frac{1}{4}$

Następnie kręśli na tablicy linię, dzieli na 4 równe części i poucza następujących prawd:

1. Całość ma $\frac{4}{4}$.
2. Ile czwartych części w 2, 3, 6 i 8 całościach?

Może rysować dla 2 całości 

3. Ile czwartych $1\frac{1}{4}$, $2\frac{1}{4}$, $2\frac{3}{4}$, $3\frac{1}{4}$ jabłka?

Uzmysławia to np.

$$1\frac{1}{4} = \text{circle with 3 quadrants shaded} \quad 2\frac{3}{4} = \text{two circles with 3 quadrants shaded each} + \text{one quadrant shaded}$$

Dzieci mówią: 1 całość ma $\frac{4}{4}$, dwie całości $\frac{8}{4}$

a $\frac{3}{4}$ jest $\frac{3}{4}$.

4. Ile całości w $\frac{8}{4}$, $\frac{12}{4}$, $\frac{16}{4}$ i t. d. złotego?

5. *Dodawanie czwartych części.*

Uzmysławiając wskazanym sposobem przerabia nauczyciel: Ile jest $\frac{1}{4} + \frac{2}{4}$, $\frac{3}{4} + \frac{2}{4}$, $1\frac{1}{4} + 2\frac{3}{4}$, $8\frac{3}{4} + 10\frac{3}{4}$. Dodawanie odbywa się w liczbach mianowanych.

Odejmowanie tak samo uzmysławia się.

Np. $1 - \frac{1}{4}$, $2 - \frac{2}{4}$, $4 - \frac{1}{4}$, $4 - \frac{3}{4}$, $7\frac{1}{4} - 3$, $12\frac{3}{4} - 5\frac{1}{4}$ i $5\frac{1}{4} - 2\frac{3}{4}$.

Mnożenie.  $= \frac{1}{4}$. Ile jest 2 razy po $\frac{1}{4}$?

Ile jest $3 \times \frac{1}{4}$, $4 \times \frac{1}{4}$, $3 \times \frac{2}{4}$, $5 \times \frac{2}{4}$, ile jest $2 \times \frac{3}{4}$, $5 \times \frac{3}{4}$. Nauczyciel cyfr tych na tablicy nie pisze, lecz ustnie przerabia, a na tablicy tylko kręśli figurę poglądową, np. przy $5 \times \frac{3}{4}$ rysuje albo linią, albo koło, albo czworobok na 4 części podzielone, z których 3 części osobno są oddzielone. W końcu można

i mieszaną liczbą mnożyć np. $2 \times 3\frac{1}{4}$, $3 \times 3\frac{3}{4}$, ale zawsze w liczbach mianowanych.

Mieszczenie. Na jabłku podzielonym na 4 części okazuje się, że $\frac{1}{4}$ w $\frac{3}{4}$ mieści się 3 razy. I tak inne przykłady $\frac{2}{4}$ łokcia w $\frac{10}{4}$ ł.? $\frac{3}{4}$ litra w $\frac{15}{4}$ litra, czyli 3 kwatereki w 15 kwaterkach. Następnie $\frac{1}{4}$ jabłka w $1\frac{3}{4}$ jabłka? $\frac{3}{4}$ m. w $4\frac{2}{4}$ m.?

Dzielenie. Tylko dzielenie licznika. Na jabłku pokazuje się ile jest połowa $\frac{2}{4}$ jabłka. Ile jest połowa $\frac{6}{4}$ łokcia, $\frac{8}{4}$ metra?

Ile jest trzecia część $\frac{9}{4}$ litra (kwaterek), $\frac{15}{4}$, $5\frac{1}{4}$ i $6\frac{3}{4}$?

Uważać należy, że to jest nauka ułamków, to jest nauka o częściach *całości*, która nie tak jak metr lub złr. dzieli się na części mające osobne nazwy. Oprócz tego należy wiadomości z dzielenia zwyczajnego tu powtarzać i zagadnienia przerabiać:

1. Ile jest miesięcy $\frac{1}{2}$ roku, $\frac{1}{3}$ roku, $\frac{2}{3}$ roku, $\frac{1}{4}$ roku i $\frac{3}{4}$ roku?
2. Ile godzin $\frac{1}{2}$ dnia, $\frac{1}{3}$ dnia, $\frac{2}{3}$ dnia, $\frac{1}{4}$ dnia i $\frac{3}{4}$ dnia?
3. Ile sztuk $\frac{1}{2}$ tuzina, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$ i $\frac{3}{4}$ tuzina?

Ponieważ przy liczbie 20 była nauka o połówkach, tym samym sposobem co czwarte części przerobiona, można tu zestawić połówki z czwartymi i nauczyć jeszcze, że $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ a na tej zasadzie przerabiać i inne działania.

Dokładna nauka ułamków wraz z *pisemném* przeprowadzeniem przypada dopiero na rok IV, a z pewnością tam gładko pójdzie, jeżeli nauczyciel pierwsze początki przerobi, wedle wskazanej metody.

VIII. Rachunek wnioskowania.

W każdym zakresie liczb po ukończeniu nauki mnożenia i dzielenia przerabiać należy rachunki wnioskowania, w których odróżnia się zawsze trzy rodzaje: 1) wniosek z jedności na wielość, 2) z wielości na jedność i 3) z wielości na inną wielość. Przy tych rachunkach należy uwzględnić także odrębne sposoby rachowania, opierające się na właściwości systemu metrycznego miar, wag i monet.

I. Wniosek z jedności na wielość.

1. 1 łokieć perkalu kosztuje 4 dziesięć, ile za 5, 7, 9, 8 itd. łokci?
2. Na 1 dzień potrzeba 4 dkg. kawy, ile na 6, 4, 9, 7, itd. dni?
3. 1 dm. wstążki kosztuje 5 ct., ile 1 m.? ile 3, 5, 6, 7, 8 m.? (Ile ct. dm. tyle dziesiątaków metr).
4. 1 g. kosztuje 6 ct., ile 1 dkg.? ile 3, 5, 4, 6 dkg?
5. Za 1 dziesiątaka 4 dm. 5 cm. wstążki, ile za 5 dziesiątaków? ile za 7 dziesiątaków?
6. Za 1 dziesiątaka 1 dl. oliwy, ile za 1 złr.? ile za 1 złr. i 4 dziesiątaki, ile za 3 złr. 6 dziesiątaków?
7. Jeżeli 1 człowiek pracował 32 dni, ile dni pracować będzie 8 ludzi?
8. Jeżeli dla 1 osoby pewien zapas starczy na 36 dni, na ile dni starczy dla 4 osób?

II. Wniosek z wielości na jedność.

1. Za 8 kg. zapłacono 32 złr., ile za 1 kg.?
2. 4 m. kosztowały 28 złr. i 36 ct., ile 1 m.?

3. Za 5 złr. otrzyma się 30 kg. i 20 dkg., ile za 1 złr.?
4. Za 6 par trzewików zapłacono 27 złr. i 6 dziesiątaków, ile za 1 parę?
5. 1 m. kosztował 2 złr. 7 dziesiątaków, ile 1 dm.?
6. 1 l. kosztował 3 złr. 5 dziesiątaków, ile 1 dl.?
7. 1 dkg. kosztował 1 złr. 8 dziesiątaków, ile 1 g.?
8. Dla 6 ludzi starczy zapas na 6 dni, dla 1 człowieka na ile dni?

III. Wnioski z wielości na inną wielość.

1. 4 m. kosztowały 12 złr. 20 ct., ile 7 metrów?
2. 2 l. kosztowały 9 złr. 4 dzies., ile za 3 l. 4 dl.?

Zagadnienie pisze się na tablicy i wypadki notuje.

Co mamy wyrachować? Aby wyrachować ile za 3 l. 4 dl., co trzeba wiedzieć? Z czego dowiesz się, ile kosztuje 1 l.? Z ceny 2 l. Jak? Jeżeli 2 l. kosztują 9 złr. i 4 dziesiątaki, to za 1 l. zapłaci się połowę 9 złr. i połowę 4 dziesiątaków. Rachujcie! Ile? jak? (Połowa 9 złr. są 4 złr. i zostaje 1 złr., 1 złr. zamieniam na dziesiątaki = 10 dziesiątacom itd.). Więc ile? *4 złr. 7 dziesiątaków*. Co obliczyłeś? Co teraz masz wyrachować? Co najpierw? Jak? Jeżeli 1 l. kosztuje 4 złr. 7 dzies., to za 3 litry zapłaci się 3 razy po 4 złr. i 3 razy po 7 dzies. Rachujcie! Ile? (12 złr. + 21 dzies.). Ile to jest złr. i dzies.? (*14 złr. i 1 dzies.*). Co teraz mamy dalej rachować? Aby obliczyć ile kosztują 4 dl., co musisz wiedzieć? Z czego dowiesz się o cenie 1 dl.? Jak? Jeżeli 1 l. kosztuje 4 złr. 7 dzies., to 1 dl. kosztuje $\frac{1}{10}$ część 4 złr. i $\frac{1}{10}$ część 7 dzies. Rachujcie! Ile? (4 dzies. 7 ct.). Co teraz mamy rachować? Jak? Ile? W końcu jeszcze pytanie, co teraz obliczyć?

Nauczyciel wypadki pisze na tablicy:

Za 3 l. . . 14 złr. 1 dzies.

za 4 dl. . . 1 złr. 8 dzies. 8 ct.

a dzieci dodają i powtarzają pytanie i odpowiedź.

3. Uwzględniać należy także stósunki odwrotne.

Np. 4 robotników skosi łąkę w 9 dniach; w ilu dniach 6 robotników?

Z wzoru pytań przy wnioskowaniu podanych, przebiega się ta zasada, żeby dzieci pobudzić do samodzielności i do uwagi. Nie ma się poddawać nic, dzieci mają wiedzieć, co rachują, ile i za co, i co dalej rachować się ma.

IX. Pojęcie ułamków dziesiętnych.

Przerobiwszy zakres liczb od 1 do 50 lub też do 60ciu, należy dać pojęcie ułamka dziesiętnego. Nauka rozpoczyna się od przykładów na dodawanie liczb wielorakich systemu metrycznego. Np. Na jedno ubranie kupił ojciec 4 m. i 5 dm. sukna, a na drugie 3 m. i 8 dm., ile razem?

Pisemne obliczenie:

$$\begin{array}{r} 4 \text{ m. } 5 \text{ dm.} \\ 3 \text{ m. } 8 \text{ dm.} \\ \hline 8 \text{ m. } 3 \text{ dm.} \end{array}$$

Nauczyciel bierze metr i dm. i poucza, że 1 dm. jest $\frac{1}{10}$ częścią metra. Zamiast mówić 1 dm., można mówić $\frac{1}{10}$ część metra. Zamiast 2 dm.... $\frac{2}{10}$ cz. m. itd. aż do 10 dm. = $\frac{10}{10}$ cz. m. W dalszym ciągu nauki poucza się, że 4 m. i 5 dm. czytać można 4 całe i $\frac{5}{10}$ części m., a w końcu, że można to krótszym sposobem naznaczyć, a mianowicie zamiast pisać 4 m. 5 dm.,

pisze się: 4·5 m. Całe metry od dziesiątych części metra oddziela się kropką u góry umieszczoną, a nazwę pisze obok i to tylko jedną. Czyta się: 4 całe i 5 dziesiątych metra. Kropka zowie się kropką dziesiętną. Dla czego? Jak napiszesz nowym sposobem 3 m. 8 dm.? Napisz *dziesiętnie* 8 m. 3 dm. (Co to wyrażenie znaczy, uczeń teraz będzie wiedział). Zaraz następuje zastosowanie tego nowego sposobu pisania do pisemnego dodawania.

Po lewój stronie tablicy poprzednie zadanie napisane jest w formie liczb wielorakich; po prawej stronie pisze się dziesiętnie w formie: 4·5 m.

$$\begin{array}{r} 3\cdot8 \text{ m.} \\ \hline 8\cdot3 \text{ m.} \end{array}$$

i dodaje: 8 dziesiątych m. a 5 dziesiątych m. jest 13 dziesiątych m. To czyni 1 cały metr i trzy dziesiąte m. 3 dziesiąte piszę pod dziesiątymi, a 1 cały metr zatrzymuję. Teraz zliczam całe metry, ale przedtém daję kropkę dziesiętną dla oddzielenia dziesiątych od całych; 1 cały m. i 3 m. = 4 m., a 4 m. = 8 całych metrów, które podpisuję pod całymi.

Przeczytaj wypadek: 8 całych i 3 dziesiąte metra. Jak to jeszcze inaczej możesz przeczytać? 8 m. i 3 dm.

Aby nauczyć pisania dziesiętnego ułamka, u którego na miejscu całości jest zero, dyktuje się przykład drugi w liczbach wielorakich, na dodawanie zwykłe i dziesiętne.

18 m. 6 dm.	18·6 m.
15 m. 7 dm.	15·7 m.
8 dm.	0·8 m.
35 m. 1 dm.	35·1 m.

Przy pisaniu 8 dm. dziesiętnie znakiem 0·8 wyjaśni nauczyciel, dla czego tak piszemy?

Odejmowanie.

54 złr. 3 dzies.	54 ³ złr.
<u>28 złr. 6 dzies.</u>	<u>28⁶ złr.</u>
25 złr. 7 dzies.	25 ⁷ złr. itp.

Mnożenie.

13 l. 6 dl. $\times 4$	13 6 l. $\times 4$
<u>54 l. 4 dl.</u>	<u>54⁴ l.</u>

Dzielenie.

$$49 \text{ m. } 2 \text{ dm.} : 3 = 16 \text{ m. } 4 \text{ dm.}$$

$\begin{array}{r} 3 \\ \hline 19 \\ 18 \\ \hline 1 \text{ m.} \end{array}$	$\begin{array}{r} 12 \text{ dm.} : 3 = 4 \\ 12 \\ \hline \end{array}$
--	---

i dziesiątne $49\cdot2 \text{ m.} : 3 = 16\cdot4 \text{ m.}$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \hline 19 \\ 18 \\ \hline 12 \\ 12 \\ \hline \end{array}$$

Przy dzieleniu mówi się nie 3 mieści się w... lecz ciągle „trzecia część“ i wygłasza wyraźnie z czego.

Do nauki pisania dziesiętnego ułamka o 2óch miejscach dziesiętnych (po ukończeniu zakresu liczb od 1 do 100) należy użyć m., dm. i cm., potem złr. dziesiątaka i centa, w końcu kg. i dkg., hl. i l. Do trzech miejsc dziesiętnych nadaje się m., dm., cm. i mm.; kg., dkg. i g., ale nauka ta przypada dopiero na późniejsze lata. Aby dzieci wdroyły się w ten sposób rachowania, nie potrzeba zapuszczać się w teorye systemu metrycznego, którychby dzieci i tak nie zrozumiały.

Gdy dzieci nauczyły się tych początków ułamków dziesiętnych, należy teraz rachunki wnioskowania przeprowadzać pisemnie zawsze na przemian na dwa sposoby: w liczbach wielorakich i dziesiętnie.

1. W 1 tygodniu zarobił robotnik 7 złr. 6 dzies.; ile w 6 tygodniach?

Po ustném obliczeniu następuje pisemne. Uczeń sam wnioskuje, że 6 razy po (7 złr. + 6 dzies.). Przy pisemnym rachunku po tym wniosku ma uczeń powiedzieć, więc muszę 7 złr. 6 dzies. pomnożyć przez 6. Mnożenie to wykonuje się wskazanym sposobem w dwójakiej formie: w liczbach wielorakich i dziesiętnie.

2. Na 4 suknie wyszło 51 m. 6 dm. materyi; ile na 1 suknię? Ustnie i pisemnie dziesiętnie.
3. Za 6 hl. pszenicy zapłacono 55 złr. 20 ct., ile kosztować będzie 5 hl.? Ustnie i pisemnie sposobem dziesiętnym.

Gdy ukończy się całą setkę następuje ogólne powtórzenie, a ze specjalnych ćwiczeń podnieść należy wielokrotne części setki:

Ile centów jest $\frac{1}{2}$ złr., $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{20}$ i $\frac{1}{25}$ złr.?

Ile dkg. jest $\frac{1}{2}$ kg., $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$ kg.?

Także nauczyć należy, że 1 kg. = 2 funtom, i że funt ma 50 dkg. Ile dkg. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ funta?

Ile litrów 1 hl., $\frac{1}{2}$ hl., $\frac{1}{4}$ hl.? etc.

Obliczanie ceny na zasadzie wielokrotnych części setki.

1. 1 m. kosztuje 50 ct.; ile za 36, 48, 65 m.?
2. 1 kg. kosztuje 25 ct.; ile za 16, 48, 72, 83 kg.?
3. 1 litr kosztuje 20 ct.; ile za 25, 35, 46 l.?

4. 1 m. kosztuje 26 centów; ile za 24 m.? (24 razy po $\frac{1}{4}$ złr. i 24 razy po 1 cencie).
5. 1 litr kosztuje 52 ct.; ile za 18, 32, 41 l.?
6. Na 1 dzień potrzeba 48 ct.; ile na 30 dni? (30 razy po $\frac{1}{2}$ złr. mniej 30 razy po 2 ct.).
7. Ile kosztuje 48 metrów po 98 centów?
8. Związek ceny między m. i ct., kg. i dkg., hl. i l. Ile złotych, m., kg. i hl.; tyle centów, cm., dkg. i l. należy dobrze ćwiczyć nietylko w drugim roku, ale w każdym następnym.





CZEŚĆ III.

Zakres liczb od 1 do 1000.

W zakresie tym nauka obejmuje cztery działania rachunkowe z pamięci i cyframi, ułamki dziesiętne o 2óch i ewentualnie o 3ech miejscach dziesiętnych i *ułamki zwyczajne w zakresie roku poprzedniego*. Zaznajomienie z miarami i wagami tego zakresu.

Danie pojęcia liczby 1000.

Dla dania pojęcia liczby 1000 służy tablica wielka, na której jest w 10 rzędach 1000 krósek. Wielki arkusz tektury naklei się białym papierem i potem poprzyklepia 1000 pasków na 6 cm. długich a 6 mm. szerókich z czarnego glansowanego papieru tak, jak się to robi z znaczkami na listy. Odstępy daje się większe między 10kami, a mniejsze między piątkami. Pomiedzy 10ki można nakleić mały znaczek okrągły z czerwonego papieru. Na takiej tablicy uczeń z ostatniej ławki dojrzy, ile jest krósek w jednej grupie.

Przy pomocy téj tablicy na 1000 nauczyciel da pojęcie téj liczby następującym sposobem:

1. Pierwszy rząd liczy się dziesiątkami: 1 dzies., 2 dzies. etc. aż do 10 dzies. = 100 czyli jedna setka.

2. Nauczyciel laską wskazuje na cały pierwszy rząd i pyta: Ile dzies. ile setek? Potém na drugi rząd, ile ma dzies.? Ile dzies. w obu rządach? Ile setek? 2 setki = dwieście. W trzech rządach 30 dzies. = 3 setki = trzysta. W czterech rządach 40 dz. = 4 setki = czterysta, a w końcu 100 dzies. = 10 setek = **1 tysiąc**.

3. Odpytanie tego. Nauczyciel laską wskazuje na rzędy:

1 setka = 10 dzies. = sto,

2 setki = 20 dzies. = dwieście, aż do 1000.

Przy wskazywaniu na 300 należy wszystkie trzy rzędy od góry do dołu uwzględniać. Pytanie: „aż dotąd, ile jest kresek“?

4. Na wrywki. Trzymając laskę poziomo między dwoma rządami pyta nauczyciel, ile jest krósek aż dotąd, ile setek, ile dziesiątek?
5. Liczenie dziesiątkami: 10, 20,... 100, 110, 120, etc. aż do 1000. Wśród tego pauzy z pytaniami n. p. 340 ile to setek i dziesiątek?
6. Nauczyciel wygłasza liczby: 420, 360 etc., a uczeń na tablicy laską wskazuje: 420 odtąd — dotąd.
7. Liczenie jednostkami: 101, 102, 103. Wśród tego pauzy z zapytaniem, ile setek, dziesiątek i jedn.
8. Nauczyciel wygłasza liczby np. 215, 321, etc. a uczeń pokazuje je na tablicy.
9. Nauczyciel wskazuje na tablicy na liczbę np. 472, a uczeń ją wymawia.
10. Pisanie liczb. Najpierw nauka, jak pisze się pełne setki, nawiązując do liczby 100, potém dyktuje się liczby trzycyfrowe wyraźnie akcentując np. 432, 561, etc. i każe je pisać jedną pod drugą. W toku

pisania dyktuje się liczby z zerem na końcu, potem z zerem w środku a dzieci nauczą się pisać i 460 i 503, a w końcu uczy się, że tysiąc oznacza się tak: 1000.

Miary i wagi.

1 kg. = 100 dkg. = 1000 g.

1 m. = 10 dm. = 100 cm. = 1000 mm.

1 km. = 1000 m.

1 ha. = 100 a.

1 a. = 100 m²

1 m² = 100 dm²

1 dm² = 100 cm².

Kostka decymetrowa = 1000 cm³. Mając kostkę taką złożoną z kawałków na 1 cm³, 10 cm³ i 100 cm³ można bardzo dobrze liczbę 1000 uzmysłować i okazać, że 1 dm³ = 1000 cm³.

Pokazując 1 dm³ z blachy, 1 liter i 1 kg. uczy się związku, jaki zachodzi między tymi miarami i wagami.

Powtórzenie pojęcia setek na miarach metr. np.

1 złr. = 100 cent., ile 2, 3, 5, 6 etc. 10 złr.

1 kg. = 100 dkg., ile 3, 4, 8, 7 etc. 10 kg.

1 hl. = 100 l., ile 4, 9, 5 i 10 hl. etc.

Cztery działania rachunkowe w zakresie liczb od 1 do 1000.

I. Dodawanie.

Podstawę stanowi biegłość dodawania z zakresu setki. Nauka zaczyna się od ćwiczeń z tego zakresu,

a potem przechodzi do liczb trzechcyfrowych. Ponieważ przy ustnym rachunku dodaje się do danej liczby 3cyfrową w ten sposób, że kolejno do niej dodaje się najpierw setki, potem dziesiątki, a w końcu jednostki, należy ćwiczenie podzielić na trzy główne grupy:

1. *Dodawanie jednostek, wedle dwóch wzorów*

a) $105 + 3$, $214 + 4$

b) $306 + 8$, $425 + 9$

a potem ćwiczenie w dodawaniu szeregami tej samej liczby np.: do 116 dodawać ciągle 6 aż do najbliższej setki lub dalej jeszcze.

2. *Dodawanie dziesiątek pełnych i dziesiątek z jednostkami:*

a) $30 + 40$, $70 + 50$, $240 + 50$, $360 + 70$

b) $46 + 30$, $67 + 50$, $183 + 20$, $456 + 80$

c) $52 + 73$, $68 + 39$, $138 + 46$, $178 + 94$

3. *Dodawanie liczb trzechcyfrowych.*

a) $432 + 216 = ?$

b) $517 + 327$, $284 + 378$

Przy dodawaniu pełnych dziesiątek do pełnych dziesiątek np. $70 + 50$; z początku mówi się 7 dzies. + 5 dzies. = 12 dzies. = 120, potem odrazu $70 + 50 = 120$.

Przykład $518 + 327$ rachuje się tak:

$518 + 300 = 818$, $818 + 20 = 838$, $838 + 7 = 845$.

Te same przykłady przerabia się pisemnie najczęściej w liczbach mianowanych.

W trzecim roku nauki przy pisemnym rachunku uczy się jeszcze, jaką nazwę mają liczby, które mają być do siebie dodane i jak nazywa się wypadek? Metoda pisemnego rachunku jest taka sama jak przy liczbach 2cyfrowych. Zaczyna się dodawanie od najniższego gatunku i wygłasza wyraźnie, jakie jednostki zliczamy.

Dodawanie ułamków dziesiętnych.

Rozpoczyna się od przykładu na dodawanie liczb wielorakich. Np.:

46 m. 5 dm. 8 cm.	46·58 m.
39 m. 4 dm. 3 cm.	39·43 „
12 m. — 7 cm.	12·07 „
5 dm. 5 cm.	0·55 „
6 cm.	0·06 „

Po ukończeniu dodawania liczb wielorakich daje się pojęcie setnych części, pokazując na metrze, że 1 cm. jest $\frac{1}{100}$ częścią metra, więc zamiast mówić cm. można mówić setne części metra. Następnie poucza nauczyciel, że setne części pisać się będzie obok dziesiątych części na drugim miejscu po kropce. Pisanie 0 w odpowiedniem miejscu, jeżeli napisać się ma dziesiątnie 6 cm., nie sprawi żadnej trudności. Po napisaniu pozycji wszystkich w należytem porządku, rozpoczyna się dodawanie wygłaszając setne, dziesiąte itd. Uczeń nauczy się, że $\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$, więc też wyrachuje, że 29 setnych daje 9 setnych i 2 dziesiąte. W końcu nauczyć należy czytania dziesiętnego ułamka na dwa sposoby. Np. $6\cdot48 = 6$ całych, 4 dziesiąte i 8 setnych, i drugim sposobem: 6 całych i 48 setnych.

Z przykładów zasługują na szczególną uwagę przykłady na kg. i dkg., złr. i centy, hl. i litry; zwłaszcza, jak napisze się dziesiątnie 3 kg. 8 dkg.? Dekagramy są setnymi częściami kg., więc ile dkg. tyle setnych.

II. Odejmowanie.

1. Powtarzanie nauki z zakresu liczb od 1 do 100, które stanowią fundament biegłości rachunków w następnych latach.

2. *Odejmowanie jednostek.*

$$a) \quad 297 - 4, \quad b) \quad 382 - 7$$

potém ćwiczenie w odejmowaniu téj saméj jednostki szeregiem.

3. *Odejmowanie dziesiątek pełnych i liczb dwucyfrowych.*

$$a) \quad 90 - 20, \quad 150 - 30, \quad 220 - 80$$

$$b) \quad 175 - 30, \quad 226 - 70$$

$$c) \quad 482 - 61, \quad 523 - 58.$$

4. *Odejmowanie liczb 3cyfrowych.*

$$a) \quad 487 - 352 \quad b) \quad 723 - 356$$

Liczba odjemna zostaje w całości wygłaszana; od niej odejmuje się najpiérw setki, potem dziesiątki a w końcu jednostki.

Przy pisemnym rachunku forma jest taka:

$$\begin{array}{r} \overset{10}{7} \overset{10}{2} 3 \\ 356 \\ \hline 367 \end{array}$$

Dokładnie należy wyjaśnić, jak rachujemy.

Odejmowanie ułamków dziesiętnych.

$$\begin{array}{r} 138 \text{ kg. } 28 \text{ dkg.} \\ - 73 \text{ kg. } 75 \text{ dkg.} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 138.38 \text{ kg.} \\ - 73.75 \text{ kg.} \\ \hline \end{array}$$

$\begin{array}{r} 456 \text{ m. } 8 \text{ dm. } 3 \text{ cm.} \\ - 239 \text{ m. } 9 \text{ dm. } 6 \text{ cm.} \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 456 \cdot 83 \text{ m.} \\ 239 \cdot 96 \text{ m.} \\ \hline \end{array}$
---	---

Na tych i tym podobnych przykładach tak samo jak dodawania nauczy się odejmowania.

Przykłady na dodawanie w połączeniu z odejmowaniem.

III. Mnożenie.

1. Powtórzenie tabliczki mnożenia w porządku i na wrywki.

2. *Mnożnik jest liczbą jednocyfrową.*

a) 37×2 , b) 146×6

6 razy 100 = 600; 6 razy 40 = 240; [6 razy 4 dzies. = 24 dzies. = 240].

$600 + 240 = 840$; $6 \times 6 = 36$; $840 + 36 = 876$.

Cwiczenia z pamięci szeregiem, mnożenie liczb 11, 12, 13 przez 1, 2, 3, 4.... 10, czyli tak zwana większa tabliczka mnożenia.

3. *Mnożnik jest liczbą dwucyfrową.*

a) *przez pełne dziesiątki.*

1) $10 \times 10 = 10 \times$ po 1 dz. = 10 dz. = 100

$10 \times 20 = 10 \times$ po 2 dz. = 20 dz. = 200

$10 \times 40 = 10 \times$ po 4 dz. = 40 dz. = 400

$10 \times 70 = 10 \times$ po 7 dz. = 70 dz. = 700

Potem odrazu 10 razy 60 = 600.

2) $20 \times 4 = 80$, gdyż $2 \times 4 = 8$, 20 razy 4 jest 10 razy tyle co 2 razy 40.

60 razy 7 = 420.

b) *mnożenie przez dziesiątki z jednostkami*

1) 26 razy po 7 =

$$20 \times \text{po } 7 = 140; 6 \times 7 = 42; 140 + 42 = 182.$$

2) 24 razy po 18 =

$$20 \times \text{po } 18 = ? \quad (20 \times 10 = 200, 20 \times 8 = 160; \\ 200 + 160 = 360)$$

$$4 \times 18 = 40 + 32 = 72. \quad \text{Więc } 24 \times \text{po } 18 = \\ 360 + 72 = 432.$$

Ułatwienia przy mnożeniu.

Jeżeli mnożnik 2cyfrowy da się rozłożyć na dwa czynniki np. $24 = 3 \times 8$, $35 = 5 \times 7$, $36 = 6 \times 6$ lub 4×9 , natenczas można u 24 mnożyć najpierw przez 8 a potem otrzymany iloczyn przez 3.

Np. ile jest 24 razy po 18 litrów?

$$8 \times 18 \text{ l.} = 144 \text{ l.}; 3 \times 144 \text{ l.} = 300 + 120 + 12 = 432 \text{ l.}$$

Pisemne mnożenie.

$$a) \quad \begin{array}{r} 236 \text{ złr.} \times 3 \\ \hline 708 \text{ złr.} \end{array}$$

Mnożna, mnożnik, iloczyn.

$$b) \quad \begin{array}{r} 72 \text{ kg.} \times 10 \\ \hline 720 \text{ kg.} \end{array}$$

10 razy 2 jed. = 20 jed. = 2 dzies.; 10 razy 7 dz. = 70 dz. = 7 setek.

Prawidło: Dopisać po prawej ręce 0.

$$c) \quad \begin{array}{r} 23 \text{ l.} \times 30 \\ \hline 690 \text{ l.} \end{array}$$

Z ustnego rachunku wypływa, że najpierw mnoży się przez 3, a potem przez 10.

Mnożąc przez 3 dziesiątki, z jednostek otrzymuje się *dziesiątki*, z dziesiątek zaś *setki*.

d) 36×24 jest kombinacją przypadku a) i c).

Można najpierw pomnożyć przez 4 jedn., potem przez 20 i połączyć oba iloczyny. Drugi iloczyn ma zawsze na końcu zero, które przy dodawaniu można opuścić.

$$\begin{array}{r}
 36 \times 4 \\
 \hline
 144
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 36 \times 20 \\
 \hline
 720
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 36 \times 24 \\
 \hline
 144 \\
 720 \\
 \hline
 864
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 36 \times 24 \\
 \hline
 144 \\
 72 \\
 \hline
 864
 \end{array}$$

Okazując mnożenie przez liczbę 2cyfrową tym sposobem genetycznym łatwo uczeń pojmie, że gdy ma mnożyć przez dziesiątki, pisać należy pierwszy częściowy iloczyn pod dziesiątkami.

W nauce mnożenia ćwiczy się na różnych przykładach ustnie i pisemnie. Wniosek jest znany już z poprzedniego roku.

Mnożenie dziesiętnych ułamków.

Przykład na liczby wielorakie jest punktem wyjścia dla tej nauki.

Np. 4 sztuki sukna po 46 m. 3 dm. 6 cm.?

$$\begin{array}{r|l}
 46 \text{ m. } 3 \text{ dm. } 6 \text{ cm.} \times 4 & 46.36 \text{ m.} \times 4 \\
 \hline
 185 \text{ m. } 4 \text{ dm. } 4 \text{ cm.} & \hline
 185.44 \text{ m.}
 \end{array}$$

Przez liczbę 2cyfrową także mnożyć można, tylko przykład należy wybierać taki, żeby nie przekroczyć liczby 1000.

IV. Mieszczenie.

1. Powtarzanie mieszczenia liczb jednocyfrowych w liczbach zakresu 1—100 bez reszt i z resztami.

Np. 6 w 36, 48, 24, 54 i
w 37, 50, 29, 58

2. *Mieszczenie jednocyfrowej liczby.*

Zasada. Przy mieszczeniu i dzieleniu *jednocyfrową* liczbą wszystko opiera się na tabliczce mnożenia. Każda jednocyfrowa liczba przy tych działaniach ma oznaczoną granicę, poza którą wychodzić nie należy.

Np. dla liczby 6 granicę tę stanowi 60, dla 7 70, dla 4 jest największa liczba, w której umiemy mieścić, (na fundamencie tabliczki mnożenia) liczba 40.

- a) 3 w 42 = ?

Zasada: 3 w 30 = 10, 3 w 12 = 4; 14.

4 w 96 = ?

4 w 40 = 10, jeszcze raz 4 w 40 = 10, razem 20; 4 w 16 = 4, więc 24.

Potem krótko: 4 w 80^{ciu} 20, (4 w 8 dziesiątkach), w 16.... 4 razy, razem 24.

- b) 7 w 364 = ?

Tu uwzględnia się najpierw 36 dziesiątek.

7 w 35 mieści się 5 razy; 7 w 35 dzies. 50 razy; 7 w 14 mieści się 2 razy, więc 7 w 364 mieści się 52 razy.

Potém krótko rachuje się: 7 w 350 mieści się 50 razy, a 7 w 14 2 razy, więc 52 razy. Widzimy stąd, że odpowiedni rozkład liczby danej na składowe części, opierające się na tabliczce mnożenia, jest warunkiem niezbędnym.

3. *Mieszczanie liczb dwucyfrowych.*

Ponieważ to jest bardzo trudnem zadaniem na pamięciowy rachunek, należy tylko łatwiejsze zagadnienia ustnie przerabiać.

a) 10 w liczbach 30, 60, 120, 260, 580.

Rachuje się: 1 dz. w 12 dz. etc.

b) 20 w liczbach 80, 140, 360, 480

a potem też w 83, 144, 367, 488.

(2 dziesiątki w 36 dziesiątkach 18 razy).

(2 dzies. w 488? 2 dzies. w 48 dzies. = 18 razy; więc 20 w 488 mieści się 18 razy i zostaje 8).

c) *Dwucyfrowe liczby w trzechcyfrowych.*

Tylko przez próbowanie mnożeniem. Przykłady dawać łatwe.

Np. 12 w 108? Żeby 12 mieścić się mogło 10 razy, trzeba na to 120, a tu tylko 108, więc próbuje się, czy pójdzie 9 razy. Trafi się, to dobrze, jeżeli nie, to należy zniżyć iloraz.

Dzielenie pisemne w znaczeniu mieszczania.

Na 1 dzień potrzeba 3 kg. mąki; na ile dni starczy zapas 672 kg.? Wniosek jaki?

$$\begin{array}{r}
 \text{set. dz. jed.} \qquad \qquad \text{set. dz. jed.} \\
 6,7,2 : 3 = 2\ 2\ 4 \\
 \underline{6} \\
 7 \\
 \underline{6} \\
 12
 \end{array}$$

3 jed. w 6 setkach ile razy?

(3 jed. w 6 jed. mieszczą się 2 razy, w 6 dzies. 20 razy, w 6 setkach 200 razy, więc piszę 2 na miejscu setek). Potem 2 setki razy 3 = 6 setek itd.

3 jed. w 7 dziesiątkach ile razy?

(3 jed. w 7 jed. = 2 razy, a w 7 dzies. 20 razy, piszę tedy 2 obok setek. Potem 2 dzies. razy 3 = 6 dzies. itd.

Drugi przykład, gdzie dzielnik nie mieści się w pierwszej cyfrze dzielnej.

$$\begin{array}{r}
 \text{set. dz. jed.} \qquad \qquad \text{dz. jed.} \\
 2\ 6\ 5 : 5 = 5\ 3 \\
 \underline{2\ 5} \\
 1\ 5 \\
 \underline{1\ 5}
 \end{array}$$

5 w 2 setkach?

5 jed. w 2 jed. nie mieści się raz, to też 5 jed. w 2 setkach nie mieści się 100 razy.

Zamieniam 2 setki na dziesiątki. Mam 20 dzies. a do tego 6 dzies., jest 26 dzies.

5 jed. w 26 dzies.?

5 jed. w 26 jed. mieści się 5 razy, więc w 26 dzies. mieści się 50 razy. Piszę tedy 5 na miejscu dziesiątek (górną znaczę *dz.*) itd.

Po takiem rachowaniu można później opuścić znaki nad setkami, dzies. i jednost., tak w dzielnej jak i w dzielniku, a w końcu dojdzie się do biegłości w mechaniczném dzieleniu. W praktyce późniejszej pisemne dzielenie wykonuje się zawsze *w znaczeniu mieszczenia*, ale często uczeń nie rozumie działania. Wyrażenia takie jak „w przykładzie $265:5=$ ”.

5 w 2 nie idzie, więc 5 w 26... często się słyszy, lecz bardzo często téż i starsi uczniowie nie umieją tego wyjaśnić i zaraz bałamucają się, gdy nauczyciel zapyta: czy 5 w 2 setkach nie mieści się ani razu?

V. Dzielenie.

1. Powtórzenie dzielenia przez liczbę 1cyfrową liczb zakresu od 1 do 100. Np.

$\frac{1}{8}$ część 24, 56, 32, 64 i z resztami
27, 58, 39, 70.

Zasadą na przyszłość do zapamiętania jest:

Przy dzieleniu przez jednocyfrową liczbę liczb więcejcyfrowych, należy odnosić się do iloczynów znanych z tabliczki mnożenia i nie zapominać o tém, że każda jednostka ma swoją największą granicę; np. 4ka ma za granicę 40, 7ka ma liczbę 70. Rozkładanie liczby na części do podzielenia dogodne opiera się na téj zasadzie.

2. *Dzielnikiem jest liczba jednocyfrowa.*

$\frac{1}{3}$ część 75, 168, 762.

u 3^{ci} części najwyższa liczba = 30.

Liczba 75 jest większa od 30, składa się z 7 dz. i 5 jed.

Bierze się 6 dzies. a reszta jest 15, więc $\frac{1}{3}$ część z 60 i z 15.

Liczbę 762 rozkłada się na: $600 + 150 + 12$.

Ile jest $\frac{1}{3}$ część z 745? (Rozkłada się na 500, 200 i 45).

Ile jest $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ etc. część 1000?

Rozkładu stosownego liczby 3cyfrowej trzeba na przykładach licznych dobrze wyćwiczyć.

Błędnie jest przy ustnym rachunku tak samo z pamięci rachować, jak pisemnie i mówić np. $\frac{1}{3}$ część 762? 3 w 7 idzie 2 razy, zostaje 1, 3 w 16 etc.

2. Dzielnikiem jest liczba 2cyfrowa.

a) *Dzielenie przez pełne dziesiątki.* Np.

Ile jest $\frac{1}{20}$ część z 460, 580, 840

$\frac{1}{30}$ część z 690, 540, 810.

Zamiast brać od razu $\frac{1}{20}$ część, bierze się najpierw $\frac{1}{10}$ część a potem z tego połowę, np. $\frac{1}{20}$ z 460 = ($\frac{1}{10}$ z 460 = 46, $\frac{1}{2}$ z 46 = 23) więc $\frac{1}{20}$ z 460 = 23.

b) *Jeżeli dzielnik dwucyfrowy jest liczbą złożoną z 2^{ch} czynników* np. 12, 15, 24 etc.

Ile jest $\frac{1}{15}$ część 465?

$\frac{1}{3}$ część 465 jest ($\frac{1}{3}$ z 300 + 150 + 15) 155

$\frac{1}{5}$ część 155 jest 31; więc $\frac{1}{15}$ część 465 = 31.

c) *Dzielenie przez 2cyfrowe liczby.*

Trudniejsze zadania dzielenia przez dwucyfrowe liczby przerabia się z pamięci tylko przez próbowanie, połączone z mnożeniem.

Np. Za 23 m. zapłacono 391 centów; po czemu był 1 m.? Trzeba wziąć $\frac{1}{23}$ część 391 centów.

Porównanie w myśli liczby 23 z liczbą 230! Ażeby na iloraz otrzymać 10, trzeba 230; tu mamy 391, więc jest o 161; $\frac{1}{23}$ część z 161? Należy przez mnożenie liczby 23 zbliżyć się do liczby 161. Nauczyciel poddaje: $5 \times 23 = 115$. Uczeń mówi: za mało. Więc $6 \times 23 = 138$; jeszcze za mało. W końcu $7 \times 23 = 161$.

Zatém $\frac{1}{23}$ część 391 centów = 17 ct. a 1 m. kosztował 17 centów.

Pisemne dzielenie w znaczeniu dzielenia na części przeprowadzić łatwiej, niż mieszczenie.

Np. za 4 konie otrzymał gospodarz 756 złr., ile za 1 konia?

$$\begin{array}{r}
 \text{set. dz. jed.} \qquad \qquad \text{set. dz. jed.} \\
 7 \ 5 \ 6 \text{ złr. : } 4 = 1 \ 8 \ 9 \\
 \underline{4} \\
 3 \ 5 \\
 \underline{3 \ 2} \\
 3 \ 6 \\
 \underline{3 \ 6}
 \end{array}$$

Mówi się: 4ta część 7 setek jest 1 setka. 4 razy po 1 setce = 4 setki itd.

$$\begin{array}{r}
 \text{set. dz. jed.} \qquad \qquad \text{dz. jed.} \\
 8 \ 1 \ 6 \text{ kg. : } 12 = 6 \ 8 \\
 \underline{7 \ 2} \\
 9 \ 6 \\
 \underline{9 \ 6}
 \end{array}$$

Mówi się: 12ta część 8 setek nie daje całej setki. 8 setek zamieniam na 80 dzies., więc 1 dzies. jest 81 dzies., 12ta część 81 dz. jest 6 dzies. Piszę 6 na miejscu dziesiątek itd.

Dzielenie ułamków dziesiętnych.

Rozpoczyna się od dzielenia liczb wielorakich.

Np. Obwód kwadratu = 346 m. 5 dm. 2 cm.; jak wielki jeden bok? Wniosek jaki? Co to kwadrat?

$$346 \text{ m. } 5 \text{ dm. } 2 \text{ cm.} : 4 = 86 \text{ m. } 6 \text{ dm. } 3 \text{ cm.}$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ \hline 26 \quad 25 \text{ dm. } 12 \text{ cm.} \\ 24 \quad 24 \quad 12 \\ \hline 2 \text{ m. } \quad 1 \text{ dm.} \end{array}$$

$$\text{Dziesiętnie: } 346.52 \text{ m.} : 4 = 86.63 \text{ m.}$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ \hline 26 \\ 24 \\ \hline 25 \\ 24 \\ \hline 12 \\ 12 \\ \hline \end{array}$$

Odpowiedź?

VI. Rachunek wnioskowania w zakresie 1—1000.

I. Wniosek z jedności na wielość.

- 1) 1 złr. = 10 dzies.; ile dzies. 7, 14, 18, 86 złr. i 9 złr. 6 dzies.?
- 2) 1 złr. = 100 ct.; ile centów 4, 9, 8 złr. i 5 złr. 36 ct., 8 złr. 4 ct.?

- 3) Ile dm. 7 m., 18 m., 27 m., 68 m.?
- 4) Ile cm. 4 m., 8 m., 6 m., 4 dm.?
- 5) Ile mm. 3 dm., 7 dm., 5 dm. 4 cm.?
- 6) Ile litrów 3 hl., 5 hl., 8 hl. i 4 hl. 32 l.?
- 7) Ile dkg. 2 kg., 6 kg., 9 kg., 5 kg. 26 dkg., 7 kg. 6 dkg.?
- 8) Ile g. 4 dkg., 12 dkg., 27 dkg., 58 dkg. 6 g.?
- 9) Przykłady na dni, tygodnie, miesiące i lata.
Na 1 miesiąc 5 złr. 45 ct.; ile na rok?
Na 1 dzień 1 złr. 25 ct.; ile na 1 tydzień; ile na 1 miesiąc?
W 1 minucie źródło daje 3 hl. 12 l. wody; ile w 1 godzinie?
- 10) Przykłady na kopy, tuziny i sztuki. Np.
1 jaje kosztuje 3 centy; ile jedna kopa? 3 kopy i 36 kóp?
1 para kosztuje 68 ct.; ile 1 tuzin?
- 11) 1 kg. kosztuje 72 ct.; ile za 4, 9, 6 kg.?
- 12) Kupił ktoś dwie suknie; na pierwszą 9 m. po 53 ct., na drugą 7 m. po 48 ct.; ile obie kosztują?
- 13) Na jedno ubranie potrzeba 12 m. 4 dm. 8 cm. materyi; ile na 6 ubrań?
- 14) Na 1 tydzień potrzeba 29 kg. 36 dkg.; ile na 8 tygodni?
- 15) Dla 1 konia potrzeba na rok 16 hl. 56 l. owsa; ile dla 4 koni?
- 16) 1 dkg. kosztuje 14 ct.; ile za 1 kg., 3 kg., 7 kg., 12 kg.?
- 17) 1 l. kosztuje 8 ct.; ile za 4 l., 20 l., 36 l.?
- 18) 1 cetnar węgla 34 ct.; ile za 100 cetnarów?

Cena rozkłada się na części 100ki.

- 19) 1 kg. kosztuje 25 ct.; ile za 80, 124, 360 kg.?
 20) 1 kg. kosztuje 35 ct.; ile za 18, 74, 316 kg.?
 Po 25 ct. i po 10 ct.
 21) 1 l. kosztuje 76 ct.; ile za 24 l.? 120 l.?
 Po 75 ct. i po 1 ct.
 22) 1 m. kosztuje 65 ct.; ile za 16 m.?
 Po 50, 10 i 5 ct.
 23) 1 libra kosztuje 20 ct.; ile za 35 liber, 125 liber?
 24) 1 litr kosztuje 49 ct.; ile za 15 l., 86 l., 128 l.?
 25) 1 m. 2 złr. 27 ct.; ile za 24 m., 58 m.?
 Po 2 złr., $\frac{1}{4}$ złr. i 2 ct.
 26) 1 hl. kosztuje 4 złr. 53 ct.; ile za 26 hl.?

II. Wniosek z wielości na jedność.

- 1) 8 hl. kosztuje 112 złr.; ile 1 hl.?
 ($\frac{1}{8}$ część 80 i 32).
 2) 4 konie kosztowały 544 złr.; ile 1 koń?
 3) W 9 dniach młyn zmełł 216 hl. żyta; ile w 1 dniu?
 4) W 6 dniach zarobił robotnik 9 złr. 36 ct.; ile
 w 1 dniu? Pisemnie w centach 936 i dziesiętnie
 936 złr.

Przy ustnym rachunku ułatwienia:

- 5) W 20 tygodniach spalono 320 l.; ile w 1 tygod.?
 ($\frac{1}{10}$ potem $\frac{1}{2}$).
 6) Za 12 złr. otrzymano 144 kg.; ile za 1 złr.?
 ($\frac{1}{3}$ potem $\frac{1}{4}$).
 7) Za 15 m. zapłacono 61 złr. 80 ct.; ile za 1 m.?
 ($\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{5}$).
 8) 1 hl. kosztuje 34 złr.; ile 1 l.? (Ile złr. 1 hl. tyle
 centów 1 l.).

- 9) 1 cetnar 136 złr.; ile 1 kg.?
 10) 1 ha. 650 złr.; ile 1 a., ile 1 m².?
 11) 1 m. kosztuje 4¹/₂ złr.; ile 1 dm., ile 1 cm.?
 12) 1 hl. 86 złr.; ile 1 l.? (Ile złr. hl., tyle ct. litr).
 13) 1 hl. 125 złr.; ile 1 l.?
 14) 1 kg. 18 złr. 75 ct.; ile 1 dkg.? (18³/₄ ct.).
 15) 9 m. kosztuje 58 złr. 50 ct.; ile 1 m.?
 16) 7 hl. kosztuje 73 złr. 78 ct.; ile 1 hl.?
 17) Za 8 złr. otrzyma się 129 kg. 92 dkg; ile za 1 złr.?
 18) Od 100 złr. jest 5 złr. dochodu; ile od 1 złr.?

III. Wniosek z wielości na inną wielość.

1. Za 8 krów zapłacono 448 złr.; ile za 5 krów?

Ustnie i pisemnie.

Za 1 krowę: $448 \text{ złr.} : 8 = 56 \text{ złr.}$

$$\begin{array}{r} 40 \\ \hline 48 \\ 48 \\ \hline \end{array}$$

Za 5 krów: $\frac{56 \text{ złr.} \times 5}{280 \text{ złr.}}$

3. W 12 dniach utkała maszyna 432 m.; ile metrów w 25 dniach?
 3. W 3 miesiącach wydano 263·25 złr.; ile potrzeba na 8 miesięcy?
 4. Za 8 m. zapłacono 32 złr. 80 ct.; ile za 14 m. 2 dm. 4 cm.? Pytania zasadnicze znane z poprzedniego. Notować należy na tablicy:

1 m.	4 złr. 10 ct.
1 dm.	41 ct.
1 cm.	4·1 ct.
Za 14 m. =	57 złr. 40 ct.
„ 2 dm. =	82 ct.
„ 4 cm. =	16·4 ct.
Razem	58 złr. 38·4 ct.

5. 6 hl. — 45 złr.

15 hl. 12 l. — ?

6. 7 m. — 54 złr. 60 ct.

6 m. 4 dm. — ?

7. Zmieszano 8 kg. po 5·46 złr. i

7 kg. po 4·14 złr.; ile kosztuje 1 kg.
mieszaniny?

8. Za 9 m. zapłacono 58 złr. 50 ct.; ile za 12 m.
6 dm.

9. 100 złr. dają 4 złr. dochodu; ile 1 złr.?

10. 100 złr. dają 5 złr. dochodu; ile 36 złr.?

11. 100 złr. dają 5 złr. dochodu; ile 345 złr.?

Od 300 złr. jest 15 złr. dochodu

od 45 złr. jest 2·25 złr. „ (45 razy po 5 ct.)

Od 345 złr. jest 17·25 złr. dochodu.

12. Dla 2 żołnierzy starczy zapas mąki na 81 dni;
dla 3 żołnierzy na ile dni?

13. Sprzedano 4 hl. wina po 36 złr.

3 hl. „ „ 42 złr.

5 hl. „ „ 56·4 złr.; po ile złr.

wypada 1 hl. wina w przecięciu? (Pisemnie).

14. Mięsza ktoś 8 kg. kawy po 1.72 złr.

12 kg. „ „ 1.62 złr.; ile kosztuje

1 kg. mięszaniny?

15. Za 1 m. 2 dm. zapłacono 4 złr. 56 ct.; ile za-

płacić należy za 2 m. 3 dm.? Ustnie i pisemnie.

Przykłady te mają służyć za wskazówkę, ilorazie główne odróżniać należy rodzaje zagadnień. Przerabiać je należy ustnie i pisemnie; a jeżeli ustny rachunek jest żmudny, tylko pisemnie.

Co się tyczy ułamków zwyczajnych na tym stopniu średnim, należy pamiętać, że zakres wyłożonych wiadomości stopnia poprzedniego nie ulega zmianie. Przy każdej sposobności niech nauczyciel ćwiczy i utrwała nabyte wiadomości z poprzedniego stopnia.

Przy obliczaniu ceny towaru, gdy np. cena podana jest za 1 hl. 7 złr. 25 ct., niechaj uczeń 25 centów wyrazi w ułamku złotego i oblicza cenę wielości; również gdy miary i wagi sprowadzić się dadzą na liczby ułamkowe, należy to przy obliczaniu uwzględniać, np. zamiast 3 kg. 50 dkg. wziąć $3\frac{1}{2}$ kg., zamiast 4 hl. 75 l. wziąć $4\frac{3}{4}$ hl. itp.





CZEŚĆ IV.

Zakres liczb po za **1000**.

Na tym stopniu nauki uczy się czterech działań rachunkowych w dalszym zakresie liczb *a)* liczbami całkowitymi, *b)* ułamkami dziesiętnymi, *c)* liczbami wielorakimi i *d)* ułamkami zwykłymi z pamięci i pismiennie.

Danie pojęcia liczb wyższego rzędu.

A) Tysiące.

1. Nauczyciel w podobny sposób, jak przy liczbie 1000 postępuje tu przy liczbie 10000.
Nawiązuje się rzecz do znanąj prawdy, że 10 setek = tysiąc = 1000; wyjaśnia dalej:
20 setek = dwa tysiące = 2000
30 setek = trzy tysiące = 3000
itd. do 10 tysięcy = 10000 = jedna dziesiątka tysięcy.
2. Czytanie i pisanie liczb 4cyfrowych i rozkładanie tychże na tysiące, setki, dziesiątki i jednostki. Np. Przeczytać 5326 i rozłożyć na składniki. Pytanie o miejsce dla jednostek wyższego rzędu.
3. Zastosowanie do miar np.

Ile g. czyni 4 kg., 6 kg., 9 kg., 5 kg. 318 g.,
7 kg. 810 gr.?

Ile mm. zawierają 3 m., 7 m., 8 m., 5 m. 678
mm., 3 m. 4 dm. 5 cm. 6 mm.?

B) Dziesiątki tysięcy.

- 10 tysięcy = 1 dziesiątka tysięcy = 10000
20 tysięcy = 2 dziesiątki tysięcy = 20000 itd. do
100000.
- Czytanie i pisanie liczb 5cyfrowych i rozkładanie
tychże na części np.
72415 = 7 dz. tys., 2 tys., 4 set., 1 dz., 5 jed.
= 72 tys. 415 jed.
Pytanie, na którym miejscu stoją dziesiątki ty-
sięcy itd.

C) Setki tysięcy.

- 10 dzies. tysięcy = 1 setka tysięcy = 100.000
20 " " = 2 setki " = 200.000
30 " " = 3 setki " = 300.000 itd.
- Czytanie, pisanie i rozkładanie liczb 6cyfrowych.

D) Miliony.

- 10 setek tysięcy = 1 milion = 1,000.000
20 setek tysięcy = 2 miliony = 2,000.000 itd.
- Czytanie, pisanie i rozkładanie liczb 7cyfrowych.
Nauczyciel kręśli na tablicy tabelę:

set.	dz.	jed.	setki	dzies.	jed.	setki	dzies.	jed.	setki	dziesiątki	jednostki
tysięcy			setki	dzies.	jed.	setki	dzies.	jed.	setki	dziesiątki	jednostki
m i l i o n ó w						tysięcy			setki	dziesiątki	jednostki
					2	8	5	3	6	4	7

8 1 0 6 5 4 2

i dyktuje uczniom różne liczby do napisania pod pierwszą liczbą w tabeli umieszczoną.

Pisemnie tysiące oddziela się od setek kropką u dołu, a miliony przecinkiem.

Pisanie cyframi rzymskimi:

1 = I 10 = X 100 = C 1000 = M

5 = V 50 = L 500 = D

Znaki powtarza się:

w 2 3 20 30 200 300

II III XX XXX CC CCC

Mniejszy znak przed większym znaczy odejmowanie:

IV IX XL XC CD CM

4 9 40 90 400 900

Mniejszy znak po większym znaczy dodawanie:

VI VII VIII XI XII XIII XIV XV

6 7 8 11 12 13 14 15

LV LX CLXV MDCCCXCI

55 60 165 1891

Ćwiczenia w pisanu liczbami rzymskimi.

I. Dodawanie.

Ustny rachunek w zakresie liczby 1000 z roku przeszłego, i dodawanie łatwe pełnych tysięcy etc. Inne zadania tylko pisemnie np.

3684 złr.

596 „

10792 „ ?

II. Odejmowanie.

Ustny rachunek w zakresie 1000, i odejmowanie pełnych tysięcy. Pisemny rachunek doprowadza się do odejmowania przez dopełnianie.

Najpierw na przykładzie

$$\begin{array}{r} 5864 \\ - 3523 \\ \hline \end{array}$$

potém na przykładzie

$$\begin{array}{r} 3423^{10} \\ - 1758 \\ \hline \end{array}$$

Wyjaśnić należy, że gdy do odjemnej i odjemnika doda się 10, różnica pozostanie ta sama np.

$$\begin{array}{r} 59 \\ 17 \\ \hline 42 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 59 + 10 = 69 \\ 17 + 10 = 27 \\ \hline 42 \end{array}$$

Owe 10 dodaje się w odjemnej do jednostek a w odjemniku do dziesiątki itd.

III. Mnożenie.

Ustnie przeważnie w szczuplejszym zakresie liczb, nadarżających się w życiu praktyczném, pisemnie zaś w nieograniczonym zakresie. Na uwagę zasługuje mnożenie przez 10, 100, 1000, 30, 400, 6000 co do formy zewnętrznej rachowania, tudzież mnożenie liczb, które mają na końcach jedno lub więcej zer np.

$$\begin{array}{r} 374 \times 400 \\ \hline 149600 \end{array} \qquad \text{i} \qquad \begin{array}{r} 3200 \times 60 \\ \hline 192000 \end{array}$$

IV. Dzielenie.

Ustny rachunek z zakresu liczb 1000. Pisemnie przeważnie w znaczeniu mieszczenia.

Jeżeli dzielnikiem jest liczba 15, 16, 17, 18, 19, dochodzi się ilorazu próbując, ile razy 20 mieści się w dzielnej, więc 2 w pierwszej lub w pierwszych dwóch cyfrach dzielnej. Jeżeli dzielnikiem jest 35, 36, 37, 38, 39, próbuje się, ile razy 4 mieści się w pierwszej, lub pierwszych dwóch cyfrach dzielnej. Dla pewności, czy może nie pójdzie jeszcze raz więcej razy, mnoży się dzielnik z pamięci i stwierdza iloraz. Jeżeli w przykładzie $1312:27$ uczeń powie 2 w 13 mieści się 6 razy i 6 napisze w ilorazie, daje tym sposobem dowód, że nie umie dzielić.

Uwzględnić należy już na tym stopniu nauki dzielenie przez 100, 1000, 200, 4000; że potrzeba tylko odciąć pewną liczbę cyfer etc.

Przykłady na mnożenie i dzielenie wedle dawniejszych z roku przeszłego łatwo nauczyciel układać może.

Mnożenie.

1. 1 ha. pola kosztuje 378 złr.; ile 246 ha.?
2. 1 hl. żyta waży 76 kg.; ile 318 hl.?
3. 1 krowa daje rocznie 1530 l. mleka; ile da 24 krów?

Przy mnożeniu ściśle należy trzymać się wniosku i nie pozwolić na bezmyślne przedstawianie czynników.

Dzielenie.

1. Do 1 beczki wejdzie 154 l.; ile beczek trzeba na 13244 litrów?
2. W szkółce jest 45144 drzewek w 108 rzędach; ile w 1 rzędzie?

Ułamki dziesiętne.

1. Ponieważ w IIIciej części wzięto dopiero 2 miejsca dziesiętne, więc tu z początku dopełnia się naukę do 3go miejsca wedle znanėj metody, używając działań z liczbami wielorakiemi.

Np. jak napisać dziesiętnie: 4 m. 5 dm. 6 cm. 8 mm.? Potém przerobić z tysięcznemi częściami kilka działań.

2. Nauka rozszerza się do części jeszcze mniejszych. Na przykładzie 444·4444 etc. wyjaśnić teraz należy, jak to od kropki ku prawej stronie cząstki 10 razy zmnniejszają się i jakie nazwy mają.

3. Ćwiczenie w czytaniu i pisanii. Np.

4·153 ma się czytać:

a) 4 całe 1 dziesiąta 5 setnych 3 tysięczne i

b) 4 całe 153 tysięcznych.

Przeczytać 0·016, 0·0036 itp.

4. Jak zmieni się wartość ułamka dziesiętnego, jeżeli kropkę posunie się o 1 lub więcej miejsc ku prawej lub ku lewej stronie?

Na przykładzie 32·46 uczy nauczyciel, że gdy napiszemy 324·6 wszystko powiększyło się 10 razy, a mianowicie z 3 dź. otrzymano 3 setki, z 2 jed. 2 dzies. itd. Czy wartość liczby 32·46 zmieni się, jeżeli napiszemy 32·460 i dla czego nie?

Tak samo co do posunięcia o 2 miejsca ku prawej stronie, tudzież co do posuwania kropki ku lewej.

Prawidło stąd wysnute należy zaraz zastosować do zamiany np. kg. na dkg.; 3·782 kg. ile dkg.? i odwrotnie 5246 dkg., ile to kg.? itp.

5. Napisanie dziesiętnie w metrach:

4 m. 5 dm. 6 cm. 7 mm. = ? m.
w kg.: 18 kg. 15 dkg. 6 g. 7 dg.
w hl.: 36 hl. 26 l. 5 dl.
w ha. { 6 ha. 18 a. 36 m².
 { 3 ha. 9 a. 5 m².

6. Rozgatunkować:

5·46282	kilometrów	4856326	mm.
18·359	m.	93256	dkg.
24·5147	kg.	123456	g.
28·4153	hl.	2458	l.

I. Dodawanie ułamków dziesiętnych.

Dobrze jest łączyć dodawanie liczb wielorakich z dodawaniem dziesiętnych ułamków, to też można na dwa sposoby następujące przykłady wykonywać.

315·56 zlr.	18·465 m.	29·186 kg.
429·72 zlr.	29·636 m.	54·079 kg.
<u>906·38 zlr.</u>	<u>0·255 m.</u>	<u>0·75 kg.</u>
35 hl. 37 l. 5 dl.	56 ha. 73 a. 75 m ² .	
81 hl. 12 l. 6 dl.	46 ha. 36 a. 52 m ² .	
7 hl. 8 l. 4 dl.	72 ha. 7 a. 8 m ² .	
22 l. 5 dl.		

II. Odejmowanie ułamków dziesiętnych.

Taki sam sposób :

— 359 złr. 88 ct. i dziesiętnie.

2138 kg. 46 dkg. 5 g.

— 979 kg. 79 dkg. 6 g. i dziesiętnie.

72 hl.

— 3 hl. 18 l. 5 dl. i dziesiętnie.

4 kg.

— 1 kg. 63 dkg. 5 g. i dziesiętnie.

III. Mnożenie ułamków dziesiętnych.

Naukę mnożenia ułamka dziesiętnego przez liczbę całą przeprowadzono w części trzeciej. Teraz ćwiczy się uczniów w mnożeniu przez liczby 2cyfrowe np. 136·75 złr. $\times$ 34 zwracając przytém uwagę na to, że w iloczynie odcina się tyle miejsc, ile ich ma mnożna. Potém można przejść do mnożenia ułamka dziesiętnego przez ułamek dziesiętny.

Wychodzi się, jak zwykle, od przykładu:

Jeżeli 1 hl. kosztował 8·32 złr.; ile zapłaci się za 4·6 hl.? Wniosek będzie: za 4·6 hl. zapłacić należy 4·6 razy po 8·32 złr.; więc 8·32 złr. trzeba pomnożyć przez 4·6. Gdybyśmy nie 4·6 hl., lecz 46 hl. kupili, zapłaconoby

$$\begin{array}{r}
 8\cdot32 \text{ złr.} \times 46 \\
 \hline
 4992 \\
 3328 \\
 \hline
 382\cdot72 \text{ złr.}
 \end{array}$$

tj. sumę 10 razy większą, albowiem 46 hl. to jest 10 razy tyle co 4·6 hl. Chcąc otrzymać cenę za 4·6 hl., należy iloczyn 382·72 zł. zmniejszyć 10 razy, co uskuteczni się przez posunięcie kropki dziesiętnej o jedno miejsce ku lewej stronie i otrzymamy 38·272 złr.

Widzimy tedy, że $8\cdot32 \times 4\cdot6 = 38\cdot272$.

Iloczyn ma 3 miejsca dziesiętne a mnożna i mnożnik razem także 3 miejsca. Stąd pravidło na mnożenie dziesiętnego ułamka przez ułamek dziesiętny: „Mnoży się bez względu na kropki tak, jak całe liczby, a w iloczynie odcina tyle miejsc, ile mają mnożna i mnożnik razem“.

Przykłady.

1. 1 m. kosztuje 3 złr. 36 ct.; ile za 8 m. 5 dm. 5 cm.?
2. 1 hl. kosztuje 9 złr. 45 ct.; ile za 18 hl. 24 l.?
3. 1 kg. kosztuje 4 złr. 75 ct.; ile za 9 kg. 32 dkg.?
4. Za 1 złr. otrzyma się 2 m. 4 dm. 6 cm.; ile za 12 złr. 50 ct.?
5. W 1 godzinie pociąg przebiegł 24·125 kilometrów; ile w 2 godz. 24 minutach? (6 minut = $\frac{1}{10}$ godz. 24 minut = $\frac{4}{10}$ godz.).
6. Nauczyciel nauczy obliczenia powierzchni prostokąta i zastosuje tu dziesiętne ułamki.
Np. Ile zapłaci się za miejsce pod budynek 48·6 m. dł. i 36·4 m. szerokie licząc 1 m². po 3 złr. 25 centów?

$$\begin{array}{r}
 48\cdot6 \times 36\cdot4 \\
 \hline
 1944 \\
 2916 \\
 1458 \\
 \hline
 \end{array}$$

$$1769\cdot04 \text{ m}^2.$$

$$1 \text{ m}^2. \text{ kosztuje } 3\cdot25 \text{ złr.}$$

$$1769\cdot04 \text{ m}^2. \quad ?$$

Wniosek będzie: trzeba 3·25 złr. pomnożyć przez 1769·04. Uczeń pisze:

$$\begin{array}{r}
 3\cdot25 \text{ złr.} \times 1769\cdot04 \\
 \hline
 884520 \\
 353808 \\
 \hline
 530712 \\
 \hline
 5749\cdot3800 \text{ złr.} = 5749 \text{ złr. } 38 \text{ ct.}
 \end{array}$$

Nauczyciel poucza, że przy pisemnym rachunku można 2gą liczbę mnożyć przez pierwszą.

To samo zadanie przerabia się jeszcze innym sposobem, w którym później należy często ćwiczyć.

$$\underline{1769\cdot04 \text{ m}^2. \text{ po } 3\cdot25 \text{ złr., czyli } 3\frac{1}{4} \text{ złr.}}$$

Gdyby 1 m². kosztował 1 złr., to cały plac kosztowałby tyle złr., ile metrów kwadratowych, więc 1768·04 złr. Po 3 złr. kosztować będzie 3 razy tyle a po $\frac{1}{4}$ złr., czwartą część. Forma rachunku będzie taka:

$$\begin{array}{r}
 1769\cdot04 \text{ m}^2. \text{ po } 3\frac{1}{4} \text{ złr.} \\
 \hline
 5307\cdot12 \text{ złr. po } 3 \text{ złr.} \\
 442\cdot26 \text{ złr. po } \frac{1}{4} \text{ złr.} \\
 \hline
 5749\cdot38 \text{ złr. po } 3\frac{1}{4} \text{ złr.}
 \end{array}$$

IV. Dzielenie ułamków dziesiętnych.

1. Rozpoczyna się od dzielenia przez liczbę całą np. Za 4 ctr. kawy zapłacił kupiec 562·56 złr., ile za 1 centnar?

2. Ile kosztuje 1 hl. pszenicy, jeżeli za 3·2 hl. zapłacono 29·44 złr.?

Wniosek doprowadzi do rozumowania: trzeba 29·44 złr. podzielić przez 3·2.

29·44 przez 32 potrafi uczeń podzielić. Trzeba teraz wyjaśnić, jaki błąd popełni się, jeżeli zamiast przez 3·2 podzieli się przez 32. Okazujemy to na przykładzie innym

$$\text{Np. } \left\{ \begin{array}{l} 24 : 6 = 4 \\ 240 : 60 = 4 \end{array} \right\} \text{ nie zmienia się}$$

$$\text{ale } \left\{ \begin{array}{l} 240 : 6 = 40 \\ 240 : 60 = 4 \end{array} \right\} \text{ zmienia się iloraz}$$

Kiedyż tedy iloraz nie zmienia się? Więc coś trzeba zrobić z dzielną, jeżeli dzielnik pomnożono przez 10, aby iloraz pozostał ten sam? Tak to nauczyciel naprowadzi ucznia, że

29·44 złr. : 3·2 podzieli się tak :

$$294·4 : 32 = 9·2 \text{ złr.}$$

$$\begin{array}{r} 288 \\ \hline \end{array}$$

$$64$$

$$\begin{array}{r} 64 \\ \hline \end{array}$$

Więc 1 hl. pszenicy kosztował 9·2 złr.

Prawidło: Przy dzieleniu przez dziesiętny ułamek, zamienia się *dzielnik na liczbę całą*, opuszczając w nim kropkę, a dzielną przez posunięcie kropki ku ręce prawej w równy się sposób powiększa, jak to się stało z dzielnikiem. Dzieci takiej długiej definicyi nie mają uczyć się na pamięć, lecz na pytania częściowe odpowiadać, dla czego tak się robi?

Inny potem daje się przykład na takie dzielenie, gdzie dzielną trzeba dopisać jeszcze 0 np.

$$\begin{array}{r} 248·3 : 3·25 = \\ \hline \end{array}$$

$$24830 : 325 =$$

Wnioskowanie.

W rachunkach wnioskowania ćwiczy się uczniów ustnie i pisemnie. Do pamięciowego rachunku należy brać zagadnienia praktyczne i to w małych liczbach,

jak one w życiu codziennem nadarzają się, zaś do pisemnego trudniejsze. Podczas ustnego rachunku częściowe wypadki notuje się na tablicy.

Na ułatwienia powinien nauczyciel przy ustnym rachunku baczność mieć uwagę, ale przy tém nie szukać sztuczek, lecz ćwiczyć w tém, co jest naturalne i odrazu w oczy bije, jeżeli tylko kiedyś było należycie wyjaśnioném.

Kilka przykładów:

1. Za 1 kg. zapłacił kupiec 9 złr. 52 ct.; ile za 36 kg.?

Ustnie: 36 razy po 9 złr., i 36 razy po $\frac{1}{2}$ złr. + 36 razy po 2 centy.

2. W 24 godzinach źródło dało 206 hl. 88 l.; ile w 1 godzinie?

Ustnie: Najpierw w 6 godz.... $\frac{1}{4}$ część 206 hl. i $\frac{1}{4}$ część 88 l. = 51.72 hl.; w 1 godz. $\frac{1}{6}$ część 51.72 hl. Rachuje się:

$\frac{1}{6}$ część z (48 hl. + 360 l. + 12 l.) = 8 hl. 62 l. Pisemnie bardzo prosty rachunek:

$$208.88 \text{ hl.} : 24 =$$

3. Z 3 ha. zebrano 85 hl. 50 l. żyta; ile żyta zebrano z jednej części tego pola, która obejmowała 2 ha. 18 a., i ile złr. otrzymano za żyto, jeżeli je sprzedano po $7\frac{1}{2}$ złr. za 1 hl.?

Rachunek ten przeprowadzić należy ustnie, notując wszystkie wypadki na tablicy, a potem wedle formy pisemnej. Wnioski są znane. Przedstawimy tu tylko główne części rachunku:

3 ha. 85 hl. 50 l.

1 ha. 27 hl. 50 l. = $28\frac{1}{2}$ hl.

1 a. $28\frac{1}{2}$ l.

2 ha. 57 hl.
 18 a. 5 hl. 13 l.

18 razy po $28\frac{1}{2}$ l. rachują: 2 razy po $28\frac{1}{2}$ =
 57 l., a 18 razy po $28\frac{1}{2}$ jest.... 9 razy po 57.
 Więc z 2 ha. 18 a. zebrano 62 hl. 13 l.

Za 62 hl. 13 l. po $7\frac{1}{2}$ złr.?

Za 62 hl. po $7\frac{1}{2}$ złr. = 465 złr. (62×7 i $62 \times \text{po } \frac{1}{2}$).
 za 13 l. po $7\frac{1}{2}$ ct. = 97 $\frac{1}{2}$ ct.

Za 62 hl. 13 l. = 465 złr. 97 $\frac{1}{2}$ ct.

Pisemny rachunek.

3 ha. 85·50 hl.
 2·18 ha. ?

85·5 hl. : 3 = 28·5 hl. z 1 ha.

6
25
24
15
15

28·5 hl. $\times$ 2·18
2280
285
570

62·130 hl. z 2·18 ha.

62·13 hl. po $7\frac{1}{2}$ złr.

434·91 złr.	po 7 złr.
31·065 złr.	po $\frac{1}{2}$ złr.
465·975 złr.	po $7\frac{1}{2}$ złr.

Ustny rachunek zgadza się z pisemnym.

4. Ile kosztuje 3 kg. 28 dkg. kawy po 1 złr. 75 ct. za kg.?

3·28 kg. po 1 złr. 75 ct.	
3·28 złr. po 1 złr.	
1·64 złr. po	50 ct.
0·82 złr. po	25 ct.
5·74 złr. po 1 złr. 75 ct.	

5. Ile zapłaci się za 35 m. 6 dm. sukna po 2 złr. 45 ct. za metr?

35·6 m. po 2 złr. 45 ct.?	
71·2 złr. po 2 złr.	
8·9 złr. po	25 ct. ($\frac{1}{4}$)
7·12 złr. po	20 ct. ($\frac{1}{5}$)
87·22 złr. po 2 złr. 45 ct.	

6. Ile dochodu od 2446 złr. po 4 $\frac{0}{10}$ za 1 rok? (wyjaśnienie rzeczowe).

Ustnie: Od 100 w 1 roku 4 złr. dochodu

Od 24 setek	96 złr.
od 46 złr. po 4 ct.	1 złr. 84 ct.
Od 2446 złr.	97 złr. 84 ct.

Pisemnie: 100 złr. w 1 r. 1 złr. po 1 $\frac{0}{10}$

1 złr. w 1 r. 1 ct. po 1 $\frac{0}{10}$

Zasady tej nauczyć trzeba.

Jeżeli kapitał umieszczony jest na 1 $\frac{0}{10}$, to od 1 złr. jest dochodu 1 cent. Ile złr. kapitału, tyle centów dochodu.

Od 2446 złr. będzie po 1 $\frac{0}{10}$ dochodu 2446 centów czyli 24·46 złr. Po wyjaśnieniu takim rachunek ma formę następującą:

24·46 złr. dochodu po 1⁰/₀ za 1 rok

97·84 złr. „ po 4⁰/₀ za 1 rok

Teraz można za 2 lata i 6 m. dochód obliczyć.

7. Ile dochodu od 316 złr. po 5⁰/₀ za 2 lata 6 m.?

Forma rachunku:

3·16 złr. doch. po 1⁰/₀ za 1 rok

15·80 złr. „ po 5⁰/₀ za 1 rok

31·60 złr. „ po 5⁰/₀ za 2 lata

7·90 złr. „ po 5⁰/₀ za 6 m. ($\frac{1}{2}$ roku)

39·50 złr. „ po 5⁰/₀ za 2 lata 6 m.

Liczby wielorakie nie należące do systemu metrycznego.

Cztery działania rachunkowe liczbami wielorakimi systemu metrycznego, z wyjątkiem mieszczącego, przerabiały dzieci już przy sposobności nauki ułamków dziesiętnych. W rozdziale tym podaje się wskazówki co do liczb wielorakich nie należących do układu metrycznego. Prócz liczb wielogatunkowych opierających się na podziale czasu inne nie zasługują na tym stopniu nauki na uwzględnienie. Nowo wprowadzony podział papieru zasadza się na systemie metrycznym, albowiem 1 bela = 10 ryzom, 1 ryza = 10 librom, 1 libra = 10 składkom a 1 składka = 10 arkuszom.

Ćwiczenia w tym rozdziale są następujące:

I. Zamiana gatunku wyższego na niższy.

Powtarza się:

1. *Zamiana złr. na centy,*
metrów na dm., cm., mm.
centnarów (q) na kg., dkg., i g.
hl. na litry.

ha. na ary, metry kwadratowe.
ryzy na bele, libry, składki i arkusze.

2. *Nauka zamiany wielorakich liczb czasu.*

1 rok = 12 m., 1 m. = 30 dni, 1 dzień = 24 godz. i 1 godz. = 60 minut.

Uczymy tu, że zamiennikiem należy mnożyć. Np.

1) 5 lat 4 m. ile to dni?

$$\begin{array}{r}
 5 \text{ lat} \times 12 \\
 \hline
 60 \text{ m.}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 60 \text{ m.} \\
 + 4 \text{ m.} \\
 \hline
 64 \text{ m.} \times 30 \\
 \hline
 1920 \text{ dni}
 \end{array}$$

2) 6 dni 8 godz. 15 minut na minuty.

$$\begin{array}{r}
 6 \text{ dni} \times 24 \\
 \hline
 144 \text{ godz.} \\
 + 8 \text{ godz.} \\
 \hline
 152 \text{ godz.}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 152 \text{ godz.} \times 60 \\
 \hline
 9120 \text{ min.} \\
 + 15 \text{ min.} \\
 \hline
 9135 \text{ minut.}
 \end{array}$$

II. Rozgatunkowanie.

Np. 3·48 lat ile to lat, mieś., dni, godz. i minut.

$$\begin{array}{r}
 0\cdot48 \text{ lat} \times 12 \\
 \hline
 96 \\
 48 \\
 \hline
 5\cdot76 \text{ m.}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 0\cdot76 \text{ m.} \times 30 \\
 \hline
 22\cdot80 \text{ dni}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 0\cdot8 \text{ dni} \times 24 \\
 \hline
 19\cdot2 \text{ godz.}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 0\cdot2 \text{ godz.} \times 60 \\
 \hline
 12\cdot0 \text{ minut}
 \end{array}$$

Więc 3·48 lat = 3 lata 5 mieś. 22 dni 19 godz. 12 minut.

III. Zamiana gatunku niższego na wyższy.

1. Ile bel, ryz, liber, składek i arkuszy zawiera 63278 arkuszy?

Ponieważ tu zamiennikiem jest liczba 10, więc

$$63278 \text{ ark.} = 6327 \text{ skł. i } 8 \text{ ark.}$$

$$6327 \text{ skł.} = 632 \text{ lib. i } 7 \text{ skł.}$$

$$632 \text{ lib.} = 62 \text{ ryz i } 2 \text{ lib.}$$

$$63 \text{ ryz} = 6 \text{ bel i } 3 \text{ ryz}, \text{ a zatem}$$

$$63278 \text{ arkuszy} = 6 \text{ bel } 3 \text{ ryz} \text{ } 2 \text{ libry } 7 \text{ składek } 8 \text{ arkuszy.}$$

2. 2472 minut ile dni, godz. i minut?

$$2472 \text{ minut} : 60 = 41 \text{ godzin}$$

$$\begin{array}{r} 240 \\ \hline \end{array}$$

$$72$$

$$\begin{array}{r} 60 \\ \hline \end{array}$$

$$12 \text{ min.}$$

$$41 \text{ godzin} : 24 = 1 \text{ dzień}$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \hline \end{array}$$

$$17 \text{ godz.}$$

$$2472 \text{ minut} = 1 \text{ dzień } 17 \text{ godz. } 12 \text{ minut.}$$

IV. Dodawanie i odejmowanie.

$$6 \text{ dni } 18 \text{ god. } 45 \text{ min.}$$

$$5 \text{ " } 21 \text{ " } 36 \text{ "}$$

$$3 \text{ " } 14 \text{ " } 15 \text{ "}$$

$$24 \text{ lat } 5 \text{ m. } 18 \text{ dni } 16 \text{ god.}$$

$$13 \text{ " } 6 \text{ " } 24 \text{ " } 10 \text{ "}$$

$$7 \text{ " } 3 \text{ " } 15 \text{ " } 22 \text{ "}$$

$$\begin{array}{r} 1 \text{ rok } 4 \text{ mieś. } 8 \text{ dni} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8 \text{ " } 16 \text{ "} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \text{ dni } 6 \text{ god. } 30 \text{ min.} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8 \text{ " } 12 \text{ " } 45 \text{ "} \\ \hline \end{array}$$

Ważne są rachunki napisania daty i obliczenia wieku osoby, której data urodzenia itd. jest podana.

N. p.:

1. Jaką pisano datę w 1867 lat 5 m. i 13 dni po narodzeniu Chrystusa?

Odp.: 14go Czerwca 1868. roku. Dla czego?

2. Ile lat miesięcy i dni od narodzenia Chrystusa minęło, gdy pisano datę 14go Lipca 1891?

Odp.: 1890 lat 6 mies. 13 dni. Dla czego?

3. Jak długo żyła osoba, która urodziła się 16 Lutego 1846. roku, a umarła 1go Stycznia 1870. r.?

$$\begin{array}{r}
 \dagger \quad 1869 \text{ lat } 0^{\overset{12}{\text{m.}}} \quad 0^{\overset{30}{\text{dni}}} \\
 * \quad 1845 \quad \text{ „ } \quad 1 \quad \text{ „ } \quad 15 \quad \text{ „ } \\
 \hline
 23 \text{ lat } 10 \text{ m. } 15 \text{ dni}
 \end{array}$$

4. Jaka była data urodzin, jeżeli osoba umarła dnia 12. Maja 1876. r., mając 18 lat 4 m. 18 dni?

$$\begin{array}{r}
 \dagger \quad 1875 \text{ lat } 4^{\overset{12}{\text{m.}}} \quad 11^{\overset{30}{\text{dni}}} \\
 \text{— wiek} \quad 18 \quad \text{ „ } \quad 4 \quad \text{ „ } \quad 18 \quad \text{ „ } \\
 \hline
 1856 \text{ lat } 11 \text{ m. } 23 \text{ dni}
 \end{array}$$

Data była 24go Grudnia 1857. roku.

Uwaga. W dokładnych rachunkach uwzględnia się liczbę dni miesiąca, a zwłaszcza liczbę dni w Lutym.

V. Mnożenie liczb wielorakich.

1. Z miasta M. do N. podróż koleją trwa 12 godz. 45 min.; ile czasu spędził w podróży konduktor kolejowy, który tę drogę odbył 365 razy?

$$\begin{array}{r}
 2 \text{ dni } 4 \text{ godz. } 18 \text{ min.} \times 6 = ? \\
 \hline
 13 \text{ dni } 1 \text{ godz. } 48 \text{ min.}
 \end{array}$$

Rachuje się osobno a wypadki podpisuje w swoim miejscu.

$$\begin{array}{rcl} \text{Np.: } 18 \text{ m.} \times 6 & & 4 \text{ godz.} \times 6 \\ \hline 108 \text{ m.} : 60 = 1 \text{ g.} & 24 \text{ godz.} & \\ 60 & + 1 \text{ godz.} & \\ \hline 48 \text{ m.} & 25 \text{ godz.} = 1 \text{ dzień} & \\ & 1 \text{ godz.} & \end{array}$$

VI. Dzielenie.

a) w znaczeniu dzielenia na części.

$$1. \quad 3 \text{ lata } 6 \text{ m. } 6 \text{ dni} : 2 = 1 \text{ rok } 9 \text{ m. } 3 \text{ dni}$$

$$\begin{array}{rcl} 2 & & \\ \hline 1 \text{ rok} & 18 \text{ m.} : 2 & \\ & 18 & \\ \hline \end{array}$$

$$2. \quad 7 \text{ lat } 0 \text{ m. } 12 \text{ dni} : 8 = 10 \text{ m. } 16 \text{ dni } 12 \text{ g.}$$

$$\begin{array}{rcl} \times 12 & & \\ \hline 84 \text{ m.} : 8 & 4 \text{ m.} \times 30 & 4 \text{ dni} \times 24 \\ 4 \text{ m.} & 120 \text{ dni} & 96 \text{ godz.} : 8 \\ & + 12 \text{ dni} & \\ & 132 \text{ dni} : 8 & \\ & 8 & \\ & \hline & 52 & \\ & 48 & \\ & \hline & 4 \text{ dni} & \end{array}$$

b) mieszczanie.

Różnogatunkowe liczby przed mieszczaniem sprowadzić należy do jednakowego gatunku. Przykłady tylko z systemu metrycznego liczb wielorakich.

$$1. \quad \text{Na 1 dzień potrzeba 8 dkg. 2 g.; na ile dni starczy 1 kg. 56 dkg. 4 g.}$$

1 kg. 56 dkg. 4 g. : 9 dkg. 2 g.

1564 g. : 92 g. = 17. *Na 17 dni.*

92

644

644

2. Ile butelek po 7 dl. z beczki, zawierającej 1 hl.
3 l. 6 dl.?

1 hl. 3 l. 6 dl. : 7 dl.

1036 dl. : 7 dl. = 148 *Więc 148 butelek.*

Ułamki zwyczajne.

W zakresie liczb od 1—100 przerabiano grupami przy liczbie 20 połówki, przy 30tu 3cie części, przy 40tu czwarte części całości itd. Dla stopnia wyższego nauki obejmującego zakres liczb po za 1000 przeznacza się z nauki ułamków zwyczajnych cztery działania zasadnicze lecz o mianownikach małych. Szczególnie ważną jest nauka mnożenia i dzielenia ułamka przez liczbę całą, dla tego, że ona stanowi fundament do pisemnego rachunku wnioskowania na jednéj kręsce poziomej. Do uzmysłowania ułamków używa się zwykle jabłka, arkusza papieru i linii.

Jakkolwiek dzieci już mają pojęcie ułamka, bo przecież już w 2gim roku nim rachowały, dobrze jest jeszcze raz naukę tę od początku przeprowadzić i przy téj sposobności rzeczy takie podnieść, o których w poprzednich latach nie było mowy.

1. Jak powstaje ułamek?

Nauczyciel dzieli jabłko na 2, potem na 4 części i zwraca uwagę na różnicę, jaka zachodzi między całem jabłkiem a częściami. Jak te części się nazywają? Następnie kręśli na tablicy linią, dzieli ją np. na 5 równych części i pokazuje, że $\frac{1}{5}$ część, $\frac{2}{5}$ części itd. tej linii są ułamekami, które w ten sposób powstały, że całość podzielono na 5 równych części i z tych wzięto 1 lub więcej.

2. Nauczyciel wywołuje uczniów do tablicy i domaga się, aby mu wskazali np. $\frac{2}{5}$ części linii, $\frac{4}{5}$ części itd. Uczeń ma dokładnie pokazywać odtąd — dotąd. Nauczyciel ma inną dużą tabelę ułamkową i na niej każe uczniom odczytywać wskazany ułamek linii itp.

3. Nauka, jak ułamek oznacza się pisemnie? Co licznik, co mianownik? Dla czego?

4. Co to właściwy ułamek, a co niewłaściwy?

5. Co to liczba mieszana?

Zanim rozpocznie się nauka czterech działań zasadniczych ułamekami zwyczajnymi, należy poprzednio pięć następujących operacyj rachunkowych wyuczyć. (Do nauki tej konieczne potrzeba uzmysłowienia na liniach, a że kręślenie tychże zabiera dużo czasu i że tablica szkolna potrzebna i do innych graficznych objaśnień, należy tedy tabelę ułamkową mieć gotową na wielkim kartonie).

1. *Zamiana liczb całych na ułamek.*

Pokazuje się całą linię i linie na części podzielone.

(Przypuśćmy, że nauczyciel tylko 6 linii nakreślił).

1 całość ma $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{6}{6}$ i $\frac{12}{12}$.

Jeżeli 1 całość ma $\frac{2}{2}$; ile połówek mają 2, 3, 5, 6 etc. całości.

Jeżeli 1 całość ma $\frac{3}{3}$; ile trzecich mają 2, 3 całości itd. aż do 12tych. *Przykłady.*

2. Zamiana liczby mieszanej na ułamek.

Ile połówek $2\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{2}$, $7\frac{1}{2}$ itd.

Ile trzecich $1\frac{2}{3}$, $3\frac{1}{3}$, $5\frac{1}{3}$

Ile czwartych $2\frac{1}{4}$, $5\frac{3}{4}$, $9\frac{1}{4}$

Ile szóstych $3\frac{5}{6}$, $8\frac{1}{6}$, $10\frac{1}{6}$

Ile dwunastych $1\frac{5}{12}$, $2\frac{1}{12}$, $3\frac{7}{12}$.

Dzieci rachują ustnie i pisemnie: np. $5\frac{3}{4}$.

Jedna całość ma $\frac{4}{4}$, 5 całości mają 5 razy po $\frac{4}{4}$, jest $20\frac{0}{4}$, a $\frac{3}{4}$ jest $23\frac{3}{4}$ i wypadek piszą obok liczby mieszanej. *Przykłady.*

3. Wylączanie całości z ułamka niewłaściwego.

Ile to całych $\frac{7}{2}$, $\frac{12}{2}$, $\frac{19}{2}$ itd.

" " " $\frac{9}{3}$, $\frac{8}{3}$, $\frac{15}{3}$, $\frac{17}{3}$ itd.

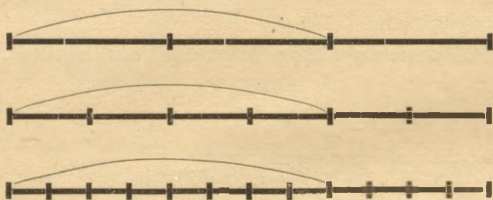
" " " $\frac{15}{4}$, $\frac{29}{6}$, $\frac{24}{12}$, $\frac{31}{12}$.

N.p. $\frac{12}{2}$ rachuje się tak: Jedna całość ma $\frac{2}{2}$, z $\frac{12}{2}$ będzie tyle całości, ile razy 2 mieści się w 12tu = 6 całości.

Przykłady ustnie i pisemnie.

4. Nauka rozszerzania ułamka.

Na tabeli ułamkowej okazuje nauczyciel np. że



łukiem oznaczone części linii są tej samej długości, a inaczej się mianują. Ustnie wygłasza się (nie pisząc cyfer) że $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ i $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$.

Następnie wywołany uczeń pisze wynik poglądu na tablicy cyframi: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ a nauczyciel przez pytania odpowiednie doprowadza do odpowiedzi, że $\frac{4}{6}$ powstało z $\frac{2}{3}$ tym sposobem, iż licznik i mianownik pomnożono przez 2.

Inny uczeń napisze $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$ i w końcu wyprowadzi się prawidło, że wartość ułamka nie zmieni się, gdy tak licznik jak i mianownik pomnoży się przez tę samą liczbę.

5. Nauka upraszczania (skracania) ułamków.

Na tym samym przykładzie i przy pomocy tych samych linii na tablicy nakreślonych wyjaśni nauczyciel,

$$\text{że } \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \quad \text{i że } \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

Po wygłoszeniu téj prawdy, okazanej na liniach, wywołany uczeń pisze to cyframi na tablicy, a nauczyciel wyjaśnia, jak z $\frac{8}{12}$ można wyrachować (bez pomocy linii), że to równe $\frac{2}{3}$.

Po należytem naprowadzeniu uczeń wypowie, że wartość ułamka nie zmieni się, gdy tak licznik jak i mianownik podzieli się przez tę samą liczbę. Zamiana taka zowie się skracaniem lub téż upraszczaniem ułamków. Przykłady.

Dodać można małą naukę o podzielności liczb przez 2, 5 i 3. Ponieważ nie bierze się ułamków o wielkich mianownikach, dzieci bez reguły na podzielność przez 3 wyrachują, że $\frac{12}{15} = \frac{4}{5}$ a nawet że $\frac{21}{35} = \frac{3}{5}$. U tak małych liczb wystarczy tabliczka mnożenia.

Dodawanie ułamków.

a) o równych mianownikach.

N. p. $\frac{1}{12} + \frac{3}{12} + \frac{5}{12} + \frac{7}{12}$. Ponieważ o tém już była mowa w części drugiej, więc teraz tylko przerabia się przykłady. Np. $3\frac{5}{12} + 7\frac{1}{12} + 18\frac{7}{12} = ?$ (w liczbach mianowanych).

b) o nierównych mianownikach (mianowniki nie mają wspólnej miary)

Przykład. Ile to jest $\frac{2}{3}$ i $\frac{3}{4}$ łokcia?

Na liniach okazuje się, że trzecie i czwarte części nie są jednakowe, że nie można ich odrazu dodać. Oba ułamki należy zamienić na jednakowe części. Pytanie tylko na jakie? Wskazuje się najpierw na $\frac{1}{3}$ linii i na $\frac{4}{12}$ części linii, posuwając na tabeli laskę prosto z góry na dół, a dzieci odpowiadają, że $\frac{1}{3}$ to tyle co $\frac{4}{12}$; następnie okazuje się, że $\frac{1}{4}$ to tyle co $\frac{3}{12}$.

Więc można 3cie i 4te części zamienić na jakie?. Zamieńmy teraz oba ułamki $\frac{2}{3}$ i $\frac{3}{4}$ na 12te części.

Zamiana: $\frac{2}{3} = \frac{4}{12}$, $\frac{3}{4}$ mają $\frac{9}{12}$.

$\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$, $\frac{3}{4}$ mają $\frac{9}{12}$.

Wypadki pisze się na tablicy i potem dodaje:

$$\frac{8}{12} + \frac{9}{12} = \frac{17}{12} = 1 \frac{5}{12}. \text{ Więc } = 1 \frac{5}{12} \text{ łokcia.}$$

Pisemny rachunek. Z poglądu wiemy, że 3cie i 4te zamienić można na 12te. Nauczyciel podaje tylko wzór rachunku:

	12	
$\frac{2}{3}$	4	$\frac{8}{\cdot}$
$\frac{3}{4}$	3	$\frac{9}{\cdot}$
		$\frac{17}{12} = 1 \frac{5}{12}$

Gdzie pisze się liczba 12? (ogólny mianownik). Co pisze się w 1ej kolumnie? Dzieci rachować mają tak: 1 całość ma $\frac{12}{12}$, $\frac{1}{3}$ część całości ma $\frac{4}{12}$, piszę w 1ej kolumnie obok $\frac{2}{3}$, liczbę 4. Potem mówi uczeń: $\frac{2}{3}$ mają 2 razy po $\frac{4}{12}$ tj. $\frac{8}{12}$ i pisze 8 w drugiej kolumnie, podkreśla i pod linijką daje kropkę. Co to ma znaczyć? Następuje dodawanie $= \frac{17}{12}$ i wyłączenie całości.

Na innych 2óch ułamkach np. $\frac{4}{5} + \frac{2}{3}$, $\frac{4}{5} + \frac{3}{2}$ naukę powtarza się, używając zawsze linii do wyśzukania mianownika wspólnego. Po *kilku dopiero* takich przykładach nauczyciel zwraca uwagę dzieci na to, że bez tabeli ułamkowej można wyrachować, na jakie części zamienić dadzą się dane ułamki o nierównych mianownikach.

Nauczyciel wypisuje ułamki dodawane np.:

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{4}, \quad \frac{3}{4} + \frac{4}{5}, \quad \frac{2}{3} + \frac{3}{5}$$

i zapytuje, jaki był wspólny mianownik? Dla 3cich i 4tych był 12, dla 4tych i 5tych był 20, a dla 3cich i 5tych był 15. Teraz wskazuje nauczyciel, że $3 \times 4 = 12$, $4 \times 5 = 20$, $3 \times 5 = 15$, a uczeń ma sam wypowiedzieć, że wspólnym mianownikiem dla 2óch danych ułamków jest iloczyn z ich mianowników. W jaki tedy sposób wyszukasz wspólny mianownik dla ułamków $\frac{1}{2} + \frac{3}{7}$? itd.

- c) *Ułamki o nierównych mianownikach, z których jeden w drugim się mieści.*

Przykład z zagadnienia pewnego:

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{12} =$$

Wedle reguły poprzedzającej bez tabeli rachowalibyśmy: mianownik wspólny jest $= 4 \times 12 = 48!$

Łatwo przecież poznać, że 4te i 12te można zamienić na same 12te. Więc wspólnym mianownikiem jest liczba 12.

Prawidło: Jeżeli jeden mianownik mieści się w drugim, to większy jest wspólnym.

Przykłady różne ustnie i pisemnie.

- d) *Ułamki o nierównych mianownikach, z których jeden w drugim nie mieści się, ale które mają wspólny dzielnik.*

Daje się zagadnienie, które prowadzi do dodania np. $\frac{3}{4} + \frac{5}{6}$. Jak wyszukać rachunkiem wspólny mianownik?

Wedle 1go sposobu byłby mianownik $4 \times 6 = 24$.

Drugiego sposobu użyć nie można, gdyż 4 w 6ciu nie mieści się. Z tabeli ułamkowej okazuje się, że 4te i 6te zamienić można na 12te. Jest to liczba mniejsza od 24; lepiej jest rachować małemi liczbami niż wielkimi, warto tedy szukać sposobu wyrachowania tego najmniejszego wspólnego mianownika. Nauka jest *wskazująca*.

Uważajcie dzieci: piszę mianowniki 4, 6 i daję obok kręskę pionową. Teraz uważam, że 4 i 6 można

podzielić przez tę samą liczbę 2. Piszę tę 2kę obok kręski i dzielę nią oba mianowniki, a wypadki piszę niżej przekreślwszy skrócone mianowniki.

$$\begin{array}{l} \text{Forma:} \quad 4, 6 \quad | \quad 2 \\ \quad \quad \quad 2, 3 \quad | \end{array}$$

Jeżeli teraz skrócone mianowniki pomnożę przez siebie i przez ową 2kę po za linią, otrzymam $2 \times 3 \times 2 = 12$ żądany mianownik wspólny.

Wywołany uczeń rachuje inne przykłady:

$$\text{n. p. } \frac{1}{5} + \frac{1}{3}, \quad \frac{m}{3} + \frac{m}{7}$$

i stwierdza na liniach, że wyszukany mianownik jest najmniejszy.

e) *Dodawanie trzech i więcej ułamków o nierównych mianownikach.*

Mianownik wspólny powinien być liczbą małą. Tabela ułamkowa na części 12te posłuży do nauki.

$$\text{N. p. } \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6}.$$

Przy pomocy tej tabeli wskazuje nauczyciel, że wszystkie te części można zamienić na 12te. Zamianę uskutecznia się znanym sposobem ustnie i pisemnie i ułamki dodaje.

Teraz nauczyć należy, jak wyrachować ogólny mianownik dla kilku ułamków, nie używając do tego tabeli?

Nauka znowu jest *wskazującą*, więc nie heurystyczną i streszcza się w trzech punktach:

1. Opuścić te mianowniki, które mieszczą się w większym.
2. Dać po prawej stronie krótką pionową i uważać, czy z pozostałych niewykręślonych mianowników dwa lub więcej można podzielić przez tę samą liczbę. Dzielnik ten napisać po prawej stronie krótki i mianowniki skracać.
3. Wszystkie mianowniki nie wykreślone przez siebie i przez dzielnik po za krótką pomnożyć, a iloczyn jest wspólnym mianownikiem.

Np. dla naszego przykładu: $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6}$.

$$\begin{array}{cccc|c}
 2, & 3, & 4, & 6 & 2 \\
 & & 2, & 3 & \\
 2 \times 3 \times 2 = 12.
 \end{array}$$

Tyle nauki dla uczniów tego stopnia wystarczy. Należy teraz ćwiczyć w tym na różnych przykładach z liczbami mieszanymi. Na wyższym stopniu nauki należy wyjaśnić, na jakiej zasadzie polega wyszukanie wspólnego mianownika.

Odejmowanie.

Ponieważ nauka sprowadzania dwóch ułamków do wspólnego mianownika potrzebna jest także do odejmowania, a w poprzednim rozdziale była podana, nie wiele tu potrzeba wskazówek. Plan nauki jest:

1. Odejmowanie ułamków o równych mianownikach.
2. Odejmowanie ułamków od całości.
3. Odejmowanie liczb mieszanych od takichże liczb, ale o tych samych mianownikach.
4. Odejmowanie ułamków o nierównych mianownikach.
5. Odejmowanie liczb mieszanych od mieszanych, ale o różnych mianownikach.

Forma rachunku np. $7\frac{3}{4}$ kg. — $5\frac{4}{5}$ kg. =?

$$\begin{array}{r}
 20 \\
 \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{r} 7\frac{3}{4} \\ - 5\frac{4}{5} \end{array} \quad \begin{array}{r} \frac{35}{15} \\ \frac{16}{5} \end{array} \\
 \hline
 1\frac{19}{20} \text{ kg.} \quad \frac{19}{20}
 \end{array}$$

Przykłady na dodawanie w połączeniu z odejmowaniem.

Mnożenie ułamka przez liczbę całą.

Że ułamek mnoży się przez liczbę całą mnożąc licznik a zostawiając mianownik ten sam, należy tylko ująć w formę prawidła, gdyż dzieci w 2^{sim} i 3^{cin} roku nauki już na okazach połówek, trzecich itd. rachowały np. 5 razy $\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$, a 4 razy $\frac{3}{4} = \frac{12}{4}$. Również i przy sprowadzaniu ułamków do wspólnego mianownika dzieci ustnie rachowały np. $\frac{3}{4}$ ile to jest 20tych? $\frac{1}{4} = \frac{5}{20}$, a $\frac{3}{4}$ zawierają 3 razy po $\frac{5}{20} = \frac{15}{20}$. Rachunek ten 3 razy po $\frac{5}{20}$ już był mnożeniem ułamka przez liczbę całą. Potrzeba tylko wysnuć prawidło do pismennego rachunku.

Wszystkie prawidła na działania ułamkowe wyprowadza się *drogą indukcyjną* a nie abstrakcyjnie. Roztrząsanie takich kwestyj jak: „co się stanie z ułamkiem, jeżeli mianownik pomnożę przez 3”? jeżeli nie jest oparte na poglądzie i tylko w myśli przeprowa-

dzane bywa, u małych dzieci żadnego pożytku nie odnosi. Zaniedbanie uzmysłowienia przy nauce ułamków jest przyczyną rażących braków u starszych uczniów, którzy nie korzystali z nauki prowadzonej wedle dzisiejszej metody, lecz może prywatnie uczyli się od osób, nie mających wyobrażenia o metodzie elementarnej.

Indukcyjna metoda wyprowadzania prawideł działań rachunkowych ułamkami polega na tém, że najpierw przedstawia się rzecz na liniach, a wynik pisze cyframi na tablicy i przez porównanie tegoż z danymi liczbami wyprowadza prawidło.

Mnożenie ułamka przez liczbę całą wedle tej metody przedstawi się sposobem następującym:

Przykład: 1 m. płótna kosztuje $\frac{3}{10}$ złr.; ile zapłaci się za 3 m.?

Wniosek prowadzi do rozumowania: „trzeba $\frac{3}{10}$ złr. pomnożyć przez 3“. Uczeń pisze $\frac{3}{10} \times 3 = ?$

Nauczyciel kręśli linią, dzieli ją na 10 równych części, oddziela 3 części łukiem i pyta się dzieci, ile to jest 3 razy po $\frac{3}{10}$? Podczas pytania zakręśla drugie $\frac{3}{10}$ i trzecie $\frac{3}{10}$. Uczeń odpowiada: 3 razy po $\frac{3}{10}$ jest $\frac{9}{10}$.

Teraz następuje napisanie tego cyframi w formie

$$\frac{3}{10} \times 3 = \frac{9}{10}$$

(czyta się $\frac{3}{10}$ pomnożone przez 3 jest $\frac{9}{10}$).

Która liczba jest mnożną, mnożnikiem, iloczynem; jaką liczbą mnożną, mnożnik? Jak iloczyn powstał? Odpow.: Licznik mnożnej pomnożono przez liczbę całą, a mianownik pozostał niezmienny. Więc jak mnoży się ułamek przez liczbę całą?

Przykłady przerabia się ustnie i pisemnie, a forma pisemnego ma być np.:

$$\frac{4}{5} \times 3 = \frac{4 \times 3}{5} = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}.$$

Liczba mieszana $2\frac{4}{5}$ mnoży się ustnie przez liczbę całą np. 3 w ten sposób, że najpierw mnoży się całości a potem ułamek.

Przy pisemnym rachunku liczbę mieszaną zamienia się najpierw na ułamek niewłaściwy.

$$\text{Np. } \frac{2\frac{4}{5} \times 3}{\frac{14}{5} \times 3 = \frac{14 \times 3}{5} = \frac{42}{5} = 8\frac{2}{5}}$$

Dzielenie ułamka przez liczbę całą.

a) *licznik podzielny przez liczbę całą.*

Przykład. Za 2 litry zapłacono $\frac{4}{5}$ złr.; ile za 1 litr? Wniosek będzie: „trzeba $\frac{4}{5}$ złr. podzielić przez 2“. Nie trudno tu okazać na liniach, że połowa $\frac{4}{5}$ jest $\frac{2}{5}$. Wynik ten wyprowadzony z obserwacyi pisze się cyframi:

$$\frac{4}{5} : 2 = \frac{2}{5}$$

i naprowadza do wyjaśnienia, jak $\frac{2}{5}$ powstały z $\frac{4}{5}$. Stąd prawidło, które tylko przy ustnym rachunku bywa uwzględnianem: Ułamek dzieli się przez liczbę całą, dzieląc jego licznik przez liczbę całą a zostawiając mianownik ten sam.

b) *licznik nie jest podzielny przez dany dzielnik.*

Przykład. Jeżeli za 2 złr. otrzyma się $\frac{3}{5}$ metra sukna, ile za 1 złr.?

Ponieważ za 1 zlr. otrzyma się połowę $\frac{3}{5}$ m., więc muszę $\frac{3}{5}$ podzielić przez 2.

Piszę tedy $\frac{3}{5} : 2 =$ i okazuję na linii



ile wynosi połowa $\frac{3}{5}$.

Jeżeli dzieci odpowiedzą połowa $\frac{3}{5}$ jest półtorą piątą, wtedy nauczyciel jedną piątą dzieli na 2 równe części i okazuje, że ona daje $\frac{2}{10}$, które wraz z jedną połową piątej części tj. z $\frac{1}{10}$ czynią razem $\frac{3}{10}$; więc połowa $\frac{3}{5}$ jest $\frac{3}{10}$.

Lepiej jest połowę $\frac{3}{5}$ przeprowadzić tak, że najpierw dzieli się $\frac{1}{5}$ na 2 równe części i z nich bierze jedną część tj. $\frac{1}{10}$; potem z drugiej piątej, a w końcu z trzeciej piątej połowę.

Otrzymawszy tym sposobem jako połowę z $\frac{3}{5}$ ułamek $\frac{3}{10}$ wynik ten dzielenia pisze się cyframi na tablicy w formie:

$$\frac{3}{5} : 2 = \frac{3}{10}$$

Przez pytania odpowiednie, która liczba jest dzielną, dzielnikiem itd. i jak iloraz powstał z dzielnej, doprowadzi się do prawidła:

Ułamek dzieli się przez liczbę całą mnożąc jego mianownik przez liczbę całą a zostawiając licznik niezmienny. Sposobu tego używa się wyłącznie przy rachunku piśmiennym.

Następują teraz liczne przykłady z uwzględnieniem liczb mieszanych.

Dzielenie liczby mieszanej przez liczbę całą.

Ustnie przerabia się przykład $5\frac{1}{4} : 3$ w ten sposób, że najpierw dzieli się liczbę całą, a resztę łączy z ułamkiem i dalej dzieli. Więc $\frac{1}{3}$ część 5 jest 1 i zostają 2, 2 i $\frac{1}{4}$ jest $= \frac{9}{4}$, 3cia część z $\frac{9}{4} = \frac{3}{4}$ a zatem $5\frac{1}{4} : 3 = 1\frac{3}{4}$.

Przy pisemnym rachunku zamienia się liczbę mieszaną na ułamek niewłaściwy i dzielenie wykonuje wedle podanego wzoru, więc np.

$$\frac{4\frac{1}{2} : 5}{\frac{9}{2} : 5} = \frac{9}{2 \times 5} = \frac{9}{10}$$

Reguła trzech wnioskowaniem przeprowadzona.

Nauka mnożenia i dzielenia ułamka przez liczbę całą jest fundamentem do nauki pisemnego rozwiązania zagadnień reguły trzech na krócie. Z początku ćwiczy się uczniów w wnioskowaniu z wielości na inną wielość z ułamkami zwyczajnymi sposobem ustnym, przy którym wypadki notuje się na tablicy, a potem uczy się pisemnego rachunku.

Za wzór posłużyć mają następujące przykłady.

Zagadnienie: Za 4 m. sukna zapłacono $13\frac{1}{5}$ złr.; ile zapłaci się za 7 m.?

Nauczyciel pisze zadanie na tablicy. Rozpoczyna od pytania: Co mamy wyrachować? Ile zapłaci się za 7 m. Nauczyciel poucza, żeby pytanie to tak pisać, aby znana ilość była na początku a pytanie na końcu. Uczeń tedy napisze

za 7 m. ? złr.

Teraz nad tym wierszem, każe nauczyciel napisać odpowiednie ilości ze zdania warunkowego, metry nad metrami, złr. nad złotymi i otrzyma:

4 m.	$13\frac{1}{5}$ złr.
7 m.	?

To są wskazówki odnoszące się do ustawienia zagadnienia. Ściśle przestrzegać tego należy, żeby zawsze nieznana ilość, którą oznacza się czasem literą X, czasem znakiem pytania, umieszczoną była w drugim rzędka na końcu.

Ustny rachunek. Pytania te same co w latach przeszłych. Co mamy wyrachować? Aby obliczyć ile za 7 m., co musisz wiedzieć? Z czego dowiesz się, ile kosztuje 1 m.? Jak? Jeżeli 4 m. kosztują $13\frac{1}{5}$ złr., to za 1 m. zapłaci się $\frac{1}{4}$ część 13 złr. i $\frac{1}{4}$ część $\frac{1}{5}$ złr. Rachować mają: $\frac{1}{4}$ część 12 złr. = 3 złr.; $\frac{1}{4}$ część $\frac{6}{5}$ złr. = $\frac{6}{20}$ = $\frac{3}{10}$ złr.; więc 1 m. kosztuje $3\frac{3}{10}$ złr. Co teraz dalej wyrachować mamy? Jak? Jeżeli 1 m. kosztuje $3\frac{3}{10}$ złr., to za 7 m. zapłaci się 7 razy po 3 złr. i 7 razy po $\frac{3}{10}$ złr. Rachujcie! Ile? Odpowiedź: $23\frac{1}{10}$ złr. Jak?

Notatki przy ustnym rachunku na tablicy szkolnej są:

4 m.	$13\frac{1}{5}$ złr.
1 m.	$3\frac{3}{10}$ złr. i w końcu
7 m.	$23\frac{1}{10}$ złr.

Teraz przystępuje się do ważnej nauki pisemnego rachunku *na krésce*.

Zadanie napisane jak wyżej:

$$\begin{array}{r} 4 \text{ m.} \qquad 13\frac{1}{5} \text{ złr.} \\ 7 \text{ m.} \qquad \qquad \times \\ \hline \end{array}$$

Wniosek ten sam co przy ustnym. Gdy dojdzie się do tego, że uczeń wypowie: muszę $13\frac{1}{5}$ złr. podzielić przez 4; każe się $13\frac{1}{5}$ zamienić na ułamek niewłaściwy, a potem przez 4 podzielić, będzie to zastósowaniem dzielenia ułamka przez liczbę całą. Uczeń napisze $\frac{66}{5 \times 4}$.

Działania nie wykonuje się, lecz dalej wnioskuje. Jeżeli za 1 m. zapłacono $\frac{66}{5 \times 4}$ złr. to za 7 m. zapłaci się 7 razy tyle, więc muszę $\frac{66}{5 \times 4}$ pomnożyć przez 7. Jak mnoży się ułamek przez liczbę całą? Gdzież więc napiszesz 7? Wypadek będzie $\frac{66 \times 7}{5 \times 4}$.

Wypadek ten jest ułamkiem, licznik składa się z dwóch liczb, które mają być pomnożone przez siebie i również mianownik jest iloczynem. Uczeń naznaczone działanie wykonuje i otrzymuje:

$$\frac{462}{20}$$

które jest ułamkiem niewłaściwym. Dla czego? Wyłącza się całości. Jak?

$$\begin{array}{r} 462 : 20 = 23\frac{2}{20} = 23\frac{1}{10} \\ \underline{40} \\ 62 \\ \underline{60} \end{array}$$

Dla czego $23\frac{1}{10}$? Powtórzenie.

Forma rachunku ma być:

$$\begin{array}{r}
 4 \text{ m.} \quad 13\frac{1}{5} \\
 7 \text{ m.} \quad x \\
 \hline
 4 \text{ m.} \dots \frac{66 \times 7}{5 \times 4} = \frac{462}{20} = 23\frac{1}{10} \text{ złr.} \\
 1 \text{ m.} \dots \\
 7 \text{ m.} \dots \quad 462 : 20 = 23\frac{1}{10} \\
 \quad \quad \quad \frac{40}{62} \\
 \quad \quad \quad \frac{60}{2} = \frac{1}{10}
 \end{array}$$

W następnych rachunkach np. Za 5 kg. zapłacono $11\frac{1}{4}$ złr.; ile kosztować będzie 9 kg.? należy uwzględnić upraszczanie ostatniego wyrazu na krótsze przedstawione.

Przykład na wnioskowanie, gdzie wszystkie liczby zagadnienia są ułamkami.

$$\begin{array}{r}
 \text{Za } 1\frac{3}{4} \text{ hl. zapłacono } 11\frac{1}{5} \text{ złr.} \\
 \text{za } 3\frac{2}{5} \text{ " " " } x \\
 \hline
 \end{array}$$

Ustnie. Opuszczając znane pytania, podnosimy tylko przejście do jedności. Z czego dowiesz się ile 1 hl. kosztuje? Z ceny $1\frac{3}{4}$ hl. Czy odrazu? Nie, lecz najpierw obliczę, ile kosztuje $\frac{1}{4}$ hl. Jak? Jeżeli $1\frac{3}{4} = 7\frac{1}{4}$ hl. kosztuje $11\frac{1}{5}$ złr., to za $\frac{1}{4}$ hl. zapłaci się $\frac{1}{7}$ część z $11\frac{1}{5}$ złr. $\frac{1}{7}$ część 7 = 1 złr.; $\frac{1}{7}$ część $4\frac{1}{5}$ czyli z $\frac{21}{5}$ złr. jest $\frac{3}{5}$ złr.; więc $\frac{1}{4}$ hl. kosztuje $1\frac{3}{5}$ złr. Co dalej? Jeżeli $\frac{1}{4}$ hl. kosztuje $1\frac{3}{5}$ złr., to cały

hl. kosztuje 4 razy po 1 i 4 razy po $\frac{3}{5}$ złr. Rachują wszyscy $= 6\frac{2}{5}$ złr. Co teraz? *Ile za $3\frac{2}{5}$ hl.?* Jak? Czy od razu? Nie, tylko najpierw za 3 hl. a potem za $\frac{2}{5}$ hl. Rachujcie, ile za 3 hl.? Ile? $19\frac{1}{5}$ złr. Aby obliczyć, ile za $\frac{2}{5}$ hl., co musisz wiedzieć? Jak obliczysz, ile kosztuje $\frac{1}{5}$ hl.? Jeżeli 1 hl. kosztuje $6\frac{2}{5}$ złr., to $\frac{1}{5}$ hl. kosztuje piątą część z 6 i $\frac{1}{5}$ część z $\frac{2}{5}$ złr. Rachujcie! Ile? $1\frac{7}{25}$ złr. Co teraz? Ile za $\frac{2}{5}$? $2\frac{14}{25}$ złr. Ile razem? $19\frac{1}{5} + 2\frac{14}{25} = 21\frac{19}{25}$ złr. czyli 21 złr. 76 centów.

Dla czego $19\frac{19}{25}$ złr. $=$ 76 centów?

$\frac{1}{25}$ złr. $=$ 4 ct. $19\frac{19}{25} =$ 19 razy po 4 ct.

Pisemny rachunek różni się tém od ustnego, że przy pisemnym działaniu tylko naznacza się, a z ceny jednostki hl. przechodzi się do ceny $3\frac{2}{5}$ hl. najpierw obliczając ile za $\frac{1}{5}$ hl., a potem ile za $\frac{17}{5}$ hl.

Forma rachunku:

$1\frac{3}{4}$ hl.	$11\frac{1}{5}$ złr.
$3\frac{2}{5}$ hl.	x
$\frac{7}{4}$ hl.	$\frac{8}{56 \times 4 \times 17} \frac{\text{złr.}}{5 \times 7 \times 5} = \frac{8 \times 4 \times 17}{5 \times 5} = \frac{544}{25}$
$\frac{1}{4}$ "	
1 " ($\frac{4}{4}$)	$544 : 25 = 21.76$ złr.
$\frac{1}{5}$ "	<u>50</u>
$\frac{17}{5}$ "	<u>44</u>
	<u>25</u>
	<u>190</u>
	<u>175</u>
	<u>150</u>
	<u>150</u>

A i B $\frac{7}{12}$ ogrodu skopią w 1 godz.

" $\frac{12}{12}$ (cały ogród) x

A i B $\frac{7}{12}$ części ogrodu skopią w 1 godz.

" $\frac{1}{12}$ część " " " $\frac{1}{7}$ "

" $\frac{12}{12}$ części " " " $\frac{12}{7}$ god. = $1\frac{5}{7}$ g.

= 1 godz. $42\frac{6}{7}$ minuty.

Mnożenie przez ułamek.

Przy mnożeniu przez ułamek głównie rozchodzi się o nadanie jasnego pojęcia, co to znaczy pomnożyć przez $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ itd. U dzieci nawiązuje się rzecz do tego, co już dobrze znają. Naprowadza się w ten sposób:

1. 1 m. kosztuje 18 ct.; ile zapłaci się za 3 m.?

Odpowiedź: 3 razy po 18 ct.; więc 18 trzeba pomnożyć przez 3.

2. 1 m. kosztuje 18 ct.; ile zapłaci się za $2\frac{1}{2}$ m.?

Odpow.: Za $2\frac{1}{2}$ m. zapłaci się $2\frac{1}{2}$ razy po 18 ct.

Ustnie: 2 razy po 18 ct. = 36 ct.; a ile to jest

$\frac{1}{2}$ raza po 18 ct.? Cały raz brać 18 ct. = 18 ct.,

a pół raza brać 18 ct. znaczy wziąć połowę 18 ct.

= 9 ct., a zatem $2\frac{1}{2}$ razy po 18 ct. = 45 ct.

i tyle kosztuje $2\frac{1}{2}$ m.

3. 1 l. kosztuje 24 ct., ile za $3\frac{1}{4}$ litra?

Przerobi się tak samo i nauczy, że $\frac{1}{4}$ razy brać znaczy wziąć czwartą część.

4. Ile zapłaci się za $2\frac{3}{4}$ kg. po 36 ct. za 1 kg.?

Za 2 kg. zapłaci się 2 razy po 36 ct., a za $\frac{3}{4}$ kg.

$\frac{3}{4}$ razy po 36 ct., nie cały raz.

Jak to wziąć 36 ct. $\frac{3}{4}$ razy? Po naprowadzeniu

co znaczy brać brać 36 ct. $\frac{1}{4}$ raza, będzie od-

powiedź: „czwartą część wziąć 3 razy“. Wyra-

chuje się, że 36 ct. wzięte $\frac{3}{4}$ razy = 27 ct. Razem za $2\frac{3}{4}$ kg. 99 ct. Teraz nauczyciel przechodzi do pisemnego rachunku, i uczy mnożenia na przykładzie 36 ct. wziąć $\frac{3}{4}$ razy.

Zamiast mówić: wziąć 2, 3, $2\frac{3}{4}$ razy, mówi się pomnożyć przez 2, 3, przez $2\frac{3}{4}$, więc zadanie nasze jest: $36 \text{ ct.} \times \frac{3}{4} = ?$

Co znaczy pomnożyć przez $\frac{3}{4}$?

Odp.: czwartą część wziąć trzy razy.

Co najpierw masz zrobić? Mam wziąć czwartą część z 36. Weź czwartą część t. j. podziel 36 przez 4, ale napisz to w kształcie ułamka. (Przy wnioskowaniu była już mowa o tém).

Uczeń napisze $\frac{36}{4}$. A co teraz masz dalej zrobić?

Tę czwartą część mam wziąć 3 razy. Weź 3 razy! Jak to wyrachujesz? Pomnożę przez 3. Jak mnoży się $\frac{36}{4}$ przez 3? Uczeń pisze:

$$\frac{36 \times 3}{4}.$$

W końcu z napisanego całego zagadnienia i wypadku w formie

$$36 \times \frac{3}{4} = \frac{36 \times 3}{4} = (27 \text{ ct.})$$

nauczyciel znanym sposobem doprowadzi do prawidła mnożenia liczby całej przez ułamek.

Następuje teraz nauka mnożenia ułamka przez ułamek.

Zagadnienie. Wybrać należy takie zagadnienie, żeby dzieci same wniosek wyprowadziły, iż trzeba przez ułamek pomnożyć. Na to najlepszy jest sposób brać liczby mieszane. Np.

1 m. kosztuje $2\frac{1}{4}$ złr.; ile zapłaci się za $2\frac{3}{5}$ m.?

Uczeń ustawi:

$$\underline{2\frac{1}{4} \text{ z\kern-0.1em łr.} \times 2\frac{3}{5}.$$

Zamień na ułamek niewłaściwy.

$$\frac{9}{4} \times \frac{13}{5}$$

Co znaczy pomnożyć przez $13\frac{3}{5}$? Piątą część wziąć 13 razy. Co najpierw weźmiesz? Najpierw wezmę piątą część z $\frac{9}{4}$. Jak? Podzielę przez 5. Podziel przez 5 ułamek $\frac{9}{4}$.

Uczeń pisze:

$$\frac{9}{4 \times 5}$$

A teraz co masz dalej zrobić? Tę piątą część mam wziąć 13 razy. Jak? Pomnożę $\frac{9}{4 \times 5}$ przez 13. Pomnóż!

Uczeń pisze:

$$\frac{9 \times 13}{4 \times 5}$$

więc forma rachunku była:

$$\frac{9}{4} \times \frac{13}{5} = \frac{9 \times 13}{4 \times 5} \text{ (co wykonane} = \frac{117}{20} \text{ ct.)}$$

Prawidło z tego wzoru wysnuje się przez naprowadzenie: z jakich liczb składa się licznik iloczynu i z jakich liczb mianownik iloczynu. Więc ułamek mnoży się przez ułamek, mnożąc licznik przez licznik, a mianownik przez mianownik.

Na przykładach w prawie tym wyćwiczyć należy.

Dzielenie przez ułamek.

Na tym stopniu nauki ograniczyć się należy na mieszczeniu ułamków o jednakowych mianownikach, co już było przerabiane ustnie w drugim roku. Jeżeli ułamki dane są o nierównych mianownikach, tedy mieszczzenie przeprowadza się w ten sposób, że po sprowadzeniu ich do wspólnego mianownika dzieli się licznik dzielnej przez licznik dzielnika i przez porównanie otrzymanego wypadku z ustawionymi liczbami do mieszczęcia danymi dochodzi do reguły.

Tok nauki jest taki:

- a) Na jeden dzień wypali się $\frac{2}{5}$ litra nafty; na ile dni starczy $5\frac{3}{5}$ litra?

$$\frac{5\frac{3}{5} \text{ l.} : \frac{2}{5} \text{ l.}}{\quad}$$

$$\frac{28}{5} \text{ l.} : \frac{2}{5} \text{ l.} = 28 : 2 = 14 \text{ dni.}$$

- b) To samo zadanie, na ile dni starczy 6 litrów?

$$\frac{6 : \frac{2}{5}}{\quad} \quad \text{Trzeba 6 całych zamienić na 5te.}$$

$$\frac{30}{5} : \frac{2}{5} = 30 : 2 = 15 \text{ dni.}$$

Więc $\frac{2}{5}$ mieszczą się w $\frac{30}{5}$ tyle razy co 2 w 30!

c) *Ułamki o nierównych mianownikach.*

Potrzebuje ktoś na miesiąc $\frac{3}{5}$ kg. herbaty; na ile miesięcy wystarczy zapas $5\frac{1}{4}$ kg.?

Uczeń ustawi zadanie do wyrachowania:

$$\frac{5\frac{1}{4} \text{ kg.} : \frac{3}{5} \text{ kg.}}{\quad}$$

$$\frac{21}{4} : \frac{3}{5}$$

Ponieważ części nie jednakowe, więc należy 4te i 5te zamienić na 20te. Po sprowadzeniu napisze uczeń: $105/_{20} : 12/_{20}$ i wyrachuje: $105 : 12 = 8\frac{3}{4}$ mies.

Tym sposobem można dłuższy czas i wiele zagadnień przerabiać. Jeżeli nauczyciel uważa, że na tym stopniu nauki dzieciom można już udzielić nauki pisemnego dzielenia ułamków wedle znanego prawidła, postąpi metodycznie w ten sposób:

Przykład $\frac{3}{4} : \frac{2}{5}$ w znaczeniu mieszczącego przeobrazić należy, a w końcu iloraz porównać z dzielną i dzielnikiem.

$$\underline{\frac{3}{4} : \frac{2}{5}} \quad \text{Po sprowadzeniu na 20te.}$$

$$15/_{20} : 8/_{20} = 15 : 8 = 15/8.$$

Ten ostatni wypadek $15/8$ napisany w formie ułamka pisze się jako wypadek obok zagadnienia na mieszczące. Więc

$$\frac{3}{4} : \frac{2}{5} = 15/8$$

Jak iloraz $15/8$ powstał z dzielnej $\frac{3}{4}$ i dzielnika $\frac{2}{5}$? Nauczyciel wskazuje, że $15 = 3 \times 5$, a $8 = 4 \times 2$, więc jeżeli dzielną $\frac{3}{4}$ pomnoży się przez odwrotny dzielnik $\frac{2}{5}$ otrzymamy ten sam iloraz prędzej niż przedtem. Forma rachunku będzie:

$$\frac{3}{4} : \frac{2}{5} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{3 \times 5}{4 \times 2} = \frac{15}{8} \text{ etc.}$$

Jeżeli nauczyciel wedle tego prawidła przerabia pisemny rachunek, to przy ustnym niech się trzyma sposobu pierwszego i od czasu do czasu kontroluje ze sobą oba.

Dzielenie przez ułamek w znaczeniu dzielenia na części.

Jest to najtrudniejsza część z całej nauki o ułamkach pod względem metodycznym a przerabia się na najwyższym stopniu nauki.

Najpierw rozchodzi się o to, jakie zagadnienie rachunkowe prowadzi do dzielenia liczby przez ułamek, a w szczególności przez ułamek właściwy? To stanowi kwestyę zasadniczą, gdyż wychodzić należy od przykładu praktycznego a nie od abstrakcyi. Po długim namyśle każdy przyzna, że trudno o takie zagadnienie dla dzieci 4-go, 5-go i 6-go roku nauki początkowej. Przykład: „Jeżeli $\frac{3}{5}$ m. kosztuje $1\frac{1}{4}$ złr.; ile zapłaci się za 1 m.? starsi może sprowadzą do dzielenia $1\frac{1}{4}$ złr. : $\frac{3}{5}$, ale dziecko tego wniosku nie wyprowadzi. Pytanie: „Czy 1 metr więcej czy mniej kosztować będzie“, którym dawniej nauczyciele ciągle musieli dzieciom brak wprawy w wnioskowaniu nagradzać, doprowadzi na błędną odpowiedź co do operacyi rachunkowej. Dziecko powie dobrze, że 1 m. kosztować będzie więcej, ale wniosek stąd jaki wypłynie? Oto powie: „więc trzeba przez $\frac{3}{5}$ pomnożyć“ i co wyrachuje? ($\frac{5}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{4}$). Wyrachuje, że 1 m. kosztuje $\frac{3}{4}$ złr., a czy to jest więcej od $1\frac{1}{4}$ złr.?

Z tego całego wywodu nauka taka:

Zagadnienie na dzielenie przez ułamek powinno wychodzić od liczby mieszanej, a nie od ułamka właściwego. Np.:

Za $2\frac{1}{4}$ m. zapłacono 18 złr.; ile kosztował 1 m.?

Ustawienie	$2\frac{1}{4}$ m.	18 złr.
	1 m.	x

Jeżeli za $2\frac{1}{4}$ m. zapłaci się 18 złr.; to za 1 m. zapłaci się $2\frac{1}{4}$ razy mniej, więc trzeba 18 złr. podzielić przez $2\frac{1}{4}$. Uczeń pisze:

$$18 : 2\frac{1}{4},$$

co nauczyciel każe napisać w formie:

$$18 : \frac{9}{4}.$$

Mamy teraz mus dzielenia przez ułamek. Jak to dzielenie wykonać? Nieco podobnym sposobem jak dzielenie dziesiętnych ułamków przez dziesiętne. Była tam już mowa o tém, jak to powiększenie dzielnika wpływa na iloraz. Tu należy rzecz tę przedstawić na liczbach całych.

$$\begin{aligned} \text{Np.:} \quad & 60 : 3 = 20 \\ & 60 : 12 = 5. \end{aligned}$$

Jeżeli z dzielnika 3 zrobię dzielnik 12, to powiększyłem go 4 razy. Jak zmienił się iloraz? Iloraz zmniejszył się 4 razy. Więc ile razy większy dzielnik, tyle razy mniejszy iloraz.

W zagadnieniu $18 : \frac{9}{4}$ opuść mianownik i podziel 18 przez 9; ile wypadnie? 2. — Jaki błąd popełniono dzieląc przez 9 zamiast przez $\frac{9}{4}$? Dzielono przez liczbę 4 razy większą. A jeżeli dzielnik powiększy się 4 razy, jak zmieni się iloraz? Iloraz zmniejszy się 4 razy. Ile tedy otrzymać musimy przy dzieleniu 18 nie przez 9, lecz przez $\frac{9}{4}$? Odpow.: 4 razy więcej tj. 8. Napisz to

$$18 : \frac{9}{4} = 8.$$

To samo rachuje się teraz pisemnie, a forma rachunku różni się tém od ustnego, że działań nie wykonuje się, tylko naznacza. Więc najpierw jest dzielenie przez 9, a potém mnożenie przez 4. (Całe ustne wyjaśnienie opuszczamy, jako zupełnie to samo co wyżej). Wzór ostateczny jest:

$$18 : \frac{9}{4} = \frac{18 \times 4}{9} = 8.$$

Przez porównanie ilorazu z dzielną i dzielnikiem doprowadzi nauczyciel do prawidła:

$$18 : \frac{9}{4} = 18 \times \frac{4}{9} = \frac{18 \times 4}{9}$$

„Dzieli się przez ułamek, mnożąc przez odwrotny ułamek“.

Inny przykład na dzielenie ułamka lub liczby mieszanej przez ułamek.

W $2\frac{1}{3}$ mies. zrobiła dziewczynka $8\frac{1}{2}$ m. koronki

1

„

?

m.

$$8\frac{1}{2} : 2\frac{1}{3}$$

$$17\frac{1}{2} : 7\frac{1}{3}$$

Podziel $17\frac{1}{2}$ najpierw przez 7... $\frac{17}{2 \times 7}$

Jaki błąd popełniliśmy, dzieląc $17\frac{1}{2}$ przez 7, zamiast przez $7\frac{1}{3}$? Dzieliliśmy przez dzielnik 3 razy większy, albowiem całości są 3 razy większe od trzecich części. Jaki jest iloraz? Iloraz jest 3 razy mniejszy... Ile tedy otrzymać musimy, jeżeli $17\frac{1}{2}$ podzielimy nie przez 7, lecz przez $7\frac{1}{3}$? Otrzymamy trzy razy więcej, więc zamiast $\frac{17}{2 \times 7}$ będzie $\frac{17 \times 3}{2 \times 7}$.

Napisz ten wypadek obok zagadnienia za znakiem zrównania. Uczeń pisze:

$$\frac{17}{2} : \frac{7}{3} = \frac{17 \times 3}{2 \times 7}.$$

Jak ten iloczyn powstał? Widzimy, że dzielna pomnożona jest przez odwrócony dzielnik. Forma rachunku ma być zawsze taka:

$$\frac{17}{2} : \frac{7}{3} = \frac{17}{2} \times \frac{3}{7} = \frac{17 \times 3}{2 \times 7} = \frac{51}{14} = 3\frac{9}{14}.$$

Na koniec kilka uwag ogólnych.

1. Zaleca się w pierwszym roku nauki wiele cierpliwości i łagodności. Narzekanie na to, że dzieci niepojętne, niech nauczyciel do siebie zawsze zwraca.
2. Dzieci należy pobudzać ciągle do samodzielności.
3. Naukę rachunków opierać należy na poglądzie. Skąd to pochodzi, że często i starsi uczniowie nie mają pojęcia o ile $\frac{3}{4}$ większe od $\frac{3}{5}$? Dla tego, że u nich pojęcie ułamka jest tylko cyfrowe!
4. W wnioskowaniu ciągle należy ćwiczyć. Każde działanie, np.: $7 + 5$, lub 3×5 , może być wynikiem jakiego zagadnienia.
5. Podczas wnioskowania uważać na to, żeby ono było właściwem. Nie przyjmować takiej odpowiedzi: „12 bułek po 2 ct. kosztuje dla tego 24 ct., że $2 \times 12 = 24$.”

6. Zaczynać zawsze od łatwiejszego i uczyć prawideł na małych liczbach.
7. Nie iść dalej, dopóki nie wyćwiczy się dobrze jednego.
8. Łączyć czasem w zagadnieniach kilka działań, aby dzieci w nich się wprawiały.
9. Wszyscy uczniowie mają być zajęci przy rachowaniu. Przy pisemném jeden uczeń rachuje przy tablicy głośno, a drudzy cicho *równocześnie, wedle taktu*, na swoich tabliczkach. Nauczyciel do dalszego rachunku wzywa uczniów z ławek, a wtedy stojący przy tablicy tylko pisze, wywołany zaś głośno rachuje. Tak należy zajmować wszystkich.
10. Rachowanie z pamięci łączy się z początku zawsze z pisemném. Później należy do pamięciowego dawać łatwiejsze zadania, nie przesadzać w wymaganiach, nie męczyć dzieci wielkimi liczbami, *ale za to w zadaniach w zakresie do 100 doprowadzić do biegłości.*
11. Na domowe ćwiczenia zadawać tylko to, co dzieci dobrze już umieją zrobić. Małym dzieciom ani *dużo* ani *trudnych* rzeczy do wyrobienia w domu zadawać nie wolno!
12. Treść zagadnień brać należy z życia praktycznego, a podane stósunki ceny nie powinny *mijać się z prawdą.*
13. Od czasu do czasu wprowadzać należy także zagadnienia, które wymagają wyjaśnienia rzeczowego.
14. Wszelkie miary, wagi i monety trzeba dzieciom pokazać w naturze; a wielkie miary jak np. hektolitr przynajmniej na tablicy w naturalnej wielkości wyrysować.

15. Co się tyczy naprowadzania przy wnioskowaniu, pamiętać należy, że nauczyciel na niższym stopniu nauki *dopomaga* uczniowi pytaniami, ale nie *podaje* mu odpowiedzi; na wyższych stopniach nauki pytań coraz mniej być powinno. W późniejszym życiu kto będzie uczniowi podpowiadał?
16. Normalny sposób rachowania jest rzeczą *ważniejszą* od sztuczek lub fortelów. Przy pisemnym rachunku nauczyciel wzorowo całą formę rachunku przedstawia na tablicy i domaga się od uczniów ścisłego naśladowania.

14 Lipca 1891 r.



SPIS RZECZY.

	Str.
Część I. Zakres liczb od 1 do 20	1
Liczba 1	2
Liczba 2	2
Pojęcie, rozkład, dodawanie, mnożenie, odejmowanie, mieszczenie i dzielenie.	
Liczba 3	8
Liczba 4	8
Mierzenie liczby 4 dwójką	9
Liczby od 10 do 20	11
Liczba 12	12
Wnioskowanie w zakresie liczb od 1 do 20	15
Część II. Zakres liczb od 1 do 100	19
Pojęcie setki	19
Ogólne uwagi o 4 działaniach w zakresie setki	20
Liczby od 1 do 40 szczegółowo przerobione	22
Liczenie, pisanie, dodawanie, odejmowanie, mnożenie, mieszczenie, dzielenie, ułamki zwyczajne, wnioskowanie, pojęcie ułamków dziesiętnych, obliczanie ceny na zasa- dzie wielokrotnych części setki.	
Część III. Zakres liczb od 1 do 1000	39
Danie pojęcia liczby 1000	39
Cztery działania zasadnicze w zakresie liczb od 1 do 1000	41
Dodawanie, odejmowanie, mnożenie, mieszczenie, dziele- nie i rachunek wnioskowania.	
Część IV. Zakres liczb po za 1000	60
Danie pojęcia liczb wyższego rzędu	60
Pisanie cyframi rzymskimi	62
Cztery działania zasadnicze	62
Dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie.	
Ułamki dziesiętne	65
Wnioskowanie	70
Liczby wielorakie nie należące do systemu metrycznego	74
Zamiana gatuntu wyższego na niższy, rozgatunkowanie, zamiana gatuntu niższego na wyższy, dodawanie, odej- mowanie, mnożenie i dzielenie liczb wielorakich.	
Ułamki zwyczajne	80
Pojęcie ułamka, zamiana liczb całych na ułamek, za- miana liczb mieszanych na ułamek, wyłączanie całości z ułamka niewłaściwego, nauka rozszerzania i upraszcza- nia ułamków.	

	Str.
Dodawanie ułamków	83
Odejmowanie ułamków	88
Mnożenie ułamka przez liczbę całą	89
Dzielenie ułamka przez liczbę całą	91
Reguła trzech wnioskowaniem przeprowadzona	93
Mnożenie przez ułamek	100
Dzielenie przez ułamek	103
Dzielenie przez ułamek w znaczeniu dzielenia na części	105
Na koniec kilka uwag ogólnych	108

OMYŁKI DRUKU.

<i>Str.</i>	<i>wiersz</i>	<i>zamiast</i>	<i>czytaj</i>
4	11 od góry	$2 \times 1 = ?$	$2 \times 1 = 2$
9	3 " dołu	4 kwart i 2 kwart	4 kwat. i 2 kwat.
15	10 " dołu	dziesiąta	1 dziesiątak
20	1 " dołu	liczbą	liczbę
25	4 " dołu	o pierwszy szereg	odpytuje pierwszy szereg
27	12 " góry	o całą tabliczkę	odpytuje ustnie całą tabliczkę
28	8 " góry	$4 \times$ przez 6	$24 = 4 \times$ po 6
31	1 " góry	liczbą	mieszaną liczbę
31	3 " góry	podzielonym	podzielonem
43	9 " dołu	nauczy się	uczeń nauczył się
45	2 " dołu	2 razy 40	co 2 razy 4
52	12 " góry	dziesiątki	dziesiątki
55	16 " góry	36 kóp	36 sztuk
59	9 " góry	zmudny	zmudny
60	5 " góry	caymi	całymi

786

UP - Kraków BG



1050154630

EX LIBRIS
UP MUZEUM PODRECZNIKA