









ALGEBRA
PODŁUG
LACROIX
SZKOŁY WOJEWODZKIE

Spiciendi



UP - Kraków BG



1050271986

Algebra

BIBLIOTEKA
GŁÓWNA
W
SP
KRAKÓW

196 430

J. P. Kienle

ALGIEBRA

PODŁUG

LACROIX

SZKOŁY WOIEWODZKIE

Cena oprawy w papierze zł. 6.

WARSZAWIE 1818

Drukarni Xieży Pliarów

UP - Kraków BG



1050271986

KOMMISSYA RZĄDOWA WYZN.
O. W. PUBL.

Dzieło po n: *Algib*
Lacroix, u sz JX. Ant
browskiego ofessera Matem
po roztrza przez Towarzystw
tarne, potwie i Szkołom Woiew
ieyszém zaleca.

w Warszawie dnia 17 M



196430

Sekretarz Jenerałny

Głuszyn

Bibl. WSP

1900-K

141-1

DOYTELNIKA.

elem jedni dzieł na równania i
c, da działania i znanie. N
tensie od
nia i d
a odd
y w dci
noge

ypac dru
orycy wy
byzród sz
a, przy po
na tema
a. w dci. Lu
ec za le por
ne w nicy dla
cie z wici upo
nienia, czasem
ay swo igniom
w powaraz o
la rdy pi lubo
lebrzy ptery fu
bietycznaż wyloze
szycieloe zracnie pi
agadnicore z dalszych
id wyt

(a)

KOMM

Dz
Lacro
browsk
po roz
tarne,
ieysze

Lucroix, którego nas trzymaliśmy si
w układaniu dzieła tego, (szczerze jednak in
nych Matematyków tak tyłko on korzy
stał, iak tych którym dzieł służyło za prze
wodnika); stosownie do po Algiebrę na
wnienia i proporcye, po wyl naważniejszy
wiadomości do rozwiązywania wszelkiego sto
pnia potrzebnych, teorią przy nierównie o
wielu poprzedzających łatwiej wada przy ko
działa. W tym także na ty z naważniejszy

uczeniu rzeczy łatwiej
ch postępależy. W roz
m władz w tych ten sa
być powpodług której
mała władza: nie zach
go stopniowałobieraniu wia
trudniejszy oięci tak moż
dla umyłu, ja niebezpiecz
przeskoi w igeniu ciężaró
czy inna br pętność ub nau
jem porządno roania władz um
ważana, możanęgerwszeńwo pr
ka, gdzie odagdn naważszy
eyszych, iakie: *Lzyni jeden a ied
jeden, i t. d. prszożna stoiniami n
znemi do zagadnieki, które ziały sie
związania niepodobne it up. ile nazy ma
stonica rzadsza iest ois ziętyca, i t. p.*

Mając na pierwszeględzie tę przest
i stosując się nad to na nauk dli skót

ALGIEBRA

ROZDZIAŁ I

Wiadomości poprzednicze.

W każdym zagadnieniu arytmetyczném
to łatwo postrzedz można, maszą być dwę
znanyumęy liczby wiadome, a trzecia nie
wiadoma, która znaleźć potrzeba. Liczba ta
niewiadoma iest zawsze albo summy, albo ró
nicy, albo iloczynem, albo ilo
sciem.

I ułomko
arytmetyczne z fa
byłoby wprzód uważyl, któ
czterech fundamentalnych działań
ma użyć do wynalezienia liczby niewiadomey.
Mielśmy już i takie zagadnienia, których ro
zwiazanie zależy od kilku razem działań ary
tmetycznych rozmaicie z sobą powiązanych. Za
gadnienia takowe zdają się częstokroć na pier
wsze wytyczenie bardzo trudne, zwłaszcza za tly
sa długie i w samém wystąpieniu zawierane
cz trudność ta zniknie natychmiast, kiedy
rzez te porządnych, iasných i krótkich ro
zumowań z warunków zagadnienia wciągnio
nych, wskazaną będzie droga, którą w sz

wyznaniu trzymać się należy. Weźn
kład zagadnienie następujące:

*Dwom zastruszonemu żołnierzo
ozono sumnę 974 zł: którą pod
mają, w ten sposób, aby starszy i
stał 126 zł: więcej niż młodszy: il
żdemu dostanie?*

W zagadnieniu tém, iak widzін
są liczby niewiadome, które wynależ
lecz iednę z nich znalazłszy, z łatwoś
dziemy drugiey. Wiedząc np, ile się
wpodziale żołnierzowi młodszemu, d
do działu tego 126 zł, mieilibyśmy d
nierza starszego. Dwa te działu dod
siebie powinny być równe wyznaczone
974 zł.

Dział zatem młodsza, i
że sam dział, więcej, 126 zł, równy
zł. czyli

Dział młodszego żołnierza dwa razy
ty więcej 126 zł. równy jest 974 zł. A z

Dział młodszego żołnierza dwa razy
ty równy jest 974 zł, mniej 126 zł. czyli

Dział młodszego żołnierza dwa razy
ty równy jest 848 zł więc

Dział młodszego żołnierza raz wię
wny jest połowie 848; czyli

Dział młodszego żołnierza równy jest 4
Młodszy zatem dostanie - - - 4

Starszy 424 więcej 126 zł. czyli

Rozwiązanie to czyni zadosyć waru
zagadnienia: gdyż starszy bierze 126 zł.

cey niż młodszy, a obadwa razem biorą wy
znaczoną sumnę 974 zł.

2. Rozumowanie za pomocą którego za
gadnienie to rozwiązaliśmy, jest wprowadzie o
czywiste i dosyć łatwe; częste jednak powta
rzanie tychże samych wyrazów, jakimi są ró
wny jest, więcej etc i razi ucho i przeszkadza
uwadze: coby się jeszcze widoczniey okazało,
gdyby nam przyszło rozwiązywać iakie zaga
dnienie dłuższe i trudniejszy. Jako więc cy
fry na miejsce wyrazów liczebnych wprowa
dzone, znacznie ułatwiły i skróciły zwyczajne
działania arytmetyczne; tak też końcem ułat
wienia i skrócenia trudniejszych i dłuższych
zagadnień, starano się wprowadzić więcej ie
szcze znaków skróconych na miejsce innych
także wyrazów, które w rozwiązywaniu tych za
gadnień często powtarzać trzeba.

Itak na oznaczenie dodawania używa się
znak taki: $+$; np. $424 + 126$, znaczy 424
więcej 126.

Znak odejmowania jest taki: $-$; np. 974
 $- 126$, znaczy 974 mniej 126.

Znak mnożenia jest taki: $\times$; np. 424×2 ,
znaczy 424 rozmnożone przez 2.

Dzielenie oznacza się tak iak w ułomkach
zapomocą linijki poziomey odłączającej liczbę
dzielną od dzielnika np. $\frac{848}{2}$, znaczy 848 po
dzielone przez 2.

Na oznaczenie że dwie liczby lub takie
kolwiek ilości są sobie równe, używa się znak

taki: $\equiv$; np. $8 + 3 = 11$; znaczy 8 więcej 3
równie są 11.

Na oznaczenie że jedna ilość większa jest
od drugiey, używa się znak $>$; np. $8 + 3 > 9$, znaczy 8 więcej 3 *większe są* niż 9.

Na oznaczenie że jedna ilość mniejsza jest
od drugiey używa się ten sam znak, lecz w
położeniu odwrotnem, np. $9 < 8 + 3$, zna-
czy 9 *mniejsze* jest niż 8 więcej 3.

Ilości niewiadome których szukamy ozna-
czają się końcówkami głoskami abecadła z, y, x
i t. d. Są jeszcze inne znaki skrócone które na
swoim miejscu wyłożymy.

Chcąc za pomocą tych skróconych zna-
ków rozwiązać powyższe zagadnienie, ozna-
czmy dział młodszego żołnierza przez x . Ponie-
waż starszy powinien dostać 126 zł. więcej
niż młodszy, kiedy więc dział młodszego jest
 x , dział starszego będzie $x + 126$. Mamy
zatem oznaczone obadwa działy: to jest:

dział młodszego $\equiv x$.

dział starszego $\equiv x + 126$.

Summa tych dwóch działów tym sposo-
bem oznaczonych jest

$$x + x + 126; \text{ czyli } 2x + 126.$$

Aże podług zagadnienia summa do po-
działu wyznaczona jest 974 zł; będzie więc

$$2x + 126 = 974.$$

Od dwóch summ równych odiawszy cze-
ści równa reszty pozostaną równe. Odejmij-
myż 126 tak od $2x + 126$, iako też od 974;
zostanie

$$2x + 126 - 126 = 974 - 126; \text{ czyli}$$

$$2x = 848.$$

Dwie summy równe podzieliwszy przez ie-
dnę liczbę, wyjdą dwa ilorazy równe. Po-
dzieliwszy tak $2x$, iako też 848 przez 2, będzie

$$\frac{2x}{2} = \frac{848}{2}; \text{ czyli}$$

$$x = 424.$$

Aże przez x oznaczyliśmy dział młodszego,
młodszy, zatem dostanie 424 zł.
a tym samym starszy, którego dział oznaczyli-
śmy przez $x + 126$, dostanie $424 + 126$ czyli
550 zł. i t. d.

5. Porównawszy z sobą dwa te sposoby,
których użyliśmy do rozwiązania danego zaga-
dnienia, postrzeżemy tę tylko między niemi ro-
żnicę, że co w pierwszym wyraża się przez sło-
wa, to w drugim wyrażają skrócone znaki. Pier-
wszy sposób jest arytmetyczny: bo się nie ro-
żni od tych, których używamy w Arytmetyce;
drugi *Algebraiczny*: Algebra bowiem zowie-
my, umiejętność podająca sposoby rozwiązywa-
nia zagadnień za pomocą skróconych znaków;
pożniżej nabędziemy o nięć dokładniejszego wy-
obrażenia.

4. Znalezione działy dwóch żołnierzy, to
jest 424 i 550 w ten czas tylko mają miejsce,
kiedy summa dana do podzielenia jest 974 a
rożnica między działami 126 zł. Sposób zaś za
pomocą którego rozwiązaaliśmy to zagadnienie
jest zawsze ten sam iakakolwiek dana będzie
do podzielenia summa, i iakakolwiek między

działami wyznaczona różnica. Można by więc zamiast liczb 974 i 124 użyć znaków ogólnych żadnej wartości szczególniej nie mających, iakimi są *np.* głoski abecadła, na miejsce których można będzie w każdym przypadku szczególnym położyć wartość daney summy i daney między działami różnicy; przez co by się nie mało pracy i czasu oszczędziło: bo raztym sposobem rozwiązane zagadnienie, posłuży do prędkiego rozwiązania wszelkich innych tego rodzaju zagadnień. Zamienmy więc powyższe zagadnienie w następujące:

Dwom zastużonym żołnierzom wyznaczono sumę s, którą podzielić się mają w ten sposób, aby starszy z nich dostał a złotych więcej niż młodszy: ileż się każdemu dostanie?

Oznaczywszy dział młodszego przez x ,

Dział starszego będzie $x + a$

Summa obu dwu działów tym sposobem oznaczonych będzie

$$x + x + a; \text{ czyli } 2x + a.$$

Aże summa podług zagadnienia jest s , będzie więc

$$2x + a = s.$$

Odiąwszy a tak od $2x + a$ iako też od s , zostanie

$$2x + a - a = s - a; \text{ czyli}$$

$$2x = s - a.$$

Podzieliwszy tak $2x$, iako też $s - a$ przez 2, będzie

$$\frac{2x}{2} = \frac{s-a}{2}; \text{ czyli}$$

$$x = \frac{s}{2} - \frac{a}{2}; \text{ czyli } x = \frac{s}{2} - \frac{1}{2}a$$

$$s \frac{1}{2} a$$

Wyrażenie to algebricznie wystawiwszy sposobem zwyczajnym, otrzymamy następujące prawidło do wynalezienia wartości działu mniejszego; *od połowy summy daney do podzielenia odiawszy połowę różnicy wyznaczonę między działami, reszta będzie działem żołnierza młodszego.*

Prawidło to zastosowawszy do danego zagadnienia, w którym dana summa do podzielenia jest $s = 974$, różnica między działami $a = 126$; łatwo znajdziemy, że dział młodszego żołnierza wynosi zł. 424.

Ten sam wypadek otrzymalibyśmy kładąc w znalezionem wyrażeniu algebricznem działu tego żołnierza zamiast glosek s i a liczby których miejsce głoski te zastępują. Tym sposobem wyrażenie to zamieni się w następujące:

$$x = \frac{974}{2} - \frac{126}{2}; \text{ czyli}$$

$$x = 487 - 63; \text{ czyli}$$

$$x = 424. \text{ dział młodszego żołnierza,}$$

który mając wiadomy, łatwo będzie wyrachować dział żołnierza starszego, wiedząc iako między temi działami zachodzi różnica.

Gdyby była summa do podziału wyznaczona czyli $s = 500$, $a = 54$; położywszy ważności te zamiast głosek s , a w powyższem wyrażeniu algebricznym działu żołnierza młodszego, wyrażenie to zamieni się w następujące:

$$x = \frac{500}{2} - \frac{54}{2} = 250 - 27 = 223 \text{ it. d.}$$

5. Oznaczyliśmy tu przez x dział żołnierza młodszego, skąd potem złatwością doszliśmy działu żołnierza starszego. Lecz można otrzymać ten sam wypadek oznaczając przez x dział żołnierza starszego, z tą tylko różnicą, że ponieważ młodszemu ma dostać złotych a mniej niż starszy; kiedy więc dział starszego jest x , dział młodszego będzie $x - a$. Mamy zatem oznaczone innym sposobem dwa szukane działy; to jest:

$$\text{dział starszego} = x$$

$$\text{dział młodszego} = x - a$$

$$\text{Summa} = x + x - a, \text{ czyli} \\ 2x - a.$$

Aże podług zagadnienia summa $= s$, będzie więc

$$2x - a = s.$$

Do dwóch ilości równych dodawszy tę samą ilość, summy dwie które stąd wypadną będą równe. Dodamyż a tak do $2x - a$, iako też do s będzie

$$2x - a + a = s + a; \text{ czyli}$$

$$2x = s + a.$$

Podzieliwszy tak $2x$ iako też $s + a$ przez 2 będzie

$$\frac{2x}{2} = \frac{s + a}{2}; \text{ czyli}$$

$$x = \frac{s}{2} + \frac{a}{2}, \text{ czyli } x = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}a.$$

To jest: choć otrzymać ważność działu żołnierza starszego trzeba do połowy summy danej do podzielenia dodać połowę wyznaczony między działami różnicy.

Prawidłó to zastosowawszy do danego zagadnienia, albo też w znalezioném wyrażeniu algebricznym działu starszego żołnierza zamiast głosek s , a , położywszy liczby w zagadnieniu tém naznaczone; znajdziemy

$x = 550$, od czego odjawszy naznaczoną między działami różnicę to jest 126, zł. zostanie 424 dział żołnierza młodszego.

6. Ważność tę działu żołnierza starszego to jest $\frac{s}{2} + \frac{a}{2}$ można także wyprowadzić z ważności działu żołnierza młodszego która jest

$\frac{s}{2} - \frac{a}{2}$ (4). Ponieważ bowiem żołnierz starszy ma dostać złotych a więcej niż młodszemu, dodawszy zatem a do ważności działu żołnierza młodszego, będzie dział żołnierza starszego.

$$\frac{s}{2} - \frac{a}{2} + a; \text{ czyli}$$

$$\frac{s}{2} - \frac{a}{2} + \frac{2a}{2} \text{ czyli } \frac{s-a+2a}{2}$$

Wyrażenie to znaczy że od s trzeba naprzód odjąć a , a potem dodać $2a$ i podzielić przez 2. od s odjąwszy a a dodawszy $2a$, będzie $s+a$. Dział zatem żołnierza starszego będzie $\frac{s+a}{2}$, czyli $\frac{s}{2} + \frac{a}{2}$; który mając wiadomy, łatwo będzie znaleźć dział żołnierza młodszego.

7. Wiedząc że dział większy $= \frac{s}{2} + \frac{a}{2}$

dział mniejszy $= \frac{s}{2} - \frac{a}{2}$; iakakolwiek będzie dana do podzielenia summa, iakakolwiek między działami naznaczona różnica; zawsze łatwo będzie wynaleźć obadwa szukane działy, kładąc w dwóch znalezionych ważnościach ogólnych zamiast s naznaczoną w liczbach summe, zamiast a naznaczoną w liczbach między działami różnicę.

Lecz nie tylko ważności te ogólne dwóch szukanych działów służą do prędkiego rozwiązania zagadnień o podzieleniu daney summy pieniężney na dwie osoby podług wyznaczoney między działami różnicy; można ich także wygodnie użyć do rozwiązania nieskończoney liczby zagadnień innych, na pozor zupełnie od poprzedzającego różniących się. I tak weźmy zagadnienie następujące:

Oyciec i Syn mają razem lat 52; Oyciec od Syna starszy jest 24 laty: ileż ma lat Oyciec, a ile syn?

Zagadnienie to lubo zdaie się od poprzedzającego wcale odmienne, w istocie jednak jest zupełnie do niego podobne: i możnaby ie bez najmniejszego nadwężenia dwóch liczb szukanych tak odmienić: daną summę 52 zł. podzielić na dwie osoby w ten sposób a żeby starsza miała 24 zł. więcej niż młodszą: ileż się każdy dostanie?

Wiedząc, zatem z poprzedzającego zagadnienia, że np. dział większy jest $\frac{s}{2} + \frac{a}{2}$ wiedząc nadto z warunków drugiego zagadnienia że $s=52$, $a=24$; łatwo będzie wyrachować że Oyciec ma lat $\frac{52}{2} + \frac{24}{2} = 38$ lat. d.

Toż mówić o następujących zagadnieniach: Dla dwóch oddziałów wojska dano 100,000 raccy chleba; ieden oddział ma dostać 27000 raccy więcej niż drugi: ileż raccy dostanie się każdemu oddziałowi?

Za parę koni dano 89 cz. zł. ieden z nich 15 cz. zł. więcej kosztuje niż drugi: iakaż jest cena każdego?

1344 kul armatnych ułożone są we dwa stosy w iednym jest kul 64 więcej niż w drugim: ileż kul znajduje się w każdym stosie?

Do ułania armaty ważący funtów 12566½, użyto miedzi 10096 funtów więcej

niz cyny: iakaż ilość miedzi i cyny znajduje się w tej armacie?

Wiednów grzywnie czyli w 16 lotach srebra dwunastęj próby jest czystego srebra 8 lotów więcej niż miedzi: ileż w mieszaniu tej znajduje się lotów czystego srebra, ile miedzi i t. d.

Wszystkie te zagadnienia różnią się tylko między sobą wystawieniem; w rzeczy zaś samej są sobie zupełnie podobne: w każdym albowiem z nich tak iak w zagadnieniu pierwszym dana jest summa do podzielenia na dwie części i dana różnica między temi częściami zachodząca i gdybyśmy w każdym z tych zagadnień daną summę dwóch liczb szukanych oznaczyli przez s , a różnicę przez a , i odbyli działanie iak w zagadnieniu pierwszym, zawsze większa z dwóch liczb szukanych wypadłaby

$$\frac{s}{2} + \frac{a}{2}, \text{ mniejsza } \frac{s}{2} - \frac{a}{2}$$

8. Dwa te wyrażenia ogólne wystawiwszy językiem zwyczajnym, wypadłoby następujące prawidło dla wyznaczenia dwóch liczb niewiadomych, których dana jest summa i różnica: *liczba większa równa się połowie summy więcej połową różnicy; liczba mniejsza równa się połowie summy mniej połową różnicy.* Prawidło to posłuży do predkiego rozwiązania wszelkich zagadnień, w których rzecz idzie o wyznaczenie dwóch liczb niewiadomych, których summa i różnica jest dana. I tak np. w zagadnieniu ostatniem, w którym

summa dwóch liczb szukanych, to jest liczba lotów czystego srebra i miedzi znajdujących się w grzywnie srebra dwunastęj próby, jest 16 lotów, a ich różnica 8 lotów; będzie podług prawidła powyższego liczba większa to jest li-

czba lotów czystego srebra $\frac{16}{2} + \frac{8}{2} = 12$, li-

czba mniejsza to jest liczba lotów miedzi

$$\frac{16}{2} - \frac{8}{2} = 4.$$

9. Gdyby trzeba było wynaleźć trzy liczby nie równe, których summa jest dana, i dane są różnice między niemi zachodzące, sposób polepowania w szukaniu liczb niewiadomych témby się tylko od poprzedzającego różnił, iż byłby cokolwiek dłuższy. Jakoż niech będzie zagadnienie następujące:

Trzem zastużonym żołnierzom wyznaczoną summe 2840 zł. którą podzielić się mają w ten sposób, aby najstarszy z nich dostał 200 zł. więcej niż średni, ten zaś 120 zł. więcej niż najmłodszy: ileż się każdemu dostanie?

Zagadnienie to lubo jest bardzięj zawikłane niż poprzedzające, może być jednak z łatwością rozwiązane sposobem arytmetycznym, jeżeli się dobrze nad jego warunkami zastanowimy. Są tu wprawdzie trzy liczby niewiadome; lecz jedne z nich znalazłszy, dojdziemy z łatwością do dwóch pozostałych. Wiedząc np. ile się dostanie w podziale żołnierzowi najmłod-

szemu, dodawszy do tego działu 120 zł. mieliśmy dział żołnierza średniego; dodawszy znowu 200 zł. do działu żołnierza średniego, albo też do działu żołnierza najmłodszego dodawszy zł. 120 i 200 czyli 320, mieliśmy dział żołnierza najstarszego. Trzy te działy dodane do siebie powinny uczynić wyznaczoną summę 2840 zł. a zatem

Dział żołnierza najmłodszego, więcej tenże sam dział powiększony 120 złotemi, więcej tenże sam dział powiększony 320 złotemi równy jest 2840 zł. czyli

Dział najmłodszego żołnierza trzy razy wzięty, więcej 120 zł. więcej 320 zł. równy jest 2840 zł. czyli.

Dział najmłodszego żołnierza trzy razy wzięty, więcej 440 zł. równy jest 2840 zł. a zatem,

Dział najmłodszego żołnierza trzy razy wzięty równy jest 2840 zł. mniej 440 zł. czyli

Dział najmłodszego żołnierza trzy razy wzięty równy jest 2400 zł. więc dział najmłodszego żołnierza raz wzięty równy jest trzeciej części 2400 zł. czyli

Dział najmłodszego żołnierza równy jest 800 zł.

Najmłodszy zatem żołnierz dostanie 800 zł.

Średni 800 więcej, 120 czyli - - 920

Najstarszy 920 więcej 200, czyli 1120.

Rozwiązanie to czyni zadosyć warunkom zagadnienia: gdyż najstarszy bierze 200 zł. więcej niż średni; ten zaś 120 zł. więcej niż naj-

młodszy; a wszyscy trzej biorą wyznaczoną summę 2840 zł.

10. Chcąc zagadnienie to rozwiązać za pomocą skróconych znaków oznaczmy dział żołnierza najmłodszego przez x . Ponieważ średni powinien dostać 120 zł. więcej niż najmłodszy, kiedy więc dział najmłodszego jest x , dział średniego będzie $x + 120$. Aż najstarszy powinien wziąć 200 zł. więcej niż średni, będzie więc dział najstarszego $x + 120 + 200$, czyli $x + 320$. Mamy zatem oznaczone wszystkie trzy działy.

dział najmłodszego $= x$, średniego $= x + 120$, najstarszego $= x + 320$.

Summa tych trzech działów tym sposobem oznaczonych, jest $x + x + 120 + x + 320$; czyli $3x + 440$. Aże podług zagadnienia summa do podziału wyznaczona jest 2840 zł. będzie więc,

$$3x + 440 = 2840.$$

Odiąwszy 440 tak od $3x + 440$, iako też od 2840, zostanie.

$$3x + 440 - 440 = 2840 - 440; \text{ czyli}$$

$$3x = 2400.$$

Podzieliwszy tak $3x$ iako też 2400 przez 3, wypadnie.

$$\frac{3x}{3} = \frac{2400}{3}; \text{ czyli } x = 800.$$

Aże przez x oznaczyliśmy dział najmłodszego żołnierza, najmłodszy zatem dostanie 800 zł. i t. d.

11. Abyśmy otrzymali wypadek ogólny, któryby służył do prędkiego rozwiązania wszelkich tego rodzaju zagadnień iakakolwiek będzie naznaczona summa i iakiekolwiek między trzema szukanymi liczbami dane różnice; oznaczmy summę do podzielenia daną przez s , różnicę między działem największym i średnim przez a , różnicę między działem średnim i najmniejszym przez b . Oznaczmy nadto dział najmniejszy przez x ; dział zatem średni będzie $x + b$, a największy $x + b + a$. Summa wszystkich tych trzech działów tym sposobem oznaczonych jest $x + x + b + x + b + a$; czyli $3x + 2b + a$. Aże summa podług zagadnienia jest s będzie więc:

$$3x + 2b + a = s.$$

Odiawszy a tak od $3x + 2b + a$, iako też od s , zostanie

$$3x + 2b + a - a = s - a, \text{ czyli,}$$

$$3x + 2b = s - a.$$

Odiawszy $2b$ tak od $3x + 2b$ iako też od $s - a$, zostanie

$$3x + 2b - 2b = s - a - 2b; \text{ czyli}$$

$$3x = s - a - 2b.$$

Podzieliwszy tak $3x$, iako też $s - a - 2b$ przez 3, będzie

$$\frac{3x}{3} = \frac{s - a - 2b}{3}; \text{ czyli } x = \frac{s - a - 2b}{3}$$

Wyrażenie to algebraiczne wysłowiwszy sposobem zwyczajnym, otrzymamy następujące prawidło dla wynalezienia ważności działu najmniejszego: *Od summy danej do podzielenia*

nia odjąć naprzód, różnicę pierwszą, potem różnicę drugą dwa razy wziętą, i resztę podzielić przez 3.

Prawidło to zastosowawszy do danego zagadnienia, w którym wyznaczona summa do podzielenia jest $s = 2840$, różnica pierwsza $a = 200$, różnica druga $b = 120$, a tem samem różnica ta dwa razy wzięta $2b = 240$; łatwo naydziemy że dział naymłodszego żołnierza wynosi 800 zł.

Ten sam wypadek otrzymalibyśmy kładąc w znalezioném wyrażeniu algebraiczném działu tego żołnierza zamiast głosek s , a i $2b$ liczby których miejsce głoski te zastępują. Tym sposobem wyrażenie to zamieniliby się w następujące:

$$\frac{2840 - 200 - 240}{3} = \frac{2840 - 440}{3} = \frac{2400}{3} = 800$$

Gdybyśmy przez x oznaczyli dział żołnierza średniego, ponieważ najstarszy ma zł. a więcej niż średni, kiedy więc dział średniego jest x , dział najstarszego będzie $x + a$; aże naymłodszy ma zł. b mniej niż średni, będzie więc dział naymłodszego $x - b$. Trzy zatem działy są: średni $= x$, naywiększy $= x + a$, najmniejszy $= x - b$, a summa ich jest $x + x + a + x - b$, czyli $3x + a - b$.

Aże podług zagadnienia summa $= s$, będzie więc

$$3x + a - b = s$$

Odiąwszy a tak od $3x + a - b$ iako
od s , zostanie

$$3x + a - b - a = s - a, \text{ czyli } 3x - b = s - a,$$

Dodawszy b tak do $5x - b$, iako też
 $s - a$, będzie

$$3x - b + b = s - a + b; \text{ czyli } 3x = s - a + b$$

Podzieliwszy tak $3x$ iako też $s - a + b$ prz
3, wypadnie

$$\frac{3x}{3} = \frac{s - a + b}{3}; \text{ czyli } x = \frac{s - a + b}{3}; \text{ to ie}$$

Chcąc otrzymać ważność działu żołni
rza średniego, trzeba od summy daney a
podzielenia odjąć różnicę pierwszą, a do
szty dodać różnicę drugą i podzielić przez

Prawdło to zastosowawszy do danego z
gadnienia, albo też w znalezioném wyrażen
algiebraiczném działu średniego żołnierza za
miast głosek s , a i b położywszy liczby w za
dnienu naznaczone, znajdziemy $x = 920$, po
czem łatwo będzie wyznaczyć dwa działy po
zostałe.

Ważność tę działu żołnierza średniego t
jest $\frac{s - a + b}{3}$, można także wyprowadzić wa
żności działu żołnierza najmłodszego, któr
jest $\frac{s - a - 2b}{3}$: ponieważ bowiem różnica mie
dzy działem najmłodszego i średniego jest b
dodawszy zatem b do ważności działu żoł
nierza najmłodszego, będzie dział średniego

$$\frac{s - a - 2b}{3} + b; \text{ czyli } \frac{s - a - 2b}{3} + \frac{3b}{3} \text{ czyli}$$

$$\frac{s - a - 2b + 3b}{3}. \text{ Wyrażenie to oznacza że od}$$

$s - a$ trzeba naprzód odjąć $2b$ a potem dodać
 $3b$ i podzielić przez 3. Od $s - a$ odiąwszy $2b$
a dodawszy $3b$, będzie $s - a + b$. Dział zatem
żołnierza średniego będzie $\frac{s - a + b}{3}$.

Podobnymże sposobem z ważności tego o
statniego działu można wyprowadzić dział żoł
nierza najstarszego: ponieważ bowiem różni
ca między temi dwoma działami jest a , doda
wszy zatem a , czyli co najedno wychodzi $\frac{3a}{5}$
do działu żołnierza średniego to jest do $\frac{3}{5}$

$$\frac{s - a + b}{3} \text{ będzie dział najstarszego}$$

$$\frac{s - a + b}{3} + \frac{3a}{5} = \frac{s - a + b + 3a}{3} = \frac{s + 2a + b}{3}, \text{ to iest}$$

do summy wyznaczonęj dodawszy różnicę
pierwszą dwa razy wziętą a drugą poedyń
czą, i wszystko podzieliwszy przez 3, wypa
dnie dział żołnierza najstarszego.

Postąpiwszy tym samym sposobem które
go wyżej użyliśmy dla wyznaczenia w liczbach
działu żołnierza najmłodszego, znajdziemy
 $x = 1120$ dział żołnierza najstarszego. Wre
szcie to samo wyrażenie ogólne działu żołnie
rza najstarszego otrzymalibyśmy oznaczając
dział ten przez x a dwa inne działami stosownie

do warunków zagadnienia, iak się o tén faktwo przekonać można.

12. Wiedząc iż dział najwiękzy $= \frac{s+2a+b}{3}$,

średni $= \frac{s-a+b}{3}$, najmniejszy $= \frac{s-a-2b}{3}$,

można będzie z łatwością rozwiązać nie tylko wszystkie zagadnienia mające za cel podzielenie daney summy pieniężney na trzy osoby podług wyznaczonych między działami różnic; ale też nieskończoną liczbę zagadnień innych wystawieniem tylko od poprzedzającego różniących się, lecz w istocie zupełnie do niego podobnych, iak są następujące:

Na seymiku złożonym z 200 osób głosujących jeden ze trzech starających się o tenże sam urząd miał za sobą 14 głosów więcej niż drugi; ten zaś miał głosów 27 więcej niż trzeci; ileż głosów miał każdy?

Matka i dwie iey córki mają razem lat 67; matka ma 18 lat więcej niż córka starsza; ta zaś córka ma dwa lata więcej niż iey siostra; ileż lat ma każda z nich?

W trzech oddziałach wojska jest razem 14250 głów; w jednym oddziale jest głów 537 więcej niż w drugim; w tym zaś jest głów 384 więcej niż w trzecim; ileż głów jest w każdym oddziale?

Do przewiezienia 29 cetnarów towaru, używa kupiec wółu, muła i konia; lecz chciałby na wół włożyć dwa cetnary więcej niż

na muła, na muła zaś 3 cetnary więcej niż na konia: iakże ciężar ten ma rozdzielić?

W zwierciadło metalowem 37 funtów wążcem znajduje się miedzi 11 funtów więcej niż cyny; cyny zaś jeden funt więcej niż arszeniku; ileż funtów na zrobienie tego zwierciadła użyto miedzi, cyny i arszeniku?

W 100 funtach prochu armatniego jest 62½ funtów więcej saletry a niżeli siarki; a węgla tyle ile siarki; ileż funtów saletry, siarki i węgla wchodzi do składu tego prochu? i t. d.

We wszystkich tych zagadnieniach wynależć potrzeba trzy liczby, których summa jest dana, i dane są różnice między temi liczbami zachodzące; a lubo w zagadnieniu ostatniem nie masz żadney różnicy między drugą liczbą szukaną i trzecią, czyli, co na jedno wychodzi, różnica ta jest = 0; gdyż ilości węgla i siarki do prochu wchodzące są równe; jednakże i w tym przypadku znalezione wyżey ogólne ważności dla każdéy z trzech liczb szukaných są do rozwiązania dostateczne; trzeba tylko w każdéy z nich zamiast b przez które oznaczona jest różnica między drugą i trzecią liczbą szukaną zachodząca, położyć zero; tym sposobem ważność np. liczby największey, która jest $\frac{s+2a+b}{3}$, zamieni się w następującą:

$\frac{s+2a+c}{3}$; czyli $\frac{s+2a}{2}$. Aże podług zagadnienia $s=100$, $a=62\frac{1}{2}$; będzie więc największą liczbą szukana, czyli ilość salety $\frac{100+135}{3}=75$ funtów i t. d.

15. Gdyby daną summę s potrzeba było podzielić na czterech żołnierzy tak aby najstarszy wziął a zł. więcej niż drugi; drugi b zł. więcej niż trzeci; trzeci c złotych więcej niż czwarty; oznaczwszy dział któregośkolwiek żołnierza przez x a inne działy stosownie do warunków zagadnienia, i odbywszy działanie takie jak wyżej, znaleźlibyśmy dział największy

$$\frac{s+3a+2b+c}{4}; \text{ dział drugi } = \frac{s-a+2b+c}{4}$$

$$\text{dział trzeci } = \frac{s-a-2b+c}{4}, \text{ dział czwarty}$$

$$= \frac{s-a-2b-3c}{4} \text{ iak się o t\`em łatwo przeko-}$$

nać można.

14. Te same ważności ogólne czterech szukanych liczb w zagadnieniu ostatniem, można także bez pośrednio wyprowadzić z trzech ważności znalezionych w zagadnieniu poprzedzającym: Jakoż porównawszy z sobą dwa te zagadnienia, postrzeżemy niektóre warunki w obudwu jednakowe, niektóre odmienne: skąd wniesiemy że tak sposób postępowania w rozwiązaniu tych dwóch zagadnień, iako też znalezione ważności szukanych działów pod nie-

którymi względami będą w obudwu zagadnieniach jednakowe, pod niektórymi odmienne. Tak w poprzedzającym iak w ostatniem zagadnieniu trzeba podzielić daną summę na części nie równe podług wyznaczonych między temi częściami różnic: lecz w zagadnieniu powyższem liczba tych części jest 3, i dla téy przyczyny mianownikiem każdej z trzech znalezionych ważności jest liczba 3; w zagadnieniu ostatniem liczba szukanych części jest 4, a t\`em sam\`em i mianownikiem czterech szukanych ważności powinna być liczba 4. W zagadnieniu powyższem wyznaczonych między działami różnic jest dwie: jedna a między działem największym i średnim, druga b między działem średnim i najmniejszym; obie też różnice te wchodzą do liczników znalezionych ważności. W zagadnieniu ostatniem trzy są wyznaczone różnice, jedna a między działem największym i drugim, druga b między działem drugim i trzecim, trzecia c między działem trzecim i czwartym: w licznikach zatem szukanych działów tego zagadnienia wszystkie trzy różnice znaydować się powinny. W liczniku największ\`ey części zagadnienia powyższego, różnica a znayduie się dwa razy wzięta: bo też najstarszy żołnierz raz ma złotych a więcej niżeli średni, drugi raz złotych a i b więcej niż najmłodszy: w zagadnieniu ostatniem żołnierz najstarszy raz ma złotych a więcej niż drugi, 2re złotych $a+b$ więcej niż trzeci, nakoniec złotych a , b i c więcej niż najmłodszy. W li-

czniku zatem ważności działu największego w ostatnim zagadnieniu ostatniem jest 4; 2re że każdy ważności mianownikiem będzie liczba 4; 3cie że do liczników wchodzić będą nie tylko summa s , różnica pierwsza a , różnica druga b , ale też i różnica trzecia c ; 4te że na koniec ponieważ żołnierz np. najstarszy ma naprzód a złotych więcej niż trzeci, na koniec złotych a i b więcej niż drugi, potem złotych a , b i c więcej niż czwarty; więc w liczniku ważności działu tego żołnierza będzie różnica a wzięta trzy razy, różnica b wzięta dwa razy, a różnica c wzięta raz jeden. Dział zatem żołnierza najstarszego będzie $\frac{s+3a+2b+c}{4}$;

od którego odjąwszy a czyli $\frac{4a}{4}$ zostanie dział

żołnierza drugiego $\frac{s+3a+2b+c}{4} - \frac{4a}{4}$; czyli

$\frac{s-a+2b+c}{4}$ i t. d.

15. Gdyby, daną summę potrzeba było podzielić na części nie równych 5, 6, 7, i t. d. stosownie do wyznaczonych między niemi różnic; rozwiązanie tych zagadnień samą tylko liczbą szukanych części od poprzedzającego różniących się nie podpadłoby żadnej trudno-

ści. Można by nawet daną liczbę części oznaczyć przez jaką głoskę z abecadła, i zagadnienie to uczynić tak ogólnem, aby raz rozwiązane, służyło do wszystkich przypadków jakie tylko w tym rodzaju zagadnień wydarzyć się mogą. Tym sposobem zagadnienie to zamieniłoby się w następujące:

Daną summę s podzielić na m części nie równych, i takich, aby różnica między częścią pierwszą i drugą była a , między drugą i trzecią b , między trzecią i czwartą c ; i t. d. iakież będą te części. Lecz rozwiązanie tego zagadnienia wymaga większego cokolwiek wprawy niż ią dotąd mieć możemy. Wprawa ta posłuży nam także do łatwego i prędkiego rozwiązania innych zagadnień nie równie zawilszych niż są poprzedzające: a nawet w zagadnieniach poprzedzających sposób postępowania może być znacznie skróconym i ułatwionym, gdy się ze znakami ogólnemi lepiej obeznamy.

16. Wyrażenia te: $3x + 440 = 850$, $3x + 2a + b = s$, i tym podobne, zowią się *równaniami, aequationes*. Ilości: $3x$, $2a$, b , s , 440 i t. d. oddzielone od siebie znakiem $+$ lub $-$, zowią się *wyrazami, termini*. Wyrazy składające równanie oddzielone od siebie znakiem $=$, nazywają się *stronami równania, membra*. W równaniu $3x + 2a + b = s$ pierwsza strona ma trzy wyrazy, to jest $3x$, $+ 2a$ i $+ b$, druga zaś strona ma tylko jeden wyraz

s. Podobnie równanie $8x - 12 = \frac{2x}{3} + 32$, mając z obu stron po dwa wyrazy: $8x$ i -12 są dwa wyrazy strony pierwszej, $\frac{2x}{3}$ i $+32$ są dwa wyrazy strony drugiej.

Każde równanie uważać potrzeba jako zagadnienie napisane znakami algebricznymi w ten sposób, ażeby wszelkie względy czyli stosunki podług warunków zagadnienia między ilościami niewiadomymi i wiadomymi zachodzące były wyrażone, i oznaczona równość, która podług tychże warunków między ilościami jednymi i drugimi zachodzić musi. I tak równanie ostatnie $8x - 12 = \frac{2x}{3} + 32$, któreśmy przypadkiem wzięli dla przykładu, wysłowione sposobem zwyczajnym, zamieni się w następujące zagadnienie: *znaleźć liczbę x, która by wzięta razy 8, i zmniejszona 12, tyle uczyniła, ile czyni ta sama liczba wzięta razy 2, podzielona potem przez 3 i powiększona 32.* Podobnie równanie

$$\frac{x \cdot m}{a} - \frac{p + q}{b - c} = \frac{r}{d} + s$$

jest wyrażeniem algebricznym następującego zagadnienia: *znaleźć liczbę x, która by pomnożona przez liczbę m, potem podzielona przez a, i zmniejszona sumą dwóch liczb p i q podzieloną przez różnicę dwóch liczb b i c, tyle czyniła, ile czyni ta sa-*

ma liczba x zmniejszona liczbą r, potem podzielona przez sumę dwóch liczb d i e, powiększona liczbą s.

Wreszcie zawsze łatwiej będzie dane równanie, wystawić językiem zwyczajnym i zamienić je w zagadnienie, aniżeli dane zagadnienie napisać znakami algebricznymi i zamienić w równanie. Należy więc w tej mierze znać wprawda, które nabyć można rozwiązując rozmaitego gatunku zagadnienia, i jakie niżej podamy.

17. Zagadnienie w ten czas jest rozwiązane, kiedy się znajdzie wartość ilości niewiadomej: co w równaniu w ten czas ma miejsce, kiedy z jednej strony równania jest sama ilość niewiadoma, a z drugiej same tylko ilości wiadome. Znaleźć w równaniu wartość ilości niewiadomej, czyli zamienić równanie na inne, w którymby z jednej strony była sama tylko ilość niewiadoma, a z drugiej same tylko ilości wiadome, zowie się *rozwiązaniem* tego równania. Ze zaś w równaniu ilość niewiadoma zwyczajnie jest rozmaicie połączona z wiadomymi, iak widzieć można w równaniach powyższych; ażeby więc równanie rozwiązać, trzeba ilość niewiadomą uwolnić od potrzebnych z nią połączonych. Działanie do tego potrzebne podlega pewnym prawidłom, które w krótkie wyłożymy.

18. Ponieważ w równaniu jedna strona jest równa drugiej, więc do obu stron dodawszy, lub też od obu stron odjąwszy też sa-

mę liczbę, w pierwszym przypadku wypad dwie summy, w drugim dwie różnice równe. Podobnież obiedwie strony równania rozmiędzywszy, lub też obiedwie podzieliwszy przez tę samą liczbę, w pierwszym przypadku wypadną dwa iloczyny, w drugim dwa ilorazy równe. I tak jeżeli *np.* $x=18$, będzie $10x+3=18+3=21$; *2re.* $x-3=18-3=15$.

3cie. $x \times 3$ czyli $3x=18 \times 3=54$. *4te.*

czyli $\frac{1}{3}x = \frac{18}{3} = 6$.

Ten sam wypadek miałby miejsce gdybyśmy zamiast liczb 3 i 18, użyli innych liczb jakichkolwiek.

Uwaga ta sama przez się widoczna po służy nam do uwolnienia ilości niewiadomej od wiadomych z nią połączonych. Jakoż ilość niewiadoma z wiadomymi może być czworogłosem sposobem połączona;

1ód. przez dodawanie, *np.* $x+3=21$;

2re. przez odejmowanie, *np.* $x-3=15$;

3cie. przez mnożenie, *np.* $3x=54$.

4te. przez dzielenie, *np.* $\frac{x}{3}=6$.

W pierwszym przypadku ilość niewiadoma uwolni się od wiadomej przez odcięcie, w drugim przez dodanie po obu stronach równania liczby wiadomej 3; w trzecim przez podzielenie, w czwartym przez rozmnożenie obu stron równania przez liczbę wiadomą 3; i będzie:

1ód. $x+3-3=21-3$; czyli $x=18$;

2re. $x-3+3=15+3$; czyli $x=18$;

3cie. $\frac{3x}{3} = \frac{54}{3}$; czyli $x=18$;

4te. $\frac{x}{3} \times 3 = 6 \times 3$, czyli $x=18$.

Podług tych uwag chcąc rozwiązać równanie powyższe

$$8x-12=\frac{2x}{3}+32 \text{ (16);}$$

trzeba *1ód.* po obu stronach równania dodać po 12; tym sposobem równanie to zamieni się w następujące.

$$8x-12+12=\frac{2x}{3}+32+12; \text{ czyli,}$$

$$8x=\frac{2x}{3}+44.$$

2re. Wostatniem równaniu odjąwszy po obu stronach $\frac{2x}{3}$, zostanie

$$8x-\frac{2x}{3}=\frac{2x}{3}+44-\frac{2x}{3}; \text{ czyli}$$

$$8x-\frac{2x}{3}=44.$$

$8x$ znaczy to samo co $\frac{24x}{3}$; ostatnie więc

równanie zamienić można w następujące:

$$\frac{24x}{3}-\frac{2x}{3}=44; \text{ czyli } \frac{22x}{3}=44.$$

3cie. Wostatniem równaniu obie strony rozmnożywszy przez 3, będzie

$$\frac{22x}{3} \times 3 = 44 \times 3; \text{ czyli}$$

$$\frac{66x}{3} = 132. \text{ czyli. } 22x = 132$$

Nakoniec obie strony ostatniego równania podzieliwszy przez 22 wypadnie

$$\frac{22x}{22} = \frac{132}{22}; \text{ czyli } x = 6.$$

Liczba zatem szukana jest 6: iakoż wzięte 8 razy i zmniejszone 12 czyni 56; wzięte 2 razy, podzielone potem przez 3 i powiększone 32, czyni także 56.

19. Gdyby w równaniach oprócz ilości niewiadomych zawsze były znaki liczebne, iak jest równanie poprzedzające, już byśmy i t wo mogli wyprowadzić prawidła na uwolnienie ilości niewiadomých od wiadomych. Le w Algebrze zamiast znaków liczebnych używają się znaki ogólne, to jest głoski abedgħa, z któr mi potrzeba odbywać te same działania, iakie się odbywają ze znakami liczebnymi. Chcąc np. rozwiązać równanie powyższe (16),

$$\frac{x \times m}{a} - \frac{p+q}{b-c} \frac{x-r}{d+e} + s;$$

potrzeba i o d, po obu stronach dodać $\frac{p+q}{b-c}$

2re, odjąć $\frac{x-r}{d+e}$; 3cie, rozmnożyć obie strony

ny przez $b-c$, i przez $d+e$, 4te podzielić obie strony przez m i t. d. Działan takowych nie moglibyśmy skutecznie nie znając sposobu iakim się one odbywają. Chcąc zatem rozwiązywać równania algebraiczne, trzeba pierwszy poznać sposób dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia za pomocą znaków ogólnych; co wyłożymy w następującym rozdziale.

R O Z D Z I A Ł II.

O Dodawaniu, Odejmowaniu, Mnożeniu i Dzieleniu ilości algebraicznych.

1. Dodawanie ilości algebraicznych.

20. Iłości algebraiczne, równie iak liczby w Arytmetyce, są albo *proste*, to jest z jednego wyrazu złożone, np. a , $5b$, $27cd$ i t. d. albo *wielokrotne* to jest z dwóch, trzech lub więcej wyrazów złożone, np. $a-b$, $5b+6c$ i t. d. Iłości algebraiczne nadto mogą być albo *podobne* to jest jednakowemi głoskami oznaczone, np. $3a$ i $12a$, $7b$ i $8b$, $21cd$ i cd i t. d; albo też *nie podobne* to jest odmiennemi głoskami oznaczone np. $3a$ i $5b$, $5a$ i $5ac$, $7bc$ i $8cm$ i t. d.

21. Na dodawanie ilości nie podobny ten tylko Algebra podaje sposób: *ilości podobne napisać przy sobie w jednym wierszu i złączyć je znakiem +*. I tak d w

ści pojedyncze $8a$ i $14b$ dodane do siebie czynią $8a + 14b$; podobnież dwie ilości wielorakie $4a - 5b$ i $2c - 3d + e$ dodane do siebie czynią $4a - 5b + 2c - 3d + e$ i t. d.

22. Co się tycze ilości podobnych, w dodawaniu tych zachodzą niektóre skrócenia, iak to w następujących przykładach obaczymy.

1^{dd}. a dodane do a czyni $a + a$, czyli $2a$.

2^{re}. $3a$ dodane do $4a$ czynią $4a + 3a$ czyli $7a$.

3^{cie}. $5a + 3b$ dodane do $4a + 2b$, czynią $5a + 3b + 4a + 2b$; czyli $9a + 5b$.

4^{te}. $a + b$ dodane do $a - b$, czyni $a - b + a + b$, czyli $2a - b + b$, czyli $2a$.

5^{te}. $5a - 4b$ dodane do $3a + 4b$, czynią $5a + 4b + 3a - 4b$, czyli $8a + 4b - 4b$ czyli $8a$.

6^{te}. $7a - 2b$ dodane do $2a + 6b$, czynią $2a + 6b + 7a - 2b$; czyli $9a + 6b - 2b$, czyli $9a + 4b$.

7^{me}. $a - 7b$ dodane do $3a + 3b$, czynią $3a + 3b + a - 7b$, czyli $4a + 3b - 7b$; czyli $4a - 4b$.

8^{me}. $4a - 3b$ dodane do $2a - 4b$, czynią $2a - 4b + 4a - 3b$, czyli $6a - 4b - 3b$ czyli $6a - 7b$ i t. d.

Pierwsze trzy przykłady nie potrzebują żadnego objaśnienia: pięć ostatnich są także owywiste: bo w przykładzie 4^{ym} dodawszy $-b$ do $a - b$, będzie summa $2a - b + b = 2b$; znaczy, że $2a$ powiększywszy i zmniejszy-

wszy

wszy tą samą ilością b , zostanie $2a$. Toż mówić o przykładzie 5^{ym}, w którym $8a + 4b - 4b = 8a$. W przykładzie 6^{ym} summa $9a + 6b - 2b = 9a + 4b$, znaczy, że do $9a$ dodawszy naprzód $6b$, a potem odiawszy, $2b$ zostanie $9a + 4b$. Podobnież w przykładzie 7^{ym} summa $4a + 3b - 7b = 4a - 4b$, znaczy że do $4a$ dodawszy naprzód $3b$, a potem odiawszy $7b$, zostanie $4a - 4b$.

Nakoniec w przykładzie 8^{ym} summa $6a - 4b - 3b = 6a - 7b$, znaczy, że od $6a$ odiawszy naprzód $4b$, a potem $3b$, zostanie $6b - 7b$.

Zastanowiwszy się pilnie nad temi przykładami, wyciągniemy z nich następujące uwagi:

1^{dd}. Dodać ilości podobne, głoski nie podlegają żadnej zmianie, lecz tylko znaki i liczby przed głoskami będące, które się zowią *spółczynniki, coefficientes*.

2^{re}. Spółczynniki te czasem się od siebie odejmują, iak jest w przykładzie 6^{ym} i 7^{ym}, czasem się do siebie dodają, iak w przykładzie 2^{im}, 3^{im} i 8^{ym}, tudzież w przykładzie 1^{szym}, gdzie a dodane do a , czyni $2a$, i w przykładzie 7^{ym} gdzie a dodane do $3a$ czyni $4a$: spółczynnik bowiem gdy jest i opuszcza się w pisanu, lecz jest domyslny: i tak a, b, x i t. d. znaczy to samo co $1a, 1b, 1x$ i t. d.

3^{cie}. Spółczynniki ilości podobnych w ten czas się do siebie dodają, kiedy przed temi ilościami są jednakowe znaki; to jest: albo przed obiema znak $-$, iak w przykładzie 8^{ym}, albo przed obiema znak $+$ iak w przykładzie

3cym, i iak jest we wszystkich przykładach przed wyrazem pierwszym, przed którym znak + opuszcza się, lecz jest zawsze domysłny.

4te. Spółczynniki ilości podobnych w ten czas się od siebie odeymują, kiedy przed temi ilościami są znaki odmiennie, to jest: przed jedną znak +, przed drugą znak —, iak w przykładzie 6tym i 7myim.

5te. Kiedy się spółczynniki od siebie odeymują, pozostała reszta albo ma przed sobą znak + iak w przykładzie 6tym; albo znak —, iak w przykładzie 7myim; albo nakoniec nie masz żadney pozostalej reszty, jak w przykładzie 4tym i 5tym.

6te. Po odjęciu od siebie spółczynników przed pozostałą resztą daie się znak taki, jaki jest przed ilością mającą spółczynnik większy: jeżeli zaś spółczynniki te są równe, na ten czas reszta miejsca mieć nie będzie.

Zuwag tych możemy ustanowić następujące prawo dodawania ilości podobnych:

Spółczynniki ilości podobnych mających przed sobą jednakowe znaki dodają się; spółczynniki ilości podobnych mających przed sobą odmiennie znaki odeymują się; daie przed resztą znak spółczynnika większego.

53. Gdyby przyszło 3, 4 lub więcej ilości podobnych do siebie dodać, na ten czas trzeba wziąć *jedną sumę ilości podobnych mających przed sobą znak +, drugą sumę tychże ilości mających przed sobą znak —, i mniejszą z tych dwóch sum odjąć od*

większą, a przed resztą dać znak sumy większej.

Podług tego prawidła dodawszy do siebie następujące ilości.

$$7a + 2b - 5c + 2d$$

$$3b + 6c - 4d - 8a$$

$$3a - 4b + 2c + 5d$$

$$a - 3b - 2c - 3d; \text{ będzie summa}$$

$$11a - 8a + 5b - 7b + 8c - 7c + 7d - 7d;$$

czyli,

$$3a - 2b + c.$$

Działanie to zależące na zebraniu ilości podobnych w jeden wyraz, czyli na sprowadzeniu ich do jednego wyrazu, zowie się *sprowadzeniem, reductio*, i ma miejsce nie tylko w dodawaniu ilości algebracyjnych; ale też w ich odeymowaniu, mnożeniu i dzieleniu, iak to obaczmy niżej.

II. Odeymowanie ilości algebracyjnych.

24. Na oznaczenie że jedna ilość ma być odjęta od drugiey, używa się, iakośmy inż powiedzieli, znak odeymowania —; i tak $a - b$ naczy że od liczby oznaczoney przez a trzeba odjąć liczbę oznaczoną przez b .

A zatem od a odiawszy $b + c$, to jest, od liczby oznaczoney przez a odiawszy dwie liczby jednę oznaczoną przez b drugą przez c , zostanie reszta $a - b - c$. Podobnież od a odiawszy $b + c + d$, zostanie reszta $a - b - c - d$.

Stąd wniesiemy że w ilościach mających się odejmować wszystkie znaki + tak wyraźne iak domysłne zamieniaią się na znaki —. I tak od $3a - 2b + 4c$ odiawszy $5d + 7e + m + x$, zostanie $3a - 2b + 4c - 5d - 7e - m - x$.

Gdyby przyszło od a odiać $b - c$, abyśmy to odejmowanie łatwiej uskuteczнили, naznaczymy dla a , b i c szczególne ważności iakiekolwiek. Niech będzie $a = 12$, $b = 8$, $c = 3$. Azatém od a odiać $b - c$, iest teraz to samo, co od liczby 12 odiać liczbę 8 zmniejszoną trzema jednościami; czyli od 12 odiać $8 - 3$. Odiawszy 8 od 12, zostanie $12 - 8 = 4$. Lecz pozostała reszta 4 iest mniejsza niż być powinna: bośmy też od 12 odieśli liczbę większą niż potrzeba. Należało wrzeczy samę odiać mniej niż 8 trzema jednościami; zostanie przeto więcej niż 4 trzema jednościami; i będzie $12 - 8 + 3 = 4 + 3 = 7$. Położywszy teraz zamiast liczb naznaczonych znaki ogólne, wniesiemy, że od a odiawszy $b - c$, zostanie $a - b + c$.

Jakiekolwiek ważności szczególne naznaczymy dla a , b i c , zawsze trzeba będzie liczbę oznaczoną przez $-c$ dodać do pozostałej z odjęcia liczby oznaczonę przez b od liczby oznaczonę przez a . Stąd wniesiemy, że odejmując ilości mające przed sobą znak —, trzeba znak ten — zamienić na znak +.

Abyśmy się o tę ważną prawdę iest widocznie przekonali, wyłożymy ją ieszcze następującym sposobem: Od 12 odiawszy 8

zostanie 4. Jeżeli tak do 12 iako do 8 dodamy np. po 3, i druga summa, to iest, 11 odejmiemy od summy pierwszey, to iest od 15, zostanie także 4. Jeżeli tak do 12 iak do 8 dodamy po 4, po 5 i t. d, i summe mniejszą odejmiemy od większey, zawsze zostanie ta sama reszta, to iest 4. Gdybyśmy zamiast liczb 12 i 8 wzięli do odejmowania inne dwie liczby iakiekolwiek, i tak do większey iak do mniejszey dodawsy iednę liczbę, summe drugą odieśli od pierwszey, zawszeby się pozostawała ta sama reszta, iakaby wypadła bez takowego dodania. Oznaczmy więc liczbę większą przez a , liczbę mniejszą przez $b - c$ i odejmiemy drugą od pierwszey: ponieważ dodanie iakieykolwiek liczby do obu tych liczb przez a i przez $b - c$ oznaczonych, nie ma żadnego wpływu na resztę z odjęcia iednę od drugiey zostającą; dodamy więc liczbę c tak do a , iako też do $b - c$; w tym przypadku zamiast odejmowania $b - c$ od a , potrzeba od $a + c$ odiać $b - c + c$; czyli, od $a + c$ odiać b : gdyż $b - c + c = b$. Odiawszy b od $a + c$, zostanie $a + c - b$.

Sposób inny. Ponieważ od b odiawszy b nic się nie zostanie, czyli $b - b = 0$, podobnież $c - c = 0$, będzie więc

$$a - a + b - b + c - c.$$

Tym albowiem sposobem ilość a nie zmieniła się co do ważności; nadaliśmy iey tylko inną postać przez przydanie do nię czterech ilości, $+b - b + c - c$, których summa czyni 0.

Jeżeli teraz uważamy, że przekreślić którąkolwiek z tych czterech ilości do a przydatych, jest to samo co ilość tę odjąć od a ; wniesiemy, iż w powyższem wyrażeniu z pierwszey strony odiawszy $b - c$ a z drugiey strony przekreśliwszy $+b - c$, reszty pozostałe będą równe. Ze zaś po takowem działaniu z pierwszey strony zostać powinna szukana reszta z odjęcia $b - c$ od a wypadająca; a z drugiey strony zostanie $a - b + c$; więc tą szukaną resztą jest $a - b + c$; to jest: od a odiawszy $b - c$, zostanie $a - b + c$.

Wreszcie dla sprobowania czy w odejmowaniu nie zaszła jaka omyłka, do pozostałéj reszty $a - b + c$ dodawszy ilość odjętą $b - c$ będzie summa $a - b + c + b - c = a$; co dowodzi że znaleziona reszta jest prawdziwa.

Z uwag tych wypada następujące prawo odejmowania ilości algebraicznych: w ilości mającý być odjętą wszystkie znaki $+$ zamieniwszy na $-$, i wszystkie znaki $-$ zamieniwszy na $+$, napisać ją wiednym wierszu poprawéj stronie drugiey ilości dany.

Podług prawidła tego odiawszy $d - 2e + 8m - x$, od $5a - 2b + 3c$ zostanie $5a - 2b + 3c - d + 2e - 8m + x$ i t. d.

Jeżeli w pozostałéj reszcie znajdują się ilości podobne, należy je sprowadzić do jednego wyrazu podług prawidła podanego wyżej. (22); np. od $7a - 4b + 8c$ odiawszy $5a - 4b + 7c$,

zostanie $7a - 4b + 8c - 5a + 4b - 7c$, czyli $2a + c$ i t. d.

25. Czasem dosyć jest tylko ostrzedz że ilość jednę od drugiey odjąć trzeba. Na ten czas ilość mająca być odjętą bierze się w nawias bez żadnégó zmiany znaków przed ię wyrażeni będącých; lecz przed nawiasem daie się znak $-$. I tak wyrażenie to: $7a - 4b + 8c - (5a - 4b + 7c)$, znaczy że od $7a - 4b + 8c$ trzeba odjąć $5a - 4b + 7c$. Ile razy więc w wyrażeniu jakim przed nawiasem jest znak $-$, chcąc wyrażenie to napisać bez nawiasu, trzeba wszystkie znaki ilości będącý w nawiasie zamienić $+$ na $-$, i znaki $-$ na $+$; np. wyrażenie następujące: $5a + 2b - (7a + 5b - 4c - 8d)$, znaczy to samo, co $5a + 2b - 7a - 5b + 4c + 8d$; czyli

$$-4a - 3b + 4c + 8d.$$

26. Wostatnim przykładzie pozostała reszta $-4a - 3b + 4c + 8d$ znaczy że od summy dwóch ilości $4c$ i $8d$ trzeba odjąć dwie ilości $4a$ i $3b$. Iłości te: $+4c$, $+8d$, i wszystkie inne przed któremi jest znak dodawania $+$ wyraźny lub domysłny, zowią się ilościami dodaynemi, *quantitates additivae*; ilości zaś te $-4a$, $-3b$ i wszystkie inne przed któremi jest znak odejmowania $-$, zowią się ilościami odienmniemi, *subtractivae*.

W każdym wyrażeniu algebraiczném na pierwszem miejscu kładzie się zwyczajnie ilość dodayna z domysłnym znakiem $+$, iakośmy już powiedzieli (22). Jeżeliby zaś wyrażenie

jakie zaczynało się od ilości odjemnych, natem czas przed ilością tą trzeba dać wyraźny znak —. np. od $5a + 4b$ odjąwszy $8a + 9b$, zostanie $3a + 4b - 8a - 9b$, czyli $-5a - 5b$. Podobnie od $6a - 7b$ odjąwszy $7a - 7b$ zostanie $6a - 7b - 7a + 7b$, czyli $-a$ i t. d.

W przykładach tych dwie pozostałe reszty to jest. — $5a - 5b$, i — a , składa się tylko z samych ilości odjemnych. Wiemy już że np. wyrażenie, to: $a - b$ znaczy iż od a czyby oznaczony przez a odjąć potrzeba liczbę oznaczoną przez b . Ale co znaczy wyrażenie to: — a , — $5a - 5b$, i wszelkie inne z samych tylko ilości odjemnych złożone, które nie tylko z odejmowania, ale też, iak się okaże wkrótce, z mnożenia także i dzielenia ilości algebraicznych wypaść mogą, to wyłożymy na inném miejscu.

III. Mnożenie ilości algebraicznych.

27. Chcąc dwie ilości pojedyncze przeciw sobie rozmnożyć, dosyć jest między niemi dać znak mnożenia $\times$. I tak $a \times b$ jest iloczynem dwóch czynników a i b ; to jest, znaczy, że liczba oznaczona przez a powinna być rozmnożona przez liczbę którą oznacza b . Zamiast znaku $\times$, daje się częstokroć między czynnikami kropka; co zwyczajnie w ten czas ma miejsce, gdy czynniki są liczebne, np. $5 \cdot 4$, znaczy rozmnożone przez 4. Najczęściej jednak czynniki ogólne piszą się przy sobie bez żadnego

znaku. np. ab znaczy a rozmnożone przez b i t. d.

Mnożąc więc ab przez c , wypadnie iloczyn abc ; mnożąc ab przez cd , wypadnie iloczyn $abcd$; mnożąc ax przez bc wypadnie iloczyn $abcx$, i t. d.

Stąd można wyprowadzić następujące prawidło mnożenia ilości algebraicznych pojedynczych: *iloczyn ilości pojedynczych składa się ze wszystkich czynników bez żadnego znaku przy sobie położonych.*

A iako iloczyn czterech np. czynników liczebnych 2, 3, 4 i 5, lub innych iakichkolwiek, zawsze jest ten sam, iakikolwiek zachowany będzie porządek w ich mnożeniu; tak też iloczyn złożony z czynników ogólnych miejsce liczb zastępujących, zawsze jest ten sam, w jakimkolwiek porządku czynniki te są w nim umieszczone. I tak, $axbx$, $acxb$, i t. d. zawsze jest ten sam iloczyn utworzony z rozmnożenia czterech czynników a , b , c i x . Zwyczajnie jednak piszą się głoski w iloczynie takim porządkiem, iakim po sobie następują w abecedzie.

Co się tycze współczynników liczebnych, które przy czynnikach ogólnych znajdują się, mogą, te mnożą się sposobem zwyczajnym, np. $6a \times 5b$, czynią $30ab$, $4x \times 8c$ czynią $32cx$ i t. d.

28. Mnożąc a przez a , podług powyższego prawidła wypadnie iloczyn aa ; mnożąc aa

przez a , wypadnie aaa ; mnożąc aa przez a , wypadnie $aaaa$ i t. d.

W takim przypadku pisze się raz tyle a , ile razy a lub inna jakakolwiek; a z prawej strony u góry daje się znak liczebną mający jedność, ile razy ilość a ta wzięta jest za czynnik. I tak zamiast aa , aaa , $aaaa$ i t. d. pisze się a^2 , a^3 , a^4 i t. d. co przez skrócenie mawia się a dwa, a trzy, a cztery i t. d. Liczby te 2, 3, 4, znaczą że w iloczynie a^2 , ilość a wzięta jest 2 razy za czynnik; w iloczynie a^3 ilość a wzięta jest 3 razy za czynnik; w iloczynie a^4 ilość a wzięta jest 4 razy za czynnik i t. d. Liczby takowe zowią się *wykładnikami*, *exponentes*.

Trzeba tu zastanowić się należyście nad znaczeniem iaką zachodzi między spółczynnikami i wykładnikami. W ilościach tych $2a$, $3a$, i t. d. spółczynniki 2, 3, 4 znaczą że ilość a zmnożona jest przez 2, 3, 4 jedności, czyli ilość a dodana jest do siebie 2, 3, 4 razy; i zamiast $2a$, można by napisać $a + a$, zamiast $3a$ można by napisać $a + a + a$ i t. d. W ilościach zaś tych a^2 , a^3 , a^4 i t. d. wykładniki 2, 3, 4 znaczą że ilość a wzięta jest za czynnik 2, 3, 4 razy; i zamiast a^2 można napisać $a \times a$, zamiast a^3 można napisać $a \times a \times a$ i t. d. Dajmy że $a = 5$, będzie $2a = 2 \cdot 5 = 10$, $3a = 3 \cdot 5 = 15$ i t. d. $a^2 = 5 \cdot 5 = 25$; $a^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ i t. d.

29. Wszelki iloczyn którego czynników między sobą równe, czyli który jest utworzony

mnożenia jedneyże ilości przez siebie same, zowie się *potęgą* téj ilości, *potentia*. I tak a^2 jest drugą potęgą ilości a , i zowie się inaczej kwadratem; a^3 jest trzecią potęgą ilości a , i zowie się inaczej sześcianem. Inne wszystkie potęgi mają nazwiska od liczby jedności ich wykładników. I tak a^4 , a^5 , a^6 i t. d. jest 4tą, 5tą, 6tą i t. d. potęgą ilości a . Sama ilość a jest potęgą pierwszą: ilość bowiem a może być uważana jakoby raz jeden wzięta była za czynnik, i jakoby miała za wykładnik 1; lecz wykładnik będący jednością opuszcza się, ale jest zawsze domyslny, i tak a , b , c i t. d. jest to samo co a^1 , b^1 , c^1 i t. d.

30. Z tego cośmy dotąd powiedzieli o mnożeniu ilości pojedynczych, wypada co następuje:

$$a^2 \times a^3 = aa \times aaa = aaaaa = a^5 = a^{2+3};$$

$$ab^4 \times a^2b^2 = a^1b^4 \times a^2b^2 = abbbb \times aabb = a^3b^6 = a^{1+2} b^{4+2} \text{ i t. d.}$$

Skąd wniesiemy, że mnożąc przez siebie czynniki mające te same głoski z wykładnikami, wykładniki głosek tych tak wyraźnie tak domyslnie dodają się.

31. Zebrawszy razem wszystkie uwagi, któreśmy nad mnożeniem ilości pojedynczych uczynili, wyprowadzimy z nich następujące prawidło ogólne do mnożenia tych ilości: *spółczynniki mnożą się sposobem zwyczajnym; wykładniki głosek jednakowych tak wyraźnie tak domyslnie dodają się; a wszystkie głoski*

pisza się przy sobie bez żadnego znaku rzadkiem *abecedla*. I tak iloczyn trzech czynników $5ab^2c^3d \times 4ab^3c^2 \times 3ab^2c^4$ *60a³b⁷c⁹d* e i t. d.

32. Jako potęgi różnią się między sobą liczbą czynników równych potęgi te twórczych; tak iloczyny podług rozmaitej liczby tych czynników iakichkolwiek są rozmaite; tak *ab* jest iloczynem drugiego stopnia; jest iloczynem trzeciego stopnia *abcd* jest iloczynem 4go stopnia i t. d. gdyż iwszy iloczyn jest z dwóch czynników, 2gi z trzech, 3ci z czterech i t. d. $15a^2b^3c$ jest iloczynem szóstego stopnia; ma bowiem sześć czynników, to jest: dwa czynniki *a*, trzy czynniki *b* i jeden czynnik *c*; czynniki liczebne czyli spotęgowani nie uważają się w naznaczaniu stopnia ilości algiebraicznych; i tak $123ab$ jest iloczynem stopnia 2go.

Zastanowiwszy się z uwagą nad iloczyn czynników pojedynczych, postrzeżemy że pierzeń tego iloczynu równy jest summie wszystkich jego czynników. I tak $a^2bc \times d = a^2bc^2d$, iloczyn ten jest szóstego stopnia i jeden jego czynnik a^2bc jest stopnia 4go i *cd* stopnia 2go i t. d.

53. Dotąd zatrudniałszy się mnożeniem ilości algiebraicznych pojedynczych: obacz teraz iak się mnożą ilości wielorakie. A i przód uważać tu potrzeba, że iako w Arytmetyce mnożąc np. 26, czyli $20 + 6$ przez mnożymy i 6 iedności i 2 dziesiątki przez

też mnożąc np. $a + b$, lub $a - b$ przez c zeba rozmnożyć i *b* i *a* przez *c*. Podobnież iko w Arytmetyce mnożąc np. 37 przez 24, mnożymy naprzód 7 iedności i 3 dziesiątki przez 2; a potem 7 iedności i 3 dziesiątki przez 2; ówne też i w Algiebrze mnożąc np. $a + b$, lub $a - b$ przez $c + d$, lub przez $c - d$, trzebna rozmnożyć *b* i *a* przez *d*, a potem toż samo *b* i *a* przez *c*; z tą tylko odmianą, że w Arytmetyce zaczyna się mnożenie od prawej ręki; gdyż z rozmnożenia iedności przez iedności, mogą wypaść dziesiątki i t. d., co w mnożeniu ilości algiebraicznych nievsca mieć nie może. przeto też mnożąc ilości algiebraiczne trzymamy się w mnożeniu tego porządku, którego trzymać się nawykliśmy w pisanii, to jest mnożenie rozpoczynamy od lewéj ręki postępując ku prawéj. I tak mnożąc np. $a + b$ przez c mnożymy naprzód *a* przez *c*, potem *b* przez *c*.

Druga uwaga która tu uczynimy jest następująca: iloczyn dwóch liczb iakichkolwiek równa się zawsze iednemu z czynników tyle razy do siebie dodanemu, czyli tyle razy wziętemu ile czynnik drugi ma iedności. I tak iloczyn np. 50 utworzony z rozmnożenia 10 przez 5, równa się czynnikowi 5 dodanemu do siebie czyli wziętemu razy 10; albo też równa się czynnikowi 10 dodanemu do siebie czyli wziętemu razy 5. Podobnież iloczyn ab równa się czynnikowi *a* wziętemu tyle razy, ile czynnik *b* ma iedności; albo też równa się i czynnikowi

wi b wziętemu tyle razy, ile czynnik a ma dności.

Ztędy prawdy przez się widoczny wypada ten ważny wniosek: że powiększwszy ilość, iloczyn ich powiększy się albo zmniejszy drugim czynnikiem tyle razy wziętym jednociami, czynnik pierwszy jest powiększony lub zmniejszony.

54. Po tych uwagach przystąpny już do mnożenia.

Przykład	1.	2.	3.
Mnożny	$a+b$	$a-b$	$a+b$
Mnożnik	c	c	$c+d$
iloczyn	$ac+bc$	$ac-bc$	$ac+bc+ad+bd$
		$a-b$	
		c	
		$ac-bc=ad+bd$	

W przykładzie 1szym i 2gim gdyby czynnik pierwszy był a do rozmnożenia przez c wypadłby iloczyn ac ; lecz czynnik pierwszy a w pierwszym przykładzie jest powiększony, w 2gim zmniejszony ilością b ; więc iloczyn ac powinien być w pierwszym przykładzie powiększony, w 2gim zmniejszony czynnikiem drugim c , czyli rozmnożonym przez b ; wypadnie więc iloczyn w pierwszym przykładzie $ac+bc$; w drugim $ac-bc$.

W przykładzie 3cim gdyby drugi czynnik był c , iloczyn podług przykładu 1szego byłby $ac+bc$; aże czynnik drugi c jest powię-

szony ilością d , więc iloczyn $ac+bc$ powinien być powiększony czynnikiem pierwszym $+b$ wziętym razy d , czyli rozmnożonym przez d .

Aże rozmnożywszy $a+b$ przez d , wypadnie podług przykładu 1szego $ad+bd$; więc iloczyn $ac+bc$ powinien być powiększony ilością $ad+bd$. Całkowity zatem iloczyn będzie $ac+bc+ad+bd$.

Nakoniec w przykładzie 4tym gdyby drugi czynnik był c , iloczyn podług przykładu 2go wypadłby $ac-bc$. Aże czynnik drugi c jest zmniejszony ilością d ; więc iloczyn $ac+bc$ powinien być zmniejszony czynnikiem pierwszym $a-b$ wziętym razy d , czyli rozmnożonym przez d . Ze zaś rozmnożywszy $a-b$ przez d , wypadnie podług przykładu 2go $ad-bd$; więc iloczyn $ac-bc$ powinien być zmniejszony iloczynem $ad-bd$; zmniejszyć zaś iloczyn $ac-bc$ iloczynem $ad-bd$, jest to iloczyn $ad-bd$ odjąć od iloczynu $ac-bc$; będzie więc podług prawideł odejmowania (24) całkowity iloczyn $ac-bc-ad+bd$.

W przykładzie 5tym zastanowiwszy się nad wielkimi iloczynem złożonym ze czterech czynników cząstkowych, i porównawszy go z wielkimi iloczynem złożonym z trzech czynników, z których powstał, postrzeżemy, że pierwszy iloczyn cząstkowy ac , który jest dodayny, powstał z rozmnożenia ilości dodaynej a przez ilość dodayną c ; stąd wniesiemy, że iloczyn ac jest dodayny, wypadnie iloczyn dodayny, czyli $+a \times +c = +ac$.

2re. Drugi iloczyn cząstkowy — bc , który jest odjemny, powstał z rozmnożenia ilości odjemnej — b , przez ilość dodayną c : stąd wniesiemy, że ilość odjemną rozmnożywszy przez dodayną, wypadnie iloczyn odjemny, czyli że $-b \times c = -bc$.

3cie. Trzeci iloczyn cząstkowy — ad , który jest odjemny, powstał z rozmnożenia ilości dodaynej a przez odjemną — d : stąd wniesiemy że ilość dodayną rozmnożywszy przez odjemną, wypadnie iloczyn odjemny; czyli $+a \times -d = -ad$.

4to. Czwarty nakoniec iloczyn cząstkowy — bd , który jest dodayny, powstał z rozmnożenia ilości odjemnej — b przez odjemną — d : stąd wniesiemy, że ilość odjemną rozmnożywszy przez odjemną, wypadnie iloczyn dodayny; czyli $-b \times -d = +bd$.

Widzimy tu, że kiedy obadwa czynniki dodayne, lub obadwa odjemne, iloczyn jest dodayny; kiedy zaś jeden czynnik jest dodayny drugi odjemny, iloczyn jest odjemny. Stąd możemy ustanowić następujące prawidło na znakach w mnożeniu ilości wielorakich: *czynniki jednakowemi znakami dają iloczyn dodayny; czynniki z odmiennemi znakami dają iloczyn odjemny.*

35. Lubo prawidło to widocznie wypływa z uwag nad czterema powyższemi przykładami; abysmy się jednak tem lepij o tę użytych prawdzie przekonali, wyłożymy ją ieszcze sposobem następującym:

Day-

Daymy że potrzeba rozmnożyć $a - a$ przez $+b$. Ponieważ $a - a$ znaczy to samo, co zero, szukany zatem iloczyn powinien być zero: iloczyn bowiem jest zawsze zerem, gdy jeden z tworzących go czynników jest zero. Aże mnożąc a przez $+b$ wypadnie ab , czyli $+ab$; więc mnożąc $-a$ przez $+b$ powinno wypaść $-ab$; i będzie całkowity iloczyn $ab - ab = 0$. Stąd wniesiemy; że $-a \times +b = -ab$.

3re. Mnożąc b przez $a - a$, wypadnie także iloczyn $ab - ab$: bo gdy czynnik $a - a$ równy zeru, iloczyn także powinien być zero; a zatem drugi wyraz tego iloczynu powinien być odjemny, aby tym sposobem zniknął pierwszy wyraz dodayny. Stąd wniesiemy że $+b \times -a = -ab$.

Nakoniec mnożąc $a - a$ przez $-b$, pierwszy wyraz iloczynu podług tego co poprzedziło, będzie $-ab$; drugi więc wyraz tego iloczynu powinien być $+ab$, aby tym sposobem zniknął wyraz pierwszy $-ab$: całkowity bowiem iloczyn powinien być równy zeru, kiedy jeden czynnik $a - a$ jest zerem. Stąd wniesiemy że $-a \times -b = +ab$.

36. Dla wprawy przytoczymy tu kilka przykładów mnożenia, z których trzeba się należyście obeznać: gdyż w dalszym ciągu częściej do nich odwoływać będziemy.

1. $\frac{a+b}{a-b}$ $\frac{a^2+ab}{-ab-b^2}$ $\frac{a^2-b^2}{a^2-b^2}$	2. $\frac{a+b}{a+b}$ $\frac{a^2+ab}{+ab+b^2}$ $\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2+2ab+b^2}$	3. $\frac{a-b}{a-b}$ $\frac{a^2-ab}{-ab+b^2}$ $\frac{a^2-2ab+b^2}{a^2-2ab+b^2}$
4. $\frac{a^2+2ab+b^2}{a+b}$ $\frac{a^3+2a^2b+ab^2}{+a^2b+2ab^2+b^3}$ $\frac{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$		
5. $\frac{a^2-2ab+b^2}{a-b}$ $\frac{a^3-2a^2b+ab^2}{-a^2b+2ab^2-b^3}$ $\frac{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}$		
6. $\frac{5a^4-2a^3b+4a^2b^2}{a^3-4a^2b+2b^3}$ $\frac{5a^4-2a^3b+4a^2b^2-20a^2b+8a^2b^2-16ab^3}{+10a^2b^3-4a^3b^2+8a^2b^2}$		

W przykłdzie 1szym mnoży się summa dwóch jakichkolwiek ilości $a+b$ przez ich różnicę $a-b$, i wypada na iloczyn a^2-b^2 , to jest różnica kwadratów tychże ilości. Stąd wniesiemy rząd że summa dwóch ilości rozmnóżona przez ich różnicę daje na iloczyn różnicę kwadratów tychże ilości; 2re że różnica kwadratów dwóch ilości uważana być może za iloczyn pochodzący z rozmnóżenia ich summy przez ich różnicę, np. x^2-c^2 pochodzi z rozmnóżenia $x+c$ przez $x-c$.

Przykład 2gi, 3ci, 4ty i 5ty okazują z jakich 5ci składa się potęga druga, czyli kwadrat, potęga trzecia czyli sześciann summy dwóch ichkolwiek ilości $a+b$ i ich różnicy $a-b$.

W przykładzie 6tym mnożą się następnie wszystkie trzy wyrazy mnożonego $5a^2-2a^3b+ab^2$ przez pierwszy wyraz mnożnika, to jest a^3 . Dwa wyrazy $5a^4$ i a^3 mają jedne te znaki (22): zatem iloczyn ich będzie znak +, który się na początku opuszcza. Mnożę potem współczynniki tych dwóch wyrazów, to jest 5 współczynniki ilości a^4 mnożę z 1, który jest domyślnym współczynnikiem a^3 , i mam 5 współczynniki wyrazu 1wszego iloczynu. Nakoniec mnożąc a^4 przez 50, dodaje ich wykładniki, i mam 2⁴. A w pierwszy wyraz iloczynu jest $5a^7$.

Potem 2gi wyraz mnożonego $-2a^3b$ mnożę przez a^3 . Ponieważ dwa te wyrazy mająienne znaki (34), iloczyn ich będzie miał -. Mnożę potem współczynniki tych dwóch wyrazów. Nakoniec a^3b mnożę przez 2, mam drugi wyraz iloczynu $-2a^6b$.

Podobnież rozmnóżymy $+4a^2b^2$ przez 4, mamy trzeci wyraz iloczynu $+4a^5b^2$.

Rozmnóżymy wszystkie trzy wyrazy mnożonego przez 1wszy wyraz mnożnika, trzeba je mnożyć przez 2gi wyraz mnożnika, to jest $-4a^2b$, dając zawsze bacność na znaki, powtóre na współczynniki, po na głoski i ich wykładniki: skąd po-

R o z d z i a ł II.

wstaną drugie trzy wyrazy iloczynu —
 $+ 8a^2b^2 - 16a^2b^3$.

Naostatek podług tychże prawideł z wyrazów iednegoż stopnia, zowie się wy-
 amnożywszy wszystkie trzy wyrazy mnożeniem *równostopniowem*, albo *równocyn-*
 przez trzeci wyraz mnożnika, to jest *kwadem, expressio homogenea*, dla różnicy
 $+ 2b^3$ będzie miał ostatnie trzy wyrazy iloc. wyrażen *rožno stopniowych*, które się likwi-
 $+ 10a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5$. Azatem dla z wyrazów różnego stopnia. Powyzsza u-
 wity iloczyn składać się będzie z 9 ilocaga posłuży do upatrzienia czy w znalezionym
 cząstkowych: czynnie wyrażen równostopniowych nie zasza-
 $5a^7 - 2a^6 + 4a^5b^2 + 20a^6b + 8a^5b^2$ kowa onylka przez opuszczenie którego z
 $+ 16a^4b^3 + 10a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5$ czynników w mnożeniu wyrazów poiedynczych.

W tym iloczynie wyrazy niektóre — 38. Wreście mnożenie ilości algebrai-
 bie podobne, to jest złożone z tych smych wielorakich w ten czas tylko odbywa
 głosek i mające iednakowe wykładniki podług wskazanych wyżej prawideł, kiedy
 tém podług tego co się wyżej powiedziało tego potrzeba nienechronna. Nayeściej
 sprowadziwszy ie, będzie iloczyn szukan zstaiemy na wskazaniu że ilości te powinny
 $5a^7 - 2a^6b + 10a^5b^2 - 6a^4b^3 - 4a^3b^4 + 6$ przez siebie różnimnożone. Na ten koniec

37. W przykładzie pierwszym, zgim wszystkie czynniki wielorakie biorą się w na-
 wyrazy tak mnożnych jak mnożników ias; czynniki zaś poiedyncze piszą się przed
 pnia pierwszego (22); a wyrazy ilocagwasem z lewéy lub z prawéy strony. I tak
 stopnia 2go. Wprzykładzie 4tym i 5tym wyrażenia te: $(a+b)(a-b)$; $(a+2bc-4dm)$
 razy mnożnych są stopnia 2go; wyrazy $(x+5b)(x-c)$; $x(a+b-1)$; $(a^2+2ab+b^2)m$
 1ów stopnia 1wszego; a wyrazy ilocyt. d. znaczą że w przykładzie 1wszym dwa
 stopnia 3go. Nakoniec w przykładzie, czynniki wielorakie, w zgim trzy także czyn-
 wszystkie wyrazy w mnożnym są stopni, w 3im zaś i 4tym ieden czynaik wielo-
 wszystkie wyrazy w mnożniku są stopni, a drugi poiedynczy powinny być przez
 a wyrazy iloczynu są stopnia 7go: włabie różnimnożone podług prawideł powyższych.
 tak być powinno flosownie do uwagodobnież wyrażenia te: $(a+b)^3$, $(a-b)^3$
 smy wyżej uczynili (35): ślad wniesi. d. znaczą że z dwóch ilości $a+b$, $a-b$,
 ieżeli wyrazy mnożnego są iednegoż stopnia; wy-
 wyrazy mnożnika iednegoż stopnia; wy-
 czynu będą także iednegoż stopnia kto

rwsza powinna być podniesiona do kwadrata do sześciannu.

39. Często się trafia w działaniach algebraicznych że dany iloczyn potrzeba rozłożyć na czynniki z których on powstał. I tak chcąc rozłożyć na czynniki iloczyn $ax + am + bx + bm$, uważać potrzeba że ponieważ dwu pierwszych wyrazów spólnym czynnikiem a , dwóch drugich spólnym czynnikiem b ; gdzie $ax + am = a(x + m)$;

$$bx + bm = b(x + m).$$

Strony odpowiadające w tych dwóch wyrażeniach dodawszy do siebie, wypadnie $ax + am + bx + bm = a(x + m) + b(x + m)$.

W równaniu tém z drugiey strony czyli wieloraki $x + m$ raz powinien być rozmnożony przez a , drugi raz przez $+b$: będzie w

$$ax + am + bx + bm = (x + m)(a + b)$$

Podobnież chcąc iloczyn $ax - am - bx + bm$, rozłożyć na czynniki, uważać potrzeba, że ponieważ dwa pierwsze wyrazy iloczynu mają spólny czynnik a , będzie w $ax - am = a(x - m)$. Dla teyże przyczyny $-bx + bm = -b(x - m)$. Ale że w danym czynnie wyraz 3ci bx jest odjemny, a 4ty jest dodawny, będzie więc podług tego coś powiedzieli wyżej (29), $-bx + bm = -b(x - m)$. Dwa te równania: $ax - am = a(x - m)$, i $-bx + bm = -b(x - m)$ do siebie dodawszy, wypadnie

$$ax - am - bx + bm = a(x - m) - b(x - m)$$

W równaniu tém z drugiey strony czynnik wieloraki $x - m$ powinien być rozmnożony raz przez a , drugi raz przez $-b$: będzie więc, $ax - am - bx + bm = (x - m)(a - b)$.

Trzeba tu także uważać na spójczynniki domysłne. I tak w wyrażeniu tém: $3a^2x + 2b^2x - x$, w pierwszym i drugim wyrażeniu spójczynniki ilości x , są wyraźne; w trzecim zaś wyrażeniu jest spójczynnikiem domysłny (22). Wyrażenie więc to rozłożone na czynniki zamieni się w następujące: $x(3a^2 + 2b^2 - 1)$. Podobnież wyrażenie $x - \frac{2}{3}ax + \frac{5}{3}bx^2$, rozłożone na czynniki zamieni się w następujące: $x(1 - \frac{2}{3}a + \frac{5}{3}bx)$ i t. d.

IV. Dzielenie ilości Algebraicznych.

40. Iloraz dwóch ilości, iakośmy już powiedzieli, oznacza się przez ułomek, którego licznikiem jest dzielna, a mianownikiem dzielnik. I tak ułomek ten $\frac{ab}{a}$ jest ilorazem ilości ab podzielony przez a , to jest, znaczy że liczbę oznaczoną przez ab podzielić potrzeba przez liczbę oznaczoną przez a .

Dzielna w Algjebrze równie iak w Arystymetyce, powinna być uważana iako iloczyn dwóch czynników; z których jeden jest danym dzielnikiem, drugi szukanym ilorazem. Rozmnożwszy zatem znaleziony iloraz przez dany dzielnik, powinna wypaść na iloczyn ilość dzielna.

Podług téj uwagi podzieliwszy ab przez a , powinno na iloraz wypaść b : iakoż znaleziony iloraz b rozmnożywszy przez dany dzielnik a , wypadnie na iloczyn ilość dzielna ab . Podobnie podzieliwszy $abcx$ przez bx , wypadnie na iloraz ac : iakoż rozmnożywszy znaleziony iloraz ac przez dany dzielnik bx , wypadnie na iloczyn ilość dzielna $abcx$ i t. d.

A ład wyprowadzić można następujące prawo dzielenia ilości algebranych pojedynczych: czynniki wspólne dzielnej i dzielnikowi przekreśliwszy, reszta będzie szukany ilorazem: np. $\frac{mpqr}{prx} = mq$, i t. d.

Prawidło to obowiązuje także i spotoczynki; np. $\frac{2ab}{2a} = b$, $\frac{5abcd}{5ab} = cd$ i t. d.

41. Abyśmy prawidło to łatwiej zastosować mogli do wszystkich przypadków dzielenia ilości algebranych pojedynczych, uważać trzeba, że dzielnik może być złożony albo wszystkich tychże samych czynników, które znajdują w dzielnej, iak jest w przykładach wyższych; albo z niektórych tylko czynników wspólnej dzielnej, a z innych odmiennych, $\frac{abc}{cm} = \frac{a^2bcd}{a^2bcm}$ i t. d.; albo na koniec ze wszystkich czynników odmiennych od czynników dzielnej, np. $\frac{5a^2bc}{7dmp}$ i t. d.

W przypadku pierwszym gdy wszystkie czynniki dzielnika znajdują się w dzielnej, na ten czas, jeżeli liczba czynników dzielnika mniejsza jest od liczby czynników dzielnej, czyli, co na jedno wychodzi, jeżeli dzielnik mniejszy jest od dzielnej, po zachowaniu powyższego prawidła ilorazem będzie ilość całkowita, iakośmy już widzieli w przykładach powyższych, gdzie $\frac{abcx}{bx} = ac$ i t. d. Jeżeli w dzielniku

więcej jest czynników niż w dzielnej, czyli jeżeli dzielnik większy jest od dzielnej, iloraz będzie ułamkiem którego licznikiem jest spotoczynnik dzielnej wyraźny lub domyslny, a mianownikiem czynniki w dzielniku pozostałe po zachowaniu powyższego prawidła. np. $\frac{7a}{abc} = \frac{7}{bc}$, $\frac{ac}{5abcd} = \frac{1}{5bd}$, $\frac{abx}{abc} = \frac{x}{c}$ i t. d.

Nakoniec jeżeli tak dzielna iak i dzielnik mają równą liczbę czynników, czyli są sobie równe, ilorazem będzie jedność: wszelka bowiem ilość sama w sobie mieści się raz ieden,

np. $\frac{abc}{abc} = 1$, $\frac{5a^2b^3c}{5a^2b^3c} = 1$, i t. d. Co też i z tego względu jest rzeczą widoczną, że w ułamku np. $\frac{abc}{abc}$ przekreśliwszy czynniki wspólne dzielnej i dzielnikowi, zostanie się na iloraz ułomek którego licznikiem i mianownikiem jest domyslny spotoczynnik dzielnej i dziel-

nika, to jest iedność; iloraz zatem szukany będzie $\frac{7}{9} = 1$.

W przypadku drugim gdy dzielnik składa się z niektórych tylko czynników spólnych dzielnéy, a innych odmiennych, na ten czas po zachowaniu powyższego prawidła ilorazem będzie ułamek, którego licznikiem są czynniki dzielnéy, mianownikiem czynniki dzielnika pozostające po przekreśleniu czynników spólnych

$$\text{dzielnéy i dzielnikowi; np. } \frac{5abc}{7bed} = \frac{5a}{7d}$$

$$\frac{2qbcx}{5amp} = \frac{2bcx}{5mp} \text{ i t. d.}$$

Nakoniec w przypadku trzecim gdy dzielnik składa się ze wszystkich czynników odmiennych od czynników dzielnéy, na ten czas ilorazem będzie ułamek którego licznikiem jest dana dzielna, mianownikiem dany dzielnik; np.

$$\frac{abc}{mpq} \text{ i t. d.}$$

42. Czestokroć na pierwsze weyrażenie zdaje się że dzielna i dzielnik nie mają żadnego

czynnika spólnego: np. $\frac{7^2 a^5 b^7 c^6 d^2}{9 a^3 b^4 c^2 d}$ wilorazie tym żaden z czynników dzielnéy nie ma sobie równego między czynnikami dzielnika. Lecz zważywszy że $7^2 = 9 \cdot 8$, $a^5 = a^3 \times a^2$ (30), $b^7 = b^4 \times b^3$, $c^6 = c^2 \times c^4$, $d^2 = d \times d$; w niesiemy że

$$\frac{7^2 a^5 b^7 c^6 d^2}{9 a^3 b^4 c^2 d} = \frac{9 \cdot 8 a^3 \times a^2 b^4 \times b^3 c^2 \times c^4 d \times d}{9 a^3 b^4 c^2 d}$$

Przekreśliwszy więc podług powyższego prawidła, czynniki spólne dzielnéy i dzielnikowi, zostanie iloraz szukany $\frac{7^2 a^5 b^7 c^6 d^2}{9 a^3 b^4 c^2 d} = 8 a^2 b^3 c^4 d$.

Porównawszy czynniki tego ilorazu z czynnikami dzielnéy i dzielnika, postuzemy się że czynnik liczebny czyli spójczynnik ilorazu to jest 8 powstał z podzielenia czynnika liczebnego dzielnéy którym jest 7^2 , przez czynnik

liczebny dzielnika którym jest 9: gdyż $\frac{7^2}{9} =$

8. że drugim czynnikiem ilorazu jest też sama głoska a która się znajduje w dzielnéy i w dzielniku, lecz ma za wykładnik 2, który pozostanie z odjęcia liczby 3 będącý wykładnikiem głoski a w dzielniku, od liczby 5 będącý wykładnikiem teyże głoski a w dzielnéy: iakoż $a^3 = a^5 - 2$; 30ie że trzecim czynnikiem ilorazu jest też sama głoska b , która się znajduje w dzielnéy i w dzielniku, lecz ma za wykładnik 3, który pozostanie z odjęcia liczby 4 będącý wykładnikiem głoski b w dzielniku od liczby 7 będącý wykładnikiem teyże głoski b w dzielnéy: iakoż $b^3 = b^7 - 4$; toż mówić o dwóch ostatnich czynnikach ilorazu, z któ-

rych pierwszy $c^4 = c^{6-2}$, drugi d czyli $d^2 = d^{2-1}$.

Stąd wniesiemy *tód* że w dzieleniu ilości algebraczych pojedynczych, czynniki liczebne czyli współczynniki dzielą się sposobem zwyczajnym, *are* że czynniki będące potęgami tychże samych głosek dzielą się przez siebie oddejmując wykładnik dzielnika od wykładnika dzielnej, np. $\frac{a^5}{a^3} = a^{5-3} = a^2$; gdyż $\frac{a^5}{a^3} =$

$$\frac{aaaaa}{aaa} = aa = a^2 = a^{5-3} \text{ i t. d.}$$

43. Z tego oświatnego wniosku wypadają dwa inne. Pierwszy, że kiedy dzielna i dzielnik są iedneyże głoski potęgami równego stopnia, czyli mają wykładniki równe, na ten czas odiawszy wykładnik dzielnika od wykładnika dzielnej, dla ilorazu zostanie na wykładnik zero; np. $\frac{a^5}{a^5} = a^{5-5} = a^0$, $\frac{a^7}{a^7} = a^{7-7} = a^0$

i t. d. Ażé $\frac{a^5}{a^5} = 1$, $\frac{a^7}{a^7} = 1$ (41); więc $a^0 = 1$. To iest: *wszelka ilość mająca za wykładnik zero znaczy to samo co iedność*.

Drugi wniosek z dzielenia przez siebie potęg wypadający iest ten, że kiedy dzielnik iest potęgą wyższego stopnia aniżeli dzielna, czyli kiedy wykładnik dzielnika większy iest niż wykładnik dzielnej, na ten czas odiawszy wykładnik dzielnika od wykładnika dzielnej, zostają

nie dla ilorazu wykładnik odjemny; np. $\frac{a^2}{a^3} = a^{2-3} = a^{-1}$; $\frac{a^7}{a^8} = a^{7-8} = a^{-1}$; $\frac{a^2}{a^4} =$

$a^{2-4} = a^{-2}$; $\frac{a^2}{a^5} = a^{2-5} = a^{-3}$ i t. d. Ażé

$$\frac{a^2}{a^3} = \frac{a^2}{a^2 \times a} = \frac{1}{a} \text{ (41), podobnież } \frac{a^7}{a^8} =$$

$$\frac{1}{a}, \frac{a^2}{a^4} = \frac{1}{a^2}, \frac{a^2}{a^5} = \frac{1}{a^3} \text{ i t. d. Stąd}$$

wniesiemy że $a^{-1} = \frac{1}{a}$, $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$, $a^{-3} =$

$\frac{1}{a^3}$ i t. d. To iest: *wszelka ilość mająca wykładnik odjemny znaczy to samo co ułomek, którego licznikiem iest iedność, a mianownikiem zaś sama ilość z tymże wykładnikiem lecz dodatnim*.

44. W powyższym przykładzie (42), w którym iloraz wypadł całkowity, współczynnik dzielnika nieści się zupełnie w współczynniku dzielnej, i wykładniki wszystkich głosek w dzielniku mniejsze są od wykładników tychże głosek w dzielnej. Przykład następujący iest pod tymi dwoma względami od tamtego odmienny, i ma ieszcze prócz tego niektóre czynniki właściwe samemu dzielnej, niektóre właściwe samemu dzielnikowi:

$$\frac{27a^3b^5c^2dmx}{36a^6b^7c^6d^4ef}$$

W tym także przykładzie żaden czynnik dzielnika nie ma sobie równego między czynnikami dzielny; lecz ponieważ $27 = 9 \cdot 3$, $36 = 9 \cdot 4$, $a^8 = a^3 \times a^5$, $b^7 = b^5 \times b^2$, $c^6 = c^3 \times c^3$, $d^4 = d \times d^3$; wniesiemy że

$$\frac{27 a^3 b^5 c^2 d m x}{36 a^8 b^7 c^6 d^4 e f} = \frac{9 \cdot 3 a^3 b^5 c^2 d m x}{9 \cdot 4 a^3 \times a^5 b^5 \times b^2 c^2 \times c^3 d \times a^3 e f}$$

Przekreśliwszy czynniki wspólne dzielny i dzielnikowi, wypadnie

$$\frac{27 a^3 b^5 c^2 d m x}{36 a^8 b^7 c^6 d^4 e f} = \frac{3 m x}{4 a^5 b^2 c^4 d^3 e f}$$

Porównawszy iloraz ten z dzielną i dzielnikiem, potrzebemy *odd* że współczynnik dzielny to jest 3, i współczynnik dzielnika to jest 4 powłiaty z podzielenia liczb 27 i 36 przez ich wspólny dzielnik to jest przez liczbę 9: *arc*, że drugi czynnik dzielny, którym jest a^3 zniknął, drugi zaś czynnik dzielnika pozostał, lecz ma za wykładnik liczbę 5 pozostałą z odjęcia liczby 3 będący wykładnikiem głoski a w dzielny, od liczby 8 będący wykładnikiem teży głoski a w dzielniku; toż mówić o czynniku 3cim, 4tym i 5tym, które w dzielny zniknęły, w dzielniku pozostały, lecz z wykładnikami odmiennymi, z których każdy równa się różnicy między wykładnikiem głoski znajdujący się w dzielniku, i wykładnikiem teży głoski znaj-

dujący się w dzielny; *Scie* że nakoniec dwa ostatnie czynniki dzielny $m x$, i dzielnika $e f$ pozostały na swoim miejscu.

Stąd wniesiemy, że w takim przypadku dzielac, ilości algebracyjne pojedyncze *odd* czynniki; liczebne tak w dzielny iak w dzielniku dzielą się przez największy wspólny dzielnik; *arc* że czynniki będące potęgami jednych-że głosek dzielą się odcymując wykładnik każdej głoski będący czynnikiem w dzielny od wykładnika teży głoski będący czynnikiem w dzielniku. Co się tyczy czynników odmiennych w dzielny i w dzielniku znajdujących się, te iakośmy już powiedzieli, żadney mianie w dzieleniu nie podpadaia, lecz pierwsze pozostaia w liczniku iako czynniki dzielny, drugie iako czynniki dzielnika pozostaia w mianowniku.

45. Zbierzmy teraz w krótkości wszystko o cośmy dotąd o dzieleniu ilości algebracyjnych pojedynczych powiedzieli. Iloraz ilości tych może być albo całkowity, albo ułomowy. Ażeby iloraz był całkowity, potrzeba *odd* aby współczynnik dzielnika mieścił się zupełnie w współczynniku dzielny; *arc* ażeby wszystkie głoski znajdujące się w dzielniku, znajdowały się także w dzielny; *Scie* ażeby wykładnik każdej głoski w dzielniku nie był więzzy od wykładnika teży głoski w dzielny.

odd podzielić współczynnik dzielny przez współczynnik dzielnika, a iloraz liczebny będzie współczynnikiem ilorazu szukanego.

2re. Przekreślić w dzielnej głoski kłzowego, a reszta będzie wykładnikiem tżyze re ię są spólne z dzielnikiem, jeżeli głoski, która pozostaie w tym wyrazie u te tak w dzielnej iak w dzielniku maia domka, w którym miała wykładnik większy; wne wykładniki; jeżeli zaś wykładniki nie są równe, odjąć wykładnik dzielnika od wykładnika dzielnej, reszta będzie wykładnikiem tżyze głoski w ilorazie.

3cie. Napisać w ilorazie wszystkie domka będącego ilorazem; np. ski dzielnej które się nie znajdują w dzielniku; np.

$$\frac{144 a^7 b^5 c^3 dx}{72 a^5 b^2 c^3} = 2 a^2 b^3 dx \text{ it. d.}$$

Jeżeli zaś albo współczynnik dzielnika mieści się zupełnie w współczynniku dzielnej albo głoski będące w dzielniku są odmiennie od głosek będących w dzielnej; albo nakoniec jeżeli większa jest liczba głosek w dzielniku w dzielnej, lub głosek dzielnika większe wykładniki niż tychże głosek w dzielnej, ciążby głoski dzielnej i dzielnika były ilorazem; na ten czas iloraz szukany będzie ilorazem ułomkową. Chcąc w tym przypadku otrzymać iloraz, trzeba

40d. Spółczynnik dzielnej i dzielnej podzielić przez spólny ich dzielnik jeżeli być może.

2re. Przekreślić głoski spólne dzielnej i dzielnikowi, jeżeli głoski te tak w dzielnej iak w dzielniku mają równe wykładniki; jeżeli zaś wykładniki ich są nie równe, odjąć wykładnik mniejszy od

większe

3cie. głoski odmiennie tak dzielnej iak dzielnika zostawić bez żadnej zmiany pierwsze w ilorazie, drugie w mianowniku u

$$\frac{48 a^3 b^7 c^5 dm}{64 a^2 b^4 c^7 ex} = \frac{3 b^3 dm}{4 c^2 ex} \text{ it. d.}$$

46. We wszystkich przykładach dzielenia, któreśmy dotąd przytoczyli, tak dzielna i dzielna, iako też ich iloraz, są ilościami dodanymi. Obaczmyż teraz iaki będzie iloraz kiedy dzielna i dzielnik są ilości odjemne, albo jedna z nich dodayna druga odjemna.

40d. $\frac{+ab}{-a} = -b$; gdyż znaleziony iloraz $-b$ rozmnożywszy przez dany dzielnik $-a$, wypadnie iloraz $+ab$ (34), który odjąwszy od daney dzielnej $+ab$, zostanie po dług prawideł odejmowania (24) $+ab - ab = 0$; co dowodzi że znaleziony iloraz $-b$ jest prawdziwy (40).

2re. $\frac{-ab}{+a} = -b$; gdyż znaleziony iloraz $-b$ rozmnożywszy przez dany dzielnik $+a$, wypadnie iloczyn $-ab$, który odjąwszy od daney dzielnej $-ab$, zostanie $-ab + ab = 0$.

3cie. $\frac{-ab}{-a} = +b$: gdyż znaleziony iloraz $+b$ rozmnożwszy przez dany dzielnik $-a$ wypadnie iloczyn $-ab$, który odawszy od dzielnej $-ab$, zostanie $-ab + ab = 0$.

Gdybyśmy zaś dzieląc $np. -ab$ przez $-a$ zamiast ilorazu $+b$, wzięli przez omyłkę iloraz $-b$; omyłka ta zaraz dałaby się strzedz: mnożąc bowiem znaleziony iloraz $-b$ przez dany dzielnik $-a$, wypadłby iloczyn $+ab$, który odawszy od dzielnej $-ab$, zostanie $-ab - ab = -2ab$; co dowodzi, znaleziony iloraz $-b$ jest fałszywy: dziel bowiem $-a$ mieści się widocznie w pozostałości $-2ab$.

Stąd się okazuje, że iloraz jest dodatni, czyli ma przed sobą znak $+$, kiedy obie dane do dzielenia ilości są dodatnie, lub oba są ujemne; kiedy zaś jedna z nich jest dodatnia, druga ujemna, iloraz ma przed sobą znak $-$, czyli jest ujemny.

Można więc ustalić następujące prawo na znaki w dzieleniu: jeżeli dzielna i dzielnik są z jednakowemi znakami, iloraz będzie dodatni; jeżeli dzielnik i dzielna z odmiennemi znakami, iloraz będzie ujemny.

47. Pozostało jeszcze dzielenie ilości wielorakich, czyli z kilku wyrazów złożonych. Dzieleniu takowych ilości wypada dzielić al-

ilość pojedynczą przez wieloraką, $np. \frac{x}{a+2b-3c}$; albo ilość wieloraką przez pojedynczą $np. \frac{a+b-c}{x}$; albo wieloraką przez wieloraką, $np. \frac{a+b-c}{d-m+q}$.

W pierwszym i drugim przypadku dzielenie oznacza się zwyczajnie sposobem ułomka: jednakże w przypadku drugim można czasem użyć prawidła podanego wyżej (40), lecz w ten czas tylko, kiedy każdy wyraz dzielny składa się z wyrazu dzielnika, $np. \frac{ax+2bx+3cx}{x} = a+2b-3c$. Jakoż ponieważ w dzielnych wszystkich wyrazów jest spólnym czynnikiem x , rozłożywszy więc dzielną na czynniki (39), będzie

$$\frac{ax+2bx-3cx}{x} = \frac{x(a+2b-3c)}{x} = a+2b-3c$$

(40).

To samo prawidło przystosować czasem można i do przypadku trzeciego, kiedy gloski spólne dzielny i dzielnikowi znajdują się we wszystkich wyrazach znakami $+$ i $-$ od siebie oddzielonych: $np.$

$$\frac{a^5+4a^2b-5a^2b^5}{a^3-5a^2b}$$

W przykładzie tym czynnik a^2 znajduje się we wszystkich wyrazach dzielny i dzielnika; rozłożywszy więc tak dzielną iak dzielnik na czynniki, będzie

$$\frac{a^5+4a^2b-5a^2b^5}{a^3-5a^2b}$$

$$= \frac{a^2(a^3 + 4b - 5b^2)}{a^2(a - 5b)} = \frac{a^3 + 4b - 5b^2}{a - 5b}.$$

Czasem dosyć jest rozłożyć samę tylko dzielnią, lub sam tylko dzielnik na czynniki

$$\text{np. } \frac{a^2 - x^2}{a + x} = \frac{(a + x)(a - x)}{a + x} = a - x \quad (36)$$

W junczych przypadkach dzielenia ilości wielorakich przez wielorakie jak sobie postąpić należy, podamy na to pravidła na inném miejscu; nie iżby wiadomość ta była od poprzedzających trudniejsza; lecz że potrzebuie obszerniejszego wykładu, a do zrozumienia tego, co w początkach Algebry wyłożoném być powinno nie będzie nam potrzebna.

V. O ułomkach algebracyjnych.

48. Ułomki algebracyjne tém się tylko od liczebných różnią, że co w tych wyraża liczebných, to w tamtych wyraża się przez głoski: znając więc dokładnie cztery działania arytmetyczne z ułomkami liczebnými, łatwo je zastosować można do ułomków algebracyjnych. I tak

1. ód. Ułomek ten $\frac{a}{c} = \frac{ac}{c^2} = \frac{ab}{bc} = \frac{a^2 + ab}{ac + bc} = \frac{ad - am}{cd - cm}$ i t. d, mnożąc licznik i mianownik przez tę samą ilość $c, b, a + b, d - m$ i t. d.

2re. Ułomki $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ sprowadzone do jednakowego mianownika, zamienia się w następujące: $\frac{ad}{bd}, \frac{bc}{bd}$, mnożąc w iwszym ułomku obadwa wyrazy przez d , w 2gim obadwa wyrazy przez b . Podobnie ułomki $\frac{m}{a}, \frac{n}{b}, \frac{x}{c}$, sprowadzone do jednakowego mianownika zamienia się w następujące: $\frac{bcm}{abc}, \frac{acn}{abc}, \frac{abx}{abc}$, mnożąc obadwa wyrazy w ułomku iwszym przez b i c , w 2gim przez a i c , w 3cim przez a i b i t. d.

3cie. Dodawszy $\frac{a}{b}$ do $\frac{c}{d}$, będzie $\frac{a}{b} +$

$$\frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}. \text{ Podobnie } \frac{a}{b} + m = \frac{a}{b} + \frac{bm}{b} = \frac{a + bm}{b} \text{ i t. d.}$$

4te. Odiawszy $\frac{c}{d}$ od $\frac{a}{b}$, Zostanie $\frac{a}{b} -$

$$\frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{bc}{bd} = \frac{ad - bc}{bd}, \text{ Podobnie } \frac{a}{b} - m = \frac{a}{b} - \frac{bm}{b} = \frac{a - bm}{b}$$

$$a - \frac{c}{b} = \frac{ab}{b} - \frac{c}{b} = \frac{ab - c}{b};$$

$$\frac{a}{b} - \frac{a-2c}{a-b} = \frac{a^2-ab}{ab-b^2} - \frac{ab-2bc}{ab-b^2}$$

$$= \frac{a^2-ab-ab+2bc}{ab-b^2} = \frac{a^2-2ab+2bc}{ab-b^2} \text{ i t. d.}$$

5te. Rozmnożywszy $\frac{a}{b}$ przez m , wypadnie $\frac{am}{b}$; rozmnożywszy $\frac{a}{b}$ przez $\frac{c}{d}$, wypadnie $\frac{ac}{bd}$; $m + \frac{a}{b}$ rozmnożywszy przez $\frac{c}{d}$, wypadnie $(m + \frac{a}{b})(\frac{c}{d})$

$$= (\frac{bm+a}{b})(\frac{dx-c}{d})$$

$$= \frac{bdmx + adx - bcm - ac}{bd} \text{ i t. d.}$$

6te. Ułomek $\frac{a}{b}$ podzieliwszy przez c , wypadnie $\frac{a}{bc}$;

Podzieliwszy c przez $\frac{a}{b}$, wypadnie $\frac{bc}{a}$;

Podzieliwszy $\frac{a}{b}$ przez $\frac{c}{d}$, wypadnie $\frac{ad}{bc}$;

$$\frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Podzieliwszy $a + \frac{b}{c}$ przez $d - \frac{x}{m}$, wypadnie

$$\frac{ac+b}{c} \times \frac{m}{dm-x} = \frac{acm+bm}{cdm-cx} \text{ i t. d.}$$

7me. Wyrażenie to $\frac{m}{\frac{r}{p}}$, znaczy że ułomek $\frac{a}{m}$ podzielić trzeba przez ułomek $\frac{r}{p}$; a zatem wyrażenie to zamienić można w następujące: $\frac{a}{m} \times \frac{p}{r} = \frac{ap}{mr}$. Podobnież

$$\frac{m}{c} + \frac{a}{b} = \frac{m+ac}{bc}$$

$$\frac{m}{c} + \frac{a}{b} = \frac{m+ac}{c} \times \frac{q}{bq-p}$$

$$= \frac{mq+acq}{bcq-cp} \text{ i t. d.}$$

49. Tych samych skrótów, które się używają w ułomkach liczebnych, można czasem wygodnie użyć w ułomkach algebraicznych. I tak chcąc sprowadzić do jednakowego mianownika dwa ułamki $\frac{a}{m}$ i $\frac{c}{mx}$, zamiast mnożenia wyrazów zwszego ułamka przez mx , drugiego przez m , dosyć jest rozmnożyć wyrazy zszego ułamka przez x ; tym sposobem ułomek ten zamieni się w następujący: $\frac{ax}{mx}$, którego mianownik jest ten sam co w ułamku drugim.

Podobnie dwa ułamki $\frac{a}{bc}, \frac{d}{bm}$ będą sprowadzone do jednakowego mianownika, gdy tego, można jego mianownik $m(x-c+d)$ badwa wyrazy w pierwszym ułamku rozmnóżmy przez m , w drugim przez c ; iakoż tym sposobem ułamki te zamienią się w następujące

$$\frac{am}{bcm}, \frac{cd}{bcm} \text{ i t. d.}$$

W ogólności chcąc krótszym sposobem sprowadzić ułamki do jednakowego mianownika, trzeba zebrać w jeden iloczyn wszystkie odmienne czynniki znajdujące się w mianownikach danych ułamków: iloczyn ten będzie wspólnym dla ułamków danych mianownikiem; licznik zaś każdego z danych ułamków rozmnożyć przez czynniki tego iloczynu nie znajdujące się w mianowniku goż ułamka, np. Niech będą ułamki $\frac{m}{bc}, \frac{p}{ab}, \frac{q}{cd}, \frac{r}{ae}$, których mianowniki mają różne odmienne czynniki a, b, c, d i e ; iloczyn $abcde$ będzie wspólnym dla wszystkich mianowników: rozmnożywszy potem licznik pierwszego ułamka przez ade , 2go przez cd , 3go przez abe , 4go przez bcd , wypadną ułamki

$$\frac{adem}{abcde}, \frac{cdcp}{abcde}, \frac{abcp}{abcde}, \frac{bcdp}{abcde}$$

Chcąc ułamek $\frac{a+b-z}{m(x-c+d)}$ rozmnożyć

przez $x-c+d$, zamiast mnożenia licznika $a+b-z$ przez $x-c+d$ podług zwykłego sposobu, można jego mianownik $m(x-c+d)$ podzielić przez $x-c+d$, i wypadnie iloczyn $\frac{a+b-z}{m}$ szukany.

Chcąc ułamek $\frac{(c+dm)x}{a+b}$ podzielić przez

$c+dm$, zamiast mnożenia mianownika $a+b$ przez $c+dm$ podług zwykłego sposobu, można ułamek podzielić przez $c+dm$; licznik $(c+dm)x$ podzielić przez $c+dm$; wypadnie iloraz $\frac{x}{a+b}$ i t. d.

50. Ponieważ ułamek co do ważności swojej jest ilorazem wypadającym z podzielenia licznika przez mianownik; a iloraz jest zawsze dodatni, gdy dzielna i dzielnik mają przed sobą jednakowe znaki, zawsze ujemny, gdy dzielna i dzielnik mają przed sobą odmienne znaki (46); idzie zatem, że w ułamku odmieniwszy znaki licznika i mianownika, ważność się ułamka nie odmieni. I tak ułamek $\frac{+ab}{+a} = \frac{-ab}{-a}$; iakoż ważnością obudwu jest iloraz $+b$. Podobnież $\frac{-ab}{+a} = \frac{+ab}{-a}$, gdyż

ważnością obudwu tych ułamków jest iloraz $-b$. Toż mówić o ułamkach $\frac{a+m-x}{c-d+q}$

$$= \frac{-a-m+x}{-c+d-q} \text{ i t. d.}$$

Prawdę tę okazać także można sposobem następującym: ponieważ rozmnożywszy obadwa wyraży ułamka przez jednąż liczbę ważną, wcale się nie odmienia, gdy jego licznik i się jego nie odmieni, w ułamku więc np. $\frac{a+m-x}{c-d+q}$, rozmnożmy obadwa wyraży przez -1 , tym sposobem tak w liczniku iak w mianowniku wszystkie znaki $+$ zamienia się na $-$ a znaki $-$ na $+$ (34).

Chcąc zatem sprowadzić do jednakowego mianownika np. te dwa ułamki: $\frac{mp}{ab}$ —

$\frac{rs-nx}{cd-ab}$; dosyć będzie w ułamku np. drugiego odmienić znaki tak w liczniku iak w mianowniku, przez co ułamek ten zamieni się w następujący: $\frac{-rs+nx}{cd+ab} = \frac{nx-rs}{ab-cd}$ którego mianownik jest taki iak w ułamku pierwszym.

51. Wszystkie te działania z ułomkami ogólnie opierają się na tych samych zasadach, które są wyłożone w Arytmetyce dla ułamków liczebnych. Można ietakże z łatwością wyprowadzić z uwag nad dzielną, dzielnikiem i razem liczb całkowitych, z których dzielna wypadaia ułamki. I tak zważywszy np. że $\frac{a}{b}$ raz wcale się nie odmienia, gdy dzielną i dzielnik rozmnożymy przez jednąż liczbę; wiedząc przeto że ułamek co do ważności się

nie jest wskazanym ilorazem, któryby wypadł z podzielenia licznika przez mianownik; wnieslibyśmy, że ułamek co do swojej ważności wcale się nie odmienia, gdy jego licznik i mianownik rozmnożymy przez jednąż liczbę, na czém zasada się sprowadzanie ułamków do jednakowego mianownika. Ta sama uwaga doprowadziłaby do ustanowienia pravidła na dzielenie całkowitey lub ułamka przez ułamek. Jakoż chcąc np. podzielić całkowitą a przez

ułamek $\frac{b}{c}$, ponieważ rozmnożenie dzielnicy i dzielnika przez jednąż liczbę nie czyni żadney zmiany w szukanym ilorazie; rozmnożmy tak dzielną a , iako też dzielnik $\frac{b}{c}$ przez c : w tym przypadku potrzeba będzie podzielić ac przez b (40). Podzieliwszy zaś ac przez b , wypadnie $\frac{ac}{b} = a \times \frac{c}{b}$.

Podobnie chcąc podzielić ułamek $\frac{a}{b}$ przez ułamek $\frac{c}{r}$, rozmnożywszy przez br (tak dzielną $\frac{a}{b}$, iako też dzielnik $\frac{c}{r}$, trzeba będzie $\frac{abr}{b}$, czyli ar , podzielić przez $\frac{bcr}{r}$ czyli przez

bc. Podzieliwszy zaś ar przez bc , wypa-
 iloraz $\frac{ar}{bc} = \frac{a}{b} \times \frac{r}{c}$ i t. d.

R O Z D Z I A Ł III.

Zastosowanie wiadomości poprzedzających,
 do rozwiązywania równań stopnia pierwszego.

I. O skróceniach których w rozwiązywaniu
 równań stopnia pierwszego użyć można.

52. Wiadomości w poprzedzającym rozdziale więc było, że ilość wiadoma $+a$ prze-
 le wyłożone są dołączone do rozwiązywać ze strony lewej na prawą, i wypadło róz-
 wszelkich równań stopnia pierwszego (3) w którym ilość a jest z prawej stro-
 których ilości niewiadome nie są rozróżnione, lecz z odmiennym znakiem: dodaynym na
 ani same przez siebie, iak jest. np. x^2 , y. i t. d. 20. przeniesłszy ilość wiadomą
 i t. d. ani przez inne nie wiadome iak np. $5b$, ze strony lewej na prawą, i wypadło
 zyz i t. d. Lecz nim równania takowe rozwiązywać (3) w którym ilość $5b$ znajdy-
 zywać zaczęliśmy, podamy pierwszy niekprawy sironie, lecz z odmiennym znakiem
 sposoby służące do ułatwienia i skrócenym na dodayny. 3cie Przeniesłszy
 działań potrzebnych dla uwolnienia ilości $5b$ nie wiadomą $5x$ ze strony prawej na le-
 wiadomych od wiadomych z niemi połączona, i wypadło równanie (4), w którym ilość $3x$
 na czem, iakośmy już uważali (17), rozwiązywać się na lewy sironie, lecz z odmie-
 wanie równań zależy. Weźmy np. równanie z odmiennym znakiem dodaynym, który tu jest do-
 następujące:

$$4x + a - 5b = 3x + 2c$$

w którym ilości 4 , a , $5b$, 3 i $2c$ są wiadome, i w którym sirony jest sama ilość nie wiadoma x ,
 ilość x niewiadoma. W tém równaniu po drugiey same ilości wiadome. Lecz można
 waż pierwszą sirona równa jest drugiey, od drugiego działania to skrócić, i w równaniu (1)
 wszy, zatem po obu sironach tę samą ilość

szty pozostate będą równe. Równanie więc
 zamieni się w następujące:

$$4x + a - 5b - a = 3x + 2c - a;$$

$$\text{ili, } 4x - 5b = 3x + 2c - a; \quad (2)$$

W równaniu ostatniem dodawszy $5b$ po o-
 sironach, będzie

$$4x - 5b + 5b = 3x + 2c - a + 5b,$$

$$\text{ili, } 4x = 3x + 2c - a + 5b; \quad (3)$$

Odiawszy $3x$ po obu sironach, zostanie

$$4x - 3x = 3x + 2c - a + 5b - 3x$$

$$\text{ili, } 4x - 3x = 2c - a + 5b - - - - - (4)$$

$$\text{ili, } x = 2c - a + 5b - - - - - (5)$$

W równaniu (1) ilość niewiadoma x znaj-
 ie się z obu siron pomieszana z wiadomymi

le się z obu siron pomieszana z wiadomymi

le się z obu siron pomieszana z wiadomymi

le się z obu siron pomieszana z wiadomymi

le się z obu siron pomieszana z wiadomymi

le się z obu siron pomieszana z wiadomymi

le się z obu siron pomieszana z wiadomymi

le się z obu siron pomieszana z wiadomymi

le się z obu siron pomieszana z wiadomymi

le się z obu siron pomieszana z wiadomymi

le się z obu siron pomieszana z wiadomymi

przenieść od razu $+a$, $-3b$ ze strony lewej na stronę prawą, a $3x$ ze strony prawej na lewą, zmieniając w ilościach tych znak $+$ na $-$ i znak $-$ na $+$; a tym sposobem równanie zamieniłoby się od razu na równanie (5), coż w równaniu $-x = -4$ roznożywszy o -1 , wypadnie $x = 4$.

Uwagi te względem przenoszenia wyrazów z jednej strony równania na drugą, służą do wszystkich innym równaniom, którebyśmy w tym celu potrzebowali na przykład, podają następujące:

Chcąc przenieść jakkolwiek wyraz z jednej strony na drugą, wszystkie znaki $+$ na $-$, i jeśli się znajdowały, wszystkie znaki $-$ na $+$; przez co równość między stronami nie zginie: gdyż działanie to zasada się na roznożeniu obu stron równania przez tę samą ilość to jest przez -1 .

54. W równaniu $12x = 60$, podzieliwszy obie strony przez jedną liczbę 12, wypadnie $\frac{12x}{12} = \frac{60}{12}$; czyli $x = 5$. Podobnie w równaniu $ax = b$ podzieliwszy obie strony przez a , wypadnie $\frac{ax}{a} = \frac{b}{a}$, czyli $x = \frac{b}{a}$, i. t. d.

Stąd wniesiemy, że kiedy w równaniu z jednej strony jest ilość niewiadoma z czynnikiem liczebnym lub ogólnym, a z drugiej strony znajdują się same ilości wiadome; chcąc ilość nie wiadomą od wiadomej uwolnić, trzeba zachować następujące prawidło:

Napisać z jednej strony równania samą ilość niewiadomą; a stronę drugą podzielić przez czynnik tej ilości niewiadomej. I tak

$15x=45$; więc $x=\frac{45}{15}=3$. Podobnie
 $abx=pq$; więc $x=\frac{pq}{ab}$; $mx=a+b$;
 więc $x=\frac{a+b}{m}$; i t. d.

55. Często się trafia, że po przeniesieniu ilości niewiadomych na jedną a wiadomych na drugą stronę równania, ilość niewiadomych jest kilka razy powtórzona z odmiennymi oznakami. Tak równanie $ax-ac+bc=cx$ według powyższego pravidła (52) zamieniamy w następujące:

$$ax-cx+bx=ac-bc,$$

w którym ilość nie wiadoma x w pierwszym wyrazie jest pomnożona przez a , w drugim przez $-c$, w trzecim przez $+b$. Pierwszą więc stronę zna rozłożyć na czynniki (39); i wyrazić równanie to sposobem następującym:

$$(a-c+b)x=ac-bc.$$

W tym równaniu czynnikiem ilości x jest $a-c+b$; zatem według ostatniego pravidła

$$x=\frac{ac-bc}{a-c+b}.$$

Podobnie równanie $mx+px-x=a$ zamieniamy na $(m+p-1)x=a$, wypadnie

$$\text{podług tegoż pravidła } x=\frac{a}{m+p-1}, \text{ i t. d.}$$

W takim więc przypadku zachować należy następujące pravidło: napisać samą niewiadomą z jednej strony, a drugą

podzielić przez wszystkie współczynniki ilości niewiadomej tak wyraźnie jak domyślnie, dając przed niemi te same znaki, które miały przedtem np. $x-ax+c^2dx=$
 $+p$; więc $x=\frac{m+p}{1-ab+c^2d}$; i t. d.

56. Czasem wszystkie wyrazy równania są dzielne przez jedną ilość: np. w równaniu

$$6abx-9bcd=12bdx+15abc.$$

Uważam, że liczby 6, 9, 12 i 15 są podzielne przez 3; podzieliwszy więc obie strony równania przez 3, wypadnie $2abx-3bcd=4dx+5abc$.

Uważam też, że w ostatnim równaniu wszystkie wyrazy mają spólny czynnik b . Podzieliwszy więc wszystkie wyrazy przez b , wypadnie

$$2ax-3cd=4dx+5ac.$$

Równanie to według pravidła powyższych mieni się

$$\text{1}^{\text{o}} \text{ na } 2ax-4dx=5ac+3cd \text{ (52);}$$

$$\text{2}^{\text{o}} \text{ na } x=\frac{5ac+3cd}{2a-4d}, \text{ (55).}$$

Podobnie w równaniu: $8cmx=12ac+10c^2$, w którym wszystkie wyrazy mają spólny czynnik $4c$, podzieliwszy każdy wyraz przez $4c$, wypadnie

$$2mx=3a+5c; \text{ więc } x=\frac{3a+5c}{2m}; \text{ i t. d.}$$

57. Prawidło powyższe (54) dla uwolnienia ilości niewiadomej od czynnika, służy też i w ten czas, kiedy czynnik ten jest ułamkiem. I tak w równaniu $\frac{2}{3}x = 60$, podziwśmy obie strony przez $\frac{2}{3}$, będzie

$$x = 60 \times \frac{3}{2} = \frac{300}{2} = 150.$$

Jakoż w równaniu $\frac{3}{5}x = 60$, rozmnożymy obie strony przez 5, abyśmy tym sposobem znieśli mianownik współczynnika niewiadomej, równanie to zamieni się w następujące: $\frac{15}{5}x = 300$; czyli $3x = 300$; $x = 100$ (54).

Podobnież w równaniu $\frac{m}{q}x = a$, zniesienia mianownika q , rozmnożywszy strony przez q , będzie $\frac{mq}{q}x$; czyli $mx = \frac{aq}{m}$. więc $x = \frac{aq}{m}$.

Wzemy jeszcze równanie

$$\frac{x}{a} + m - \frac{n}{b} = p + \frac{qx}{c} - r,$$

w którym znajdują się ułamki i całkowite. Abyśmy w tym równaniu łatwiej uwolnić niewiadomą od wiadomych z nią łączonych, rozmnożymy *ród* wszystkie jego wyrazy przez mianownik a , aby tym sposobem mianownik był zniesiony: równanie więc to zamieni w następujące:

$$\frac{ax}{a} + am - \frac{an}{b} = ap + \frac{aqx}{c} - ar; \text{ czyli}$$

$$x + am - \frac{an}{b} = ap + \frac{aqx}{c} - ar.$$

2re. Dla zniesienia mianownika b , rozmnożymy wszystkie wyrazy ostatniego równania przez b ; będzie

$$bx + abm - \frac{abn}{b} = abp + \frac{abqx}{c} - abr,$$

czyli

$$bx + abm - an = abp + \frac{abqx}{c} - abr.$$

3cie. Dla zniesienia mianownika c w ostatniem równaniu rozmnożymy wszystkie wyrazy przez c , będzie

$$bcx + abcm - acn = abcp + \frac{abcqx}{c} - abcr;$$

czyli,

$$bcx + abcm - acn = abcp + abqx - abcr.$$

Zastanowiwszy się nad równaniem pierwszym i ostatniem, w którym wszystkie mianowniki równania pierwszego są zniesione, i z którego łatwo jest podług prawideł powyższych otrzymać ważność ilości niewiadomej; potrzebujemy, że licznik x równania pierwszego rozmnożony jest w ostatniem przez mianowniki b i c dwóch innych ułamków; licznik n rozmnożony jest przez mianowniki a i c dwóch innych ułamków; i licznik qx rozmnożony jest przez mianowniki a i b dwóch ułamków pozostających: całkowite zaś m , p , i r równania pier-

wszego są w oślatniem rozmnożone przez mianowniki a, b i c , wszystkich trzech ułomków.

Uwaga ta mająca miejsce we wszystkich innych równaniach, podaje następujące prawo: *chcąc w równaniu znieść mianowniki, trzeba licznik każdego ułamka rozmnożyć przez mianowniki innych ułomków; a każdą całkowitą rozmnożyć przez mianowniki wszystkich ułomków, i napisać równanie bez mianowników.* Tak np. w równaniu $\frac{dx}{a} - q =$

$\frac{mx}{b} - \frac{p}{c}$, mnożę ród licznik dx przez b i c mianowniki dwóch innych ułomków; i mam $bcdx$ iwszy wyraz równania. Mnożę potem całkowitą $-q$ przez a, b i c mianowniki wszystkich trzech ułomków, i mam $-abcq$ zgi wyraz równania. Mnożę dalej licznik mx przez a i c mianowniki dwóch innych ułomków i mam $acmx$ 3ci wyraz równania. Nakoniec mnożę licznik $-p$ przez a i b mianowniki dwóch innych ułomków, i mam $-abp$ 4ty wyraz równania. Tym sposobem równanie dane zamieni się w następujące:

$bcdx - abcq = acmx - abp$;
z którego podług powyższych prawideł wypadnie

$$\text{ród. } bcdx - acmx = abcq - abp; (52),$$

$$\text{are. } x = \frac{abcq - abp}{bcd - acm} (55) \text{ i t. d.}$$

58. Prawidła powyższe znacznie skrócą i ułatwią rozwiązywanie wszelkich zagadnień sposobem algebricznym, to jest za pomocą równań i znaków ogólnych. Pozostanie tylko ta jedynie trudność, jak dane zagadnienie ułożyć w równanie, do czego, iakośmy już powiedzieli, wprawa na różnych zagadnieniach, iakie niżej podamy, nawięcej dopomoże. Następujące także prawidło gruntownie rozważone, będzie w tćy mierze wielce użyteczne:

Wskazać za pomocą znaków algebricznych na ilościach wiadomych czyto liczbami, czyli też głoskami oznaczonych, i na ilościach niewiadomych, które się zawsze oznaczają głoskami, te same rozumowania i działania, któreby należało uskutecznić, chcąc sprawdzić ważność ilości niewiadomej, gdyby ważność ta była dana.

Chcąc prawidła tego użyć, trzeba pićrwyć pilnie wyznaczyć iakie są działania, które wyśłowienie danego zagadnienia w sobie zamyka wyraźnie lub nie wyraźnie: lecz właśnie na tćm zależy cała trudność w ułożeniu zagadnienia w równanie.

59. Dla zastosowania tak prawidła powyższego, na ułożenie zagadnień w równania, iako też prawideł innych któreśmy w dwóch oślatnich rozdziałach wyłożyli, przytaczamy tu niektóre zagadnienia.

II. Zagadnienia z iedną niewiadomą.

Zagadnienie I. Woda iednem korytem płynąca napelnia iedną sadzawkę w przeciągu godzin $2\frac{1}{2}$; innem zaś korytem puszczona do teyże sadzawki, napelniłaby ją w przeciągu godzin $3\frac{1}{2}$; za ileż godzin sadzawka być może napelniona, gdy woda obiema korytami do nię puszczona bedzie?

Rozwiązanie. Gdybym znalazł liczbę godzin szukaną, sprawdziłbym ją sposobem następującym: naprzd sadzawki objętość, którą tu jest 1, gdyż o iednę tylko sadzawce jest w zagadnieniu mowa, podzieliłbym raz przez $2\frac{1}{2}$, drugi raz przez $3\frac{1}{2}$; pierwszy z dwóch znalezionych ilorazów, oznaczyłby ile przez iedną godzinę wpływa wody do sadzawki korytem pierwszym, drugi ile idę w tymże czasie wpływa korytem drugim. Potem oba te ilorazy rozmnożyłbym przez znalezioną liczbę godzin szukaną, a dwa powstałe siąd iloczyny dodane do siebie okazałyby ilość wody w puszczonej objęta korytami do sadzawki w przeciągu godzin szukaną. Jesliby summa tych dwóch iloczynów wyrównywała objętości sadzawki, byłoby to dowodem że znaleziona liczba godzin jest prawdziwa.

Oznaczmyż liczbę szukaną godzin przez x , i zapomocą znaków algebraznych skutecznymy te same działania, któreśmy w powyższem rozumowaniu wysłowili: a dla uniknienia działań z ułomkami, iako też dla tego, aby znale-

ziona ważność ilości szukaney nie zależała od liczb szczególnych do zagadnienia wchodzących, uczynimy $2\frac{1}{2} = a$, $3\frac{1}{2} = b$.

Podzieliwszy objętość sadzawki czyli 1 raz przez $2\frac{1}{2}$ czyli przez a , drugi raz przez $3\frac{1}{2}$ czyli przez b , dwa ilorazy $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ oznaczają ilość wody która przez iedną godzinę wpływa do sadzawki korytem pierwszym i drugim.

Rozmnożywszy dwa te ilorazy przez liczbę godzin szukaną czyli przez x , dwa iloczyny $\frac{1}{a} \times x$ czyli $\frac{x}{a}$, $\frac{1}{b} \times x$ czyli $\frac{x}{b}$, okazażą całą ilość wody wpuszczonej do sadzawki w przeciągu godzin których liczba jest x . Aże ilość ta wody powinna wyrównywać objętości sadzawki, będzie więc równanie $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1$, z którego wypadnie iód $bx + ax = ab$ (57); zre $x = \frac{ab}{a+b}$ (55).

Równanie to podaie następujące prawidło na rozwiązanie tego zagadnienia we wszystkich przypadkach szczególnych: iloczyn dwóch liczb oznaczających liczbę godzin potrzebnych do napelnienia sadzawki każdém z osobna korytem podzieliwszy przez sumę tychże dwóch liczb, iloraz okaże liczbę godzin potrzebnych do napelnienia teyże sadzawki obiema razem korytami.

Zastosowawszy prawidło to do danych liczb w zagadnieniu powyższym, wypadnie

$$x = \frac{\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}}{\frac{2}{3} + \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}.$$

Że zaś w przeciagu iednój godziny wpływa do sadzawki wody iednym korytem $\frac{1}{a}$

$= \frac{1}{2\frac{3}{4}} = \frac{4}{11}$; drugiem $\frac{1}{b} = \frac{1}{3\frac{3}{4}} = \frac{4}{15}$; dwie te liczby, $\frac{4}{11}$ i $\frac{4}{15}$, rozmnożywszy przez znaną liczbę godzin $\frac{1}{2}$, dwa powstałe liad iloczyny dodane do siebie powinny wyrównać obciążenie sadzawki; co też jest nie zawodnie: gdyż $\frac{4}{11} \times \frac{1}{2} + \frac{4}{15} \times \frac{1}{2} = 1$; co dowodzi, że znaną liczbę godzin jest prawdziwą.

Te same próby możnaby odbyć wygodniiej ze znakami ogólnemi. Jakoz ponieważ $x =$

$$\frac{ab}{a+b}; \text{ więc}$$

$$\frac{x}{b} = \frac{a}{a+b}; \quad \frac{x}{a} = \frac{b}{a+b} \quad (49); \text{ a zatem}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = \frac{b}{a+b} + \frac{a}{a+b} = \frac{a+b}{a+b} = 1. \quad (41)$$

Go. W jakimkolwiek sposobie wystowimy powyższe zagadnienie, iakiekolwiek w niem oznaczmy dwie liczby; zawsze prawidło z ważności x ogólniej wyprowadzone posłuży do znalezienia liczby szukaney. I tak niech będzie zagadnienie.

Do wykarczowania pewnój zarosli robotnik ieden potrzebuje tygodni 15 i dni 4; drugi ukończyłby tę samą robotę za tygodni 13 i dni 5; w jakimże czasie obadwa razem zarosł tę wykarczują?

$$\text{Uczyniwszy } a = 15 \text{ tygodni i } 4 \text{ dniom} \\ b = 13 \quad - \quad - \quad 5;$$

wypadnie, iak w zagadnieniu poprzedzaiacem

$x = \frac{ab}{a+b}$; odbywszy działanie wskazane w tém równaniu, lub w prawidłe któreśmy z równania tego wyprowadzili, łatwo będzie znaleźć liczbę tygodni szukaną. Toż mówić o wszystkich innych tego rodzaju zagadnieniach.

Dla téy przyczyny równania takowe, w których ważność ilości niewiadomych wyznaczoną jest samemi głoskami i znakami algebricznemi, nazywają się *formuły*.

Wziąwszy zagadnienie cokolwiek odmiennie, w którémby np. woda nie dwiema lecz trzema lub czterema it. d. korytami do sadzawki wpływała; sposób postępowania w rozwiązaniu tego zagadnienia témby się tylko od poprzedzaiącego różnił, iż byłby cokolwiek dłuższy; i otrzymana w końcu formuła nie co od poprzedzaiacój odmienna, iak spróbować można na zagadnieniu następującem:

Do ukończenia iednój roboty ieden ziemieśnik potrzebuje 3 tygodnie i 5 dni; drugi 4 tygodni i 3 dni; trzeci 5 tygodni i 2 dni; za ileż tygodni wszyscy trzy razem robotę ukończą?

61. Zagadnienie II. *Pan przyjmując służbę umawia się z nim, że mu za każdy dzień dopełnionych należyć obowiązków służby zapłaci zł. 1, gr. 6; za każdy zaś dzień zaniedbania tychże obowiązków, wytraci mu z jego zasług gr. 22½. Po upłynięciu 30 dni sługa dostał zł. 6, gr. 22½; tyle mu się też podług umowy należało: przez ileż dni należycie dopełniać obowiązków służby?*

Gdybym znalazł szukaną liczbę dni dopełnionych obowiązków, czy liczba ta jest prawdziwa, doszedłbym tego sposobem następującym: naprzód liczbę tę odciąłbym od 30, i z tego resztę wypadałaby na różnicę drugą liczbą dni zaniedbanych obowiązków służby. Potem pierwszą z tych dwóch liczb rozmnożyłbym przez zł. 1 gr. 6, drugą przez gr. 22½; i miałbym dwa iloczyny, z których pierwszy oznacza ileby się należało słudze za dni dopełnionych obowiązków, drugi ile mu potrzeba z tych zasług wytracić za dni zaniedbania tychże obowiązków. Nakoniec iloczyn drugi odciąłbym od pierwszego; a jeśliby wypadająca różnica czyniła zł. 6 gr. 22½, byłoby to dowodem, że znaleziona liczba dni jest prawdziwa.

Oznaczmy liczbę tę przez x , i uczyniwszy zł. 1, gr. 6 = a , gr. 22½ = b , dni 30 = c , zł. 6 gr. 22½ = d ; skutecznym za pomocą znaków algebracyjnych te same działania, któreśmy w powyższem rozumowaniu wysłowili.

Odiawszy x od 30 czyli od c , zostanie $c - x$ liczba dni zaniedbanych obowiązków służby.

Rozmnożywszy x przez zł. 1 gr. 6, czyli przez a , wypadnie ax należyć służy za dni dopełnionych obowiązków.

Rozmnożywszy $c - x$ przez gr. 22½ czyli przez b , wypadnie iloczyn $bc - bx$ okazujący mu potrzeba z jego zasług wytracić za dni zaniedbanych obowiązków służby.

Drugi iloczyn $bc - bx$ odiawszy od pierwszego ax różnica $ax - bc + bx$ (34) okazująca ile rzeczywiście należy zapłacić słudze, zaś sługa dostał zł. 6 gr. 22½ czyli d ; być więc równanie $ax - bc + bx = d$, którego podług powyższych prawideł wypadnie naprzód $ax + bx = bc + d$; potem $x = \frac{bc + d}{a + b}$ (37).

Formuła ta ogólna wskazuje jakie działania odbyć potrzeba z liczbami danymi a, b, c i dla znalezienia niewiadomej x ; można więc to ią wystawić językiem zwyczajnym dla ogólniania prawideł ogólnego na rozwiązywanie tego rodzaju zagadnień; albo też potoczny wniósł miejsce głosek a, b, c i d liczby do zagadnienia wchodzące głoskami temi oznaczone. W pierwszym sposobu, formuła ta zamieni w następujące równanie: $x = \frac{\frac{3}{4} 30 + 6\frac{3}{4}}{1\frac{1}{2} + \frac{9}{8}}$

To jest: liczba dni dopełnionych obowiązków jest 15. Liczba zatem zużycowanych pieniędzy będzie $30 - 15 = 15$. Dwie te części muszą być równe, aby czynią zadość warunkom zagadnienia. Czyż pierwsza różnicażywszy przez zł. 1 gr. da drugą przez $22\frac{1}{2}$ gr. i drugi iloczyn to jest $15 \times 1\frac{1}{2}$ zł. $22\frac{1}{2}$ gr. odiawszy od iloczynu pierwszego, który jest $15 \times$ zł. 1 gr. $6 = 18$ zł. 6 gr. różnicę zł. 6 gr. $22\frac{1}{2}$. Co dowodzi, że znalezione liczby są prawdziwe.

Ta sama formuła służy do łatwego rozwiązania wszelkich tego rodzaju zagadnień w jakimkolwiek bądź sposobie wystawionych; i z tego doświadczyć można na zagadnieniach następujących.

Rybak zła zachęcenia swego syna obiecał mu płacić po 5 gr. za każde wyciągnięcie sieci z połowem; lecz za każdą razę kiedy sieć na próżno zapuszczona będzie, syn powróci ocyu 5 grosze. Za 12tym wyciągnięciem sieci rachują się, i oyciec płaci synowi 28 groszy. Ileż razy sieć była zapuszczana korzystnie?

Zgodzono rzemieślnika po zł. 5 gr. za każdy dzień roboty, i prócz tego obiecał mu codziennie stół; za każdy jednak dzień któregoby nie pracował, miało mu za stoł wytrącić zł. 1 gr. 18. Po upływie 7 tygodni, i dni 3, robota została ukończona. Gdy przyszło do porachunku, okazało się, że należy rzemieślnikowi zapłacić zł. 200 gr. Ileż dni pracował nad tą robotą?

62. Zagadnienie III. Do dwóch czar srebrnych jest jedna pokrywka; czara i jedna pokrywka ważą 12 uncyy, a razem z pokrywką ma ciężar dwa razy większy niżeli czara druga; czara zaś druga razem z pokrywką waży 12 uncyy, a trzy razy więcej niż pierwsza: ileż uncyy waży pokrywka?

Gdybym liczbę wyrażającą ciężkość pokrywki miał wiadomą, czy liczba ta jest prawdziwą, doszedłbym tego sposobem następującym: dodałbym naprzód liczbę tę do ciężaru czary pierwszej, to jest do 12 uncyy, i summy téj dodałbym połowę, miałbym ciężkość drugiey czary. Potém tę samą liczbę dodałbym do ciężaru drugiej czary, i ażeby summa była trzy razy większa od ciężkości czary pierwszej, to jest od 12 uncyy, byłoby dowodem, że znalezione ważności niewiarygodnych są prawdziwe.

Oznaczmyż liczbę uncyy, które waży pokrywka przez x ; liczbę tę dodawszy do 12, będzie $12 + x$; połowa téj summy, to jest $6 + \frac{1}{2}x$, oznacza ciężkość drugiey czary, do której dodawszy x , będzie $6 + \frac{1}{2}x + x$ ciężkość czary drugiej i pokrywki; aże podług zagadnienia summa ta jest 3 razy większa od 12, będzie więc

$$6 + \frac{1}{2}x + x = 36; \text{ czyli } 6 + \frac{3}{2}x = 36; \text{ a zatem } \frac{3}{2}x = 30; x = 20 \text{ (54); i t. d.}$$

Zagadnienie to jest szczególnym przypadkiem następującego zagadnienia ogólnego:

Maąc daną liczbę a , znaleźć dwie liczby, z których pierwsza dodana do liczby a jest m razy większa od drugiej; dana zaś do liczby drugiej jest n razy większa od liczby a : iakaż jest jedna z dwu liczb szukanych?

Oznaczywszy pierwszą z liczb szukanych przez x , będzie $a+x$ summa m razy większa od liczby drugiej: druga zatem liczba będzie $\frac{a+x}{m}$, do której dodawszy liczbę pierwszą

x , summa $\frac{a+x}{m} + x$, powinna być n razy większa od liczby danej a . Będzie zatem

$$\frac{a+x}{m} + x = an: \text{więc } a+x+xm =$$

amx ; a tém samém $x = \frac{amx - a}{1+m}$ i t. d.

63. Zagadnienie IV. Matka jest 6 razy starsza od swojej córki: za lat 12, matka będzie tylko 2 razy starsza od córki: ileż lat córka?

Oznaczywszy wiek córki przez x , matka będzie $6x$; a za lat 12 córka mieć będzie lat $x+12$, matka $6x+12$: i jeżeli wiek matki to jest $6x+12$, jest dwa razy większy od wieku córki, to jest od $x+12$, będzie to domniem, że zagadnienie jest dobrze rozwiązane. Będzie zatem równanie

$$6x+12 = 2x+24, \text{ i t. d.}$$

Zagadnienie to możnaby tak wystowić ogólnie

Znaleźć dwie liczby, z których pierwsza jest m razy większa od drugiej: a dodawszy do obudwu po a , będzie pierwsza od drugiej n razy większa.

Oznaczywszy drugą liczbę przez x , pierwsza będzie mx . Dodawszy do obudwu po a , będzie druga $x+a$, pierwsza $mx+a$.

Ze zaś po takowem dodaniu liczba pierwsza jest n razy większa od drugiej, rozmnożywszy zatem liczbę drugą to jest $x+a$ przez n , iloczyn $n(x+a)$ równy być powinna liczbie pierwszej. Będzie więc równanie

$$mx+a = n(x+a): \text{ a zatem } x = \frac{an-a}{m-n} \dots A.$$

Gdybyśmy powyższe zagadnienie ogólne tak odmienili: znaleźć dwie liczby, z których pierwsza jest m razy większa od drugiej; odjąwszy zaś od obudwu po a , będzie pierwsza n razy większa od drugiej:

na ten czas, oznaczywszy drugą liczbę przez x , pierwsza będzie mx ; a odjąwszy od obudwu po a , będzie druga $x-a$, pierwsza $mx-a$: aże podług warunków zagadnienia, liczba $mx-a$ jest n razy większa od liczby $x-a$; rozmnożywszy więc liczbę $x-a$ przez n , iloczyn $n(x-a)$ powinien być równy liczbie $mx-a$; będzie więc równanie

$$n(x-a) = mx-a, \text{ a zatem } x = \frac{an-a}{n-m}$$

Porównawszy formułę tę z formułą oznaczoną przez A , polirzeczemy różnicę tylko w ich mianownikach: pierwszy bowiem mianownikiem jest $m - n$, drugi $n - m$, licznikiem zaś obudwu $an - a$. Jeżeli w naznaczanym szczególnych wartości liczebnych dla a , o e k m , n i a , damy dla n wartość całkowitą, zawsze będzie licznik ilością dodatnią: będzie bowiem iloczyn an większy od a . Jeżeli więc wartość dla x ma być liczbą dodatnią, powinien być także i mianownik dodatni (46): w pierwszym zatem przypadku trzeba dać wartość liczebną dla m większą niż dla n , w drugim dla n większą niż dla m . W obudwu formułach odmienny są znaki licznika i mianownika, przez co się wartość ułamka nie odmiennia (42), formuły te zamieniają się w następujące:

$$\text{1wsza } x = \frac{a - an}{n - m}, \text{ 2ga } x = \frac{a - an}{m - n};$$

w których, gdy wartością n jest liczba całkowita, licznik $a - an$ jest ilością ujemną: Jeżeli więc wartość dla x ma być dodatnią, mianowniki także powinny być ujemne; co w ten czas tylko może mieć miejsce gdy w formułę pierwszy m jest większe od n w drugiej zaś n większe od m .

Dla sprawdzenia formuły drugiej weźmy następujące zagadnienie:

Miaćtek osoby A jest 3 razy większy od miaćtku osoby B: straciły obie po zł. 12000; poczem miaćtek osoby A jest 5 razy wię-

kszy

kszy od miaćtku osoby B; iakież są te miaćtki?

Porównawszy zagadnienie to z ostatniem zagadnieniem ogólnem, polirzeczemy, że trzeba uczynić $m = 3$, $n = 5$, $a = 12000$. Wartości te położywszy zamiast glosek w otrzymanej formułę, znajdziemy $x = 24000$ i t. d.

To samo zagadnienie ogólne można by jeszcze następującymi sposobami odmiennić.

Znaleźć dwie liczby z których pierwsza jest m razy większa od drugiej: a dodawszy do pierwszej a, od drugiej zaś odjęwszy a, będzie pierwsza od drugiej n razy większa; albo, do pierwszej dodawszy a, do drugiej b, będzie pierwsza równa drugiej; albo od pierwszej odjęwszy a, do drugiej dodawszy b, będzie druga n, razy większa od pierwszej i t. d.

W tych i tym podobnych przypadkach łatwo będzie wynaleźć formuły ogólne sposobem podobnym do tego, któryśmy już wyłożyli.

64. Zagadnienie V. Pewien chce dać każdemu z ubogich których spotkał, po gr. 15; lecz mu nie dostało gr. 5; dał więc po gr. 13, zostało mu gr. 9; ileż było ubogich.

Gdyby liczba ubogich była wiadoma, rozmnożyłbym naprzód liczbę tę przez 15, i od tego iloczynu odjęwszy 5, różnica okazałaby ilość pieniędzy przeznaczonych na jałmużnę. Potem tę samą liczbę ubogich rozmnożyłbym przez 13, i do tego iloczynu dodawszy 9, suma ta okazałaby także ilość pieniędzy przezna-

czonych na iatmużnę. Jesliby ostatnia summa równa była powyższej różnicy, było bytò dowodem, że znaleziona liczba ubogich jest prawdziwa.

Oznaczmyż więc liczbę ubogich przez x , będzie $15x - 5$ pierwsze wyrażenie ilości pieniędzy przeznaczonych na iatmużnę.

$15x + 9$ drugie teyż ilości pieniędzy wyrażenie. Azatém $15x - 5 = 15x + 9$; $x = 7$ it. d.

Chcąc zagadnienie to zamienić na ogólne, uczynimy $15 = a$, $13 = b$, $5 = m$, $9 = n$.

Tym sposobem dwa wyrażenia ilości pieniędzy przeznaczonych na iatmużnę, to jest $15x - 5$, i $13x + 9$, zamienia się w następujące: $ax = m$, $bx + n$. Azatém

$$ax - m = bx + n; \text{ więc } x = \frac{m + n}{a - b} \text{ it. d.}$$

65. Zagadnienie VI. Trzcy bracia kupili dobrą za 50000 cz. zł. Naystarszy mógłby sam zapłacić to kupno, lecz mu nie dostał połowu tych pieniędzy które ma średni; ten zaś samby wszystko zapłacił gdyby mu naystarszy pożyczył trzeciej części swego majątku. Naymłodszy zaś chcąc dla siebie samego nabyć tychże dóbr, potrzebowałby 4tej części majątku brata naystarszego. Ileż každy z nich ma pieniędzy?

Niech x oznacza majątek któregokolwiek z trzech braci np. naystarszego. Ponieważ średni mógłby sam za te dobra zapłacić 50000 cz. zł. gdyby mu naystarszy pożyczył 3ciej czę-

ści swego majątku, średniego więc majątek musi być $50000 - \frac{1}{3}x$.

Aże naymłodszy samby spłacić te dobra gdyby mu naystarszy pożyczył 4tej części swego majątku, naymłodszego więc majątek musi być $50000 - \frac{1}{4}x$.

Wreszcie ponieważ naystarszy spłaciłby sam te dobra gdyby miał połowę majątku brata średniego, majątek zatém brata naystarszego to jest x , powiększony połową majątku brata średniego, to jest

$\frac{50000 - \frac{1}{3}x}{2} = 25000 - \frac{1}{6}x$ równym być musi 50000 cz. zł. Będzie zatém równanie

$$x + 25000 - \frac{1}{6}x = 50000; \text{ więc } x = 30000 \text{ it. d.}$$

66. Zagadnienie VII. *Dyofantes Autor najdawniejszego dzieła Algiebrzy które czasów naszych doszło, przepędził w dzieciństwie 6tą część całego swego życia, 12tą część w młodości, a potem się ożenił, i przepędziwszy w związku małżeńskim 7mą część swego życia i nadto jeszcze lat 5, doczekał się syna, którego przeżył 4ma laty, i który dożył tylko połowy wieku Ojca swego. Ileż lat żył Dyofantes?*

Szukana liczba lat składa się z następujących części: 16t z $\frac{1}{6}$ części tych lat przepędzonych w dzieciństwie; 2re z $\frac{1}{12}$ części tychże lat przepędzonych w młodości; 3cie z $\frac{1}{7}$ części tychże lat powiększonéj 5cia laty, które przeżył Dyofantes aż do czasu narodzenia się syna; 4te

z $\frac{1}{2}$ tychże lat przepędzony wraz z synem; na koniec ze 4 lat przepędzonych po śmierci syna. Oznaczwszy zatem szukaną liczbę lat przez x , będzie równanie

$$x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4. \text{ Azatem } x = 84.$$

67. Zagadnienie VIII. *Mieszanina dwóch metalów złota i srebra wynosi 12 calów sześciennych i waży uncyy 100: ieden cal sześcienny czystego złota waży uncyy $12\frac{2}{3}$; ieden cal sześcienny czystego srebra waży uncyy $6\frac{2}{3}$: ileż w mieszaninie téj znajduie się calów sześciennych złota lub srebra?*

Gdybym znalazł szukaną liczbę calów sześciennych złota, sprawdziłbym ją sposobem następującym: naprzód liczbę tę odjąłbym od 12 calów sześciennych, które wynosi cała mieszanina, a pozostała reszta okazałaby liczbę calów sześciennych srebra w mieszaninie będącego. Potém liczbę calów sześciennych złota rozmnożyłbym przez $12\frac{2}{3}$ uncyy, a liczbę calów sześciennych srebra przez $6\frac{2}{3}$ uncyy; pierwszy i dwóch tych iloczynów okazałby ile waży samo złoto, drugi ile waży samo srebro znajdujące się w mieszaninie. Nakoniec dwa te iloczyny dodałbym do siebie, a ięśliby summa ich uczyniła 100 uncyy, byłoby to dowodem że znalezione dwie liczby są prawdziwe.

Oznaczmyż więc liczbę calów sześciennych złota przez x , a tak dla uniknienia dziłań z ułomkami, iako też dla otrzymania formuły ogólnej na zagadnienia tego rodzaju, u-

czynmy 12 calów sześciennych $= a$, 100 uncyy $= b$, $12\frac{2}{3}$ uncyy $= c$, $6\frac{2}{3}$ uncyy $= d$. Będzie zatem,

$$\text{liczba calów sześciennych złota} = x,$$

$$\text{liczba calów sześciennych srebra} = a - x,$$

$$\text{waga samego złota} = cx$$

$$\text{waga samego srebra} = ad - dx;$$

a tém samém $cx + ad - dx = b$; więc $x =$

$$\frac{b - ad}{c - d} = 3; \text{ i t. d.}$$

68.

III. *Zagadnienia z kilku niewiadomemi.*

68. Do wszystkich zagadnień, któreśmy dotąd rozwiązi, wchodziła iedna tylko niewiadoma x ; lubo nie które mogą być łatwo rozwiązane za pomocą dwóch niewiadomych. Tak np. w zagadnieniu ośiatniém, oznaczwszy przez x liczbę calów sześciennych złota, przez y liczbę calów sześciennych srebra, będzie cx waga samego złota, dy waga samego srebra znajdującego się w mieszaninie. Aże mieszanina ta wynosi calów sześciennych a , i waży uncyy b , będzie więc

$$x + y = a, \quad cx + dy = b.$$

Żadne z tych dwóch równań nieda ważności dla niewiadomych; z pierwszego wypada

$$x = a - y, \quad y = a - x,$$

$$\text{z drugiego } x = \frac{b - dy}{c}, \quad y = \frac{b - cx}{d},$$

Widzimy tu że tak w dwóch ważnościach dla x , iako też w dwóch ważnościach dla y znaj-

duie się druga niewiadoma. Lecz dwie ważności znalezione dla x zrównawszy z sobą, będzie

$$a - y = \frac{b - dy}{c}$$

Równanie to mające iednę tylko niewiadomą rozwiązawszy podług prawideł podanych wyżej, znajdziemy

$$y = \frac{b - ac}{d - c} = \frac{ac - b}{c - d} \quad (50).$$

Podobnież zrównawszy z sobą znalezione ważności dla y , otrzymamy równanie zjedną tylko niewiadomą

$$a - x = \frac{b - cx}{d},$$

Które przerobiwszy sposobem zwyczajnym, będzie

$$x = \frac{b - ad}{c - d}.$$

Możnaby działanie to skrócić sposobem następującym:

Ponieważ z równania $x + y = a$ wypada $x = a - y$; będzie więc $cx = ac - cy$. Ważność tę położywszy zamiast cx w równaniu drugiem, które jest $cx + dy = b$, równanie to zamieni się w następujące:

$$ac - cy + dy = b. \text{ Azatém}$$

$$y = \frac{b - ac}{d - c} = \frac{ac - b}{c - d}.$$

Ważność tę y położywszy znou w zamiast y w równaniu pierwszém które jest $x + y = a$ będzie

$$x + \frac{ac - b}{c - d} = a. \text{ Skąd wypadnie}$$

$$1\text{ód } cx - dx + ac - b = ac - ad \quad (48);$$

$$2\text{re } cx - dx = b - ad \quad (52); \text{ 3cie, } x =$$

$$\frac{b - ad}{c - d} \quad (55).$$

Weźmy jeszcze iedno zagadnienie rozwiązanych w rozdziale pierwszym: *znaleść dwie liczby których summa jest s , różnica a (4).* Oznaczywszy większą z liczb szukanych przez x mniejszą przez y , będzie ich summa $x + y$, ich różnica $x - y$; aże podług zagadnienia summa równa jest s , różnica równa a , będą więc dwa następujące równania:

$$x + y = s$$

$$x - y = a.$$

Dwa te równania mogą być łatwo rozwiązane którymkolwiek z dwóch sposobów użytych do rozwiązania poprzedzającego zagadnienia: lecz można je także wygodnie rozwiązać sposobem następującym:

1ód Strony odpowiadające tych dwóch równań do siebie dodawszy, wypadnie

$$2x = s + a; \text{ więc } x = \frac{s + a}{2};$$

2re Strony równania drugiego odiawszy od stron równania pierwszego, zostanie

$$2y = s - a; \text{ więc } y = \frac{s - a}{2}.$$

69. Dwa te przykłady są dostateczne do okazania jak wygodnie można częstokroć użyć

dwóch niewiadomych do rozwiązania zagadnień, które także za pomocą jednej niewiadomej mogą być rozwiązane; lecz zagadnienia te powinny zamykać konieczne dwa warunki wyrażne lub domyślne dla ułożenia dwóch równań; jedno bowiem równanie z dwiema niewiadomymi nie może dać ważności dla żadnej, iakośmy to widzieli.

Są też i takie zagadnienia, które za pomocą jednej niewiadomej rozwiązane być nie mogą, iak ieli *np.* następujące:

70. Zakupiono u gospodarza dwie fary zboża: na iednój znajdowało się żyta korcy $4\frac{1}{2}$, pszenicy korcy $3\frac{1}{2}$, za co zapłacono zł. 175 i gr. 5; na drugiej znajdowało się 2 korce żyta i 5 korcy pszenicy, za co dano zł. 175 i groszy 10. Jakaż ieli cena iednego korca żyta i iednego korca pszenicy?

Oznaczwszy cenę iednego korca żyta przez x , cenę iednego korca pszenicy przez y , i uczyniwszy zadosyć warunkom zagadnienia, wypadną dwa równania

$$4\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2}y = \text{zł. } 175 \text{ i gr. } 5.$$

$$2x + 5y = \text{ } 175 \text{ } 10.$$

Dla uniknienia działań z ułamkami i dla otrzymania wypadku ogólnego, uczynimy $4\frac{1}{2} = a$, $3\frac{1}{2} = b$, $2 = c$, $5 = d$, zł. 175 gr. 5 = p , zł. 175 gr. 10 = q . Tymi sposobem dwa ostatnie równania zamienią się w następujące:

$$\begin{aligned} ax + by &= p \\ cx + dy &= q \end{aligned} \quad . . . A.$$

Podług pierwszego z tych dwóch równań wypada

$$x = \frac{p-by}{a}, \text{ podług drugiego } x = \frac{q-dy}{c}.$$

Dwie te ważności x zrównawszy z sobą wypadnie równanie

$$\frac{p-by}{a} = \frac{q-dy}{c}$$

zniósłszy mianowniki, będzie $cp - bcy = aq - ady$; z tego zaś równania otrzymamy 16d

$$ady - bcy = aq - cp, \text{ (52) } 2re \ y = \frac{aq - cp}{ad - bc}$$

(35).

Podobnymże sposobem za pomocą dwóch równań oznaczonych głoską A znajdziemy ważność dla x . Jakoż podług pierwszego z tych dwóch równań wypada

$$y = \frac{p-ax}{b}, \text{ podług drugiego } y = \frac{q-cx}{d}.$$

Zrównawszy z sobą dwie te ważności niewiadomej y , będzie

$$\frac{p-ax}{b} = \frac{q-cx}{d}, \text{ Skąd wypadnie}$$

$$16d \ dp - adx = bq - bcx; \text{ } 2re; \ bcx - adx = bq - dp;$$

$$3cie \ x = \frac{bq - dp}{bc - ad}.$$

W znalezionych ważnościach ogólnych dla x, y zamiast głosek a, b, c, d, p i q położywszy ich ważności liczebne wyrażone w zagadnieniu, znajdziemy $x = 18\frac{1}{2}$, $y = 27\frac{1}{2}$. Dwie

te znalezione ważności są prawdziwe: gdyż czynią zadosyć warunkom zagadnienia, iak się o tém łatwo można przekonać: rozmnożywszy bowiem $4\frac{1}{2}$ korey żyta przez $18\frac{1}{2}$, a $5\frac{1}{2}$ korey pszenicy przez $27\frac{3}{4}$, i dwa te iloczyny do siebie dodawszy, summa ich wynosi zł. 173 i gr. 5. Podobnież z korce żyta rozmnożywszy przez $18\frac{1}{2}$, a 5 korey pszenicy przez $27\frac{3}{4}$ i dwa te iloczyny dodawszy, summa ich wynosi zł. 175 gr. 10 iak ieli w zagadnieniu.

Można także tę samę probę odbyć za pomocą znaków ogólnych: jeżeli bowiem znalezione ważności ogólne są prawdziwe, tedy rozmnożywszy ważność x przez a , ważność y przez b , i dwa te iloczyny do siebie dodawszy, summa ich powinna być równa p ; podobnież ważność x rozmnożywszy przez c , ważność y przez d , summa dwóch tych iloczynów powinna być równa q . Lecz że te znalezione ważności mają mianowniki odmienne, trzeba je pierwéj sprowadzić do jednakowego mianownika, co łatwo uskutecznić można zamieniwszy np. w ważności x w liczniku i mianowniku wszystkie znaki $+$ na $-$, i $-$ na $+$ (50). Tym sposobem dwie znalezione ważności będą

$$x = \frac{dp - bq}{ad - bc}, y = \frac{aq - cp}{ad - bc}. \text{ Będzie więc}$$

$$ax = \frac{adp - abq}{ad - bc}, by = \frac{abq - bcp}{ad - bc}, \text{ a tém samém}$$

$$ax + by = \frac{adp - abq + abq - bcp}{ad - bc} \\ = \frac{adp - bcp}{ad - bc} = p \left(\frac{ad - bc}{ad - bc} \right) = p.$$

$$\text{Podobnież } cx = \frac{cdp - bcq}{ad - bc}, dy = \frac{adq - cdp}{ad - bc}.$$

Więc

$$cx + dy = \frac{cdp - bcq + adq - cdp}{ad - bc} = \frac{adq - bcq}{ad - bc} \\ = q \left(\frac{ad - bc}{ad - bc} \right) = q.$$

Co dowodzi że znalezione ważności dla x i dla y są prawdziwe.

Możnaby także zagadnienie to rozwiązać sposobem następującym:

Podług pierwszego z równań oznaczonych głoską A ieli $x = \frac{p - by}{a}$; więc $cx = \frac{cp - bcy}{a}$; ważność tę położywszy zamiast cx w równaniu drugim, będzie

$$\frac{cp - bcy}{a} + dy = q. \text{ Skąd wypadnie} \\ 1^{\text{o}} d cp - bcy + ady = aq; \text{ zre } ady - bcy = aq - cp;$$

$$3^{\text{o}} \text{ c i c } y = \frac{aq - cp}{ad - bc}. \text{ A zatem}$$

$by = \frac{abq - bcp}{ad - bc}$. Ważność tę położywszy zamiast by w pierwszym z dwóch równań A , będzie

$$ax + \frac{abp - bcp}{ad - bc} = p. \text{ Skąd wypadnie}$$

$$10d \ a^2 dx - abcx + abq - bcp = adp - bcp \quad (57);$$

$$2te \ a^2 dx - abcx = adp - abq \quad (58);$$

$$3cie \ adx - bcx = dp - bq \quad (56); \quad 4te.$$

$$x = \frac{dp - bq}{ad - bc} \quad (55).$$

Albo tak: Wszystkie wyrazy pierwszego z równań A rozmnożywszy przez c , drugiego przez a , dwa te równania zamienia się w następujące:

$$acx + bcy = cp,$$

$$acx + ady = ap.$$

Strony równania drugiego odiaływszy od stron równania pierwszego, zostanie

$$bcy - ady = cp - ap; \text{ więc}$$

$$y = \frac{cp - ap}{bc - ad} = \frac{aq - cp}{ad - bc}.$$

Co się tycze niewiadomej x , tę znajdziemy albo kładąc w którymkolwiek z dwóch równań A zamiast niewiadomej y znajdziemy ię ważność, albo też w równaniach tych niewiadomą y sprowadzając do jednakowego współczynnika; co nastąpi gdy pierwsze z tych dwóch równań rozmnożymy przez d , drugie przez b ; tym sposobem równania te zamienia się w następujące:

$$adx + bdy = dp$$

$$bcx + bdq = bq;$$

z których drugie odiaływszy od pierwszego, zostanie

$$adx - bcx = dp - bq; \text{ więc } x = \frac{dp - bq}{ad - bc}.$$

Gdyby stosownie do warunków zagadnienia wypadły dwa równania takie:

$$ax + by = p, \quad cx - dy = q;$$

$$\text{lub takie: } ax - by = p, \quad cx - dy = q;$$

łatwo byśmy znaleźli ważność niewiadomych sposobem którymkolwiek z trzech podanych wyżej, z niektórymi tylko mniejszą wagą odmiannami, które żadnej trudności nie sprawia.

71. Wszystkie te trzy sposoby, iako też inne które wyłożyliśmy niżej, do tego dążą, ażeby z dwóch danych równań otrzymać jedno, w którymby jedna tylko znajdowała się niewiadoma. Działanie takowe, za pomocą którego jedna z dwóch niewiadomych znosi się czyli ginie, nazywa się *eliminatio*; po polsku można je nazwać *rugowaniem* albo *zniesieniem* niewiadomej.

Gdyby zagadnienie zamykało 3, 4, 5 i t. d. wyrażnych warunków, i tyleż niewiadomych; na ten czas uczyniwszy zadosyć warunkom zagadnienia otrzymalibyśmy 3, 4, 5 i t. d. równań, w których sposobem którymkolwiek z podanych wyżej znosząc naprzód jedną niewiadomą, potem drugą, trzecią i t. d. przyszlibyśmy na koniec do równania jednego z jedną tylko niewiadomą, której ważność znalazłszy, łatwo się znajdą ważności innych niewiado-

$$25z + 56 \times \frac{73z - 190}{54} - 103z = 8.$$

zmnoższy mianownik wypadnie

$$25z, 34 + 56, 73z - 56, 190 - 54, 103z = 8 \cdot 54; \text{ czyli,}$$

$$8568 + 4088z - 10640 - 3502z = 272$$

Z pierwszy sirony sprowadziwszy wyrazy podobne, będzie

$$586z - 2072 = 272; \text{ więc } z = \frac{2344}{586}; \text{ czyli}$$

$$z = 4.$$

Ważność tę z położywszy w równaniu oznaczoném głóską *B* zamiast 73z, równanie to zamieni się w następujące:

$$y = \frac{73 \cdot 4 - 190}{54} = \frac{102}{54}; \text{ czyli } y = 3.$$

Nakoniec znalezioną ważność dla *y*, i dla *z* położywszy w równaniu oznaczoném głóską *A*, równanie to zamieni się w następujące:

$$x = \frac{28 + 4 \cdot 3 - 9 \cdot 4}{2} = \frac{4}{2}, \text{ czyli } x = 2.$$

Placono więc po 2 zł. od przeniesienia każdego z naczyń małych, po 3 zł. od każdego z naczyń średnich, a po 4 zł. od każdego z dużych.

Ten sam wypadek otrzymalibyśmy używszy do rozwiązywania innych dwóch sposobów, któreśmy wyżej podali.

Przykład ten jest dostateczny do okazania, iż sobie polapić należy we wszystkich innych

za-

zagadnieniach o iakiékolwiek liczbie ilości niewiadomych.

73. Często się przytrafia że wszystkie niewiadome nie wchodzi razem do każdego z równań: okoliczność ta maia zmianę w działaniu czyniąca, nie może sprawić żadnég trudności: dosyć jest tylko zastanowić się należyte nad związkiem między niewiadomemi zabiegającymi, ażeby od jedné niewiadomej przejść do innych. Weźmy naprzykład następujące zagadnienie.

Dano 940 zł. do podzielenia między cztery osoby *A*, *B*, *C* i *D* w ten sposób, aby dział osoby *A* równy był $\frac{2}{3}$ działu osoby *B*; dział osoby *B* równał się $\frac{3}{4}$ działu osoby *C*; a dział osoby *C* równał się $\frac{5}{6}$ działu osoby *D*; ileż się każdej dostać?

Oznaczywszy dział osoby pierwszy przez *x*, drugi przez *x*, trzeci przez *y*, czwarty przez *z*, i uczyniwszy zadosyć warunkom zagadnienia; otrzymamy cztery następujące równania:

$$\text{Iwsze } x + x + y + z = 940.$$

$$\text{2gie } x = \frac{2}{3}y; \text{ 3cie } x = \frac{3}{4}z; \text{ 4te } y = \frac{5}{6}z.$$

Ponieważ $y = \frac{3}{5}z$, więc $\frac{1}{5}y = \frac{3}{25}z$, a $\frac{3}{5}y = \frac{9}{25}z$. Aże $\frac{3}{4}y = x$ podług warunków zagadnienia, więc $x = \frac{9}{25}z$.

Podobnież ponieważ $x = \frac{3}{4}z$, więc $\frac{1}{4}x = \frac{3}{20}z$, a $\frac{3}{4}x = \frac{9}{20}z$. Aże $\frac{2}{3}x = y$, więc $y = \frac{9}{10}z$.

Doszedłszy że $x = \frac{9}{25}z$, $x = \frac{9}{25}z$, a podług zagadnienia $y = \frac{9}{10}z$, położmy ważności

te w równaniu pierwszym ze czterech danyh
tym sposobem równanie to zamieni się w na-
stępniące:

$$\frac{20}{10}z + \frac{20}{20}z + \frac{3}{2}z + z = 940; \text{ czyli}$$

$$\frac{20}{10}z + \frac{20}{20}z + \frac{12}{20}z + \frac{20}{20}z = 940; \text{ czyli}$$

$$\frac{40}{20}z = 940. \text{ Więc } 47z = 18800; \text{ a temsamem}$$

$$z = 400. \text{ Więc } \frac{1}{2}z = 80; \text{ a } \frac{3}{2}z = 240; \text{ a}$$

$$\text{zaś } \frac{3}{2}z = y; \text{ więc}$$

$$y = 240; \text{ a tem samém } \frac{4}{3}y = 60; \text{ a } \frac{2}{3}y =$$

$$180; \text{ aże } \frac{2}{3}y = x \text{ więc}$$

$$x = 180. \text{ Podobnież } \frac{5}{3}x = 60; \text{ a } \frac{2}{3}x = 120.$$

$$\text{Ażé } \frac{2}{3}x = u, \text{ więc } u = 120.$$

Cztery te znalezione działy czynią zadanie
ały warunkom zagadnienia: gdyż summa ich
czyni 940; a dział osoby pierwszy to jest 180
równa się $\frac{2}{3}$ działu osoby drugiey; dział
osoby drugiey to jest 180 równa się $\frac{4}{3}$ działu
osoby trzeciey, nakoniec dział osoby trzeciey
to jest 240 równa się $\frac{3}{2}$ działu osoby czwartey.

74. Weźmy jeszcze cztery następujące
równania:

$$1\text{sze}; 3u - 2y = 2, \quad 3\text{cie } 5x - 7z = 11,$$

$$2\text{gie}; 2x + 5y = 59, \quad 4\text{te}, 4y + 3z = 41.$$

Z drugiego z tych czterech równań wy-
da $x = \frac{59 - 5y}{2}$. Ważność tę położywszy

w równaniu trzeciem zamiast $5x$, będzie

$$5 \times \frac{59 - 5y}{2} - 7z = 11; \text{ czyli}$$

$$195 - 15y - 14z = 22; \text{ czyli}$$

$$-195 + 15y + 14z = -22 (53); \text{ czyli,}$$

$$15y + 14z = 173.$$

Dwa równania $15y + 14z = 173$ i $4y + 3z =$

$= 41$ rozwiązawszy sposobem, którymkolwiek

z podanych wyżej, znajdziemy $y = 5, z = 7.$

Znalezioną ważność dla y położywszy w

$$\text{równaniu } x = \frac{59 - 5y}{2},$$

$$\text{będzie } x = \frac{59 - 5 \cdot 5}{2} = \frac{24}{2}; \text{ czyli } x = 12.$$

Że zaś podług pierwszego z czterech da-
nych równań wypada $u = \frac{2 + 2y}{2}$; będzie za-
tem

$$u = \frac{2 + 2 \cdot 5}{2} = \frac{12}{2}; \text{ czyli } u = 6.$$

Liczby zatem szukane są 4, 12, 5 i 7.

75. Czasem wygodnie można w prowadzić
nową niewiadomą oprócz tych które się już
znajdują w zagadnieniu: Weźmy naprzykład
zagadnienie:

Majątki trzech osób A, B, C są takie,
że majątek osoby A z połową majątków
dwóch osób innych czyni zł. 50; majątek o-
soby B z trzecią częścią majątku osoby A i
C czyni zł. 36; majątek osoby C z czwartą
częścią majątku osoby A i B, czyni zł. 46. Ja-
kież są te majątki?

Oznaczwszy majątek osoby A przez x , B
przez y , C przez z , i uczyniwszy zadosyć wa-
runkom zagadnienia, wypadną trzy równania

$$x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 50$$

$$\frac{1}{3}x + y + \frac{1}{3}z = 36$$

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + z = 46.$$

Uczynmy $x + y + z = u$ Będzie więc

$$x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}x.$$

$$\frac{1}{3}x + y + \frac{1}{3}z = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}y = \frac{1}{3}u + \frac{2}{3}y.$$

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + z = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z + \frac{3}{4}z = \frac{1}{4}u + \frac{3}{4}z.$$

Trzy więc dane równania zamieniają się w następujące;

$$\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}x = 50, \quad \frac{1}{3}u + \frac{2}{3}y = 36, \quad \frac{1}{4}u + \frac{3}{4}z = 46.$$

Zniosłszy mianowniki, będzie

$$u + x = 100$$

$$u + 2y = 108$$

$$u + 3z = 184$$

Pierwsze z tych trzech równań rozmnóżmy przez 6, drugie przez 3, trzecie przez 4, abyśmy tym sposobem niewiadome x, y, z sprowadzili do jednakowego współczynnika, będzie $6u + 6x = 600, 3u + 6y = 324, 4u + 6z = 508.$

Dodawszy do siebie filony odpowiadające, wypadnie

$$11u + 6x + 6y + 6z = 1292$$

Aże podług przypuszczenia $6x + 6y + 6z = 6u$, będzie więc $11u + 6u = 1292$, czyli $17u = 1292$. Azatem $u = 76$.

W równaniach oznaczonych głoską A , zamiast u położywszy 76. znajdziemy $x = 24, y = 16, z = 36.$

Tymże sposobem rozwiązać można następujące zagadnienia: *Maiątki trzech osób A, B, C są takie, że summa maiątków osoby A i B, większa jest 7 złotych od maiątku osoby C; summa podwojna maiątków osoby A i C większa jest 15 złotych od maiątku osoby B; summa potrójna maiątków osoby B i C większa jest 21 złotych od maiątku osoby A, ileż ma każda osoba?*

Summa maiątku osoby A i podwoynego maiątku osoby B i C czyni zł. 62; summa maiątku osoby B i potrójnego maiątku osoby A i C czyni zł. 84; Summa maiątku osoby C i poczwornego maiątku osoby A i B czyni zł. 102. Jakież są te maiątki?

76. Przytoczymy tu jeszcze kilka innych zagadnień, które na wzór powyższych rozwiązywać potrzeba, ażeby nabyć wprawy i łatwości w działaniach ze znakami ogólnemi.

Dwie paki A i B ważą po kilka cetnarów: gdyby od paki B odiyty był 1 cetnar a dodany do paki A, na ten czas paka A byłaby dwa razy cięższa od paki B, gdyby zaś od A był odiyty 1 cetnar i dodany do paki B, na ten czas paka B byłaby trzy razy cięższa od paki A: po ileż cetnarów jest w każdej pace?

Liczbę cetnarów paki A oznaczysz przez x , paki B przez y , i uczyniwszy zadość dwóm warunkom zagadnienia, będzie

1^od w pace A cetnarów $x + 1$, w pace B cetnarów $y - 1$. Aże w tym przypadku paka

A jest dwa razy cięższa od B , będzie więc pierwsze równanie $x + 1 = 2y - 2$.

2re wpacę A będzie czterów $x - 1$, w pacę B , $y + 1$. Aże w tym przypadku paka B jest trzy razy cięższa od A , będzie więc drugie równanie $3x - 3 = y + 1$.

Dwa te równanie rozwiązawszy podług sposobów podanych wyżej, znajdziemy $x = 2\frac{1}{2}$, $y = \frac{3}{2}$.

77. Jeden dłużnik dał wierzycielowi 12 luidorów i 17 cz. zł. dla umorzenia długu wynoszącego 769 zł. pol. Drugi dłużnik wcału umorzenia długu 694 zł. pol. wynoszącego, dał 25 luidorów, a wierzyciel wrócił mu 18 cz. zł. Po czemuż tu rachowano ieden luidor i ieden cz. zł.

Oznaczywszy ważność iednego luidora przez x , iednego dukata przez y , i uczyniwszy za dosyć warunkom zagadnienia, otrzymamy dwa równania

$$12x + 17y = 769, \quad 25x - 18y = 694,$$

z których wypadnie $x = 40$, $y = 17$.

78. Trzy gracze A , B , C po pierwszej partyi rachuią pieniądze: gracz A przegrał, drudzy dway wygrali, każdy tyle, ile miał siadając do gry. W drugiej partyi gracz B przegrał do dwóch innych, z których każdy tyle wygrał ile miał zaczynając drugą partyę. W trzeciej partyi przegrał gracz C , dway drudzy wygrali, każdy tyle ile miał zaczynając trzecią partyę. Poprzezstali gry

a każdy odszedł ze 120 cz. zł. po ileż mieli zaczynając grę?

Oznaczywszy szukaną ilość pieniędzy gracza A przez x , gracza B przez y , gracza C przez z , znajdziemy, że po pierwszej partyi gracz

$$A = x - y - z; \quad B = 2y; \quad C = 2z.$$

Podrugiej partyi

$$A = 2x - 2y - 2z; \quad B = 3y - x - z; \quad C = 4z$$

Po trzeciej partyi

$$A = 4x - 4y - 4z; \quad B = 6y - 2x - 2z; \quad C = 7z - x - y.$$

Aże po skończeniu trzeciej partyi mają po 120 cz; więc

$$4x - 4y - 4z = 120, \quad 6y - 2x - 2z = 120, \quad 7z - x - y = 120.$$

Odbyszy działanie sposobem którymkolwiek z podanych wyżej, znajdziemy $x = 195$, $y = 105$, $z = 60$.

79. Rzemieślnik zgodzony do pewnej roboty, ukończył ją za dwoma nawrotami: pierwszą razą pracował przez dni 12, w ciągu których żona wraz z synem osobno zgodzona pomagała mu przez dni 7, za co im zapłacono 74 zł. Drugą razą pracował przez dni 8, w ciągu których żona wraz z synem pomagała mu przez dni 3, za co dostali zł. 50. Po ileż na dzień płacono rzemieślnikowi, a po ile jego żonie wraz z synem?

Oznaczywszy zapłatę dzienną męża przez x , żony wraz z synem przez y , i uczyniwszy

zadosć warunkom zagadnienia, otrzymamy dwa równania

$$12x + 7y = 74, \quad 8x + 5y = 50$$

Które rozwiązawszy sposobem którymkolwiek z podanych wyżej, znajdziemy $x = 5$, $y = 2$.

80. Gdyby summa pierwszą razą im zapłacona wynosiła zł. 46, drugą razą zł. 30, a inne wszystkie okoliczności były te same jak w zagadnieniu poprzedzającym; na ten czas uczyniwszy zadosć warunkom, wypadłyby następujące równania.

$$12x + 7y = 46, \quad 8x + 5y = 30$$

Z pierwszego równania wypada $y = \frac{46 - 12x}{7}$

a tym samym $5y = \frac{230 - 60x}{7}$. Ważność tę położywszy w równaniu drugim zamiast $5y$, będzie

$$8x + \frac{230 - 60x}{7} = 30 \text{ zniosłszy mianownik,}$$

$$56x + 230 - 60x = 210; \text{ więc}$$

$$-4x = -20, \text{ czyli } 4x = 20 \text{ (53); } x = 5;$$

W równaniu $y = \frac{46 - 12x}{7}$, zamiast $12x$ położywszy znaną ważność to jest 5. $12 = 60$, będzie

$$y = \frac{46 - 60}{7}; \text{ czyli, } y = \frac{-14}{7} = -2 \text{ (24).}$$

Jakże teraz mamy rozumieć znak — znajdujący się przed ilością pojedynczą 2? Wie-

my co znaczą dwie ilości związane z sobą znakiem —, kiedy ilość mająca być odjęta mniejsza jest niż ta od której ją odjąć trzeba. Ale od czego, odjąć ilość, która sama jedna tylko znajdzie się na iednój stronie równania?

Abyśmy trudność tę objaśnili, zadaniomny się nad równaniami warunki zagadnienia wyrażającami: te bowiem mając ściśły związek z wystowieniem zagadnienia, dadzą nam poznac okoliczności z których trudność ta wynika. Weźmy więc równanie $12x + 7y = 46$.

Zamiali x położywszy jego ważność 5, równanie to zamieni się w następujące:

$$60 + 7y = 46.$$

Z pierwszego weyrzenia na to równanie widać w niem zaraz niepodobieństwo. Jakoż rzecz jest nie podobna otrzymać summe 46 przez dodanie iakięj ilości do liczby 60, która już sama przewyższa liczbę 46.

Weźmy także drugie równanie $8x + 5y = 30$.

Położywszy 5 zamiast x , wypadnie

$$40 + 5y = 30.$$

to samo niepodobieństwo co wyżej: gdyż liczba 30 nie może wypaść przez dodanie czego do liczby 40.

Lecz ilości $12x$ czyli 60 w równaniu pierwszym, i $8x$ czyli 40 w równaniu drugim, wyrażają zarobek samego rzemieślnika: ilości $7y$ i $5y$ oznaczają zarobek przyznany jego żonie i synowi; liczby zaś 46 i 30 oznaczają sumę daną w zapłatę spółną tym, trzem osobom:

Tu in? łatwo polirzecz na czém zależy to nie-podobieństwo.

Podług wystowienia rzemieślnik sam ieden więcej by zarobił, niż przy pomocy żony i syna: rzeczą więc jest nie podobną uważać pieniądze przyznane żonie i synowi iako powiększające zarobek rzemieślnika.

Lecz jeżeli pieniądze przyznane żonie i synowi uważać będziemy nie iako zarobek, ale iako wydatek ze szkodą rzemieślnika; na ten czas pieniądze te potrzeba będzie odjąć od tych któreby rzemieślnik sam był zarobił: a w tym przypadku nie byłoby żadnej sprzeczności w równaniach: gdyż dwa te równania zamienią się w następujące:

$$60 - 7y = 46; \quad 40 - 5y = 30.$$

Z obu tych równań wypada $y = 2$. Skąd wniesiemy że rzemieślnik zyskuje na dzień po 5 zł. a na żonę i syna wydaie przez dzień po 2 zł. co też można sprawdzić następującym sposobem.

Za 12 dni pracy dostaie rzemieślnik 5×12 czyli 60.

Wydatek na żonę i syna przez dni 7 iest $2 \times 7 = 14$; zostanie mu więc zł. 46.

Za 8 dni pracy dostaie rzemieślnik złotych 5×8 czyli 40. Przez 5 dni wydaie na żonę i syna zł. 2×5 czyli 10, zostanie mu więc zł. 30.

Rzeczą iest teraz widoczną, że chcąc aby zagadnienie było podobnem do prawdy, wystowienie iego powinno być następujące:

Rzemieślnik zgodzony do pewný roboty ukończył ją za dwoma nawrotami. Pierwszą razą pracował przez dni 12, w ciągu których, przez 7 dni poniosł wydatek na utrzymanie żony i syna, i zostało mu się z iego zarobku zł. 46. Drugą razą pracował przez 8 dni, w ciągu których przez 5 dni, miał przysobie żonę i syna których kosztem swoim utrzymywał; i dostał zł. 30. Ileż co dzień zyskiwał, ile wydawał co dzień na utrzymanie żony i syna?

Oznaczysz przez x zarobek dzienny, przez y wydatek dzienny na utrzymanie żony i syna, i uczynisz zadosyć warunkom zagadnienia, będzie

$$12x - 7y = 46; \quad 8x - 5y = 30$$

Równania te rozwiązawszy sposobem którymkolwiek z podanych wyżej, znajdziemy $x = 5$ zł. $y = 2$ zł.

81. We wszystkich przypadkach w których znajdziemy na ważność dla niewiadomý liczbę ze znakiem —, można będzie sprostować wystowienie zagadnienia sposobem podobnym do poprzedzającego, szukając pilnie ilości która z dodaynéy, iaką była w wystowieniu pierwszym, powinna się zamienić na odjemną w wystowieniu drugim. Lecz Algiebra uwalnia od podobnych, w téj mierze badań, gdy sposób działania z ilościami odjemnymi iest wiadomy; ponieważ bowiem wyrażenia odjemne wypada z równań; idzie zatem że ważności te powinny zadosyć czynić równaniom; to iest: odby-

wszy z niemi działania wskazane w równaniach, powinna wypaść jedna strona równania równa drugiey. I tak wyrażenie $\frac{-14}{7}$ wyprowadzone z równań

$$12x + 7y = 46, 8x + 5y = 30,$$

powinno łącznie z ważnością $x = 5$ wyprowadzona z tychże równań, sprawdzić obadwa te równania.

W równaniach tych położywszy naprzód ważność x , będzie

$$60 + 7y = 46; 40 + 5y = 30.$$

Potrzeba teraz zamiast y położyć w tych równaniach znaną ważność $\frac{-14}{7}$, a tym końcem trzeba wyrażenie to roz mnożyć przez 7 i przez 5.

Podług prawideł podanych wyżej wypada $\frac{-14}{7} = -2$ (24)

$$7 \times -2 = -14, 5 \times -2 = -10$$
 (34),

Równania więc $60 + 7y = 46$, $40 + 5y = 30$, zamienia się w następujące:

$$60 - 14 = 46, 40 - 10 = 30;$$

a tym sposobem sprawdzenie ich zależy, nie na dodawaniu dwóch wyrazów strony pierwszey, lecz na odjęciu wyrazu drugiego od pierwszego.

Widzimy tu że warunki zagadnienia w artykule 80 nie pozwoliły rozwiązać go w znaczeniu pierwszego wysłowienia, to jest przez

dodawanie czyli przez uważanie pieniędzy przyznanych żonie i synowi za dzienny zarobek: drugie też wysłowienie nie służy zagadnieniu rozwiązanemu wart 79. Gdybyśmy w tém zagadnieniu chcieli y uważać jako wydatek, z równań

$$12x - 7y = 74, 8x - 5y = 55,$$

któreby na ten czas wypadły, otrzymalibyśmy

$x = 5, y = \frac{-14}{7}$; a położywszy w nich ważność x , byłoby

$$60 - 7y = 74; 40 - 5y = 56;$$

nie podobieństwo tego wypadku jest właśnie przeciwne nie podobieństwu któreśmy widzieli wyżej: gdyż idzie tu oto, aby od liczb 60 i 40 odjąć $7y$ i $5y$, wypadły reszty większe niż są te liczby.

Nie tylko znak — znajdujący się przed wyrażeniem ilości y okazuje niepodobieństwo, lecz ie nawet poprawia: gdyż podług prawideł podanych wyżej na znaki (24), $\frac{-14}{7} = -2$

Ważność tę położywszy w dwóch równaniach powyższych zamiast $7y, 5y$, będzie

$$60 - 7 \times -2 = 74; \text{ czyli } 60 + 14 = 74.$$

$$40 - 5 \times -2 = 50; \text{ czyli } 40 + 10 = 50.$$

Równania te sprawdzają się przez dodawanie; a tém samém ilości $-7y, -5y$ zamienne na $+14, +10$ wyrażają nie wydatek lecz rzeczywisty zarobek rzemieślnika, a oraz pokazują jakie powinno być prawdziwe wysłowienie tego zagadnienia.

82. Weźmy jeszcze następujące zagadnienie. Kupiec prowadzący trojaki handel, zyskał na wszystkich trzech: Zysk z pierwszego powiększony zyskiem z drugiego wynosi 1200 cz. zł. zysk z pierwszego powiększony zyskiem z trzeciego wynosi 600 cz. zł. Zysk z drugiego powiększony zyskiem z trzeciego wynosi 400 cz. zł. Jakiż miał zysk z każdego handlu?

Oznaczywszy zysk z handlu pierwszego przez x , z drugiego przez y , z trzeciego przez z , wypadną podług warunków zagadnienia trzy następujące równania:

$$x + y = 1200, \quad x + z = 600, \quad y + z = 400.$$

Dodawszy strony odpowiadające tych trzech równań, będzie $2x + 2y + 2z = 2200$. Podzieliwszy obie strony przez 2, wypadnie

$$x + y + z = 1100.$$

Od tego równania odiawszy naprzód równanie trzecie, potem drugie, nakoniec pierwsze z trzech równań danych, znajdziemy

$$x = 700, \quad y = 500, \quad z = 100.$$

Kupiec zatem w handlu pierwszym zyskał 700, w drugim 500, w trzecim zaś 100 cz. zł. Abyśmy poznali co ma znaczyć ten tak nazwany zysk w handlu trzecim, weźmy dwa równania

$$x + y = 1200 \quad x + y + z = 1100.$$

Za pierwszym weyrzeniem na te dwa równania można zaraz położyć niepodobieństwo: summa albowiem dwóch zysków z handlu pierwszego i drugiego większa jest o 100 cz. zł.

aniżeli summa wszystkich trzech. Kiedy więc zysk z handlu trzeciego dodany do dwóch pierwszych z mniejsza jest o 100 cz. zł. rzeczą jest widoczną, że ten mniemany zysk jest rzeczywście stratą, którą kupiec w trzecim handlu ponosi, i dla nagrodzenia której musi 100 cz. zł. odjąć od zysku z dwóch handlów pierwszych. Skąd się okazuje że wystowienie tego zagadnienia powinno być sprostowane w następujący sposób:

Kupiec prowadzący trojaki handel, na dwóch zyskał, na trzecim stracił. Zysk z pierwszego powiększony zyskiem z drugiego wynosi 200 cz. zł. Zysk z pierwszego z mniejszony stratą z trzeciego wynosi 600 cz. zł. Zysk z drugiego zmniejszony stratą z trzeciego wynosi 400 cz. zł. Jakiż miał zysk w handlu pierwszym i drugim, a jaką stratę w handlu trzecim?

Oznaczywszy zysk z handlu pierwszego przez x , zysk z drugiego przez y , a stratę z trzeciego przez z , i uczyniwszy zadosyć warunkom zagadnienia, otrzymamy trzy następujące równania:

$$x + y = 200, \quad x - z = 600, \quad y - z = 400;$$

które rozwiązawszy sposobem którymkolwiek z podanych wyżej, znajdziemy $x = 700, y = 500, z = 100$.

Kupiec zatem w pierwszym handlu zyskał 700, w drugim zyskał 500, w trzecim stracił 100 cz. zł.

83. Przykłady te okazują że w wystawieniu zagadnień stopnia pierwszego mogą się znajdować niektóre sprzeczności, które Algebra nie tylko dać poznać, lecz nawet podać sposób na ich sprostowanie, zamieniając niektóre ilości na odjemne chociaż w zagadnieniu uważane były jako dodatywne, i przeciwnie ilości niektóre uważane jako odjemne zamieniając na dadatywne, albo dając przed ważnościami niewiadomych znak —.

Ile razy więc po rozwiązaniu zagadnienia stopnia pierwszego otrzymamy ważność niewiadomej ze znakiem —, będzie to dowodem; że zagadnienie to nie może być rozwiązane w znaczeniu takim iakiego wymaga iego wystawienie, lecz w znaczeniu przeciewnem. Dla téj przyczyny rozwiązania te, w których znalezione ważności są odjemne zowią się *solutiones negativae*; rozwiązania przeczące. Wogólności każda ilość mająca przed sobą znak — nazywa się *quantitas negativa*, ilość przecząca, dla różnicy od ilości mających przed sobą przeciwny znak + które się nazywają *quantitates positivae*, ilości twierdzące.

ROZ-

ROZDZIAŁ IV.

o Proporcji arytmetyczney i Jeometryczney.

I. o Proporcji w ogólności.

84. Reguła trzech, iak wiadomo z Arytmetyki, nie mało przynosi ułatwienia w rozwiązywaniu trudniejszych zagadnień Arytmetycznych: abyśmy ię z korzyścią użyć mogli w Algiebrze, wyłożymy ją tu w ogólniejszym i więcej szczegółów obejmującym widoku, niżeliśmy ją mieli wyłożoną w Arytmetyce.

Kiedy porównujemy między sobą dwie liczby lub inne iakiekolwiek ilości w zamiarze dowiedzenia się ilerazy jedna jest większa lub mniejsza od drugiej, czyli, iak odgad mówić będziemy, iaki między nimi zachodzi *stosunek*; na ten czas jedną z nich dzielimy przez drugą, a iloraz jest wypadkiem szukany. Gdy są cztery ilości *a, b, c i d* takie, że iloraz dwóch pierwszych równy jest ilorazowi dwóch drugich przez siebie podzielonych; na ten czas ile razy ilość pierwsza *a* jest większa lub mniejsza od drugiej *b*, tyle też razy ilość trzecia *c* jest większa lub mniejsza od czwartej *d*; czyli, króćcy to samo wyrażając, *stosunek ilości a do b, równy jest stosunkowi ilości c do d*. Cztery takowe ilości składają *proporcję*, i zowią się *proporcjonalnemi* między sobą. Proporcja zatem między czterema ilościami *a, b, c i*

d zachodząca powinaby się algiebraicznie o-
znaczać

$$\text{albo tak: } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}; \text{ albo tak: } \frac{b}{a} = \frac{d}{c}.$$

Zwyczajnie iednak proporcya oznacza się
sposobem następującym:

$$a : b :: c : d; \text{ albo, } a : b = c : d.$$

Wyrażenie takowe obejmuie w sobie oba-
dwa wyrażenia powyższe, i znaczy zarówno
podzielone przez *b* równa się *c* podzielonemu
przez *d*, iakoż *b* podzielone przez *a* równa
się *d* podzielonemu przez *c*. Pospolicie iednak
dla krótkości mowimy: *a* ma się do *b* iak *c*
do *d*.

Cztery wyrazy składające proporcya mają
swoie szczególne nazwiska. Wyrazy *a* i *d* zo-
wią się *skrajnemi*, *extremi*; wyrazy, *c* i *b*
średniemi, *medii*. Wyrazy *a* i *b* składają pier-
wszy stosunek, *ratio*; wyrazy *c* i *d* drugi sto-
sunek proporcji. Wyraz *a* iest poprzednikiem,
antecedens, wyraz *b* następnikiem, *con-
sequens* pierwszego stosunku; wyraz *c* iest poprze-
dnikiem, wyraz *d* iest następnikiem drugiego
stosunku. W proporcji zatem tak się ma po-
przednik pierwszego stosunku do swego naste-
pnika, iak poprzednik drugiego stosunku do
swego następnika. Tu inż łatwo postrzedz mo-
żna, że poprzednik i następnik i, to samo co
dzielnia i dzielnik, albo co licznik i mianownik,
stosunek zaś to samo co iloraz albo ważność
ułamka.

85. Czesłokroć porównyując między so-
bą dwie iakie ilości, iedną od drugiey odcy-
niemy w celu dowiedzenia się czem iedna dru-
ga przewyższa, czyli iaka między niemi, zacho-
dzi różnica. Daymy że *np.* iedna linia ma 3
calie więcéy niż druga; na ten czas wziawszy
dwie iakiegokolwiek liczby, między którei zacho-
dzi różnica 3, *np.* 13 i 10, mowimy że między
temi dwiema liniami taka zachodzi różnica,
iaka iest między liczbami 13 i 10; albo że te
linie mają się do siebie, iak liczby 13 i 10,
albo nakoniec że linie te są do siebie w takim
stosunku, iaki zachodzi między liczbami 13 i 10.

Stosunek taki z odjęcia iednéy ilości od
drugiey pochodzący, nazwano stosunkiem *Aryt-
metycznym*; dla różnicy od stosunku poprze-
dniającego, który wypada z podzielenia iednéy
liczby przez drugą, i który się nazywa stosun-
kiem *Jeometrycznym*. A iako dwa równe sto-
sunki ieometryczne składają proporcya ieome-
tryczną, tak dwa równe stosunki arytmetyczne
składają proporcya arytmetyczną: i jeżeli mię-
dy dwiema ilościami *a* i *b* taka zachodzi róż-
nica, iaka iest między drugimi dwiema *c* i *d*,
na ten czas mowimy: *tak się ma poprzednik*
a *do swego następnika b w pierwszym sto-*
sunku, iak poprzednik c do swego następnika
d w drugim stosunku, albo króćcy; tak się
ma *a* do *b*, iak *c* do *d*.

Proporcya zatem arytmetyczną można by
wyrazić: $a + b = c + d$, lub $b - a = d - c$,

zwyczajnie jednak wyraża się tak: $a : b :: c : d$; albo tak: $a \cdot b = c \cdot d$.

86. Trafiać się może w proporcji tak arytmetycznej iako też ieometrycznej, że następnik pierwszego słosunku równy jest poprzednikowi słosunku drugiego, np.

$$\begin{array}{l} 7 : 5 :: 5 : 3 \quad a : b = b : c. \\ 6 : 12 :: 12 : 24. \quad a : b = b : c. \end{array}$$

Proporcja taka zowie się proporcją ciągłą arytmetyczną lub ieometryczną, *proporcio continua*. Następnik słosunku pierwszego, który jest razem poprzednikiem słosunku drugiego, zowie się *średnim arytmetycznym* lub *ieometrycznym* proporcjonalnym. Algiebraicznie proporcja ciągła tak się wyraża:

$$\begin{array}{l} \div 7 \cdot 5 \cdot 3. \quad \div a \cdot b \cdot c. \\ \div 6 : 12 : 24. \quad \div a : b : c. \end{array}$$

Wiedząc już co rozumiemy przez proporcję arytmetyczną i ieometryczną, łatwo będzie poznać inne ich własności.

II. o Proporcji Arytmetycznej.

87. Proporcja arytmetyczna $a : b = c : d$, podług tego cośmy powiedzieli wyżej (85) może być tak wyrażona: $a - b = c - d$. W równaniu tem dodawszy po obu stronach b i d , będzie $a + d = b + c$. To jest w proporcji arytmetycznej *summa wyrazów skrajnych równa się summie wyrazów średnich*.

W równaniu $m + r = p + q$ odiawszy po obu stronach r i q , zostanie $m - q = p - r$; c.

Samie to równanie podług tego cośmy powiedzieli wyżej, może być tak wyrażone: $m \cdot q = p \cdot r$. To jest: jeżeli summa dwóch ilości równa jest summie dwóch innych ilości; cztery te ilości można ułożyć w proporcję arytmetyczną, biorąc dwie pierwsze ilości za wyrazy skrajne, dwie drugie za wyrazy średnie, lub odwrotnie; np. $10 + 5 = 8 + 7$, więc $10 \cdot 8 = 7 \cdot 5$ albo $8 : 5 = 10 : 7$.

88. Z tych główniejszych prawd łatwo jest wyprowadzić następujące:

1da. W proporcji arytmetycznej ciągłej summa wyrazów skrajnych równa jest średniemu dwa razy wziętemu; np. $a : b = b : c$; czyli, $a - b = c - b$, dodawszy po obu stronach b i c , wypadnie $a + c = 2b$.

2re. Kiedy summa dwóch ilości równa jest trzeciej dwa razy wziętej, ilość trzecia jest średnią arytmetyczną proporcjonalną między dwiema ilościami pierwszymi; np. $a + p = 2m$; odiawszy p i m po obu stronach, będzie $a - m = m - p$; czyli $a : m = m : p$.

3cie. W proporcji arytmetycznej wyraz czwarty równy jest summie wyrazów średnich zmniejszonej wyrazem pierwszym; np. $a : b = c : x$; więc $a + x = b + c$ (87); atem samém $x = b + c - a$. Tymże samym sposobem okazać można, że w proporcji arytmetycznej wyraz trzeci równy summie dwóch skrajnych zmniejszonej wyrazem drugim i t. d.

4te. W proporcji arytmetycznej ciągłej wyraz ośiatni równy jest średniemu dwa razy

wziętemu i zmniejszonemu wyrazem pierwszemu;
np. $a \cdot b = b \cdot x$; więc $a + x = ab$, a tym samym
 $x = ab - a$.

5te. Wyraz średni arytmetycznie proporcjonalny równy jest połowie summy dwóch wyrazów skrajnych; np.

$a \cdot x = x \cdot b$, więc $a + b = 2x$, a tym samym
 $\frac{a+b}{2} = x$.

6te. Kiedy ilość iaka równa jest połowie summy dwóch ilości innych, ilość pierwsza jest średnią arytmetycznie proporcjonalną między dwiema inemi ilościami; np.

$$8 = \frac{9+7}{2}, \text{ więc } 9, 8 = 8, 7; \text{ i t. d.}$$

III. o Proporcji ieometrycznej.

89. Proporcja ieometryczna $a : b = c : d$, iakośmy wyżej (84) powiedzieli, może być tak wyrażona: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

W tym równaniu zniósłszy mianowniki, będzie $ad = bc$ (57). To jest: w proporcji ieometrycznej iloczyn wyrazów skrajnych równy jest iloczynowi wyrazów średnich; np.
 $14 : 7 = 10 : 5$ więc $14 \times 5 = 7 \times 10$.

Prawdę tę można także okazać sposobem następującym:

Daymy że $\frac{a}{b} = m$; będzie też $\frac{c}{d} = m$.

W dwóch tych równaniach zniósłszy mianowniki, wypadnie

$$a = bm, c = dm.$$

W daney zatem proporcji $a : b = c : d$, zamiast a i c położwszy znalezione wartości, to jest bm i dm , proporcja ta zamieni się w następującą: $bm : b = dm : d$, w której widocznie iloczyn skrajnych równy jest iloczynowi średnich: gdyż obadwa składają się z tychże samych czynników b i d .

W równaniu np. $m : r = p : q$ podzieliwszy obie strony przez rq , będzie $\frac{m}{q} = \frac{p}{r}$ (40);

zatem $m : q = p : r$ (84). To jest: jeżeli iloczyn dwóch jakichkolwiek czynników mr , równy jest drugiemu iloczynowi dwóch innych czynników pq , można z tych czterech czynników ułożyć proporcja ieometryczną, biorąc dwa czynniki jednego iloczynu za wyrazy skrajne, dwa czynniki drugiego iloczynu za wyrazy średnie proporcji; np. $7 \times 4 = 14 \times 2$, będzie więc $7 : 2 = 14 : 4$.

90. W proporcji ieometrycznej ciągłej iloczyn wyrazów skrajnych równy jest kwadratowi wyrazu średniego. Jakoż w proporcji $a : b = b : c$, jest $ac = bb$ (89), czyli $ac = b^2$.

W równaniu $m : a = a : q$ podzieliwszy obie strony przez aq , będzie $\frac{m}{a} = \frac{a}{q}$ (40); czyli

$m : a = a : q$. To jest: kiedy iloczyn dwóch czynników równy jest kwadratowi, ilość z której przez siebie rozmnożonej powstaje kwadrat

jest średnią i geometrycznie proporcjonalną między dwoma czynnikami iloczynu; np. $8 \times 2 = 4^2$; więc $8:4=4:2$.

g1. Proporcją $a:b=c:d$ zamieniwszy na równanie $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; ponieważ ważność ułamka

nie odmienia się, gdy obadwa jego wyrazy rozmnożą się lub podzieli przez tę samą ilość; w równaniu więc powyższem rozmnożywszy lub podzieliwszy przez jakąkolwiek ilość m tak liczni iak mianowniki po obu stronach, będą dwa następujące równania:

$$\frac{am}{bm} = \frac{cm}{dm}; \frac{\frac{a}{m}}{\frac{b}{m}} = \frac{\frac{c}{m}}{\frac{d}{m}}; \text{czyli}$$

$$am:bm=cm:dm; \frac{a}{m}:\frac{b}{m}=\frac{c}{m}:\frac{d}{m}.$$

Dwie te proporcje porównawszy z proporcją daną $a:b=c:d$, wniesiemy, że w proporcji i geometrycznej wszystkie wyrazy rozmnożywszy lub podzieliwszy przez jaką ilość, proporcja się nie zepsunie.

Podobnymże sposobem okazać można, że dwa pierwsze wyrazy proporcji rozmnożywszy lub podzieliwszy przez jedną ilość, a dwa drugie przez inną ilość; albo dwa pierwsze wyrazy rozmnożywszy przez jedną ilość, a dwa drugie podzieliwszy przez tę samą lub przez inną ilość, proporcja się nie zepsunie.

W temże równaniu $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, rozmnożywszy lub podzieliwszy obiedwie strony przez jakąkolwiek ilość m , otrzymamy dwa następujące równania.

$$\frac{am}{b} = \frac{cm}{d}; \frac{a}{bm} = \frac{c}{dm}; \text{Azatém}$$

$$am:b=cm:d; a:bm=c:dm.$$

Dwie te proporcje porównawszy z proporcją daną $a:b=c:d$, wniesiemy, że w proporcji i geometrycznej rozmnożywszy same tylko poprzedniki, lub same tylko następniki przez jaką ilość, proporcja się nie zepsunie.

Podobnymże sposobem okazać można, że podzieliwszy same tylko poprzedniki lub same tylko następniki przez jaką ilość, albo też podzieliwszy lub rozmnożywszy poprzedniki przez jedną ilość, a następniki przez inną ilość; albo nakoniec rozmnożywszy poprzedniki przez jedną ilość, a następniki podzieliwszy przez tę samą lub przez inną ilość, proporcja się nie zepsunie.

g2. W równaniu $ad=bc$ podzieliwszy obiedwie strony 1^{od} przez bd ; 2^{re} przez cd , 3^{cie} przez ab , 4^{te} przez ac , otrzymamy cztery następujące równania:

$$1^{\text{wsze}} \frac{a}{b} = \frac{c}{d}; 3^{\text{cie}} \frac{d}{b} = \frac{c}{a};$$

$$2^{\text{gie}} \frac{a}{c} = \frac{b}{d}; 4^{\text{te}} \frac{d}{c} = \frac{b}{a};$$

w których odmieniwszy miejsce stronom, kładąc stronę pierwszą na miejsce drugiey, a stronę drugą na miejscu pierwszey; będą znowne cztery równania:

$$\text{5te } \frac{c}{d} = \frac{a}{b}; \quad \text{7me } \frac{c}{a} = \frac{d}{b};$$

$$\text{6te } \frac{b}{d} = \frac{a}{c}; \quad \text{8me } \frac{b}{a} = \frac{d}{c}.$$

Z ośmiu tych równań powstają następujące ośm proporcyy:

$$\text{1wsza } a:b=c:d; \quad \text{5ta } c:d=a:b;$$

$$\text{2ga } a:c=b:d; \quad \text{6ta } b:d=a:c;$$

$$\text{3cia } d:b=c:a; \quad \text{7ma } c:a=d:b;$$

$$\text{4ta } d:c=b:a; \quad \text{8ma } b:a=d:c.$$

To jest: w każdej proporcji ieometryczney można ośm razy odmienić miejsce poprzednikom i następnikom bez nadwzrożenia proporcji.

93. Niech będą dwie proporcye:

$$a:b=c:d, \quad m:p=q:r. \quad \text{Będzie zatem}$$

$$ad=bc, \quad mr=pq \quad (89).$$

Podzieliwszy strony równania pierwszego przez strony odpowiadające w równaniu drugim, wypadnie

$$\frac{ad}{mr} = \frac{bc}{pq}.$$

Rozłożywszy obie strony na czynniki (59) będzie

$$\frac{a}{m} \times \frac{d}{r} = \frac{b}{p} \times \frac{c}{q}. \quad \text{Azatem}$$

$$\frac{a}{m} : \frac{b}{p} = \frac{c}{q} : \frac{d}{r} \quad (89).$$

Proporcją tę porównawszy z dwiema proporcjami danemi, wniesiemy, że we dwóch proporcjach ieometrycznych wszystkie wyrazy iednocy podzieliwszy przez odpowiadające wyrazy drugiey, cztery ilorazy ślad wypadające będą składowy proporcją.

Z tych samych dwóch proporcji danych wypadają następujące równania

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \quad \frac{m}{p} = \frac{q}{r},$$

w których rozmnożywszy strony równania pierwszego przez odpowiadające strony w równaniu drugim, będzie

$$\frac{am}{bp} = \frac{cq}{dr}; \quad \text{azatem } am:bp=cq:dr.$$

Proporcją tę porównawszy z dwiema proporcjami danemi, wniesiemy że we dwóch proporcjach ieometrycznych wszystkie wyrazy iednocy rozmnożywszy przez odpowiadające wyrazy drugiey, cztery iloczynny ślad wypadające będą składowy proporcją.

Azatem we dwóch proporcjach

$$a:b=c:d, \quad m:p=q:r,$$

rozmnożywszy wyrazy odpowiadające sobie, będzie proporcya

$$ab:bm=cd:dr,$$

w której dwa pierwsze wyrazy podzieliwszy przez b , dwa drugie przed d , wypadnie (91)

$$a:m=c:r.$$

Ostatnią proporcją porównawszy z dwiema danymi, wniesiemy, że przekreśliwszy w nich wyrazy wspólne obudwom, pozostałe wyrazy składać będą proporcją.

Ta sama własność służy proporcjom następującym:

$$a:b=c:d, a:b=c:d, a:b=c:d,$$

$$m:a=r:c; b:m=r:c; m:b=r:d; \text{itd.}$$

Jakoż w dwóch *np.* ostatnich proporcjach jest

$$ad=bc; md=br. \text{ więc } \frac{ad}{md} = \frac{bc}{br}, \text{ czyli}$$

$$\frac{a}{m} = \frac{c}{r}; \text{ więc } a:m=c:r; \text{ i t. d.}$$

g4. Z proporcji $a:b=c:d$, wypada równanie $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; w którym po obu stronach

raz dodawszy drugi raz odjawszy iakąkolwiek ilość m , i tak dwie równe summy, iak dwie równe różnice w jednymże wierszu napisawszy,

będzie $\frac{a}{b} \pm m = \frac{c}{d} \pm m$; obrociwszy całkowitą na ułomek, wypadnie

$$\frac{a \pm bm}{b} = \frac{c \pm dm}{d}.$$

Obie strony rozmnożywszy naprzód przez b , a potem podzieliwszy przez $c \pm dm$, wypadnie

$$\frac{a \pm bm}{c \pm dm} = \frac{b}{d}.$$

Że zaś ważność ilości m zależy od naszej woli, uczyniwszy więc $m=1$, ostatnie równanie zamieni się w następujące:

$$\frac{a \pm b}{c \pm d} = \frac{b}{d}.$$

Wziąwszy osobno sumę, osobno różnicę, będzie

$$1 \text{ ód, } \frac{a+b}{c+d} = \frac{b}{d}; \text{ 2re, } \frac{a-b}{c-d} = \frac{b}{d}.$$

W tych dwóch równaniach drugie strony są sobie równe, a zatem i strony pierwsze muszą być sobie równe. Będzie więc

$$3 \text{ cie, } \frac{a+b}{c+d} = \frac{a-b}{c-d}. \text{ Że zaś } \frac{b}{d} = \frac{a}{c}$$

(g2), dwa zatem pierwsze równania zamienić można w następujące:

$$4 \text{ te, } \frac{a+b}{c+d} = \frac{a}{c}; \text{ 5te, } \frac{a-b}{c-d} = \frac{a}{c}.$$

Z tych pięciu równań wypadają następujące proporcje:

$$1. a+b:c+d=b:d;$$

$$2. a-b:c-d=b:d;$$

$$3. a+b:c+d=a-b:c-d;$$

$$4. a+b:c+d=a:c;$$

$$5. a-b:c-d=a:c;$$

które porównawszy z proporcją daną $a:b=c:d$, wniesiemy 1 ód z proporcji 1szej i 4tej, że w każdej proporcji ieometrycznej summa dwóch pierwszych wyrazów tak się ma do summy dwóch drugich wyrazów, iak następnik do następnika, lub iak poprzednik do poprzednika;

2re, z proporcji drugiey i piatęy wypada, że różnica dwóch pierwszych wyrazów do różnicy dwóch drugich wyrazów, iak następnik do następnika, lub iak poprzednik do poprzednika.

3cie, z proporcji 5ciey wypada że summa dwóch pierwszych wyrazów do summy dwóch drugich wyrazów, iak różnica dwóch pierwszych do różnicy dwóch drugich.

W proporcji $a:b=c:d$, odmieniwszy miejscę wyrazów, będzie (92), $a:c=b:d$; Azatem

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

W tém równaniu raz dodawszy drugi raz odjąwszy po obu stronach ilość iakąkolwiek m , i odbywszy działanie takie iak wyżej, otrzymamy równanie

$\frac{a \pm c}{b \pm d} = \frac{c}{d}$, z którego wyprowadzimy następujące proporcje:

1. $a+c:b+d=c:d$;
2. $a-c:b-d=c:d$;
3. $a+c:b+d=a-b:c-d$;
4. $a-c:b+d=a:b$;
5. $a-c:b-d=a:b$.

To jest: wkażdęy proporcji geometryczney jest *rod* summa poprzedników do summy następników, iak którykolwiek poprzednik do swego następnika; 2re różnica poprzedników do różnicy następników, iak którykolwiek poprzednik do swego następnika; 3cie Summa poprzedników do summy następników, iak różnica poprzedników do różnicy następników.

95. Niech będzie $\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c}$.

Trzy te ułamki uważane iako stosunki różne (84) dają następujące proporcje:

$$A:a=B:b; B:b=C:c.$$

Z pierwszey, podług tego co poprzedziło wypada. $A+B:a+b=B:b=a$ tém samém

$$\frac{A+B}{a+b} = \frac{B}{b} \quad \text{Ze zaś} \quad \frac{B}{b} = \frac{C}{c} \quad \text{podług założenia, więc}$$

$$\frac{A+B}{a+b} = \frac{C}{c}; \quad \text{będzie więc proporcja}$$

$$A+B:a+b=C:c;$$

w której wzięwszy summy poprzedników i następników, będzie podług wniosków poprzedzących

$$A+B+C:a+b+c=C:c.$$

To jest: jeżeli są trzy stosunki równe, summa trzech poprzedników tak się ma do summy trzech następników, iak którykolwiek poprzednik do swego następnika.

Tym samym sposobem okazać można, że iakąkolwiek będzie liczba stosunków równych, zawsze summa wszystkich poprzedników do summy wszystkich następników, iak którykolwiek poprzednik do swego następnika.

Prawdę tę można także okazać sposobem następującym. Niech będą np , cztery stosunki równe:

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} = \frac{D}{d}$$

Uczyniwszy $\frac{A}{a} = m$, będzie też $\frac{B}{b} = m$,

$$\frac{C}{c} = m, \frac{D}{d} = m.$$

Woliatnich czterech równaniach zniósłszy mianowniki, będzie

$$A = am, B = bm, C = cm, D = dm.$$

W tych równaniach dodawszy strony sobie odpowiadające, będzie

$$A+B+C+D = am+bm+cm+dm; \text{ czyli } A+B+C+D = m(a+b+c+d) \quad (38).$$

A zatem

$$\frac{A+B+C+D}{a+b+c+d} = m. \text{ Ze zaś } \frac{A}{a} = m; \text{ więc}$$

$$\frac{A+B+C+D}{a+b+c+d} = \frac{A}{a}; \text{ a t} \acute{e}m \text{ sam} \acute{e}m$$

$$A+B+C+D : a+b+c+d = A : a.$$

96. W równaniu $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ podniosłszy o-

bie strony do kwadratu (28), będzie $\frac{a}{b} \times \frac{a}{b}$

$$= \frac{c}{d} \times \frac{c}{d}; \text{ czyli } \frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2}; \text{ a t} \acute{e}m \text{ sam} \acute{e}m$$

$a^2 : b^2 = c^2 : d^2$. To jest: jeżeli cztery jakiekolwiek ilości są w proporcji, będą też i kwadraty ich w proporcji.

Podobnymże sposobem okazać można, że jeżeli cztery kwadraty są w proporcji, będą też w proporcji cztery ilości z których przez siebie rozmnożonych powstają te kwadraty; że czte-

ry

ry jakiekolwiek ilości proporcja składająca się z nich, do 3tej, 4tej i t. d. potęgi, proporcja się nie zepsuje; i t. d.

97. Są jeszcze inne własności proporcji geometrycznej, jako to: jeżeli poprzednik pierwszego równy poprzednikowi drugiemu, będzie następnik pierwszy równy następnikowi drugiemu; jeżeli dwa pierwsze wyrazy proporcji są sobie równe, będą też dwa drugie wyrazy sobie równe; jeżeli trzy wyrazy jednego proporcji równe są trzem odpowiadającym wyrazom proporcji drugiej, czwarty wyraz pierwszego równy będzie czwartemu wyrazowi drugiej; i t. d.

Te i tym podobne własności łatwo okazać można za pomocą dwóch równań, z których pierwsze powstałe z rozmnożenia przez siebie wyrazów skrajnych i średnich, drugie z podzielenia wyrazu pierwszego przez drugi, a trzecie przez czwarty, lub też drugiego przez pierwszy i czwartego przez trzeci.

98. Te same dwa równania służą także do znalezienia wyrazu czwartego proporcji, gdy są dane trzy pierwsze. Jakoż niech będzie proporcja $a : b = c : x$, w której wyraz trzeci c jest wiadomy. Ponieważ $ax =$

$$bc \quad (90), \text{ więc } x = \frac{bc}{a}. \text{ Tymże sposobem zna-}$$

ć można wyraz pierwszy, 2gi lub 3ci gdy są dane trzy inne. Podobnież w proporcji ciągłej mając wiadome dwa pierwsze wyrazy, znaleźć można wyraz trzeci. Jakoż z proporcji

tey $a:b=b:x$, w której wyraz tylko x jest niewiadomy, wypada $ax=b^2$; więc $x = \frac{b^2}{a}$.

Z równą łatwością znaleźć można w proporcji ciągłej wyraz pierwszy, gdy są wiadome dwa ostatnie.

99. Lecz nie zawsze łatwo jest znaleźć w proporcji ieometrycznej ciągłej wyraz średni, gdy dwa skrajne są wiadome. I tak w proporcji $a:x=x:b$, ponieważ iloczyn skrajnych równy jest kwadratowi wyrazu średniego (90), będzie więc $x^2=ab$. Tu uważać potrzeba, że iako x jest ilością z której przez się rozmnożony powstał kwadrat x^2 ; tak też ważnością dla x powinna być ilość taka, któraby przez siebie rozmnożona, czyli podniesiona do kwadratu równała się iloczynowi ab . Jeżeli iloczyn ab znaczy np. 16, albo 25, albo 36 i t. d. łatwo będzie domyslić się że ważnością dla x jest 4, 5, albo 6, i t. d. Ale jeżeli iloczyn ab znaczy np. 729, nie tak łatwo pomiarkować można że liczba ta jest kwadratem powstałym z rozmnożenia 27 przez 27. Ażeby więc w proporcji ieometrycznej ciągłej zawsze można było znaleźć wyraz średni gdy dwa skrajne są wiadome, trzeba pierwey poznać sposób rozwiązania następującego zagadnienia: znaleźć liczbę któraby sama przez siebie rozmnożona równała się liczbie danej; czyli, co na jedno wychodzi, mając dany kwadrat, znaleźć liczbę, z której kwadrat ten powstał; i która nazywa się *pierwiastkiem kwadratowym*. Wi-

domość o wynaydowaniu, czyli, iak się zwyczajnie mówi, o *wyciąganiu pierwiastków kwadratowych*, do rozwiązania wielu ważnych zagadnień iliotnie potrzebną, wyłożymy w następującym rozdziele.

R O Z D Z I A Ł V.

O podnoszeniu liczb do kwadratu i wyciąganiu pierwiastku kwadratowego.

100. Abyśmy dokładnie poznali sposób wyciągania pierwiastku kwadratowego, trzeba naprzód uważać iakim zmianom podlegaia liczby, gdy je podnosimy do kwadratu. W podnoszeniu pierwszych dziesięciu liczb do kwadratu nie zachodzi żadna trudność: lecz ponieważ kwadraty liczb tych potrzebne nam będą tak do podnoszenia liczb innych do kwadratu, iako też do wyciągania pierwiastków, potożymy tu w dwóch następujących rzędach i liczby i odpowiadające im kwadraty, które trzeba znać na pamięć:

liczby: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
kwadraty 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100.

Uważać tu potrzeba że kwadrat liczby, ie-dnocyfrowey nie może się składać z więcej cyfr iak że dwóch: liczba 10 najmniejsza z liczb dwucyfrowych ma w swoim kwadracie 100 trzy cyfry. A stad wniesiemy, że jeżeli dany kwadrat ma cyfr więcej niż dwie, pier-

wiańkiem jego nie może być liczbą jednocyfrową, lecz przynajmniej dwucyfrową.

Chcąc poznać iak się wyciągała pierwiastki z kwadratów liczb dwucyfrowych, trzeba by naprzód uważył iakim sposobem liczby te wchodzą do składu kwadratów. Lecz sposób zwyczajny podnoszenia liczb do kwadratu zależący na mnożeniu daney liczby przez siebie samę, w niczém nie ułatwia sposobu wyciągania pierwiastków. Kwadrat np. liczby 47 jest 47. 47 = 2209. W kwadracie tym nie ma żadnego śladu cyfr składających pierwiastek: cyfry bowiem te przez mnożenie 47 przez 47 zamieniają się na inne, i nie podobna dostrzedz w iakim sposobie wchodzą do składu kwadratu 2209. Ale głoski abecadła téy nie dogodności nie podlegają: obaczmy więc naprzód na głoskach, w iakim sposobie ilości składające pierwiastek wchodzą do składu kwadratu.

101. Kwadrat z ilości dwuwyrazowey czyli dwumiennéy $a + b$, iakośmy już powiedzieli, (36) jest

$$(a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2.$$

Przypatrzwszy się temu kwadratowi z uwagą i porównawszy go z tego pierwiastkiem, postrzeżemy, że kwadrat dwóch ilości $a + b$ składa się z trzech części: 1^o z kwadratu a^2 ilości pierwszey; 2^o z podwoynego iloczynu $2ab$ ilości pierwszey i drugiey; 3^o z kwadratu b^2 ilości drugiey. Liczba 47

składa się ze 4 dziesiątków i 7 jedności; i może być tak wyrażoną: $40 + 7$. Uczynwszy $a = 40$ czyli 4 dziesiątkom, $b = 7$ jednościom, będzie

$$47. 47 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2.$$

To jest: kwadrat 47 składać się będzie 1^o z kwadratu a^2 czterech dziesiątków czyli 40 jedności; 2^o z podwoynego iloczynu $2ab$ czterech dziesiątków i siedmiu jedności; 3^o z kwadratu b^2 siedmiu jedności

Kwadr: czterech dziesiątków czyli 40 jest = 1600

Podwoyny iloczyn 4 dziesiątków i 7 jed: = 560

Kwadrat 7 jedności: = 49

Summa $a^2 + 2ab + b^2$ = 2209.

102. Chcąc liczby téy 2209 znaleźć pierwiastek 47, uważmy naprzód że iako w kwadracie czterech dziesiątków czyli w 1600 0-tanie dwa znaki liczebne iako zera nie mają żadnéy ważności; tak w całym kwadracie 2209 0-tanie dwie cyfry nie wchodzą do kwadratu dziesiątków: a zatem kwadrat dziesiątków zawierkać się tylko będzie we 22 stach czyli we 2200.

2^o. Przypatrzwszy się kwadratowi pierwszych liczb dziesięciu, postrzeżemy że najbliższy kwadrat 22 set czyli 2200, jest 16 set czyli 1600: iakoż liczba 22 większa jest od 16 czyli od kwadratu ze 4, a mniejsza od 25 czyli od kwadratu z 5, tak iak liczba 47 większa jest od 4 dziesiątków czyli od 40, a mniejsza od 5 dziesiątków czyli od 50. Szukając więc najbliższego kwadratu zawartego w liczbie 22

dziesiątków, znajdziemy 16, którego pierwiastek 4 wyrażać będzie dziesiątki szukanego pierwiastku. Odiąwszy 16 set czyli 1600 od 2209, reszta 609 zamykać ieszcze będzie podwójny iloczyn dziesiątków i iedności, to iest 560, i kwadrat iedności który iest 49.

3cie. A iako w podwoynym iloczynie 4 dziesiątków i 7 iedności, to iest w liczbie 560 ostatnia cyfra iako zero nie ma żadnój ważności liczebnej; tak w pozostałej reszcie 609 ostatnia cyfra 9 nie wchodzi do podwoynego iloczynu dziesiątków i iedności: wiec podwoyny ten iloczyn zamykać się tylko będzie w 60 dziesiątkach czyli w 600 iednościach, które prócz tego zamykają ieszcze dziesiątki będące w kwadracie z 7 iedności.

4cie. Podzieliwszy iloczyn przez ieden z czynników, wypadnie na iloraz czynnik drugi. Podzieliwszy zatem 60 dziesiątków czyli 600 przez podwoyne dziesiątki to iest przez 8, iloraz 7 okaże iedności szukanego pierwiastku.

5cie. Rozmnożywszy 8 dziesiątków przez 7 iedności, iloczyn 56 dziesiątków czyli 560 będzie podwoynym iloczynem 4 dziesiątków przez 7 iedności. Odiąwszy ten iloczyn od pierwszój reszty 609, druga reszta 49 będzie i iest w istocie kwadratem 7 iedności.

Działanie to odbywa się podług następującego wzoru:

$$\begin{array}{r|l}
 22,09 & 47 \\
 16 & 87 \\
 \hline
 60,9 & \\
 60,9 & \\
 \hline
 000 &
 \end{array}$$

Pisze się liczba dana iak gdyby ją potrzeba było dzielić przez inną, przeznaczając dla szukanego pierwiastku miejsce należące się dzielnikowi. Potem iedności i dziesiątki oddziela się przecinkiem od dwóch pierwszych cyfr po lewój stronie będących, które zamykają w sobie kwadrat dziesiątków. Dalej bierze się kwadrat największy który w tych dwóch cyfrach mieścić się może: kwadratem tym iest 16, którego pierwiastek 4 napisawszy na przeznaczonem dla niego miejscu, odejmuje się 16 od 22. Przy pozostałej reszcie 06 piszą się dwie inne cyfry 09 danój liczby; a ostatnia 9 iako nie wchodząca do podwoynego iloczynu dziesiątków i iedności oddziela się przecinkiem od innych, które podzieliwszy przez podwoyne dziesiątki pierwiastku to iest przez 8, iloraz 7 iedności pisze się na swoim miejscu; a dla utworzenia od razu dwóch innych części kwadratu, to iest podwoynego iloczynu dziesiątków i iedności, i kwadratu iedności, które to dwie części zamykać się powinny w pozostałej reszcie 609, pisze się 7 obok 4, skąd powstaie liczba 47 równa summie podwoynych dziesiątków i pojedynczych iedności szukanego pierwiastku, to iest równa $2a+b$,

która rozmnożywszy przez 7 czyli przez b , wypadnie $609 = 2ab + b^2$, czyli podwoyny iloczyn dziesiątków i jedności, więc kwadrat jedności. Po odjęciu, nie się nie zostaje; co dowodzi że pierwiastkiem liczby 2209 jest 47.

Weźmy jeszcze liczbę 324, z której potrzeba wyciągnąć pierwiastek kwadratowy. Uważdam działanie jak następuje:

3,24	18
1	
2,4	28
22,4	
000	

i podług tego, co się powiedziało wrzedy, znajduję 1 na dziesiątki pierwiastku; dziesiątki te podwoione dają mi liczbę 2, przez którą podzielić trzeba dwie pierwsze cyfry 22 pozostałych reszty. Liczba 2, we 22 mieści się w prawdzie 11 razy; lecz nie można wziąć za pierwiastek ani liczby większej niż 10, ani samę liczbę 10; a nawet liczba 9 wzięta za pierwiastek jedności byłaby w niniejszym przypadku za wielką: napisawszy bowiem 9 obok 1, i rozmnożywszy 29 przez 9, jak wymaga prawo, wypadnie iloczyn 261, którego nie można odjąć od 224. Biorę więc na iloraz liczbę mniejszą od 9, to jest liczbę 8, i napisawszy ją tak w pierwiastku na miejscu jedności, jak obok dzielnika 2, mnożę 28 przez 8, i mam iloczyn 224 równy pozostałej reszcie; co dowodzi, że pierwiastkiem szukanym jest liczba 18.

Utworzywszy trzy części kwadratu z liczby 18, wypadnie

$$\begin{aligned} a^2 &= 100 \\ 2ab &= 160 \\ b^2 &= 64 \\ \hline \text{Summa} &= 324 = 18 \times 18. \end{aligned}$$

Tu inż łatwo postrzedz można, że 6 dziesiątków, które zamyka kwadrat jedności, dodane do 160 podwoynego iloczynu dziesiątków i jedności, powiększają ten iloczyn: podzieliwszy zatem przez podwoyne dziesiątki iloczyn tak powiększony, nie mogą na iloraz wypaść same jedności.

103. Nim przystąpimy do wyciągania pierwiastków złożonych z trzech, czterech i t. d. cyfr, uczynimy piérwý tę istotną uwagę: że każda liczba mniejsza od 100 nie może mieć w swoim kwadracie cyfr więcej nad cztery: gdyż kwadrat ze 100 jest 10000, a liczba ta jest najmniejszą ze wszystkich liczb z pięciu cyfr złożonych.

104. Po téj uwadze, abyśmy doszli jakim sposobem tworzy się kwadrat z liczby większej od 100, z liczby np. 475, rozłożymy liczbę tę na $470 + 5$, czyli na 47 dziesiątków więc 3 jedności. Chcąc wyprowadzić kwadrat liczby tej z formuły $a^2 + 2ab + b^2$, uczynim $a = 47$ dziesiątkom $= 470$ jednościom, $b = 3$ jednościom. Będzie więc

$$\begin{array}{r}
 a^2 = 220900, \\
 2ab = 2820, \\
 b^2 = 9, \\
 \hline
 \text{Summa} = 223729 = 473 \times 473.
 \end{array}$$

Widzimy w tym przykładzie, że w kwadracie dziesiątków ośmiatnie dwie cyfry nie mają żadnej wartości, jako zera: to samo w ogólności ma miejsce w każdym innym przykładzie: dziesiątki bowiem rozmnożone przez dziesiątki dają na iloczyn sta.

W kwadracie zaś 223729 oddzieliwszy przecinkiem dziesiątki i jedności, w pozostałej części 2237 szukać potrzeba kwadratu dziesiątków. A jako liczba 473 większa jest od 47 dziesiątków czyli od 470, a mniejsza od 48 dziesiątków czyli od 480; tak też liczba 2237 powinna być większa od kwadratu ze 47, a mniejsza od kwadratu ze 48: skąd się okazuje że największy kwadrat który mieścić się może w 2237 jest kwadrat ze 47, czyli kwadrat z dziesiątków pierwiastku. Rzeczą jest przez się widoczną, że dla znalezienia tych dziesiątków trzeba odbyć to samo działanie, jakieby odbyć należało z liczbą 2237 chcąc z niej wyciągnąć pierwiastek kwadratowy; lecz na końcu ojróż wypadku szukanego pozostałaby jeszcze reszta zamykająca sta utworzone z podwójnego iloczynu 47 dziesiątków rozmnożonych przez jedności.

Abyśmy działanie to odbyli porządnie, rozłożmy jak następuje:

$$\begin{array}{r|l}
 22, 37, 29 & 473 \\
 16 & 87 \\
 \hline
 63, 7 & 943 \\
 60, 9 & \\
 \hline
 282, 9 & \\
 282, 9 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

Naprzód oddziela się dwie ostatnie cyfry 29, a dla wyciągnięcia pierwiastku z liczby 2237, która pozostanie ze strony lewéj, oddziela się w niej znówu dwie ostatnie cyfry 37; tym sposobem liczba dana rozłożona jest na oddziały, z których każdy ma po dwie cyfry idąc od strony prawéj ku lewéj. Z dwoma pierwszymi oddziałami 22, 37, odbywa się działanie zupełnie takie, jakieśmy odbyli wyżej (102) z liczbą 2209: skąd powstają dwie pierwsze cyfry pierwiastku to jest 47, i pozostała reszta 28, do której przyłączymy dwie cyfry ośmiatniego oddziału to jest 29, liczba 2829 zamyka podwójny iloczyn 47 dziesiątków rozmnożonych przez jedności, i kwadrat jedności. Oddzieliwszy cyfrę 9 jako nie mogącą wchodzić do podwójnego iloczynu dziesiątków i jedności, liczbę 282 dzielimy przez podwójne dziesiątki to jest przez 94: a iloraz 3 napisawszy tak obok 47, jako też obok 94, i rozmnożwszy 943 przez 3, wypada na iloczyn liczba 2829 zupełnie równa ośmiatniéj reszcie: poczem działanie jest ukończone.

Weźmy jeszcze liczbę 22391824. Jakikolwiek jest pierwiastek téj liczby, zawsze go można nwać iakoby był rozłożony na iedności i dziesiątki, iak w przykładach poprzedzających. A'e w kwadracie dziesiątków ostatnie dwie cyfry nie mają żadney ważności liczebney iako zera, więc w liczbie daney dwie ostatnie cyfry 24 nie mogą wchodzić do kwadratu dziesiątków: odciawszy je więc przecinkiem, szukamy największego kwadratu mogącego się mieścić w części 223918, która z lewéj ręki pozostała. Część ta pozostała ma cyfr więcej niż dwie: co dowodzi że liczba wyrażająca dziesiątki szukanego pierwiastku ma cyfr więcej niż iedną (100); i można ją więc znów rozłożyć na dziesiątki i iedności: że zaś kwadrat tych dziesiątków nie wchodzi do ostatnich dwóch cyfr w części 223918, odciawszy więc dwie te cyfry, szukać go należy w pozostałych cyfrach 2239. A że liczba 2239 ma jeszcze więcej niż dwie cyfry, więc kwadrat największy mogący się w niéy mieścić musi mieć przynajmniej dwie cyfry w swoim pierwiastku: liczba zatem wyrażająca szukane dziesiątki mieć będzie więcej niż iedną cyfrę. Skąd się okazuje, że we 22 trzeba szukać kwadratu liczby téj, która wyraża iedności rzędu najwyższego w szukanym pierwiastku. Z tego ciągu rozumowań, który można posunąć tak daleko iak się podobą, okazuje się, że liczbę daną trzeba rozłożyć na oddziały po dwie cyfry mające zaczynając od ręki prawéj do lewéj. Ostatni iednak od-

dział z lewéj ręki może mieć często iedną tylko cyfrę, iakosmy już widzieli wyżéj (102) na liczbie 324.

Rozłożywszy zatem daną liczbę na oddziały, i urzadziwszy podług przyłączonego tu wzoru, z pierwszymi trzema 2239, 18, 24 | 4732 oddziałami postępuje się 16 87 iak w przykładzie poprzedzającym; a znalazłszy trzy 639 943 609 9462 pierwsze cyfry pierwiastku, 3018 które są 473, obok reszty 2839 1892, 4 1892 4

1892 4 0
dział 24; i liczba 18924 uważa się iaką złożoną z podwójnego iloczynu znalezionych 473 dziesiątków przez szukane iedności, i z kwadratu tychże iedności: odciawszy potem ostatnią cyfrę 4, pozostałe z lewéj ręki 1892 dzieli się przez znalezione dziesiątki dwa razy wzięte, to jest przez 946; poczem znaleziony iloraz 2 sprawdza się iak w działaniach powyższych.

Na tem się kończy działanie w tym przykładzie: lecz łatwo jest domyslić się, że gdyby dana liczba miała jeszcze iednym oddziałem więcej, znalezione cztery cyfry 4732 wyrażałyby dziesiątki pierwiastku, którego iedności należałoby szukać, i że tem samém przez te dziesiątki dwa razy wzięte trzeba by dzielić pozostałą resztę z przyłączoną do niéy iedną cyfrą oddziału następnego: toż mowić o innych

oddziałach, które następnie piszą się obok reszt pozostałych.

105. Z tego cośmy dotąd powiedzieli, łatwo jest uczynić wniosek, że na ile oddziałów rozłożył można dany kwadrat, z tylu cyfr składać się będzie szukany pierwiastek. Pierwszy oddział z prawej ręki daie w pierwiastku iedności rzędu pierwszego; drugi iedności rzędu drugiego czyli dziesiątki, trzeci iedności rzędu trzeciego czyli sta, i tak dalej aż do oddziału ostatniego z lewéj ręki, który daie w pierwiastku iedności rzędu najwyższego. Stąd inuż łatwo domysleć się można, że gdyby po spuszczeniu oddziału, reszta z przyłączonej cyfrą tego oddziału mniejsza była niż dwa razy wzięte cyfry w pierwiastku znalezione, na ten czas w pierwiastku pisze się zero: w tym albowiem przypadku pierwiastek mieć nie będzie iedności tego rzędu. Gdyby po spuszczeniu oddziału następnego, cyfry znalezione w pierwiastku dwa razy wzięte nie mieściły się ieszcze w liczbie do dzielenia przeznaczonéj, na ten czas położymy w pierwiastku drugie zero spuściliby się oddział następny, iak to widzieć można w następujących przykładach:

49, 42, 09	703	4, 02, 80, 49	2007
49	1403	4	4007
4,20,9		28,0,9	
4,09		28,0,9	
o		o	

106. Lecz nie wszystkie dane liczby są zupełnemi kwadratami. Przypatrując się kwadratowi dziesięciu liczb początkowych, (100), widać między niemi znaczne przerwy, które można zapisać liczbami nie mającemi pierwiastków: tak *np.* między liczbą 64, która iest kwadratem z 8, i liczbą 81, która iest kwadratem z 9, nie dostaie 10 liczb pośrednich, iakie są 65, 66 i t. d. które nie są kwadratami. Należy więc zdarzyć się może iż dana liczba nie będzie kwadratem zupełnym; lecz wyciągnawszy z niéj pierwiastek sposobem zwyczajnym, otrzymamy wypadek, który będzie pierwiastkiem kwadratu największego, iaki w téj liczbie znajdować się może. Szukając *np.* pierwiastka liczby 2276, znajdziemy wypadek 47 i pozostałą resztą 67; co okazuje, że największy kwadrat zawarty w liczbie 2276 iest kwadrat z liczby 47 to iest 2209.

107. Dla zapewnienia się czy pozostała w takowym przypadku reszta nie iest za wielka, a tém samém czy znaleziony pierwiastek nie iest za mały, można go powiększyć iednością i potem podnieść do kwadratu: a jeżeli kwadrat ten iest większy od liczby danéj, będzie to dowodem, że znaleziony pierwiastek nie iest za mały. I tak w przykładzie poprzedzającym znaleziony pierwiastek 47 powiększwszy iednością, będzie 48, z czego kwadrat 2304 iest większy od liczby danéj; a zatem znaleziony pierwiastek 47 nie iest za mały. Można też o tem zapewnić się sposobem następującym:

Znaleziony pierwiastek oznaczywszy przez a , jego kwadrat będzie a^2 , kwadrat zaś z ilości $a + 1$ jest $a^2 + 2a + 1$; różnica między temi dwoma kwadratami jest $2a + 1$; to jest, kwadrat drugi większy jest od pierwszego pierwiastkiem dwa razy wziętym i powiększonym jednością. Azatem jeżeli znaleziony pierwiastek powinien być powiększony jednością lub więcej niż jednością, kwadrat tego pierwiastku odiawszy od liczby daney, powinna się zostać reszta przynajmniej równa temu pierwiastkowi dwa razy wziętemu i powiększonemu jednością. Jeżeli okoliczność ta nie ma miejsca, znaleziony pierwiastek będzie niezgodnie pierwiastkiem kwadratu największego który się zamyka w daney liczbie. I tak w przykładzie powyższym podwojny iloczyn znalezionego pierwiastku 47 powiększony jednością wynosi 95, co jest większe od pozostałych reszt 67; azatem znaleziony pierwiastek nie jest za mały.

108. Często zdarza się potrzeba ostrzeżenia, że z daney liczby ma być wyciągnięty pierwiastek kwadratowy. W tym razie używa

się znak taki: $\sqrt{\quad}$; np. $\sqrt{ab}$, $\sqrt{\frac{m}{r}}$ i t. d. znaczy że z liczby oznaczonych przez ab , $\frac{m}{r}$ i t. d. trzeba wyciągnąć pierwiastek kwadratowy.

Ponieważ odtąd często używać będziemy znaku pierwiastkowego, ostrzedz tu wypada, że dla

dla oznaczenia pierwiastku liczby z wielu cyfr ułomony czyli z ilości wielorakiędy, trzeba albo przed tą ilością dać znak pierwiastkowy, i przenieść jego ramie przedłużyć nad całą ilością; albo też wziąć ilość daną w nawias, a z lewéj strony przed nawiasem dać znak pierwiastkowy. I tak dwa te wyrażenia

$\sqrt{4a^2b - 4b^3 + c^3}$ i $\sqrt{(4a^2b - 4b^3 + c^3)}$ oznaczają to samo, to jest wskazują że trzeba wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z całej ilości $4a^2b - 4b^3 + c^3$, czyli z liczby przez tę ilość oznaczony.

Podobnież ze czterech tych wyrażen

$$\sqrt{\frac{200}{100}}, \quad \frac{\sqrt{200}}{\sqrt{100}}, \quad \frac{\sqrt{200}}{100}, \quad \frac{200}{\sqrt{100}}$$

pierwsze znaczy że trzeba wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z ułamka $\frac{200}{100}$; drugie że trzeba podzielić pierwiastek licznika przez pierwiastek mianownika, trzecie że pierwiastek licznika powinien być podzielony przez mianownik, czwarte że licznik powinien być podzielony przez pierwiastek mianownika.

109. Ponieważ iloczyn ułamka przez ułomek równa się iloczynowi ich liczników podzielonemu przez iloczyn ich mianowników; azatem iloczyn ułamka przez siebie samego, czyli kwadrat ułamka równy jest kwadratowi jego licznika podzielonemu przez kwadrat mianownika. Skąd wypada że chcąc otrzymać pierwiastek kwadratowy z ułamka, trzeba go

osobno wyciągnąć z licznika osobno z mianownika. I tak $\sqrt{\frac{25}{64}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{64}} = \frac{5}{8}$ i t. d.

Uwaga ta ułatwia podnoszenie ułomków dziesiętnych do kwadratu i wyciąganie z nich pierwiastku kwadratowego. I tak

$$(0,5)^2 = \left(\frac{5}{10}\right)^2 = \frac{25}{100} = 0,25.$$

$$(0,07)^2 = \left(\frac{7}{100}\right)^2 = \frac{49}{10000} = 0,0049.$$

$$(0,011)^2 = \left(\frac{11}{1000}\right)^2 = \frac{121}{1000000} = 0,000121.$$

$$(3,0005)^2 = \left(\frac{30005}{10000}\right)^2 = \frac{900300025}{100000000} = 9,00300025 \text{ i t. d.}$$

$$\text{Podobnie } \sqrt{0,64} = \sqrt{\frac{64}{100}} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{100}}$$

$$= \frac{8}{10} = 0,8.$$

$$\sqrt{0,0016} = \sqrt{\frac{16}{10000}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{10000}} = \frac{4}{100}$$

$$= 0,04 \text{ i t. d.}$$

110. Zastanowiwszy się nad kwadratami i pierwiastkami ułomków dziesiętnych, postrzeżemy, że kwadrat ułomków tych ma zawsze cyfr dwa razy więcej niż ich znajduje się w pierwiastku. Jakoż z prawideł mnożenia wypada, że iloczyn dwóch ułomków dziesiętnych przez siebie rozmnożonych powinien się składać z tylu cyfr dziesiętnych, ile się ich znajduje w obu dwu czynnikach; zatem iloczyn ułamka dziesiętnego przez siebie samego, czyli kwadrat ułamka dziesiętnego powinien mieć cyfr dwa razy więcej, niż pierwiastek; i odwrotnie pierwiastek kwadratowy ułamka dziesiętnego

powinien mieć cyfr dwa razy mniej niż ich znajduje się w kwadracie. Ze zaś w ułamkach dziesiętnych domyślny mianownik ma zawsze jedność z przydanemi zerami, a liczba takowa przez siebie samą rozmnożona daje zawsze na iloczyn jedność z podwójną liczbą zer; kiedy więc ułomka dziesiętnego domyślny mianownik jest 10, 100, 1000, i t. d., w kwadracie ułamka tego domyślnym mianownikiem będzie w przypadku pierwszym 100, w drugim 10000, w trzecim 1000000 i t. d.; i odwrotnie jeżeli domyślny mianownik w kwadracie ułamka dziesiętnego jest 100, 10000, 1000000, i t. d. w pierwiastku będzie domyślny mianownik 10, 100, 1000 i t. d. to jest jedność i dwa razy mniej zer niż ich było w kwadracie.

I tak ponieważ $7^2 = 49$; więc $(0,7)^2 = 0,49$; $(0,07)^2 = 0,0049$; $(0,007)^2 = 0,000049$. Podobnie ponieważ $\sqrt{144} = 12$; więc $\sqrt{1,44} = 1,2$; $\sqrt{0,144} = 0,12$; $\sqrt{0,000144} = 0,012$, i t. d.

111. Zrozumiawszy należycie to cośmy dotąd o pierwiastkach kwadratowych wyłożyli, nie trudno będzie pojąć sposób za pomocą którego z liczby nie będącej prawdziwym kwadratem wyciąga się pierwiastek przybliżony, to jest tak bliski prawdziwego iak się podoba. Deymy że trzeba znaleźć pierwiastek przybliżony liczby 2: ponieważ

$$2 = \frac{200}{100} = \frac{20000}{10000} = \frac{2000000}{1000000} \text{ i t. d. więc}$$

$$\sqrt{2} = \sqrt{\frac{200}{100}} = \sqrt{\frac{20000}{10000}} = \sqrt{\frac{2000000}{1000000}}$$

i t. d. czyli

$$\sqrt{2} = \frac{\sqrt{200}}{\sqrt{100}} = \frac{\sqrt{20000}}{\sqrt{10000}} = \frac{\sqrt{2000000}}{\sqrt{1000000}}$$

i t. d. czyli

$$\sqrt{2} = \frac{\sqrt{200}}{10} = \frac{\sqrt{20000}}{100} = \frac{\sqrt{2000000}}{1000}$$

i t. d.

Wyciągnawszy sposobem zwyczajnym pierwiastek największego kwadratu zawartego w każdym liczniku ułomków poprzedzających, znajdziemy że

$$\frac{\sqrt{200}}{10} = \frac{14}{10} = 1,4; \quad \frac{\sqrt{20000}}{100} = \frac{141}{100} = 1,41;$$

$$\frac{\sqrt{2000000}}{1000} = \frac{1414}{1000} = 1,414.$$

Przybliżony zatem pierwiastek liczby 2 jest *ród* 1,4; *arc* 1,41; *3cie* 1,414 i t. d. Trzy te znalezione pierwiastki podniosszy do kwadratu, będzie *ród* $(1,4)^2 = 1,96$; *arc* $(1,41)^2 = 1,9881$; *3cie* $(1,414)^2 = 1,999396$. Z trzech tych kwadratów ostatni najbliższy jest kwadratowi danego, to jest liczby 2: bo mu tylko nie dośiaie 0,000604 do tego aby wyrównał liczbie 2; gdy tym czasem kwadrat drugi czyli 1,9881 mniejszy jest od liczby 2 ilością 0,0119 = 0,011900; kwadrat zaś pierwszy czyli 1,96, mniejszy jest od liczby 2 ilością 0,04 = 0,040000. Wogólności znaleziony pierwiastek tem bliższy będzie prawdziwego, im większa w nim będzie liczba cyfr dziesiętnych. Uczyniwszy np.

$2 = \frac{2000000000000000}{1000000000000000}$, i wyciągnawszy pierwiastek kwadratowy tak licznika iak z mianownika znajdziemy $\sqrt{2} = \frac{14142135}{10000000} = 1,4142135$. Pierwiastek ten podniesiony do kwadr. czyni 1,99999962143225, kwadratowi temu nie dośiaie tylko 0,00000037851775 do tego aby wyrównał liczbie 2. biorąc zaś tylko siedm cyfr dziesiętnych, różnica między liczbą 2 a kwadratem znalezionego pierwiastku będzie 0,00000003; to jest kwadrat znalezionego pierwiastku mniejszy jest od liczby 2 trzema tylko jednościami dziesiętnymi siódmego rzędu. Posunawszy to samo działanie dalej, otrzymalibyśmy pierwiastek jeszcze bliższy: lecz nigdy nie dojdziemy do pierwiastku takiego, któryby podniesiony, do kwadratu uczynił zupełnie 2.

Ten sam jest sposób postępowania w szukaniu przybliżonego pierwiastku wszystkich innych liczb nie będących kwadratami zupełnymi. Chcąc np. znaleźć pierwiastek przybliżony liczby 227 trzeba liczbę tę obrócić na ułomek dziesiętny, którego by mianownik był kwadratem zupełnym, iakie są 100, 10000, 1000000 i t. d., a potem z licznika wyciągnąć pierwiastek przybliżony, a z mianownika pierwiastek prawdziwy. I tak liczbę daną 227 obróciwszy na ułomek $\frac{227\ 00\ 0000}{1\ 000\ 000}$, w ułamku tym przybliżony pierwiastek licznika jest 15066, a prawdziwy pierwiastek mianownika jest 1000: będzie

nych; wyrażając daną liczbę w postaci ułamka zwyčajnego, któregoby mianownik był kwadratem prawdziwym. Tak np. liczbę 2 wyraziwszy przez ułamek $\frac{2 \cdot 20}{144}$, którego prawdziwym pierwiastkiem mianownika jest 12, a przybliżonym pierwiastkiem licznika jest 17, będzie pierwiastkiem przybliżonym liczby 2 ułamek zwyčajny $\frac{17}{12}$: iakoż ułamek ten podniesiony do kwadratu, jest $\frac{289}{144}$, który przewyższa liczbę 2 tylko $\frac{1}{144}$ i t. d.

Można też wyciągnąć pierwiastek przybliżony zapomocą ułamków zwyčajnych następującym sposobem:

Damy że trzeba znaleźć przybliżony pierwiastek liczby 20. Ponieważ kwadrat ze 4 jest 16, kwadrat z 5 jest 25; więc pierwiastek liczby 20 powinien być większy od 4, mniejszy od 5; to jest pierwiastkiem liczby 20 będzie liczba 4 i ułamek. Oznaczywszy ułamek ten przez p , prawdziwy zaś pierwiastek liczby 20 przez x , a tem samem 20 przez x^2 ; będzie

$$x = 4 + p \quad (1).$$

Podniosłszy obie strony do kwadratu, wypadnie $x^2 = 16 + 8p + p^2$. Aże $x^2 = 20$ więc $16 + 8p + p^2 = 20$, a tem samem $8p + p^2 = 4$.

Ze zaś p jest ułamkiem właściwym to jest ilością mniejszą od jedności, a ułamek takowy podniesiony do kwadratu staje się ilością mniejszą nie równie od pierwiastku; w działaniu więc w którym rzecz idzie o wyznaczenie tylko pierwiastku przybliżonego, można ułamek ten jako ilość bardzo małą opuścić; a tem sa-

mem równanie powyższe zamieni się w następujące: $8p = 4$; więc $p = \frac{1}{2}$. Ważność tę położywszy w równaniu (1), będzie $x = 4 + \frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$; a tem samem $\sqrt{20} = 4\frac{1}{2}$.

Pierwiastek ten jest znacznie bliższy prawdziwego niżeli 4: iakoż $(4\frac{1}{2})^2 = \frac{81}{4} = 20 + \frac{1}{4}$, gdy tym czasem $4^2 = 16$.

Niech będzie jeszcze $x = \frac{81}{4} + p$ (2). Podniosłszy obie strony do kwadratu, będzie

$$x^2 = \frac{81}{4} + 9p + p^2. \text{ Aże } x^2 = 20 = \frac{80}{4},$$

$$\text{więc } \frac{81}{4} + 9p + p^2 = \frac{80}{4}.$$

Opuściwszy p^2 jako ilość bardzo małą, odławszy po obu stronach $\frac{81}{4}$, i podzieliwszy

obie strony przez 9, wypadnie $p = -\frac{1}{36}$. Położywszy ważność tę w równaniu (2), będzie

$$x = \frac{81}{4} - \frac{1}{36} = \frac{161}{36}; \text{ czyli } \sqrt{20} = \frac{161}{36}.$$

Pierwiastek ten jest nierównie bliższy prawdziwego niż był poprzedzający; o czém łatwo przekonać się podniosłszy go do kwadratu, i porównawszy kwadrat ten z kwadratem danym to jest z liczbą 20.

Gdybyśmy chcieli otrzymać pierwiastek jeszcze bliższy prawdziwego, uczyniłoby należało znowu $x = \frac{161}{36} + p$ (3).

$$\text{Azatem } x^2 = \frac{25921}{1296} + \frac{522}{36} p + p^2 =$$

20. Odbywşy działanie iak wyżej, znajdziemy $p = -\frac{1}{11592}$. Ważność tę położywszy w równaniu (3), wypadnie

$$x \text{ czyli } \sqrt{20} = \frac{161}{36} - \frac{1}{11592} = \frac{51341}{11592} = 4 + \frac{5474}{11592}.$$

Pierwiastek ten tak iest bliski prawdziwego, że go można wziąć za szukany: iakoż podnioszşy go do kwadratu, znajdziemy różnicę między kwadratem tym, a kwadratem danym równą $\frac{1}{154374464}$; a wypadłby pierwiastek ieszcze bliższy, gdybşmy działanie to dalej posuneli: nigdybşmy iednak nie doszli do pierwiastku takiego, któryby podniesiony do kwadratu uczynił zupełnie 20.

116. Skąd się okazuje, że pierwiastek liczby 20, równie iak wszelkićy innćy nie będącćy kwadratem, iest ilością taką, która ani zapomocą ułomków zwyuczaynych, ani zapomocą ułomków dziesiętnych zupełnie w liczbach wyrażoną być nie może. Prawda ta, o której teraz z samego tylko doświadczenia na liczbach pojedynczych przekonać się możemy, na innym miejscu będzie oczywiście w ogółności okazana.

Wyciąganie zatem pierwiastków kwadratowych z liczb nie będących prawdziwemi kwadratami daie początek liczbom nowego rodzaju

o, tak iak dzielenie daie początek ułomkom: i ota iest istotna różnica między ułomkami i przybliżonemi pierwiastkami, że ułomki składające się zawsze z pewnćy liczby cząstek iedności, mają z tą iednością *miarę spólną*, i stosunek ich do iedności może być zawsze wyrażony w liczbach całkowitych; czego pierwiastki przybliżone nie mają. Wystawiwszy iedność podzieloną np. na 5 cząstek, 9 takowych cząstek wyrażają iloraz wypadający z podzielenia przez 5, czyli $\frac{9}{5}$ mieszczą się 5 razy w iedności, a 9 razy w $\frac{9}{5}$, ieli spólną miarą iedności i ułomka $\frac{9}{5}$; a stosunek iedności do $\frac{9}{5}$ równa się stosunkowi liczb całkowitych 5 do 9.

Ponieważ liczby całkowite i ułomki mają iednością *miarę spólną*, nazwano je ilościami *spółmiernemi*, *commensurabiles*, aże stosunek ich do iedności może być zawsze wyrażony w liczbach całkowitych, nazwano także liczby całkowite i ułomki ilościami *stosunkowemi*, *rationales*. Przeciwnie pierwiastki liczb nie będących prawdziwemi kwadratami zowią się ilościami *nie spółmierne*, albo *niestosunkowe*, *incommensurabiles*, *irrationales*: gdyż ponieważ wyrazić ich nie można żadnym ułomkiem, iże zatem że na iakąkolwiek liczbę cząstek podzielimy iedność, cząstki te nigdy nie będą tak małe, aby służyły razem za spólną miarę i iedności i tym pierwiastkom.

117. Wyciąganie pierwiastków kwadratowych do rozwiązywania wielu ważnych zagadnień iest istotnie potrzebne: należy więc sta-

rać się o nabycie iak największy w takowem działaniu wprawy; tym końcem trzeba wyciągać pierwiastki tak prawdziwe iak przybliżone różnych liczb będących i nie będących kwadratami, iak są np. liczby 3, 5, 6, 7, 8, 10 i taki do czego także posługując się następującymi zagadnieniami.

Niektóre zagadnienia stosowne do dwóch ostatnich rozdziałów.

Zagadnienie I. Znaleźć pierwiastek przybliżony do 7 cyfr dziesiętnych kwadratu dwa razy większego niż jest kwadrat z liczby 37,9.

Kwadrat z liczby 37,9 jest $37,9 \times 37,9$; kwadrat ten dwa razy wzięty jest: $2 \times 37,9 \times 37,9$; którego pierwiastek przybliżony równy jest 53,5986940.

Zagadnienie II. Znaleźć wyraz średni iometrycznie proporcjonalny w proporcji ciągłej, który dwa wyrazy skrajne są 576 i 225.

Oznaczysz wyraz szukany przez x , i uczynisz zadosyć warunkom zagadnienia, będzie $\frac{576}{x} = \frac{x}{225}$; więc $x^2 = 576 \cdot 225$ i t. d.

Zagadnienie III. Znaleźć trzy liczby, z których pierwsza rozmnożona przez drugą a podzielona przez trzecią czyni a; pierwsza rozmnożona przez trzecią a podzielona przez drugą czyni b; druga rozmnożona przez trzecią a podzielona przez pierwszą czyni c.

Oznaczysz pierwszą liczbę szukaną przez x , drugą przez y , trzecią przez z , i uczynisz

zadosyć warunkom zagadnienia, otrzymamy trzy następujące równania:

$$\text{1sze, } \frac{xy}{z} = a; \text{ 2gie } \frac{xz}{y} = b, \text{ 3cie } \frac{yz}{x} = c.$$

Trzy te równania można rozwiązać którymkolwiek sposobem z podanych wyżej. Lecz możnaby także użyć sposobu następującego: strony równania pierwszego podzieliwszy przez strony odpowiadające w równaniu drugim, będzie

$$\frac{\frac{xy}{z}}{\frac{xz}{y}} = \frac{a}{b}; \text{ czyli } \frac{xy}{z} : \frac{xz}{y} = a : b \quad (84).$$

W proporcji téj dwa pierwsze wyrazy rozmnożysz przez yz , a potem podzieliwszy przez x , będzie $y^2 : z^2 = a : b$.

Dwa drugie wyrazy rozmnożysz przez a , wypadnie $y^2 : z^2 = a^2 : ab$; więc $y : z = a : \sqrt{ab}$ (96).

Ze zaś $\frac{xy}{z} = a$, podług założenia, a tém samém $xy = az$, czynniki tych dwóch iloczynów równych ułożywszy w proporcji (90), będzie $y : z = a : x$. Proporcja tę porównawszy z poprzedzającą, postrzeżemy, że pierwsze trzy wyrazy w iednéj równe są trzem odpowiadającym wyrazom w drugiej; zatem wyraz czwarty iednéj równy jest wyrazowi czwartemu drugiej (9). Będzie więc $x = \sqrt{ab}$.

Z trzech równań danych wzięwszy naprzód równanie pierwsze i trzecie, potem drugie i trzecie, i ułożywszy je w proporcye, będzie

$$\frac{xy}{z} : \frac{yz}{x} = a : c; \quad \frac{xz}{y} : \frac{yz}{x} = b : c.$$

Z proporcjami temi odbywszy działanie podobne do poprzedzającego, znajdziemy $y = \sqrt{ac}$, $z = \sqrt{bc}$.

Niech będzie $a=3$, $b=12$, $c=27$. Znajdziemy $x=6$, $y=9$, $z=18$ i t. d.

Zagadnie II. Znaleźć liczbę do której naprzód dodawszy 13, potem 17, dwie sumy stąd powstałe miałyby się do siebie iak 4 do 5.

Oznaczywszy liczbę szukaną przez x , i ułożywszy zadosyć warunkom zagadnienia, będzie $x+13: x+17=4:5$ i t. d.

Zagadnienie V. W mieszaninie używanej do siewu, znajduje się 15 funtów salety, a 2 funty siarki: ileż funtów przydać należy salety chcąc otrzymać innego gatunku mieszaninę, w którejby na 17 funtach mieszaniny znajdowało się tylko $\frac{1}{2}$ funta siarki?

Oznaczywszy przez x ilość salety którą przydać potrzeba do mieszaniny pierwszej, mieszaniny drugiej będzie funtów $17+x$. Podług warunków zagadnienia w całej tej mieszaninie jest 2 funty siarki, a w 17 funtach mieszaniny jest $\frac{1}{2}$ funta siarki. Azatem cała druga mieszanina tak się ma do samej siarki w

niej znajdujący się, iak 17 funtów mieszaniny do ilości siarki znajdujący się w tych 17 funtach to jest do $\frac{1}{2}$ funta; czyli

$$17+x:2=17:\frac{1}{2}; \text{ więc } x=51.$$

Albo tak. Podług warunków zagadnienia w całej tej mieszaninie jest 2 funty samej siarki, a $x+15$ funtów samej salety; w 17 zaś funtach tejże mieszaniny jest $\frac{1}{2}$ funta siarki, $16\frac{1}{2}$ funtów salety: będzie więc sama saleta w drugiej mieszaninie znajdującą się czyli $x+15$, do samej siarki czyli do 2, iak sama saleta znajdującą się w 17 funtach mieszaniny czyli iak $16\frac{1}{2}$, do samej siarki w tychże 17 funtach znajdujący się czyli do $\frac{1}{2}$; to jest $x+15:2=16\frac{1}{2}:\frac{1}{2}$, i t. d.

Zagadnienie VI. Na składzie w trzech saskach znajduje się pomieszane trojakiem gatunku zboże, pszenica żyto i ięczmień. Na 100 korcach, w pierwszym sasku jest pszenicy korcy 80; żyta korcy 12; ięczmienia korcy 8; w drugim sasku pszenicy korcy 75, żyta korcy 15 ięczmienia korcy 10; w trzecim sasku pszenicy korcy 60, żyta korcy 20, ięczmienia korcy 20. Ileż korcy zboża trzeba wziąć z każdego saska, aby otrzymać 100 korcy zboża, w którymby znajdowało się 73 korcy pszenicy, 15 korcy żyta a 12 korcy ięczmienia?

Oznaczywszy liczbę korcy które wziąć potrzeba z pierwszego saska przez x , z drugiego przez y , z trzeciego przez z ; ponieważ na 100 korchach zboża w pierwszym sasku znaj-

dującego się jest 80 korcy pszenicy, więc ilość pszenicy znajdujący się w liczbie korcy x tegoż zboża otrzymamy przez następującą proporcję:

$$100:80=\frac{80x}{100}=\frac{4}{5}x.$$

Podobnie, ponieważ na 100 kordach zboża znajdującego się w pierwszym sásieku jest żyta korcy 12, więc ilość żyta znajduącego się w liczbie korcy x tegoż zboża otrzymamy przez następującą proporcję:

$$100:12=x:\frac{12x}{100}=\frac{3}{25}x;$$

Nakoniec ponieważ w 100 kordach zboża będącego w pierwszym sásieku jest 8 korcy ięczmienia, więc ilość ięczmienia znajduącego się w liczbie korcy x tegoż zboża otrzymamy przez następującą proporcję

$$100:8=x:\frac{8x}{100}=\frac{2}{25}x.$$

Tym sposobem postępując dalej znajdziemy że w liczbie korcy y zboża wziętego z drugiego sásieka znajdzie się pszenicy korcy $\frac{7}{10}y$, żyta korcy $\frac{2}{5}y$, ięczmienia korcy $\frac{1}{10}y$. W liczbie zaś korcy z zboża wziętego z trzeciego sásieka jest pszenicy korcy $\frac{2}{3}z$, żyta korcy $\frac{1}{3}z$, ięczmienia korcy $\frac{1}{3}z$.

Aże w 100 kordach mieszaniny czwartego gatunku, ma być pszenicy korcy 75, żyta korcy 15, ięczmienia korcy 12; będzie więc $\frac{4}{5}x + \frac{3}{25}y + \frac{2}{25}z = 75$; $\frac{3}{25}x + \frac{2}{25}y + \frac{1}{25}z = 15$; $\frac{2}{25}x + \frac{1}{25}y + \frac{1}{25}z = 12$.

Rozwią-

Rozwiązawszy równania te sposobem którymkolwiek z podanych wyżej, znajdziemy $x=50$, $y=20$ $z=30$.

Zagadnienie VII. Bankier ma dwa gatunki monety: jedney trzeba sztuk 10 na jeden cz. zł. drugiey sztuk 20. Zgadzającemu zmieniać złoto dat za 3 cz. zł. sztuk 51 obu gatunków monety. Sleż dat sztuk z każdego gatunku?

Oznaczywszy liczbę sztuk pierwszego gatunku przez x , drugiego będzie $51-x$. Przez następującą proporcję dodydziemy ile wąż czerwonych złotych dwie te liczby.

$$10:1=x:\frac{x}{10}(98); 20:1=51-x:\frac{51-x}{20}.$$

$$\text{Azatém } \frac{x}{10} + \frac{51-x}{20} = 3. \text{ i t. d.}$$

ROZDZIAŁ VI.

O równaniach stopnia drugiego.

118. Rozwiązywanie niektórych zagadnień poprzedzającym rozdziale przytoczonych doprowadziło do równań, w których niewiadoma była albo podniesiona do kwadratu, albo przez drugą niewiadomą rozmnożona. Równania takowe nazywają się równaniami stopnia drugiego. Wiadomości w poprzedzającym rozdziale wyłożone, ułatwią sposób rozwiązywania wszelkich tego gatunku równań. Jakoż

przenioszsy kwadrat ilości niewiadomej na jedną a ilości wiadomej na drugą stronę równania; dla znalezienia niewiadomej dosyć będzie wyciągnąć pierwiastek z drugiej strony. I tak w równaniu następującem

$$\frac{3}{2}x^2 - 7 = 44 - \frac{3}{2}x^2;$$

znioszsy naprzód mianowniki, a potem przenioszsy niewiadome na jedną a wiadome na drugą stronę, będzie.

$$17x^2 = 612. \text{ Więc } x^2 = \frac{612}{17}; \text{ czyli } x^2 = 36.$$

W ostatniem równaniu wyciągnawszy z obu stron pierwiastek kwadratowy, znajdziemy $x = 6$.

Podobnież w równaniu głoskowem $ax^2 + b^2 = cx^2 + d^3$, przenioszsy niewiadome na jedną a wiadome na drugą stronę, będzie

$$ax^2 - cx^2 = d^3 - b^3. \text{ Więc}$$

$$x^2 = \frac{d^3 - b^3}{a - c}; x = \sqrt{\frac{d^3 - b^3}{a - c}}.$$

W ogólności wszelkie równanie stopnia drugiego, jeżeli jest takiego gatunku, iak dwa poprzedzające, może być wyrażone w następującym kształcie:

$$\frac{px^2}{q} = a.$$

Ułomek $\frac{p}{q}$ oznacza iakkolwiek spółczynnik ilości x^2 . Z równania tego wypada

$$x^2 = \frac{aq}{p}; x = \sqrt{\frac{aq}{p}}.$$

119. Ponieważ podług prawideł mnożenia, iloczyn jest zawsze dodatny, czy to obadwa czynniki z których powstał są dodatne, czyli też obadwa odjemne, wypada stąd iść do kwadratu, który jest iloczynem teyże samej ilości przez siebie rozmnożonę, musi być zawsze dodatny czy to ilość ta ma przed sobą znak +, czyli znak —; że każde równanie stopnia 2go może mieć podwójne rozwiązanie; iedno w którym szukany pierwiastek ilości niewiadomej ma przed sobą znak +, drugie w którym tenże pierwiastek ma przed sobą znak —. I tak w równaniu liczebném $x^2 = 36$, ponieważ ważnością x jest ilość która podniesiona do kwadratu czyni 36; ilość ta może być algebricznie uważana iako dodatna lub iako odjemna: bo czyto ją oznaczmy przez +6, czyli też przez —6, zawsze będzie ię kwadrat $+6 \times +6 = +36$, i $-6 \times -6 = +36$.

Można więc wziąć $x = +6$, albo $x = -6$. Podobnież w równaniu ogólném $x^2 = \sqrt{\frac{aq}{p}}$, można wziąć $x = +\sqrt{\frac{aq}{p}}$ albo $x = -\sqrt{\frac{aq}{p}}$. Dwoiakię to wyrażenie oznacza się sposobem następującym:

$$x = \pm \sqrt{\frac{aq}{p}}.$$

W wyrażeniu tém znak podwoyny $\pm$ oznacza, że ważność liczebna ilości $\sqrt{\frac{aq}{p}}$ może być wzięta albo dodaynie, albo odjemnie.

Stąd wypada ogólne prawidło, że przed pierwiastkiem kwadratowym trzeba dawać podwoyny znak $\pm$.

Tu mogłoby kto uczynić zapytanie, czemu się nie daie podwoyny znak $\pm$ przed x , które jest także pierwiastkiem kwadratu x^2 , tak jak ± 6 jest pierwiastkiem kwadratu 36, i czemu nie pisze się tak: $\pm x = \pm 6$? Lecz to ośiatnie wyrażenie kształtem tylko różni się od wyrażenia $x = \pm 6$; wistocie zaś obadwa znaczą to samo. Jakoż wyrażenie to $x = \pm 6$, daie dwa oddzielne równania, które są: $x = +6$, $x = -6$. Wyrażenie zaś to $\pm x = \pm 6$, daie cztery następujące równania.

1sze, $+x = +6$; 2gie, $+x = -6$;

3cie, $-x = -6$; 4te, $-x = +6$;

z których dwa pierwsze niżczém się od poprzedzających nie różnią, w dwóch zaś ośiatnich zamieniwszy znaki $+$ na $-$, i znaki $-$ na $+$, równanie 3cie zamieni się na 1wsze, równanie zaś 4te na 2gie.

120. Ponieważ kwadrat nie może być ilością odjemną, iakośmy już uważali (119), wypada stąd, że gdyby druga sirona w równaniu

ogólném $x^2 = \frac{aq}{p}$ była ilością odjemną, równanie takowe byłoby niepodobnem do roz-

szajania. I tak weźmy np. równanie $x^2 + 5 = 9$, z którego wypada $x^2 = -16$: rzecz jasna widoczna, że nie masz żadaey liczby, któraby przez siebie samę rozmnożona uczyniła -16 . Jliczyn wprawdzie liczby $+4$ rozmnożony przez -4 , ieli -16 ; lecz dwie te liczby mające przed sobą odjemne znaki, nie są równe: iakoż różnica między nimi zachodząca jest 8 (24). Jliczyn zatem ich nie jest kwadratem. Ponieważ więc ilości odjemne nie mają pierwiastku kwadratowego, dla téy przyczyny pierwiastki takowe nazwano ilościami bezistotnemi, albo uroionemi, *quantitates imaginariae*. Trafić się one mogą dosyć często przy rozwiązywaniu równań drugiego stopnia, iak obaczmy niżej.

121. Nie wszystkie równania stopnia drugiego są tak proste iak te któreśmy dotąd mieli, w których jedna sirona jest kwadratem nie wiadomęy, a sirona druga ma same ilości wiadome. Najczęścięy równania stopnia tego są mieszane, to jest zamykają w sobie trzy gatunki wyrazów: 1) *od* wyrazy w których się znajduje kwadrat niewiadomęy; 2) *are* wyrazy w których się znajduie pierwszy stopień niewiadomęy; 3) *cie* wyrazy wiadome: takie są równania następujące:

$$x^2 - 4x = 12; \quad 4x - \frac{3}{2}x^2 = 4 - 2x.$$

Pierwsze z tych dwóch równań ieli nieco prostiejsze od drugiego: gdyż ma tylko trzy wyrazy, a kwadrat niewiadomęy x ieli w niem dodayny; niema żadnego współczynnika wyra-

znego. Taki kształt każdemu równaniu tego gatunku nadać potrzeba pierwéy nim się przystąpi do rozwiązywania. Wszelkie równanie *mieszane*, czyli iak ie częściéy zowią *zupelne* stopnia drugiego, sprowadzone do tego kształtu można będzie wyrazić w następującéy formule:

$$x^2 + px = q;$$

w którém p i q są ilości wiadome dodatne lub odjemne.

Chcąc dané równanie stopnia drugiego sprowadzić do tego stanu, trzeba *1o*d przemieścić na iednę stronę równania wszystkie wyrazy do których wchodzi ilość niewiadoma *2o* jeżeli kwadrat niewiadomey x iest odjemny, uczynić go dodatnym zamieniając w równaniu wszystkie znaki $+$ na $-$ i $-$ na $+$ (53); *3o*ie podzielić wszystkie wyrazy przez mnożnik ilości x^2 , (54) lub wszystkie wyrazy rozmnożyć przez iéy dzielnik, jeżeli ilość ta iest rozmnożona, lub podzielona przez ilości wiadome. Zastosowawszy to do równania

$$4x - \frac{3}{2}x^2 = 4 - 2x, *$$

będzie *1o*d przeniosłszy wyrazy niewiadome na iedną stronę

$$-\frac{3}{2}x^2 + 6x = 4;$$

*2o*e zamieniwszy znaki w całym równaniu,

$$\frac{3}{2}x^2 - 6x = -4;$$

*3o*ie rozmnożywszy wszystkie wyrazy przez dzielnik 5,

$$3x^2 - 30x = -20;$$

*4o*e podzieliwszy wszystkie wyrazy przez mnożnik 3,

$$x^2 - 10x = -\frac{20}{3}.$$

Równanie to porównawszy z formułą ogólną $x^2 + px = q$ znajdziemy w tym szczególnym przypadku

$$p = -10, q = -\frac{20}{3}.$$

122. Chcąc równanie do tego kształtu sprowadzone rozwiązać, trzeba sobie przypomnieć to cośmy wyżéy (101) powiedzieli, że kwadrat ilości złożony z dwóch wyrazów zamyka zawsze kwadrat wyrazu pierwszego, podwoyny iloczyn wyrazu pierwszego przez drugi, i kwadrat wyrazu drugiego, i że tém samém pierwsza strona równania

$$x^2 + 2ax + a^2 = b,$$

w którém a i b są ilości wiadome, iest zupełnym kwadratem, którego pierwiastek ieli $x + a$. Wziąwszy więc pierwiastek kwadratowy pierwszég strony, a oznaczwszy go że strony drugieg, wypadnie $x + a = \pm \sqrt{b}$; więc $x =$

$$a \pm \sqrt{b}$$

Równanie więc drugiego stopnia byłoby łatwe do rozwiązania, gdyby pierwsza iego strona była zupełnym kwadratem, iak ieli w równaniu $x^2 + 2ax + a^2 = b$. Lecz w równaniu ogólném

$$x^2 + px = q,$$

pierwsza strona zamyka inż dwa wyrazy, które uważać można za dwie pierwsze części kwadratu ilości z dwóch wyrazów złożony; to ieli

x^2 za kwadrat pierwszego wyrazu x , i px za podwoyny iloczyn wyrazu pierwszego i drugiego. Podwoyny ten iloczyn wyrazu pierwszego i drugiego podzieliwszy przez wyraz pierwszy dwa razy wzięty to jest przez $2x$, będzie $\frac{px}{2x}$ czyli $\frac{1}{2}p$ (40) wyraz drugi szukanego pierwiastku. Aże $x + \frac{1}{2}p$ podniesione do kwadratu czyni $x^2 + px + \frac{1}{4}p^2$; do pierwszýj zatem strony równania ogólnego $x^2 + px = q$ dodawszy $\frac{1}{4}p^2$, strona ta będzie zupełnym kwadratem, którego pierwiastkiem jest $x + \frac{1}{2}p$. Lecz dodając $\frac{1}{4}p^2$ do strony pierwszýj dla dopełnienia kwadratu, trzeba także tę samą ilość dodać do strony drugiej dla utrzymania między stronami równości. Tym sposobem równanie ogólne $x^2 + px = q$, zamieni się w następujące:

$$x^2 + px + \frac{1}{4}p^2 = q + \frac{1}{4}p^2.$$

Wyciągnąwszy pierwiastek z obu stron, będzie

$$x + \frac{1}{2}p = \pm \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}; \text{ więc } x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}; \text{ to jest:}$$

$$x = -\frac{1}{2}p + \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}; x = -\frac{1}{2}p - \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}.$$

Wzemy jeszcze równanie $x^2 - px = q$.

Uważając dwa wyrazy pierwszýj strony tego równania za dwie pierwsze części kwadratu ilości złożonej z dwóch wyrazów, to jest: x^2 za kwadrat wyrazu pierwszego x , i $-px$ za podwoyny iloczyn wyrazu pierwszego i dru-

giego; podwoyny ten iloczyn podzieliwszy przez wyraz pierwszy dwa razy wzięty, to jest przez

$$+ 2x, \text{ będzie } \frac{-px}{+ 2x}, \text{ czyli } -\frac{1}{2}p \text{ (46) wyraz drugi szukanego pierwiastku. Aże } x - \frac{1}{2}p$$

podniesione do kwadratu czyni

$$x^2 - px + \frac{1}{4}p^2,$$

do pierwszýj zatem strony równania danego $x^2 - px = q$, dodawszy $\frac{1}{4}p^2$, strona ta będzie zupełnym kwadratem, którego pierwiastkiem jest $x - \frac{1}{2}p$. Lecz dodając $\frac{1}{4}p^2$ do strony pierwszýj dla dopełnienia kwadratu, trzeba także tę samą ilość dodać do strony drugiej dla utrzymania między stronami równości. Tym sposobem równanie dane $x^2 - px = q$, zamieni się w następujące:

$$x^2 - px + \frac{1}{4}p^2 = q + \frac{1}{4}p^2.$$

Wyciągnąwszy pierwiastek z obu stron, będzie

$$x - \frac{1}{2}p = \pm \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}; \text{ Azatem } x = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}.$$

Działanie to niczém się nie różni od wyciągania pierwiastku sposobem zwyczajnym według prawideł wyżej wskazanych (102). Jaż niech będzie równanie $x^2 + 6x = 40$.

Rzeczą jest widoczną, że chcąc równanie to rozkładać, czyli chcąc znaleźć wartość dla x , trzeba z obu stron wyciągnąć pierwiastek kwadratowy; gdyż inaczej strona pierwsza tego równania zamykająca w sobie ilość kwadra-

ową x^2 nie może się zamienić na x . Będzie zatem, $\sqrt{x^2 + 6x} = \sqrt{40}$.

Wyciągając z pierwszej strony pierwiastek kwadratowy sposobem zwyczajnym, znajdziemy pierwszą część szukanego pierwiastka x , i pozostałą resztę $+ 6x$. Którą podzieliwszy przez pierwszą część pierwiastku dwa razy wziętą to jest przez $+ 2x$, iloraz $+ 3$ będzie drugą częścią szukanego pierwiastku. Przez tę część drugą pierwiastku to jest przez $+ 3$ rozmnożywszy $2x + 3$, iak wymaga działanie zwyczajne, iloraz $+ 6x + 9$, nie może być od pozostałej reszty to jest od $+ 6x$ odciągnięty, iako od niej 9 jednościami większy; skąd wnosimy że pierwsza strona danego równania powiększona 9 jednościami będzie zupełnym kwadratem pierwiastku $x + 3$. Dodawszy zatem 9 do pierwszej strony dla dopełnienia kwadratu, a do drugiej dla utrzymania między stronami równości, równanie dane zamieni się w następujące:

$$x^2 + 6x + 9 = 49.$$

Wyciągnawszy pierwiastek kwadratowy z obu stron będzie

$$x + 3 = \pm 7 \text{ i t. d.}$$

Gdyby było równanie $x^2 - 6x = 40$ działanie wtemby się tylko od poprzedzającego różniło, że po znalezieniu pierwszej części pierwiastku, która jest x , pozostałą resztę $- 6x$ podzieliwszy przez tę część pierwszą dwa razy wziętą to jest przez $+ 2x$; iloraz $- 3$ będzie

drugą częścią szukanego pierwiastku: reszta iak wyżej.

Skąd się okazuje, że chcąc rozwiązać równanie stopnia drugiego, trzeba naprzód dopełnić kwadratu strony pierwszy następującym sposobem: wziąć połowę wiadomego mnożnika pierwszy połegi ilości niewiadomej, podnieść ią do kwadratu; i kwadrat ten dodać do obu stron; dając przed drugą stroną znak podwojny $\pm$. Pierwiastek strony pierwszy zawsze się składa z ilości niewiadomej x , i z połowy ilości wiadomej mnożący w drugim wyrazie ilość niewiadomą x , wziętą z takim znakiem iaki jest przed drugim wyrazem danego równania.

123. Można by także ten sam wypadek otrzymać zamieniając równanie drugiego stopnia mieszane, na równanie proste, następującym sposobem: niech będzie równanie $x^2 + px = q$.

Uczynimy $x = y - \frac{1}{2}p$; będzie więc

$$px = py - \frac{1}{2}p^2; x^2 = y^2 - py + \frac{1}{4}p^2$$

Ważności te położywszy w równaniu pierwszym zamiast x^2 i px , równanie to zamieni się w następujące:

$$y^2 - py + \frac{1}{4}p^2 + py - \frac{1}{2}p^2 = q; \text{ czyli } y^2 - \frac{1}{2}p^2 = q, \text{ więc } y^2 = \frac{1}{2}p^2 + q; y = \pm \sqrt{\frac{1}{2}p^2 + q}.$$

Aże $x = y - \frac{1}{2}p$, atém samém $y = x + \frac{1}{2}p$; powyższe więc równanie zamieni się w następujące:

$x + \frac{1}{2}p \equiv \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + q}$, a zatem $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + q}$.

Gdyby było równanie $x^2 - px = q$, zamienilibyśmy je na równanie proste tym samym sposobem, z tą tylko odmianą, że trzeba uczynić $x = y + \frac{1}{2}p$.

Przykłady. Znaleźć liczbę której kwadrat powiększony tą samą liczbą wziętą razy 7 czyni 44.

124. Oznaczwszy liczbę szukaną przez x , będzie podług warunków zagadnienia równanie $x^2 + 7x = 44$.

w którym połowę liczby 7 mnożący niewiadomą x w drugim wyrazie podniosłszy do kwadratu, i kwadrat ten, który jest $\frac{49}{4}$, dodawszy po obu stronach, równanie to zamieni się w następujące:

$$x^2 + 7x + \frac{49}{4} = 44 + \frac{49}{4} = \frac{225}{4}.$$

Pierwiałek strony pierwszy, podług prawidła powyższego (123), jest $x + \frac{7}{2}$; pierwiałek zaś strony drugiej znaleziony sposobem zwyczajnym jest $\frac{15}{2}$, będzie więc

$$x + \frac{7}{2} = \pm \frac{15}{2}; \text{ a zatem } x = -\frac{7}{2} \pm \frac{15}{2}; \text{ to jest:}$$

$$x = -\frac{7}{2} + \frac{15}{2} = 4, \quad x = -\frac{7}{2} - \frac{15}{2} = -11.$$

Pierwsza wartość x , to jest 4 rozwiązuje zagadnienie w znaczeniu jego wystowienia: gdyż

$$x^2 = 16; \quad 7x = 28; \quad x^2 + 7x = 16 + 28 = 44.$$

Co się tycze wartości drugiej, ta ponieważ jest odjemna, wyraz $7x = 7 \times -11 = -77$, trzeba od x^2 odjąć: a w tym przypadku wystowienie zagadnienia powinno być następujące:

Znaleźć liczbę, której kwadrat zmniejszywszy tą samą liczbą wziętą razy 7, zostanie reszta 44.

Stosownie do tego wystowienia wypadnie następujące równanie:

$$x^2 - 7x = 44.$$

z którym odbywszy działanie takie jak wyżej, będzie

$$x^2 - 7x + \frac{49}{4} = 44 + \frac{49}{4} = \frac{225}{4};$$

$$x - \frac{7}{2} = \pm \frac{15}{2}; \text{ więc } x = \frac{7}{2} \pm \frac{15}{2}; \text{ to jest}$$

$$x = \frac{7}{2} + \frac{15}{2} = 11, \quad x = \frac{7}{2} - \frac{15}{2} = -4$$

Tu wartość odjemna x zamieniła się na dodatnią, dodatnia zaś na odjemną: gdyż pierwsza czyni zupełnie zadosyć warunkom drugiego wystowienia, druga zaś z niemi się nie zgadza.

125. Częstokroć obiedwie znalezione wartości czynią zupełnie zadosyć warunkom wystowienia. Takie jest zagadnienie następujące:

Znaleźć liczbę do której kwadratu dodawszy 15, summa ta równa będzie téj samej liczbie wziętej razy 8

Oznaczywszy przez x liczbę szukaną będzie równanie

$$x^2 + 15 = 8x,$$

w którym ułożywszy wyrazy podług formuły ogólnej $x^2 + px = q$, będzie $x^2 - 8x = -15$. Dopełniwszy kwadratu, wypadnie $x^2 - 8x + 16 = 16 - 15 = 1$; więc $x - 4 = \pm 1$; a tém samém $x = 4 \pm 1$; to iest: $x = 4 + 1 = 5$; $x = 4 - 1 = 3$.

Azatem dwie są liczby 5 i 3 które czynią zadosyć warunkom wystowienia.

126. Czasem obiedwie znalezione wartości są odienne, co dowodzi że dane zagadnienie ani przez jednę ani przez drugą wartość nie może być sprawdzone w właściwém znaczeniu swoiego wystowienia. Takie iest równanie następujące:

$$x^2 + 5x + 6 = 2,$$

które oznacza, że trzeba znaleźć liczbę, której kwadrat powiększony naprzód tą samą liczbą wziętą razy 5, a potem liczbą 6, powinien uczynić summę równą liczbie 2. Samo wystowienie okazuje, że zagadnienie to nie może być sprawdzone przez dodawanie: rzecz bowiem iest nie podobna, aby liczba 6, która iest większa od 2, dodana do jakiej liczby czyniła 2. Jakoż z równania tego wypada,

$$x^2 + 5x = -4, \quad x^2 + 5x + \frac{25}{4} = \frac{25}{4} - 4, \quad x + \frac{5}{2} = \pm \frac{3}{2}; \quad x = -\frac{5}{2} \pm \frac{3}{2}, \text{ to iest, } x = -\frac{5}{2} + \frac{3}{2} = -1, \quad x = -\frac{5}{2} - \frac{3}{2} = -4.$$

Znalezione wartości obiedwie oznaczają, że wyraz $5x$ powinien być od innych odjęty, i że tém samém wystowienie należy sprostować w następujący sposób:

Znaleźć liczbę której kwadrat zmniejszony tą samą liczbą wziętą razy 5 i powiększony liczbą 6 czyni 2.

Podług tego wystowienia wypadnie równanie $x^2 - 5x + 6 = 2$, z którego otrzymamy dla x dwie wartości dodawne 1 i 4.

127. Weźmy ieszcze zagadnienie następujące: Podzielić liczbę p na dwie części, którychby iloczyn równał się ilości q .

Oznaczywszy jedną z szukanych części przez x , druga będzie $p - x$, a ich iloczyn $(p - x)x = px - x^2$. Będzie więc równanie

$$px - x^2 = q, \text{ czyli } x^2 - px = -q \text{ (63).}$$

Równanie to rozwiązuwamy sposobem zwycajnym, znajdziemy

$$x = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}.$$

Niech będzie $p = 10$, $q = 21$. Będzie więc

$$x = 5 \pm \sqrt{25 - 21} =$$

$$5 \pm \sqrt{4} = 5 \pm 2, \text{ czyli } x = 5 + 2 = 7; \text{ albo}$$

$$x = 5 - 2 = 3.$$

To iest: pierwsza z części szukanych iest 7, a druga tém samém będzie $10 - 7 = 3$

Wziąwszy zaś za część pierwszą szukaną 5, druga będzie $10 - 5 = 7$. Widzimy tu że zagadnienie to stosownie do wystowienia ma tylko właściwie mówiąc jedno rozwiązanie: gdyż w rozwiązaniu drugim są te same dwie części tylko w odmiennym porządku.

Uczytny znów $p = 10$, $q = 30$. Znajdziemy

$$x = 15 \pm \sqrt{25 - 30} = 5 \pm \sqrt{-5}. \text{ To jest: } x = 5 + \sqrt{-5}, \text{ albo } x = 5 - \sqrt{-5}.$$

Znaleźliśmy tu dwie wartości dla x do których wchodzi ilość bez istotna (120).

Abyśmy doszli skąd ta ilość bezistotna wzięta początek, przypatrzmy się z uwagą równaniu

$$x = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$$

a postrzeżemy, że nie można na pamięć naznaczać wartości liczebnych dla p i q : bo jeżeli wartość q większa będzie od $\frac{1}{4}p^2$, to jest od kwadratu $\frac{1}{2}p$, ilość $\frac{1}{4}p^2 - q$ będzie odjemna, a tym samym wyraz $\sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$ będzie bezistotny, jak jest w przykładzie ostatnim, gdzie wartość q czyli 30 większa jest od $\frac{1}{4}p^2$ to jest od 25.

Jakoż żadna liczba nie może być na takie dwie części podzielona, którychby iloczyn większy był od kwadratu z połowy teyże liczby. Na okazanie tego oznaczmy przez r różnicę między dwiema szukanemi częściami, których sumę oznacza liczba p . Ponieważ z

dwóch ilości nie równych większa równa się połowie ich summy więcej połową różnicy, mniejsza równa się połowie summy mniej połową różnicy (8), będzie więc $\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}r$ część większa, $\frac{1}{2}p - \frac{1}{2}r$ część mniejsza, a iloczyn ich $(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}r)(\frac{1}{2}p - \frac{1}{2}r) = \frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{4}r^2$. Iłgad się okazuje, że iloczyn dwóch jakichkolwiek części liczby daney zawsze jest mniejszy od $\frac{1}{4}p^2$, czyli od kwadratu z połowy ich summy, póki tylko r będzie miało jaką wartość; a kiedy $r = 0$, na ten czas każda z ich części $\frac{1}{2}p$, iloczyn zaś ich jest $\frac{1}{4}p^2$. Rzecz więc jest nie podobna, chcieć aby iloczyn dwóch części iakiędy liczby większy był od kwadratu z połowy ich summy; jak jest w przykładzie powyższym, gdzie chcieliśmy znaleźć dwie części liczby 10, których iloczyn 30 większy jest od kwadratu z połowy ich summy to jest: od 25. W tym więc razie wypadek bezistotny ostrzega, że to czegośmy w zagadnieniu szukali, nie ma miejsca.

128. Wszystkie zagadnienia drugiego stopnia któreśmy dotąd rozwiązali, łatwe były do przeniesienia w równanie algebriczne. Następujące będą pod tym względem nieco trudniejsze. Lecz prawidło podane wyżej (55) na zagadnienia stopnia pierwszego i tu także przyniesie znaczne ułatwienie.

Zagań: I. 175 cz. zł. podzielić miano zawieszono na pewną liczbę osób, których z ubytkiem, przez co dział każdy z pozostałych po-

większył się 10 cz. zł. Ileż było osób, i ile się każdy dostało?

Znalazłszy liczbę szukaną osób, chcąc potem dowiedzieć się czyta liczba jest prawdziwa, doszedłbym tego sposobem następującym. Naprzód 175 cz. zł. podzieliłbym przez początkową liczbę osób, a iloraz okazałby ile każda z nich miała dostać poki były wszystkie. Potem te same 175 cz. zł. podzieliłbym przez liczbę osób zmniejszoną 2; iloraz okazałby ile każda ma dostać po ubyciu 2 osób: a jeśli by iloraz był większy 10 cz. zł. od pierwszego, byłoby to dowodem, że znaleziona liczba osób jest prawdziwa. Oznaczmy więc szukaną liczbę osób przez x , i zapomocą znaków algebraicznych wskażmy te same rozumowania i działania, któreśmy dopiero wystawili.

Będzie naprzód $\frac{175}{x}$ dział każdy z osób

poki były wszystkie. Potem $\frac{175}{x-2}$ dział każdy z osób po ubyciu 2. Aże podług warunku zagadnienia dział powtórny jest 10 cz. zł. większy od pierwszego, będzie więc rozumowanie

$$\frac{175}{x} + 10 = \frac{175}{x-2}$$

w którym zniośmy mianowniki podług powyższego prawidła (57) i odbywszy inne działania potrzebne do uwolnienia niewiadomej od mianowników, otrzymamy równanie drugiego stopnia

$x^2 - 2x - 35 = 0$, które rozwiązawszy sposobem podanym wyżej (22), znajdziemy $x - 1 = \pm 6$. To jest $x = 7$, albo $x = -5$.

Ważność x dodatnia sprawdza zagadnienie podługiego wystowienia; ważność zaś odjemna należy do innego zagadnienia, które tem się od poprzedzającego różni, że liczba osób nie zmniejsza się, ale się powiększa 2, i że dział powtórny mniejszy jest 10 cz. zł. od pierwszego.

Zagad. II. Zgodzono dwóch rzemieślników na różną zapłatę dzienną: pierwszy po upłynieniu pewnej liczby dni dostał 96 zł. drugi; który w tymże przeciągu czasu 6 dni próżnował, dostał zł. 54. Gdyby drugi pracował był cały czas, a pierwszy 6 dni próżnował, na ten czas obadwa byłiby równą sumę dostali w zapłacie: Po ileż dni każdy z nich pracował, i jaka jest każdego zapłata dzienna?

Znalazłszy liczbę dni które pracował rzemieślnik pierwszy, sprawdzilibym ją sposobem następującym: naprzód przez tę liczbę dni podzieliłbym 96 zł. a iloraz okazałby zapłatę dzienną rzemieślnika pierwszego; potem przez tę samą liczbę dni zmniejszoną 6 podzieliłbym zł. 54, a iloraz okazałby zapłatę dzienną rzemieślnika drugiego. Nakoniec rozmnożyłbym zapłatę dzienną rzemieślnika drugiego przez całą liczbę dni, zapłatę zaś dzienną rzemieślnika pierwszego przez liczbę dni zmniejszoną 6; a jeśli by dwa te iloczyny były równe, by-

łoby to dowodem, że znaleziona liczba dni jest prawdziwa. Oznaczwszy zatem liczbę dni które pracował rzemieślnik pierwszy przez x , liczba dni które pracował drugi będzie $x-6$.

Zapłata dzienna pierwszego będzie $\frac{96}{x}$; zapłata dzienna drugiego $\frac{54}{x-6}$.

Gdyby rzemieślnik drugi pracował przez dni x , zapłata jego całkowita byłaby $x \times \frac{54}{x-6} = \frac{54x}{x-6}$; a pierwszy pracując tylko przez dni $x-6$, byłby dostał całkowitą zapłatę $(x-6) \frac{96}{x} = \frac{96(x-6)}{x}$.

Aże podług zagadnienia dwa te iloczyny są równe, będzie więc $\frac{54x}{x-6} = \frac{96(x-6)}{x}$. Zniósłszy mianowniki będzie

$$54x^2 = 96(x-6)(x-6).$$

Równanie to łatwo rozwiązać można sposobem zwyczajnym: lecz można także użyć następującego skrócenia:

Podzieliwszy obie strony przez 6, będzie $9x^2 = 16(x-6)(x-6)$.

W tym równaniu obie strony są widocznie kwadratami: $9x^2$ ma za pierwiastek $3x$, a $16(x-6)(x-6)$ ma za pierwiastek $4(x-6)$, będzie więc

$$3x = \pm 4(x-6); \text{ a t\kern-0.1em} \text{ sam\kern-0.1em} x = 24; \text{ albo}$$

$$x = \frac{24}{7}.$$

Podług pierwszego rozwiązania rzemieślnik pierwszy pracował przez dni 24, a zatem brał na dzień po zł. $\frac{3}{2} = 4$; drugi zaś pracował tylko przez dni 18, i brał na dzień po zł. $\frac{4}{3} = 3$.

Drugie rozwiązanie należy do innego zagadnienia liczebnego.

Zagad. III. Dano bankierowi dwa wexle ieden na 550 cz. zł. drugi na 720 cz. zł. pierwszy ma być wykupiony za 6 miesięcy, drugi za 4 miesiące. Bankier dał na nie 1200 cz. zł. Jakiż potrafił sobie procent roczny?

Dla uniknienia ułomków, oznaczmy procent roczny od 100 cz. zł. przez $12x$; będzie więc x procent miesięczny. Podług prawideł arytmetycznych na odrącenie procentu, wartość terazniejszą wexlu pierwszego znajdziemy przez następującą proporcję

$$100 + 7x : 100 = 550 : \frac{55000}{100 + 7x}. \quad (98)$$

Wartość terazniejszą drugiego wexlu wypadnie z następującej proporcji

$$100 + 4x : 100 = 720 : \frac{72000}{100 + 4x}$$

Dodawszy dwie te wartości, będzie równanie

$$\frac{55000}{100+7x} + \frac{72000}{100+4x} = 1200.$$

Podzieliwszy obie strony przez 200, będzie

$$\frac{275}{100+7x} + \frac{360}{100+4x} = 6; \text{ więc}$$

$$275(100+4x) + 360(100+7x) = 6(100+7x)(100+4x); \text{ czyli } 27500 + 1100x + 36000 + 2520x = 60000 + 6600x + 168x^2$$

$$\text{czyli } 168x^2 + 2980x = 3500.$$

Podzieliwszy obie strony przez 2, będzie

$$84x + 1490x = 1750. \text{ Ażatém}$$

$$x + \frac{1490}{84}x = \frac{1750}{84}.$$

Dopełniwszy kwadratu sposobem wyżej podanym, i odbywszy inne działania zwyczajne znajdziemy

$$x = -\frac{745}{84} \pm \sqrt{\frac{745 \cdot 745}{84 \cdot 84} + \frac{1750}{84}}.$$

Ułomki będące pod znakiem pierwiastkowym sprowadziwszy do jednakowego mianownika, będzie

$$\frac{745 \cdot 745 + 1750 \cdot 84}{84 \cdot 84} = \frac{702025}{84 \cdot 84}$$

W ułomku tym mianownik jest kwadratem zupełnym: wyciągnawszy zatem pierwiastek z licznika przestając tylko na trzech dziesiętnych, znajdziemy 837, 869 na pierwiastek liczby 702025. Ważność zatem x będą

$$x = -\frac{745}{84} + \frac{837,869}{84} = \frac{92,869}{84}$$

$$x = -\frac{745}{84} - \frac{837,869}{84} = -\frac{1582,869}{84}$$

Pierwsza tylko z tych wartości rozwiązanie zagadnienie stosownie do jego wysłowienia. Będzie zatem procent od 100 roczny czyli za 12 miesięcy

$$12x = \frac{92,869}{7} = 13,267.$$

R O Z D Z I A Ł VII.

O postępach Arytmetycznych i Jeometrycznych.

I. o Postępach arytmetycznych.

129. Wszystko to, cośmy dotąd powiedzieli, nie jest jeszcze dostateczne do rozwiązywania wielkiéj liczby zagadnień z wielu względów nader ważnych, iak są *np.* zagadnienia o procentach składanych czyli o procentach od procentów i tym podobnych: wiadomości w tym i w następującym rozdziele wyłożone ułatwią do tego drogę.

Weźmy *np.* łatwe zagadnienie *daną ilość podzielić na pewną liczbę części takich, ażeby różnica między każdą częścią i drugą po niej następującą była zawsze ta sama, i swą stała się liczbie daney.*

Niech będzie *np.* liczba 28 dana do podzielenia na 7 części takich, ażeby różnica mię-

dzy częścią pierwszą i drugą, między drugą i trzecią, między trzecią i czwartą i t. d. równała się jedności. Oznaczywszy część 1wszą przez x , 2gą będzie $= x + 1$, 3cia $= x + 2$, 4ta $= x + 3$, 5ta $= x + 4$, 6ta $= x + 5$, 7ma $= x + 6$ a summa wszystkich $= 7x + 21$. Ze zaś summa tych części powinna czynić 28, będzie więc równanie

$$7x + 21 = 28; \text{ azatém } 7x = 7, x = 1.$$

Części więc szukane są: 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7.

Możnaby także oznaczywszy część 1wszą przez x , 2gą oznaczyć przez $x - 1$, 3cią przez $x - 2$, 4tą przez $x - 3$, 5tą przez $x - 4$, 6tą przez $x - 5$, 7mą przez $x - 6$. W tym przypadku summa wszystkich części jest $7x - 21$, i będzie równanie

$$7x - 21 = 28; \text{ więc } 7x = 49, x = 7.$$

Azatém szukane części są: 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1.

Dwa te znalezione szeregi liczb tém się tylko między sobą różnią że każdy wyraz w pierwszym jest większy od poprzedzającego, w drugim mniejszy od poprzedzającego: z resztą obadwa czynią zadosyć warunkom zagadnienia: gdyż summa wszystkich części tak w pierwszym jak w drugim równa się liczbie daney 28, a różnica między dwoma po sobie następującymi wyrazami jest zawsze jednakowa i równa się 1.

Wszelki szereg liczb takich, że różnica między dwiema liczbami przyległemi jest zawsze ta sama, zowie się *Postępem arytmetycznym*, *progressio arithmetica*. Postęp w którym ka-

żdy wyraz większy jest od poprzedzającego, nazywa się *postępem rosnącym*, *crescens*; postęp w którym każdy wyraz mniejszy jest od poprzedzającego, zowie się *postępem zmniejszającym* lub *malejącym*, *decrescens*.

Stosunek arytmetyczny, iakośmy powiedzieli (35), jest to samo co różnica między dwiema liczbami zachodzącą, a proporcja arytmetyczna ciągła składa się z dwóch stosunków równych i takich, że następnik stosunku jednego równy jest poprzednikowi stosunku drugiego. Skąd już łatwo uczynić wniosek, że proporcja arytmetyczna ciągła jest postępnem z trzech tylko wyrazów złożonym, i że każdy postęp arytmetyczny tak rosnący jak malejący jest złożony z pewnej liczby stosunków równych i takich, że następnik każdego stosunku jest równy poprzednikowi stosunku następnego. Dla tego też różnica między wyrazami postępu składającymi zachodząca zowie się *stosunkiem postępu*. Algiebraicznie postęp Arytmetyczny wyraża się tak:

$$\div 1. 2. 3. 4. 5 \text{ i t. d.}$$

130. Wogolności niech będzie postęp arytmetyczny iakikolwiek

$$\div a. b. c. d. e. f. \text{ i t. d.}$$

którego stosunek, czyli różnica między wyrazami zachodząca jest r . Postęp ten może być albo rosnący, albo malejący.

W pierwszym przypadku ponieważ każdy wyraz większy jest różnicą r od swego poprzednika, będzie więc,

$b - a = r$; $c - b = r$, $d - c = r$, $e - d = r$,
 $f - e = r$ i t. d. Skąd wypadnie
 1^o $b = a + r$; 2^o $c = b + r$; 3^o $d = c + r$;
 4^o $e = d + r$; i t. d.

W 2^{gim} z tych równań zamiast b położywszy jego wartość z równania pierwszego, będzie $c = a + 2r$.

Te wartość c położywszy w równaniu 3^{ciem}, będzie $d = a + 3r$.

Te wartość d położywszy w równaniu 4^{tem}, będzie $e = a + 4r$ i t. d.

To jest: w postępie arytmetycznym rosnącym wyraz drugi b równy jest wyrazowi pierwszemu a powiększonemu różnicą r raz wziętą; wyraz trzeci c równy pierwszemu powiększonemu różnicą wziętą dwa razy; wyraz czwarty d równy pierwszemu powiększonemu różnicą wziętą trzy razy. I tak dalej wyraz $np.$ i t. y równy pierwszemu powiększonemu różnicą wziętą razy g ; w ogólności, wyraz zastępujący miejsce n , czyli, iak się zwyczajnie mówi, wyraz nty , równy jest pierwszemu powiększonemu różnicą wziętą razy $n - 1$; czyli, oznaczwszy przez l wyraz zastępujący miejsce n te, będzie

$$l = a + (n - 1)r \quad (1)$$

Niech będzie $np.$ postęp $\div 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17$, i t. d. w którym $a = 5$, $r = 2$: znajdziemy podług powyższej formuły wyraz osmy $= 3 + (8 - 1)2 = 17$ i t. d.

W przypadku drugim kiedy postęp jest malejący, w którym każdy wyraz mniejszy jest różnicą od swego następnika, na ten czas wro-

wnaniach $b - a = r$, $c - b = r$, $d - c = r$, ilość r ma wartość odjemną, iako pozostała reszta z odjęcia liczby większej od mniejszej. Chcąc więc powyższej formuły użyć dla znalezienia wyrazu l zastępującego miejsce n te w postępie malejącym, trzeba dla r dać wartość odjemną i tak niech będzie postęp

$$\div 21, 18, 15, 12, 9, 6, 3, \text{ i t. d.}$$

w którym $a = 21$, $r = -3$: znajdziemy podług tejże formuły, stosownie do poprzedzających uwagi wyraz siódmy $= 21 + (7 - 1) \times -3 = 3$; szukając zaś dalszych wyrazów tegoż postępu znajdziemy wyraz osmy $= 0$, wyraz dziesiąty $= -3$, wyraz dziesiąty $= -6$; i t. d.

131. Niech będą dwa postępy

$$\div a, b, c, \dots i, k, l,$$

$$\div l, k, i, \dots c, b, a,$$

w których przerwa kropkami oznaczona może być zupełnioną tylu wyrazami ile się podoba. Jeżeli pierwszy z tych dwóch postępów jest rosnący, drugi być musi malejącym: gdyż wyrazy drugiego idą w porządku odwrotnym wyrazów pierwszego. Oznaczwszy przez s summe wszystkich wyrazów jeden postęp składających, będą dwa równania

$$s = a + b + c \dots + i + k + l;$$

$$s = l + k + i \dots + c + b + a.$$

Dodawszy do siebie strony odpowiadające tych dwóch równań, będzie

$$2s = (a + l) + (b + k) + (c + i) \dots + (i + c) + (k + b) + (l + a).$$

Że zaś $a+r=b$; $b+r=c$; $i+r=k$; $k+r=l$;
 $l-r=k$; $k-r=i$; $c-r=b$; $b-r=a$

W równaniach tych, dodawszy strony odpowiadające sobie, wypadnie

$a+r+l-r=b+k$, czyli $a+l=b+k$;
 $b+r+k-r=c+i$, czyli $b+k=c+i$;
 $i+r+c-r=k+b$, czyli $i+c=k+b$;
 i t. d.

Równanie zatem powyższe zamienić można w następujące:

$$2s = (a+l) + (a+l) + (a+l) \dots \dots \dots + (a+l) + (a+l) + (a+l)$$

Rzecz jest przez się widoczna, że summa dwóch wyrazów skrajnych w postępie, to jest summa $a+l$, powinna być z drugiej strony tego równania tyle razy powtórzona, ile postępu ma wyrazów. Oznaczywszy więc przez n liczbę wyrazów postępu składających, powyższe równanie zamieni się w następujące:

$$2s = (a+l)n. \text{ Azatem } s = \frac{(a+l)n}{2} \quad (2)$$

To jest: summa wszystkich wyrazów postępu arytmetyczny składających, równa się summie wyrazów skrajnych rozmnożonej przez liczbę wyrazów i podzielonej przez 2.

I tak w postępie $\div 7$. 10. 13. 16. 19. 22.
 25. 28. jest $s = \frac{(7+27)8}{2} = 140$.

132. Za pomocą dwóch powyższych równań

$$l = a + (n-1)r \dots (1)$$

$$s = \frac{(a+l)n}{2} \dots \dots (2)$$

w których znajdują się pięć ilości, to jest: a wyraz pierwszy, r stosunek, l wyraz ostatni, n liczba wyrazów i s summa tychże wyrazów, można łatwo wynaleźć dwie którekolwiek z tych pięciu ilości, gdy trzy inne są wiadome. Jakoż w równaniu (szem) wzięwszy 1. od wartości a , 2. re wartość l , 3. cie wartość n , i wartości te położywszy następnie w równaniu (2)tem, otrzymamy następujące równania:

$$2s = 2ln - rn(n-1) \dots \dots (3)$$

$$2s = 2an + rn(n-1) \dots \dots (4)$$

$$2rs = l^2 - a^2 + ar + lr \dots \dots (5)$$

Za pomocą tych pięciu równań łatwo będzie rozwiązać następujące zagadnienia:

1. wsze Maiąc wiadome r , l , n , albo r , l , s , albo r , n , s , albo l , n , s , znaleźć a . 2. gie Maiąc wiadome a , l , s , albo a , l , n , albo a , n , s , albo l , n , s , znaleźć r . 3. cie Maiąc wiadome a , r , n , albo a , r , s , albo a , n , s , albo r , n , s , znaleźć l . 4. te, Maiąc wiadome a , r , l , albo a , r , s , albo a , l , s , albo r , l , s , znaleźć n . 5. te, Maiąc wiadome a , r , l , albo a , r , n , albo a , l , n , albo r , l , n , znaleźć s .

Każde z tych dwudziestu zagadnień łatwo być może rozwiązane za pomocą jednego z pięciu powyższych równań. I tak np. zagadnienie to: Maiąc wiadome l , r , s , znaleźć a , rozwiążemy za pomocą równania (5), w którym znajdują się wszystkie cztery ilości wcho-

dzące do zagadnienia. Jakoż w równaniu tém przeniosłszy niewiadome na jedną a wiadome na drugą stronę, będzie

$$a^2 - ra = l^2 + lr - 2rs; \text{ więc} \\ a^2 - ra + \frac{1}{4}r^2 = l^2 + lr + \frac{1}{4}r^2 - 2rs. (122)$$

Drugą stronę rozmnóżwszy i podzieliwszy przez 4,

$$a^2 - ra + \frac{1}{4}r^2 = \frac{4l^2 + 4lr + r^2 - 8rs}{4}$$

$$\text{Że zaś } 4l^2 + 4lr + r^2 = (2l + r)^2; \text{ więc} \\ a^2 - ra + \frac{1}{4}r^2 = \frac{(2l + r)^2 - 8rs}{4}; \text{ Azatém}$$

$$a - \frac{1}{2}r = \pm \frac{\sqrt{(2l + r)^2 - 8rs}}{2}; \text{ a tém samém}$$

$$a = \frac{2l \pm \sqrt{(2l + r)^2 - 8rs}}{2}$$

Tym samym sposobem z tegoż równania znajdziemy następującą wartość dla l , kiedy $a, r, i s$ są dane:

$$l = \frac{-r \pm \sqrt{(2a - r)^2 + 8rs}}{2}$$

Podobnie chcąc znaleźć wartość dla n gdy są dane a, r, s , z równania (4) wyprowadzimy następnie

$$rn^2 + 2an - rn = 2s;$$

$$n^2 + \frac{2an - rn}{r} = \frac{2s}{r};$$

$$n^2 + \left(\frac{2a - r}{r}\right)n = \frac{2s}{r};$$

$$n^2 + \left(\frac{2a - r}{r}\right)n + \frac{(2a - r)^2}{4r^2} \\ = \frac{(2a - r)^2 + 8rs}{4r^2};$$

$$n = \frac{-2a + r \pm \sqrt{(2a - r)^2 + 8rs}}{2r}$$

Nakomiec chcąc znaleźć wartość dla n , gdy są dane l, r, s , znajdziemy za pomocą z równania (3) sposobem podobnym do poprzedzającego,

$$n = \frac{2l + r \pm \sqrt{(2l + r)^2 - 8rs}}{2r}$$

W innych wszystkich przypadkach szukane wartości są w stopniu pierwszym, iak się o tém łatwo przekonać można.

Niech będzie np. postęp $\div 1. 3. 5. 7. 9. 11$, w którym $a = 1, r = 2, l = 11, s = 36$. Chcąc sprawdzić formułę poprzedzającą, trzeba w nię zamiast głosek l, r i s położyć liczby 11, 2 i 36, i będzie

$$n = \frac{2 \cdot 11 + 2 \pm \sqrt{(2 \cdot 11 + 2)^2 - 8 \cdot 2 \cdot 36}}{2 \cdot 2}$$

$$= \frac{24 \pm \sqrt{576 - 576}}{4} = 6, \text{ i t. d.}$$

3. II. O postęпах Jeometrycznych.

233. Postępy jeometryczne tem się od arytmetycznych różnią, że w nich nie różnica

między wyrazami, ale iloraz każdego wyrazu przez wyraz poprzedzający podzielonego jest zawsze jednakowy. Dwa następujące szeregi liczb

$$\div 2:6:18:54:162: \text{ i t. d.}$$

$$\div 45:15:5:\frac{5}{3}:\frac{5}{9}: \text{ i t. d.}$$

są postępy iometryczne: w pierwszym iloraz czyli stosunek jest 3, w drugim $\frac{3}{2}$; pierwszy nazywa się rosnącym, drugi malejącym. Oba dwa złożone są ze stosunków iometrycznych równych i takich, że następnik każdego stosunku, jest poprzednikiem stosunku następnego: dla tego też algebricznie oznaczają się takim sposobem, iakiego używamy na oznaczenie stosunku iometrycznego.

W ogólności niech będzie postęp iometryczny iakikolwiek

$$\div a: b: c: d: e: f: \text{ i t. d.}$$

$$\text{Damy że } \frac{b}{a} = q; \text{ będzie też } \frac{c}{b} = q,$$

$$\frac{d}{c} = q, \frac{e}{d} = q, \frac{f}{e} = q \text{ i t. d.}$$

W równaniach tych zniósłszy mianowniki, będzie

$$b=aq; c=bq; d=cq; e=dq; f=eq.$$

W równaniu drugim zamiast b położywszy jego wartość z równania pierwszego, będzie $c=aq \times q$; czyli $c=aq^2$.

Tymże sposobem znajdziemy $d=aq^3$; $e=aq^4$; $f=aq^5$. Dany zatem postęp zamiećni się w następujący:

$$\div a: aq: aq^2: aq^3: aq^4: aq^5: \text{ i t. d.}$$

To

To jest: w postępie iometrycznym wyraz drugi równy jest 1szemu rozmnożonemu przez stosunek podniesiony do potęgi 1wszey; wyraz 3ci równy 1szemu rozmnożonemu przez stosunek podniesiony do potęgi 2gię; wyraz 4ty równy 1szemu rozmnożonemu przez stosunek podniesiony do potęgi 3cię; i tak dalej. Wyraz $np.$ 1oty równy 1szemu rozmnożonemu przez stosunek podniesiony do potęgi g ię; wyraz nty równy 1szemu rozmnożonemu przez stosunek podniesiony do potęgi $n-1$; czyli oznaczwszy przez l wyraz zastępujący miejsce n , będzie

$$l=aq^{n-1} \dots \dots \dots (1).$$

Za pomocą téj formuły w każdym postępie iometrycznym, którego wyraz pierwszy i stosunek jest dany, znaleźć można iakikolwiek wyraz, nie przechodząc przez wyrazy między pierwszym i szukanym środkujące. Tak $np.$ w postępie $\div 2: 6: \text{ i t. d.}$ wyraz 1oty $= 4$, $\div 3^2 = 39366$.

Podobnież w postępie $\div 8: 4: \text{ i t. d.}$ wyraz 1oty $= 8 \times (\frac{1}{2})^9 = 8 \times \frac{1}{512} = \frac{1}{64}$ itd.

154. Niech będzie postęp

$$\div a: b: c: d: \dots \dots \dots k: l,$$

którego stosunkiem jest q . Będzie więc

$$b=aq, c=bq, d=cq \dots \dots \dots l=kq.$$

3 Strony odpowiadające tych równań dodawszy do siebie, będzie

$$b+c+d+e \dots + l = aq + bq + cq + dq \dots$$

$$+ kq; \text{ czyli}$$

$$b+c+d+e \dots + l = (a+b+c+d+k)q \dots$$

14

Oznaczywszy summe wszystkich wyrazów postępnicy dany składających przez s , będzie

$$b + c + d + e + \dots + l = s - a.$$

$$a + b + c + d + \dots + k = s - l.$$

W drugim równaniu obie strony rozmnożywszy przez q , będzie

$$(a + b + c + d + \dots + k)q = (s - l)q. \text{ Że zaś}$$

$$(a + b + c + d + \dots + k)q = b + c + d + e + \dots + l = s - a: \text{ więc}$$

$(s - l)q = s - a$; czyli, $q s - lq = s - a$; czyli, $q s - s = lq - a$: czyli $s(q - 1) = lq - a$; a tym samym

$$s = \frac{lq - a}{q - 1} \quad (2).$$

To jest: chcąc znaleźć summe wszystkich wyrazów postępnicy geometrycznej składających, trzeba wyraz ostatni rozmnożyć przez stosunek; odjąć od tego iloczynu wyraz pierwszy, i resztę podzielić przez stosunek zmniejszony jednością.

Tę samą formułę można także otrzymać sposobem następującym:

W postępie $a: b: c: \dots: l$, każdy wyraz jest poprzednikiem wyłączony ostatni l ; i każdy wyraz jest następnikiem wyłączony pierwszy a . Jeżeli więc s oznacza summe wszystkich tych wyrazów, $s - l$ będzie summa poprzedników, $s - a$ summa następników. Aże w stosunkach równych summa wszystkich poprzedników tak się ma do summy wszystkich następników, jak którykolwiek poprzednik do swego następnika (95); będzie więc

$s - l: s - a = a: b$; czyli

$s - l: s - a = a: aq$; gdyż $b = aq$. Więc $(s - l)aq = (s - a)a$ (90).

Wykonawszy z obu stron mnożenie wskazane; podzieliwszy potem obiedwie strony przez a , i odbywszy inne działania potrzebne dla malezienia ważności niewiadomej s , wypadnie jak wyżej $s = \frac{lq - a}{q - 1}$.

Podług téj formuły summa roci summy postępnicy $2: 6: 18: \dots$ i t. d. jest $= \frac{2 \cdot 5^{10} - 2}{3 - 1}$
 $= \frac{2 \cdot 5^{10} - 2}{2} = 59048.$

Podobnie summa roci wyrazów postępnicy malejącego

$8: 4: 2: \dots$ i t. d. jest $= \frac{8(\frac{1}{2})^{10} - 8}{\frac{1}{2} - 1} = 15 \frac{63}{64}.$

155. Za pomocą dwóch powyższych równań

$$l = aq^{n-1} \quad (1)$$

$$s = \frac{ql - a}{q - 1} \quad (2)$$

do których wchodzi ilości a, l, s, q, n , chcąc znaleźć dwie którekolwiek z tych pięciu ilości, gdy trzy inne są dane, trzeba w jednym z nich znaleźć ważności dla a, q, l , i pokłaść je następnie w równaniu drugim. W równaniu np.

$$s = \frac{ql - a}{q - 1}$$

zniosłszy mianownik, będzie

$$qs - s = ql - a. \text{ Z tego równania znajdziemy}$$

$$l = \frac{qs - s + a}{q}; \quad q = \frac{s - a}{s - l}; \quad a = ql - qs + l$$

Abysmy trzy te znalezione ważności prze-
nieść mogli do równania (1), uważać tu pie-
wój potrzeba, że jeżeli *np.* $n = 5$, na ten czas
będzie $q^{n-1} = q^4$. W tym równaniu rozmu-
żysz oby strony przez q , będzie $q^{n-1} \times$
 $q = q^4 \times q$, czyli $q^{n-1} \times q = q^5$; aże podla-
żatożenia $q^5 = q^n$; więc $q^{n-1} \times q = q^n$.

Po téj uwadze znaną wyżey ważność
l położywszy w równaniu $l = aq^{n-1}$, będzie

$$\frac{qs - s + a}{q} = aq^{n-1}. \text{ Zniosłszy mianownik wy-}$$

padnie

$$qs - s + a = aq^n.$$

W témże równaniu $l = aq^{n-1}$ położywszy

$$l = (ql - qs + s) q^{n-1}; \text{ czyli } l = lq^n - sq^n -$$

$$sq^{n-1}; \text{ więc}$$

$$lq^n - sq^n - l + sq^{n-1} = 0$$

Nakoniec w témże równaniu $l = aq^{n-1}$

zamiast q położywszy jego ważność, będzie

$$l = a \left(\frac{s - a}{s - l} \right)^{n-1}$$

Zniosłszy mianownik, wypadnie

$$l(s - l)^{n-1} = a(s - a)^{n-1} \text{ więc}$$

$$l(s - l)^{n-1} - a(s - a)^{n-1} = 0$$

Za pomocą tych pięciu równań roz-
wiązać dwadzieścia zagadnień, jakie podali-
śmy wyżey (132) na postępy arytmetyczne, znaj-
dziemy

my niektóre z nich łatwe do rozwiązania; iak
jest *np.* następujące: *Mając wiadome* q, l, s ,
znaleźć a i t ; d ; drugie łatwe wprowadzić do
rozwiązania, lecz w sprawdzeniu na iakim po-
stępie szczególnym częstokroć wiele czasu za-
brajać; iakie jest *np.* zagadnienie następu-
jące: *Mając wiadome* a, q, n , *znaleźć* s . Ro-
wiązawszy zagadnienie to za pomocą równa-
nia (3) znajdziemy $s = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$. Tę wa-
żność ogólną chcąc zastosować do postępu w

którym $n = 64$, trzeba ważność q podnieść do
64tęj potęgi, co postępując sposobem zwy-
czajnym, zabrałoby nie mało czasu i miejsca.
Nakoniec znaleźlibysmy i takie zagadnienia do
których rozwiązania wyłożone dotąd wiadomo-
ści nie są dostateczne: iak jest *np.* następu-
jące: *Mając wiadome* a, q, l , *znaleźć* n . Ro-
wiązuąc to zagadnienie za pomocą równania
(1), znajdziemy $q^{n-1} = \frac{l}{a}$.

W równaniu tém ilość szukana n jest wy-
kładnikiem; gdy tym czasem we wszystkich za-
gadnieniach, któreśmy dotąd rozwiązywali, wy-
kładnik był zawsze ilością wiadomą, i wszy-
stkie sposoby dotąd wyłożone nie są dostate-
czne na rozwiązanie równania w którym wy-
kładnik jest ilością niewiadomą.

Z tegoż równania $q^{n-1} = \frac{l}{a}$, chcąc zna-
leźć ważność dla q , trzeba z drugiey strony

$\frac{1}{a}$ wyciągnąć pierwiastek potęgi wskazanej przez ilość $n-1$; gdy tym czasem dotąd podaliśmy tylko sposób wyciągania pierwiastku potęgi drugiej czyli kwadratu. Wiadomości w następującym rozdziele wyłożone ułatwią rozwiązywanie tych i tym podobnych zagadnień.

ROZDZIAŁ VIII.

o Logarytmach.

136. Ztego cośmy powiedzieli o mnożeniu i dzieleniu ilości mających wykładniki (30, 42), łatwo jest uczynić wniosek, że wszelka liczba, wylączywszy 1, podnoszona następnie do rozmaitych potęg dodatnich i odjemnych, przybiera rozmaite wartości co raz większe lub mniejsze od 1. Jakoż jeżeli a jest liczbą większą od 1 i znaczy np. 10, na ten czas,

$$a^1 = 10, a^2 = 100, a^3 = 1000, a^4 = 10000 \text{ i t. d.}$$

$$a^0 = 1, a^{-1} = \frac{1}{a} = \frac{1}{10}, a^{-2} = \frac{1}{a^2} = \frac{1}{100},$$

$$a^{-3} = \frac{1}{a^3} = \frac{1}{1000} \text{ i t. d.}$$

Jeżeli zaś a jest liczbą mniejszą od 1, i znaczy np. $\frac{1}{2}$ na ten czas

$$a^1 = \frac{1}{2}, a^2 = \frac{1}{4}, a^3 = \frac{1}{8}, \text{ i t. d.}$$

$$a^1 = 1, a^{-1} = \frac{1}{a} = 2; a^{-2} = \frac{1}{a^2} = 4; a^{-3} = \frac{1}{a^3} = 8; \text{ i t. d.}$$

To jest: liczba większa od 1, podnoszona do potęg dodatnich coraz większych, ma coraz większe wartości; podnoszona do potęg odjemnych coraz większych, ma coraz mniejsze wartości; przeciwnie zaś liczba mniejsza od 1, w pierwszym przypadku przybiera coraz mniejsze, w drugim coraz większe wartości. Własność ta jest spólna wszystkim liczbom, wylączywszy 1, która do wszelkiej potęgi podniesiona jest zawsze jednością.

137. Dla oznaczenia że liczba a jest nie zmienna, iż za zmianą ię wykładnika zmienia się ię wartość, oznaczmy wykładniki przez x , i t. d. a wartości odpowiadające przez y , y' i t. d. będą więc równania $a^x = y$, $a^{x'} = y'$ i t. d. w których wartościami y , y' i t. d. odpowiadają inne wartości x , x' i t. d.; tak, że jedna z tych wartości może być wyznaczona przez drugą.

$$\text{Albo } a^3 \times a^2 = a^{3+2} \text{ (30), } \frac{a^3}{a^2} = a^{3-2} \text{ (42),}$$

wieg kiedy

$$a^x = y, a^{x'} = y', \text{ będzie } yy' = a^x \times a^{x'} = a^{x+x'},$$

$$\frac{y}{y'} = \frac{a^x}{a^{x'}} = a^{x-x'}.$$

To jest: chcąc dwie ważności odpowiadające jedynęże liczbie a do dwóch odmiennych potęg podniesionę przez siebie rozmnożyć lub podzielić, dosyć jest wykładniki liczby a w pierwszym przypadku do siebie dodać, w drugim od siebie odjąć.

Aże potęga 2ga, 3cia 4ta i t. d. każdéy ilości równa się teżyże ilości wziętęj za czynnik razy 2, 3, 4 i t. d. (23) jeżeli więc $a^x = y$, będzie

$$\begin{aligned} y^2 &= a^x \times a^x = a^{x+x} = a^{2x}; \\ y^3 &= a^x \times a^x \times a^x = a^{x+x+x} = a^{3x}. \\ y^m &= (a^x)^m = a^{mx} \end{aligned}$$

To jest: chcąc liczbę jakąkolwiek y podnieść do potęgi 2, 3, 4 i t. d. dosyć jest x wykładnik liczby a odpowiadający liczbę y rozmnożyć przez 2, 3, 4 i t. d.

Ze zaś wyciąganie pierwiastków jest działaniem odwrotnem podnoszeniu ilości do potęg, chcąc zatem z liczby jakiegokolwiek y wyciągnąć pierwiastek potęgi 2gię, 3cię 4tę i t. d. dosyć jest x wykładnik liczby a odpowiadający liczbie y podzielić przez 2, 3, 4 i t. d. I tak jeżeli $a^x = y$, będzie pierwiastek

kwadratowy liczby y czyli $\sqrt{y} = a^{\frac{x}{2}}$.

Podobnie pierwiastek trzeci potęgi y , czyli $\sqrt[3]{y} = a^{\frac{x}{3}}$ i t. d.

Tu już łatwo postrzedz można, że gdybyśmy mieli tablicę taką, w którejby obok ka-

kiej liczby y znajdowały się odpowiadające jej ważności x , tak że mając daną liczbę y , można by było znaleźć x , i odwrotnie; na ten czas mnożenie dwóch liczb jakichkolwiek y, y' możnaby skutecznie przez dodawanie: bo zamiast działania na tych liczbach, dodaliśmy ważności x, x' liczbom tym odpowiadające, a liczba w tablicy znajduiąca się, której ta summa odpowiada, byłaby szukany iloczynem. Jloraz dwóch liczb jakichkolwiek znaleźlibyśmy w teżyże tablicy wprost różnicy między ważnościami x, x' danym liczbom odpowiadającemi; a tym sposobem dzielenie skończyłoby się na odejmowaniu. Chcąc liczbę jaką y podnieść do potęgi 2, 3, 4 i t. d. ważność x liczbie y odpowiadającą rozmnożylibyśmy przez 2, 3, 4 i t. d.; a liczba iloczynowi temu odpowiadająca byłaby szukaną potęgą; tym sposobem podnoszenie do potęg skończyłoby się na mnożeniu jednéy liczby przez 2 albo 3, albo 4 i t. d. Nakoniec chcąc z liczby jakiegokolwiek y wyciągnąć pierwiastek potęgi 2gię, 3cię, 4tę i t. d. ważność x liczbie y odpowiadającą podzieliłobyśmy przez 2, 3, 4 i t. d.; a liczba ilorazowi temu odpowiadająca byłaby szukany pierwiastkiem.

Pierwszy Nepper uznał potrzebę takowej tablicy i one do skutku przyprowadził. Ważności x nazwane w nich są *logarytmami*. Logarytmy zatem są to wykładniki potęg, do których trzeba podnieść liczbę nie zmienną, ażeby z nięj wyprowadzić następnie wszel-

kie wartości liczebne. Liczba ta nie zmienna zowie się *zasadą, basis*, układu Logarytmów.

138. Ponieważ własności logarytmów nie zależą od szczególny wartości téj liczby, która jest ich zasadą, wypada stąd że może być nieskończona liczba tablic czyli układów logarytmowych, biorąc za ich zasadę wszelkie liczby większe lub mniejsze od jedności. Wziąwszy np. $a = 10$, będzie

$$10^0 = 1.$$

$$10^{-1} = \frac{1}{10}$$

$$10^1 = 10$$

$$10^{-2} = \frac{1}{100}$$

$$10^2 = 100$$

$$10^{-3} = \frac{1}{1000}$$

$$10^3 = 1000$$

$$10^{-4} = \frac{1}{10000}$$

$$10^4 = 10000$$

$$10^{-5} = \frac{1}{100000} \text{ i t. d.}$$

$$10^5 = 100000.$$

$$10^6 = 1000000 \text{ i t. d.}$$

Wykładniki 0, 1, 2, 3, i t. d. są logarytmami liczb im odpowiadających które się z prawej strony znajdują: 0 jest logarytmem jedności; jedność jest logarytmem liczby 10; 2 jest logarytmem liczby 100, i t. d. — 1 jest logarytmem ułamku $\frac{1}{10}$; — 2 jest logarytmem $\frac{1}{100}$ i t. d. Tu już można sprawdzić to, cośmy wyżey powiedzieli o logarytmach, że służą do ułatwienia i skrócenia działań arytmetycznych najtrudniejszych, jakimi są mnożenie i dzielenie liczb większych, podnoszenie ich do potęg i wyciąganie pierwiastków. Jakoż dodawszy 1 logarytm liczby 10 do 2 logarytmu liczby 100, wypadnie 3 logarytm liczby 1000, która jest iloczynem 100 i 10. Odjęwszy 4 logarym liczby 10000, od 6 logary-

tmu liczby 1000 000, zostanie 2 logarytm liczby 100, która jest ilorazem wypadającym z podzielenia 1000 000. przez 10000, i t. d.

139. Z postępu iometrycznego $\div a : b : c : d : e : f : \text{i t. d.}$ wypada

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{d}{c} = \frac{e}{d} = \frac{f}{e} \text{ i t. d.}$$

Logarytmy ilości a, b, c i t. d. oznaczywszy przez la, lb, lc , i t. d. powyższy ciąg równań zamieni się w następujący.

$$lb - la = lc - lb = ld - lc = le - ld = lf - le \text{ i t. d. (137).}$$

Z równań tych wypada następujący postęp arytmetyczny :

$$\div la. lb. lc. ld. le. lf. (139).$$

Stąd wniesiemy, że logarytmy liczb będących w postępie iometrycznym składają postęp arytmetyczny. Go też potrzebujemy w powyższej tablicy (138) gdzie liczby 1, 10, 100, 1000 i t. d. składają postęp iometryczny, a odpowiadające im logarytmy 0, 1, 2, 3 i t. d. składają postęp arytmetyczny. Uwaga ta posłuży do okazania jakim sposobem wynaleźć można logarytmy liczb środkujących między 1 i 10, między 10 i 100, między 100 i 1000, i t. d.

140. Między pierwszymi dwoma wyrazami postępu iometrycznego to jest między 1 i 10, znajdziemy średnią iometryczną proporcjonalną (99), która jest 3,16227766, i między dwoma pierwszymi wyrazami postępu arytmetycznego to jest między 0 i 1 znajdziemy średnią

arytmetycznie proporcjonalną, która jest
(89). Otrzymamy dwa następujące postępy:

$$\div 1: 3, 17227766: 10;$$

$$\div 0. \frac{1}{2} 1;$$

w których każdy wyraz postępu ieometrycznego ma za logarytm odpowiadający sobie wyraz w postępie arytmetycznym.

Znajdźmy znówu średnią ieometrycznie proporcjonalną tak między 1 i 3,16227766, iako też między 3,16227766 i 10; pierwsza z tych dwóch liczb szukanych jest 1,77827941; druga 5,62341319. Znajdźmy także średnią arytmetycznie proporcjonalną tak między 0 i $\frac{1}{2}$, iako też między $\frac{1}{2}$ i 1; pierwsza z nich jest $\frac{1}{4}$, druga $\frac{3}{4}$. Otrzymamy zatem następujący postęp ieometryczny i arytmetyczny:

$$\div 1: 1,77827941: 3,16227766; 5,62341319: 10, \div 0. \frac{1}{4} \frac{3}{4} 1;$$

w których każdy wyraz postępu ieometrycznego ma za logarytm odpowiadający sobie wyraz w postępie arytmetycznym.

Gdybyśmy potem w powyższych postępach znaleźli średnią ieometrycznie i arytmetycznie proporcjonalną między wyrazem pierwszym i drugim, między drugim i trzecim, między trzecim i czwartym, między czwartym i piątym; otrzymalibyśmy postęp ieometryczny i arytmetyczny mające po 9 wyrazów; w których każdy wyraz postępu ieometrycznego, miałby za logarytm odpowiadający sobie wyraz w postępie arytmetycznym.

Tym samym sposobem postępując dalej, gdybyśmy między 1 i 10 umieścili np. 10000000 średnich ieometrycznie proporcjonalnych, i tyleż średnich arytmetycznie proporcjonalnych między 0 i 1; otrzymalibyśmy dwa ogromne postępy ieometryczny zaczynający się od 1, a kończący się na 10, arytmetyczny zaczynający się od 0, a kończący się na 1, w których każdy wyraz postępu ieometrycznego miałby za logarytm odpowiadający sobie wyraz w postępie arytmetycznym.

W tak wielkiej liczbie wyrazów postępu ieometrycznego z których każdy, dwa skrajne wyłaczyszy, większy byłby od 1 a mniejszy od 10, znalazłyby się niektóre wyrazy tak mało od liczb 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9 różniące się, że ie bez znacznego uchybienia, wzięłyby można za te liczby, a odpowiadające im wyrazy w postępie arytmetycznym za logarytmy tychże liczb. Tak np. znaleźlibyśmy w postępie ieometrycznym wyrazy 1,9999999; 2,0000001; 2,9999999; 3,0000001; 3,9999999; 4,0000001; i t. d. z tych pierwszy lub drugi może być wzięty za liczbę 2, trzeci lub czwarty za liczbę 3, piąty lub szósty za liczbę 4 i t. d., a odpowiadające im wyrazy w postępie arytmetycznym za logarytmy liczb 2, 3, 4 i t. d. Tym sposobem znaleźlibyśmy logarytmy liczb średnich między 1 i 10.

Pododnież między 10 i 100 umieścilibyśmy 10000000 średnich ieometrycznie proporcjonalnych, i tyleż średnich arytmetycznie pro-

proporcjonalnych między 1 i 2; a wyrazy postępu iometrycznego najbliższe liczb 11, 12, 13...99, wzięlibyśmy za te liczby, odpowiadające zaś im wyrazy postępu arytmetycznego za logarytmy tychże liczb, i t. d.

141. Działanie to staie się nierównie krótsze, gdy idzie o wyznaczenie logarytmu jedney jakiey liczby. Niechby np. trzeba było znaleźć logarytm liczby 2, która znajduie się między dwoma pierwszymi wyrazami 1 i 10 powyższego fundamentalnego postępu iometrycznego.

Znajdźmy naprzód średnią iometrycznie proporcjonalną między 1 i 10, i średnią arytmetycznie proporcjonalną między 0 i 1; pierwsza liczba szukana jest, jak już powiedzieliśmy, 3,16227766, druga $\frac{1}{2}$. Znalezione liczba średnia iometrycznie proporcjonalna jest większa od liczby 2; liczba zaś 2 mieścić się będzie między 1 i tą średnią iometrycznie proporcjonalną 3,16227766; a logarytm liczby 2 mieścić się będzie między 0 i $\frac{1}{2}$.

Znajdźmy powtórę średnią iometrycznie proporcjonalną między 1 i 3,16227766, tudzież średnią arytmetycznie proporcjonalną między 0 i $\frac{1}{2}$; pierwsza z tych dwóch liczb szukanych jest 1,77827941, druga $\frac{1}{4}$. Znalezione powtórnie średnia iometrycznie proporcjonalna mniejsza jest od liczby 2; zatem liczba 2 mieścić się będzie między tą średnią iometrycznie proporcjonalną, i między 3,16227766, która jest od liczby 2 większa.

a logarytm liczby 2 mieścić się będzie między $\frac{1}{4}$ i $\frac{1}{2}$.

Znajdźmy znowu średnią iometrycznie proporcjonalną między 1,77827941 i między 3,16227766, tudzież średnią arytmetycznie proporcjonalną między $\frac{1}{4}$ i $\frac{1}{2}$; pierwsza z dwóch tych liczb szukanych jest 2,37137370, druga $\frac{3}{8}$. Znalezione po trzeci raz średnia iometrycznie proporcjonalna jest większa od liczby 2; zatem liczba 2 mieścić się będzie między 1,77827941 i między 2,37137370, z których pierwsza jest mniejsza a druga większa od liczby 2; logarytm zaś liczby 2 mieścić się będzie między $\frac{1}{4}$ i $\frac{3}{8}$.

Tym samym sposobem postępuje się dalej, szukając zawsze średnię iometrycznie proporcjonalną między dwiema pierwszy znalezionemi, z których jedna jest mniejsza, druga większa od liczby 2, lecz tak jedna jak druga jest najbliższa liczby 2, a przy każdem działaniu szuka się także średnia arytmetycznie proporcjonalna między dwiema pierwszy znalezionemi, które dwóm średnim iometrycznie proporcjonalnym do tegoż działania wchodzącym odpowiadają. Nakoniec za 26 działaniem znajdziemy średnią iometrycznie proporcjonalną 2,0000001, a odpowiadającą iey średnią arytmetycznie proporcjonalną 0,3010300. Liczba 2,0000001 różni się tylko od liczby 2 iedną iednością dziesiątą siedmego rzędu: można ją więc bez znacznego uchybienia wziąć za liczbę 2, a odpowiadającą iey średnią ary-

metrycznie proporcjonalną za logarytm liczby 2.

Logarytm 0,0501300 uważany iako wykładnik liczby 10 wzięty za zasadę znaczy że liczba 10 podniosły do potęgi wskazanej przez licznik 3010300, a z wypadku tego, wyciągawszy pierwiastek wskazany przez mianownik 1000000, znajdziemy liczbę bardzo bliską liczby 2; czyli że

$$(10)^{\frac{3010300}{1000000}} = 2.$$

Pierwsza strona równania tego jest cokolwiek od liczby 2 większa; lecz liczba $(10)^{\frac{3010300}{1000000}}$ jest nieco od liczby 2 mniejsza.

142. Są także inne sposoby wyznaczania logarytmów; lecz do zrozumienia ich potrzebne są wyższe wiadomości z Algiebry: ieden tylko następniący może tu być wyłożony:

Chcąc znaleźć logarytm liczby 2, trzeba rozwiązać następujące równanie:

$$(10)^x = 2 \dots (1),$$

w którym niewiadoma x jest logarytmem szukany.

Ponieważ $(10)^0 = 1$, a $(10)^1 = 10$; więc liczba szukana x musi być większa od 0, a mniejsza od 1; to jest liczba x musi być ułomkiem.

Niech będzie więc $x = \frac{1}{p}$ ważność tę zamiast x położywszy w równaniu (1), będzie

$$(10)^{\frac{1}{p}} = 2.$$

Podniosły obie strony do potęgi p będzie (137)

$$(10)$$

$$(10)^{\frac{p}{p}} = 2^p \text{ czyli } (10)^1 = 2^p \dots (2).$$

Ze zaś $2^1 = 2$, a $2^2 = 4$, a $2^3 = 8$; stąd wnosiemy że w równaniu (2) ważność p musi być większa od 3, a mniejsza od 4. Niech będzie więc $p = 3 + \frac{1}{q}$; ważność tę położywszy zamiast p w równaniu (2) będzie

$$2^{3 + \frac{1}{q}} = 10; \text{ czyli, } 2^3 \times 2^{\frac{1}{q}} = 10 \text{ (30).}$$

Podzieliwszy obie strony przez 2^3 czyli przez 8, będzie

$$\frac{1}{2^q} = \frac{5}{4};$$

Podniosły obie strony do potęgi q , będzie

$$2 = \left(\frac{5}{4}\right)^q \text{ (3).}$$

Ze zaś ułomek $\frac{5}{4}$ podniesiony do potęgi q czyni liczbę mniejszą od 2, a podniesiony do potęgi 4tę czyni liczbę większą od 2; w równaniu zatem (3) ważność q musi być większa od 3, a mniejsza od 4. Uczyńmy więc $q = 3 + \frac{1}{r}$; ważność tę położywszy zamiast q w równaniu (3), będzie

$$2^{\frac{1}{r}} = 2; \text{ czyli } \left(\frac{5}{4}\right)^3 \times \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{r}} = 2.$$

Podzieliwszy obie strony przez $\left(\frac{5}{4}\right)^3$ czyli przez $\frac{125}{64}$, będzie

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{r}} = 2 \times \frac{64}{125} = \frac{128}{125}.$$

Podniosły obie strony do potęgi, r , będzie

$$\left(\frac{128}{125}\right)^r = 2 \dots (4).$$

Ułomek $\frac{123}{123}$ podnosząc następnie do potęgi 2, 3, 4 i t. d. znajdziemy, że ułomek ten podniesiony do potęgi trzeciej mniejszy jest od $\frac{1}{2}$, a podniesiony do potęgi czwartej większy jest od $\frac{1}{2}$; stąd wnosimy, że w równaniu (1) wartość r jest większa od 9, a mniejsza od 10. Moglibyśmy więc uczynić $r = 9 + \frac{1}{4}$; i podobnie, żywszy wartość tę zamiast r w równaniu (4), posunąć działanie dalej. Ale że nam idzie nie o wynalezienie logarytmu liczby 2, lecz o pokazanie jakim sposobem logarytm ten wynaleziony być może, przelaliśmy na tem cośmy znaleźli dotąd, i daymy że $r = 9$.

Ponieważ $q = 3 + \frac{1}{r}$, a $r = 9$; więc $q = 3 + \frac{1}{9}$.

Aże $p = 3 + \frac{1}{q}$; a $q = \frac{28}{9}$; więc $p = 3 + \frac{9}{28} = \frac{85}{28}$. Że zaś $x = \frac{1}{p}$; a $p = \frac{85}{28}$;

wiec $x = \frac{28}{85}$. Wartość tę położywszy zamiast x w równaniu (1), będzie

$$(10)^{\frac{28}{85}} = 2.$$

Ułomek $\frac{28}{85}$ obróciwszy na dziesiętny wypadnie

$$(10)^{0.30107} = 2.$$

Logarytm zatem liczby 2 jest 0,30107. Logarytm ten zgadza się z logarytmem tejże liczby wyżej (141) znalezionym w czterech pierwszych cyfrach dziesiętnych: a byłby jeszcze dokładniejszy, gdybyśmy powyższe działanie posunęli.

143. Logarytm liczby 2 mnożąc następnie przez 2, 3, 4 i t. d. otrzymamy logarytmy liczb 4, 8, 16 i t. d. które są potęgami 2gą, 3cią, 4tą i t. d. liczby 2.

Logarytm liczby 2 dodawszy do logarytmu liczby 10, 100, 1000 i t. d. otrzymamy logarytmy liczb 20, 200, 2000, i t. d. Wreżcie dosyć będzie mieć logarytmy liczb pierwszych, ażeby otrzymać logarytmy wszystkich liczb złożonych, które są potęgami, lub iloczynami liczb pierwszych (a). I tak ponieważ $25 = 5^2$; więc logarytm liczby 25 równy będzie logarytmowi liczby 5 rozmnożonemu przez 2; czyli $l\ 25 = 2\ l\ 5$. Podobnież ponieważ $210 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3$; więc $l\ 210 = l\ 2 + l\ 5 + l\ 7 + l\ 3$; i t. d.

Niektórych nawet liczb pierwszych można będzie otrzymać logarytmy tym samym

144. Liczby, 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 i wszystkie inne nie będące ani potęgami, ani iloczynami liczb innych przez siebie rozmnożonych, zowią się liczbami pierwszymi. Te zaś liczby które są albo potęgami albo iloczynami liczb pierwszych, zowią się liczbami złożonymi; i jakie są $9 = 3^2$, $21 = 7 \cdot 3$, i t. d. Wogólności liczbami między sobą pierwszymi zowiemy te, które nie mają innej miary wspólnej tylko jedności. Tak liczby 20 i 27 mające tylko jedność za wspólną miarę są między sobą pierwszymi.

sposobem. I tak ponieważ $5 = \frac{10}{2}$, więc $\frac{15}{110} = \frac{1}{2}$; i t. d.

144. Logarytmy, które zwyczajnie wyrażają się ułomkami dziesiętnymi, złożone są z dwóch części przecinkiem od siebie oddzielonych: część po lewéj stronie przecinka będąca, jest zawsze albo zerem, albo liczbą całkowitą; część będąca po prawéj stronie przecinka jest ułomkiem dziesiętnym. Pierwsza część zowie się *cechą* logarytmu, *characteristica*; gdyż daie poznać do którego rzędu iedności należy, czyli z ilu cyfr składa się liczba, której dany jest logarytm. Jedności pierwszego rzędu czyli liczby iednocyfrowe mają w logarytmie cechę 0; iedności drugiego rzędu czyli liczby dwucyfrowe mają za cechę 1; iedności trzeciego rzędu czyli liczby trzycyfrowe mają za cechę 2; i t. d. Wogólności iedności cecha danego logarytmu ma iedności n , liczbę temu logarytmowi odpowiadającą składa się z cyfr $n + 1$; i odwrotnie, jeżeli dana liczba ma cyfr n , cecha logarytmu liczbie téj odpowiadającego ma iedności $n - 1$.

145. Logarytmy liczb dziesięciokrotnych, czyli dziesięć razy od siebie większych lub mniejszych, mają drugą część po prawéj stronie przecinka znajdującą się iednakową, i tę samą cechę odmienną.

np. liczba 5436 ma za logarytm

5436	-	-	-	4,755279
543,6	-	-	-	3,735279
54,36	-	-	-	2,735279
5,436	-	-	-	1,735279
0,5436	-	-	-	0,735279

bo gdy każda z tych liczb jest ilorazem poprzedzającego przez 10 podzielonéj, wypadać, że chcąc otrzymać logarytm iednéj, trzeba od logarytmu drugiéj odjąć logarytm liczby 10 czyli 1 (57); a tym sposobem cecha logarytmu liczby poprzedzającego zmniejszy się iednością, część zaś logarytmu po prawéj stronie przecinka będąca zostanie ta sama.

146. Ponieważ ułomek jest ilorazem licznika podzielonego przez mianownik, a dzielenie za pomocą logarytmów odbywa się przez odjęcie logarytmu dzielnika od logarytmu dzielnej; chcąc więc otrzymać logarytm ułamka, trzeba od logarytmu licznika odjąć logarytm mianownika. Kiedy licznik jest mniejszy od mianownika, będzie też logarytm licznika mniejszy od logarytmu mianownika; odejmując przeto drugi od pierwszego, reszta wypadnie odjemna. Skąd się okazuje, że logarytmy ułamków są odjemne.

Chcąc np. znaleźć logarytm ułamka $\frac{1}{12}$, trzeba od logarytmu iedności, którym jest 0, odjąć logarytm liczby 12, którym jest 0,3010300. Będzie $1\frac{1}{12} = 0 - 0,3010300 = -0,3010300$. Odiawszy od 0 liczbę 1,3010300 która jest logarytmem 20, znajdziemy logarytm ułamka $\frac{1}{12}$ równy $-1,3010300$.

Ponieważ $13 = 0,4771213$ a $12 = 0,3010300$; więc logarytm $\frac{13}{12} = 0,3010300 - 0,4771213 = -0,1760913$ i t. d.

A zatem chcąc np. liczbę 36 rozmnóżyć przez ułomek $\frac{1}{2}$, trzeba do logarytmu liczby

36, którym jest 1,5563025, dodać logarytm ułomka $\frac{2}{3}$, którym jest — 0,1760913; aże drugi logarytm jest odjemny, więc go od pierwszego należy odjąć; i będzie $36 \times \frac{2}{3} = 136 + 1\frac{2}{3} = 1,5563025 - 0,1760913$.

Skąd się okazuje, że mnożenie liczby całkowitej przez ułomek za pomocą logarytmów odbywa się przez odcięcie logarytmu ułomka od logarytmu całkowitej; gdy tym czasem mnożenie liczb całkowitych, jakośmy już okazali, odbywa się zawsze przez dodanie logarytmów liczbom tym odpowiadających. Przeciwnie dla podzielenia liczby 36 przez ułomek $\frac{2}{3}$, należałoby, odciągając odjemny logarytm ułomka $\frac{2}{3}$ od logarytmu całkowitej 36, według prawideł odejmowania (24), logarytm ułomka dodać do logarytmu całkowitej; gdy tym czasem dzielenie liczb całkowitych odbywa się przez odcięcie logarytmów do liczb tych należących. Ta nie jednolitość działań za pomocą logarytmów zdawać się może na pierwsze wyrażenie szczególniejszą. Lecz zgłębszy rzecz należycie, przekonamy się, że zawsze odejmowanie logarytmów odpowiada dzieleniu liczb, a dodawanie logarytmów odpowiada mnożeniu liczb, czy liczby te są całkowite czy ułomkowe. Jakoż dla otrzymania logarytmu ułomka $\frac{2}{3}$, odejmiemy logarytm licznika 2 od logarytmu mianownika 3, a przed pozostałą resztą dałemy znak —. Nie zwalając zatem na znak —, logarytm ułomka $\frac{2}{3}$ właściwie mówiąc logarytmem ilorazu wy-

rażającego z podzielenia mianownika 3 przez licznik 2, i należy do ułomka $\frac{2}{3}$. Mógłby zaś liczbę 36 przez $\frac{2}{3}$ jest to samo, co ją podzielić przez $\frac{3}{2}$: obudwóch bowiem działani wypadkiem jest 24.

147. Lecz można z łatwością uniknąć logarytmów odjemnych w działaniach z ułomkami, iak pospolicie czynić się zwykło: dosyć jest tym końcem cechę logarytmu licznika powiększyć tylu jednościami ile się podobą, byleby od tak powiększonego logarytmu licznika mógł być odjęty logarytm mianownika; a w znalezionym ostatecznym wypadku odciąć z prawej strony tyle cyfr, ile jedności dodało się do cechy logarytmu licznika. I tak chcąc np. znaleźć logarytm ułomka $\frac{2}{3}$, do cechy logarytmu licznika 2, który jest 0,4771213, dodawszy np. 3 jedności, będzie 3,4771213, logarytm liczby 1000 razy większy niż jest licznik 2 (145). Od tego logarytmu odjąwszy logarytm mianownika 3, który jest 0,9030900, zostanie 2,5740313 logarytm liczby 1000 razy większy niż ułomek $\frac{2}{3}$. Logarytmowi temu odpowiada w tablicy liczba 375: liczba zatem ta podzielona przez 1000 będzie ważnością ułomka $\frac{2}{3}$. I w rzeczy samy ułomek $\frac{2}{3}$ obrócony na ułomek dziesiętny czyni 0,375. Gdyby trzeba było mnożyć ułomek $\frac{2}{3}$ przez całkowitą 36; do powyższego logarytmu 2,5740313, dodawszy logar. liczby 36, który jest 1,5563025, będzie 4,1303338 logarytm któremu odpowiada w tablicy liczba 13500 tysięcy razy większa

niż iloczyn szukany, Jloczyn więc ten będzie 13,500, czyli 13,5. i t. d.

Skąd się okazuje że odejmowanie logarytmów można zamienić na ich dodawanie, iak się pospolicie czyni, równie dla jednoślajności w działaniach z logarytmami, iako też dla ułatwienia tychże działań: odejmowanie bowiem liczb wielkich wymaga większey uwagi aniżeli dodawanie. Chcąc np. podzielić 186 przez 31, trzeba od logarytmu dzielnéy który jest 2,2695129, odjąć logarytm dzielnika to jest 1,4913616, a reszta 0,7781513 jest logarytmem ilorazu. Lecz zamiast odejmowania logarytmu dzielnika od logarytmu dzielnéy, można logarytm pierwszy odjąć np. od liczby 10. Odejmowanie to nie wielkiéy wymaga uwagi: gdyż wszystkie cyfry logarytmu poczynając od siro-ny lewéy odejmują się od 9; a ostatnia od 10; tym sposobem różnica między liczbą 10 i logarytmem 1,4912616, znajduje się bardzo łatwo, i pisze się pod logarytmem dzielnéy; potem oba te logarytmy dodają się, a od ich summy odejmuje się liczba 10, reszta jest logarytmem szukanego ilorazu; będzie zatem Logarytm dzielnéy - - - - - 2,2695129. Różnica między 10 i log. dzielnika 8,5084884.

Summa 10,7781513

Od téy summy odjąwszy liczbę 10, będzie 0,7781513 logarytm szukanego ilorazu.

Sposób takowy postępowania zgadza się zupełnie z wyłożonemi zasadami działań algie-

braicznych. Jakoż odejmując np. zwyczajnym sposobem ilości b od ilości a , zostaje $a - b$; gdy zaś pierwéy ilość b odejmuje się od 10, i pozostała reszta $10 - b$ doda się do ilości a , będzie summa $a + 10 - b$, od której odjąwszy 10, zostanie reszta $a - b$ iak wyżej.

Różnica między danym logarytmem a liczbą 10, 100; i t. d. nazywa się *dopełnieniem arytmetycznym* tego logarytmu.

148. Częstokroć się prztrafia, że po odbytem działaniu wypadnie logarytm taki, który się nie znajduje w tablicach. Sposób, podług którego znaleźć można liczbę logarytmowi temu odpowiadającą, wyłożymy w następującym przykładzie: chcąc za pomocą logarytmów rozłożyć 354 przez $7\frac{3}{4}$ czyli przez $\frac{31}{4}$; będzie

$$354 \times \frac{31}{4} = 1354 + 131 - 14 = 3,4383050.$$

Logarytm ten w tablicach się nie znajduje: lecz z dwóch najbardziej do niego przybliżających się większy jest 3,438341, który odpowiada liczbie 2744, mniejszy zaś jest 3,438258, który odpowiada liczbie 2743. Skąd wnosząc liczba odpowiadająca logarytmowi 3,4383050 musi być 2743 i ułamek. Dla oznaczenia tego ułamka biorę naprzód różnicę między logarytmami liczb 2744 i 2743, potem różnicę między logarytmem danym 3,4383050 i logarytmem liczby 2743; pierwsza z tych różnic jest

0,0001583, druga 0,0000792. Aże różnice logarytmów mało co od siebie odmiennych, mogą być uważane za proporcjonalne różnicom liczb tym logarytmom odpowiadających, w działaniach zwłaszcza w których najczęściej rzecz idzie o wynalezienie ważności przybliżonych; układam więc następującą proporcję: iak się ma różnica między logarytmami odpowiadającemi dwom liczbom 2744 i 2745 do różnicy tychże liczb; to jest do 1, tak się ma różnica między logarytmem liczby szukaney i liczby 2743 do różnicy tychże liczb. Różnica zatem między liczbą szukaną i liczbą 2743 będzie czwartym wyrazem następującej proporcji: 0,0001583: 1 = 0,0000792: x; czyli (91) 1583: 1 = 792: x = $\frac{792}{1583} = 0,5$. Ułomek ten dodawszy do 2743, będzie 2743,5 liczba odpowiadająca logarytmowi 3,4533050.

Czasem nie tylko cyfry dziesiętne, lecz i cecha danego logarytmu nie zgadza się z logarytmami tablic. I tak chcąc np. wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z liczby 28 za pomocą logarytmów, będzie $\sqrt{28} = \frac{128}{2} =$

0,7235790. Logarytm ten wzięty z cechą 3 najbliższy jest dwóm logarytmów 5,7236198, i 3,7235378, które odpowiadają liczbom 5292 i 5291. Azatem logarytm pierwiastku liczby 28 wzięty z cechą 3 odpowiadać będzie liczbie mniejszej od 5292, a większej od 5291; to jest, liczba logarytmowi temu odpowiadająca będzie 5291 i ułomek. Abyśmy ten ułomek

oznaczyli, weźmy naprzód różnicę między logarytmami liczb 5292 i 5291; potem różnicę między logarytmem pierwiastku liczby 28 wziętym z cechą 3, i logarytmem liczby 5291; pierwsza z tych różnic wynosi 0,0000820, druga 0,0000412. Ułomkiem zatem szukanym będzie czwarty wyraz następującej propor: 0,0000820: 1 = 0,0000412: x = $\frac{412}{820} = 0,502$.

Ułomek ten dodawszy do liczby 5291, będzie 5291,502 liczba której logarytmem jest 3,7235790. Cyfry dziesiętne tego logarytmu zgadzają się zupełnie z cyframi dziesiętnymi w znalezionym logarytmie pierwiastku kwadratowego liczby 28; lecz oślatni ma za cechą 0, co dowodzi że liczba temu logarytmowi odpowiadająca jest jednocyfrowa (144); pierwiastkiem przeto szukanym będzie liczba 5,291502: taki też jest pierwiastek liczby 28 znaleziony sposobem zwyczajnym.

149. Tablice logarytmów iakich zwyczajnie w działaniach używamy, co do rozległości swojej są rozmaite: najpospolitsze rozciągają się tylko do liczby 10000 lub 20000. Można jednak z łatwością znaleźć logarytm wszelkiey liczby tak wielkiey iak się podoba, za pomocą logarytmów liczb tablicą objętych, a to sposobem następującym: Dajmy że potrzeba znaleźć logarytm liczby 879653 za pomocą tablicy rozciągającej się tylko do 10000. Odciąwszy w liczbie daney dwie oślatnie cyfry będzie liczba 8796,53 sto razy mniejsza od liczby daney. Część całkowita téy liczby, to

jest 8796, znajduie się w tablicy, i ma za logarytm 5,9442852. Biorę potem z tablicy różnicę logarytmów dwóch liczb po sobie następujących to jest 8796 i 8797; różnica ta jest 0,0000494. Aże różnice liczb mało co między sobą różniących, się mogą być uważane za proporcjonalne różnicom logarytmów liczbom tym odpowiadających, iakośmy już to uważali; układam więc następującą proporcją: jak się ma i różnica dwóch liczb 8797 i 8796, do różnicy ich logarytmów, to jest do 0,0000494, tak się ma 0,53 różnica dwóch liczb 8796,53 i 8796, do różnicy ich logarytmów. A zatem ta ostatnia różnica będzie czwartym wyrazem następującej proporcji:

$1:0,0000494 = 0,53:x = 0,000026182$;
opuszczwszy dwie ostatnie cyfry dziesiętne, będzie $x = 0,0000261$. Dodawszy liczbę tę do 5,9442852 logar. liczby 8796, będzie 5,9443113 logarytm liczby 8796,53. Ze zaś liczba ta jest 100 razy mniejsza od liczby daney 879653; więc dodawszy dwie jedności do cechy powyższego logarytmu, będzie logarytm szukany 5,9443113.

150. To cośmy dotąd o logarytmach powiedzieli, dostateczne jest do okazania, iakim sposobem tablic logarytmowych do rachunku używać należy. Prócz tego tablice te mają na wstępie nie tylko wykład porządku podług którego są rozłożone, i który jest w każdym niemal dziele tablic logarytmowych odmienny; ale też podają różne sposoby i skrócenia w

działaniach z logarytmami używane. Wstępie więc takowy pierwszy odczytać należy nim się do używania tablic logarytmowych przystąpi.

Odczytuąc takowe wstępy, natrafiamy częstokroć na wyrażenie, że *logarytm zera równy jest liczbie nieskończonéy wziętyj ze znakiem odmiennym*. Abyśmy to wyrażenie zrozumieli, uważać potrzeba, że logarytmy równie iak odpowiadające im liczby, powiększają się bez granic, i mogą być nieskończenie wielkie. Aże kiedy liczba y jest ułamkiem, logarytm iéy x ma zawsze przed sobą znak odmienny, i jest ilością tém większą, im mniejszą ma wartość liczba y , iakośmy to wyżéy uważali (138); jest więc rzeczą oczywistą, że w tym przypadku nie podobna dla x oznaczyć wartości tak wielkiej ażeby wartość x wzięta ze znakiem odmiennym, czyniła liczbę y zupełnie równą zeru; a tém samém logarytmem zera musi być liczba nieskończona wzięta ze znakiem odmiennym.

151. Układ logarytmów liczbę 10 za zasadę mających, o których dotąd mówiliśmy, zowie się układem logarytmów *pospolitych*, dla różnicy od innych układów logarytmowych podług innéj zasady wyrachowanych i mających inné nazwiska. W każdym układzie logarytmem jedności jest zero: gdyż iakakolwiek będzie wartość zasady a , zawsze jest $a^0 = 1$. Wszystkie inne liczby, jedność wyłączwszy, mają w każdym układzie inne logarytmy; rzeczą bowiem jest widoczną, że

iężeli $a : A$ są dwie różne zasady dwóch układów logarytmowych, i jeżeli jest w jednym układzie $a^x = y$, w drugim $A^x = y$; wykładnik x będący logarytmem liczby y w układzie pierwszym musi być koniecznionie odmienny od wykładnika x będącego logarytmem tejże samej liczby y w układzie drugim. Lecz mając logarytm liczby jakiegokolwiek y podług zasady a wyrachowany, łatwo jest otrzymać logarytm tejże liczby stosowny do innej jakiegokolwiek zasady przez A oznaczony. Jakoż z dwóch równań $a^x = y$, $A^x = y$, wypada $A^x = a^x$. Oznaczwszy przez l logarytm mający za zasadę a , będzie $lA^x = l a^x$.

Że zaś podług założenia $l a^x = l y$; a $l A^x = x l A$ (137); będzie więc $x l A = l y$; a tym samym

$$x = \frac{l y}{l A}.$$

Lecz uważając A za zasadę, x jest logarytmem liczby y w układzie drugim; oznaczwszy zatem logarytm tego drugiego układu przez L , będzie $l A = L y$; czyli $x = L y$. W powyższem więc równaniu zamiast x położywszy $L y$, będzie

$$L y = \frac{l y}{l A}.$$

To jest: chcąc znaleźć logarytm liczby y w układzie drugim, trzeba tej logarytm wzięty z układu pierwszego podzielić przez takiż logarytm zasady układu drugiego.

Zrównania poprzedzającego wypada także

$$\frac{l y}{L y} = l A$$

Skąd się okazuje, że jakakolwiek jest liczba y , zawsze między tej logarytmami $l y$ i $L y$ zachodzi stosunek nie odmienny i równy $l A$.

152. Abyśmy się z używaniem logarytmów oswoili, rozwiążemy za ich pomocą naprzód niektóre formuły ogólne, potem zagadnienia liczebne.

Z definicyi logarytmów i z tego cośmy o nich dotąd powiedzieli wypada, że

$$\text{1}^{\text{o}} d, l(AB) = l A + l B. \text{2}^{\text{e}}, l\left(\frac{A}{B}\right) = l A - l B.$$

$$\text{3}^{\text{cie}}, l A^m = m l A. \text{4}^{\text{te}}, l A^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} l A.$$

Stosując prawidła te do formuły

$$\frac{A^2 \sqrt{B^2 - C^2}}{C \sqrt{D^2 E F}}, \text{ znajdziemy}$$

$$l(A^2 \sqrt{B^2 - C^2}) = l\{A^2 \sqrt{(B+C)(B-C)}\} = 2 l A + \frac{1}{2} l(B+C) + \frac{1}{2} l(B-C).$$

$$l(C \sqrt{D^2 E F}) = l\left\{C + \frac{1}{2} l D + \frac{1}{2} l E + \frac{1}{2} l F\right\}.$$

Dana więc formuła zamieni się w następującą:

$$2 l A + \frac{1}{2} l(B+C) + \frac{1}{2} l(B-C) - l C - \frac{1}{2} l D - \frac{1}{2} l E - \frac{1}{2} l F.$$

Równanie $b^x = c$ chcąc rozwiązać za pomocą logarytmów, będzie

$$l b^x = l c; \text{ a} \text{ż} o l b x = x l b, \text{ więc } x l b = l c, \text{ a tym samym}$$

$$z = \frac{lc}{lb}$$

Podobnież chcąc za pomocą logarytmów rozwiązać równanie $b^z = d$, w którym z wykładnik c jest ilością niewiadomą; trzeba naprzód uczynić $c^z = u$ tym sposobem równanie dane zamieni się w następujące: $b^u = d$; więc $lb^u = ld$; czyli $alb = ld$; a t^ęm sam^ęm

$u = \frac{ld}{lb}$, czyli $c^z = \frac{ld}{lb}$: gdyż $u = c^z$ podług przypuszczenia. W t^ęm równaniu wzięwszy znowu logarytm obu stron, będzie

$$zlc = l\left(\frac{ld}{lb}\right) = ld - llb: \text{ więc } z = \frac{ld - llb}{lc}$$

W t^ęm ostatni^ęm wyrażeniu wyraz ld znaczy logarytm logarytmu ilości d , i otrzymania się uważając logarytm ilości d jako liczbę pospolitą.

Ilości b^z , b^z i tym podobne, zowią się wykładnicze, *exponentiales*.

153. Zagadnienie I. W postępie iometrycznym mając wiadomy wyraz pierwszy a , ostatni l , i liczbę wyrazów n , znaleźć stosunek q ; albo też mając wiadome a , l , i q , znaleźć n .

Z równania $l = aq^{n-1}$ (133) wypada

$$q^{n-1}$$

$$q^{n-1} = \frac{l}{a}; \text{ czyli } (n-1) \log. q = \log. l - \log. a;$$

$$\text{więc } \log. q = \frac{\log. l - \log. a}{n-1}; n = 1 +$$

$$\frac{\log. l - \log. a}{\log. q}$$

Chcąc np. między dwiema liczbami 3 i 192 umieścić pięć średnich iometrycznie proporcjonalnych, trzeba ułożyć postępie iometryczny, którego wyraz pierwszy jest 3, ostatni 192, a liczba wyrazów 7. Postępie takowy łatwo będzie ułożyć znalazłszy stosunek. Położywszy więc w powyższ^ęm równaniu 192 zamiast l , 3 zamiast a , 6 zamiast $n-1$, będzie

$$\log. q = \frac{\log. 192 - \log. 3}{6} = 0,3010300.$$

Logarytm ten odpowiada liczbie 2; więc $q = 2$. Postępie zatem szukany będzie $\div 3: 6: 12: 24: 48: 96: 192$.

Podobnież chcąc rozwiązać zagadnienie następujące: z beczki obrymującej 100 garcy wina, ułoczono garniec wina, a wiano garniec wody; ułoczono znowu garniectę mieszaniny, a wiano garniec wody; i. t. d. ileś razy działanie to powtórzyć należy, aby w ostatni^ęm mieszaninie w beczce znalazł się woda z winem na pół? by a zmieszana? trzeba uważać, że za każdym działaniem ubywa setna część wina w beczce się znajdującego; liczby zatem wyrażające ilość wina w beczce będącego składają postępie ieo-

metryczny malejący, którego wyraz pierwszy jest 100, drugi 99, ostatni 50, stosunek zaś $\frac{100}{99}$. Postęp ten zamienić można na postęp rosnący, którego pierwszy wyraz jest 50, ostatni 100, a stosunek $\frac{100}{99}$. Liczba wyrazów postępu składających jest widocznie jednością większa od liczby działań do otrzymania żądanej mieszaniny potrzebnych: gdyż oprócz wyrazów oznaczających ilość wina po każdym działaniu w beczce pozostają, jest jeszcze wyraz ostatni 100 oznaczający ilość wina znajdującą się w beczce przed rozpoczęciem działań. Wyrównaniu zatem

$$n = 1 + \frac{\log l - \log a}{\log q}, \text{ odcinawszy po ubu fitynach } 1, \text{ i położywszy } 100 \text{ zamiast } l, 50 \text{ zamiast } a, \text{ a } \frac{100}{99} \text{ zamiast } q, \text{ będzie}$$

$$n - 1 = \frac{\log 100 - \log 50}{\log 100 - \log 99} = \frac{0,3010300}{0,0043648} = 68,9.$$

To jest: potrzeba było utoczyć z beczki blisko 69 garcy.

Ten sam jest sposób postępowania we wszystkich innych zagadnieniach, w jakimkolwiek bądź kształcie wystawionych, które z wiadomości o postępach iometrycznych ułożyć można, iakże są *np.* następujące.

Właściciel wartujący kilka kroc istotnący o majątności oświadcza przyjacielom, że ma-

jętność tę podzielił na 32 akcyy równych, które chciałby sprzedać w następujący sposób: pierwszą akcyą przeda za 1 grosz miedziany, drugą za 2 grosze, trzecią za 4 grosze, czwartą za 8 groszy i t. d. lecz z tym istotnym warunkiem dla początkowych akcyonistów, że póty akcyy swoich nie zaymą w posiadłość, póki mu kupców nie wynaydą na wszystkie. Jleż będzie kosztowała ostatnia akcya, i ileby dostał właściciel za majątność tym sposobem sprzedaną?

Dłużnik winnym będąc 54000 zł. umawia się z wierzycielem, że jeśli mu dług tego nie wypłaci na oznaczonym terminie, tedy za pierwszy miesiąc przetrzymanej wypłaty zapłaci od każdego sta po 1 denarze za drugi po 2 denary, za trzeci po 4 denary i t. d. Wypłata długu przetrzymana była lat 8 i 4 miesiące: iakż sumę prócz kapitału winien jest dłużnik wierzycielowi?

W pierwszym z tych dwóch zagadnień idzie o wynalezienie wyrazu ostatniego i summy wszystkich wyrazów składających postęp iometryczny, którego wyraz pierwszy jest 1, stosunek 2, a liczba wyrazów 32. W równaniach zatem

$$l = aq^{n-1}, s = \frac{ql - a}{q - 1} \quad (135)$$

uczyniwszy $a=1$, $q=2$, $n=32$, będzie $l=2^{31}$, $s=2^{32}-1=2^{32}-1$. Odbiwszy działanie za pomocą logarytmów znajdziemy

$l = 2147483648$ groszy $s = 4294967295$ groszy
czyli $l = 3976821$ cz. zł. 10 i groszy 8.

$s = 7953645$ cz. zł 2 złote i groszy 15.

Zagadnienie drugie t $\acute{e}$ m si $\acute{e}$ r $\acute{o$ żni od pierwszego, że w niem potrzeba znaleźć summe poslepu ieometrycznego złożonego ze 160 wyrazów, w którym wyraz pierwszy jest złoty ieden, wyraz drugi złoty 2 i t. d, rachując na ieden grosz miedziany denarów 18. Będzie zatem $s = 2^{100} - 1$.

To jest: liczbę 2 podniosszy do potegi setnej i od wypadku odjąwszy iedność, reszta będzie summa złotych, którą dłużnik oprócz kapitału winien wierzycielowi. Będzie więc $2^{100} = \log. 2 \times 100 = 0,010300 \times 100 = 30, 1030000$.

Ponieważ ten logarytm ma za cechę 30 iedności, summa zatem szukana składa się ze 31 cyfr (144), i t. d.

154. Zagad. II. *Kapitał a umieszczony w banku na lat n, jaki będzie na końcu ostatecznego roku wraz z procentem, biorąc procent składany, czyli rachując procent od procentu?*

Procent roczny od kapitału, iak wiadomo z Arytmetyki, dwoma sposobami odrzucić można: albo liczbę set w kapitale zawartych mnożąc przez procent roczny od iednego sta; albo liczbę iedności kapitał składających mnożąc przez procent roczny od iednego złotego. W pierwszym przypadku procent roczny równa się kapitałowi podzielonemu przez 100, a rozmno-

żonemu przez liczbę wyrażającą procent roczny od sta; w drugim przypadku *procent roczny równa się kapitałowi rozmnożonemu przez liczbę wyrażającą procent roczny od 1.*

Oznaczywszy zatem procent roczny od 1 przez r , procent roczny od kapitału a umieszczonego w banku, podług powyższego prawidła, będzie $= ar$. Ze zaś podług zagadnienia, wierzyciel przylacza procent do kapitału, dodawszy zatem procent ar do kapitału początkowego a , kapitał wraz z procentem na końcu roku pierwszego będzie

$$a + ar = a(1 + r).$$

Kapitał ten zoflawiony w banku na rok drugi, przyniesie rocznego procentu, podług powyższego prawidła, $ar(1 + r)$, który dodawszy do kapitału $a(1 + r)$, będzie kapitał wraz z procentem na końcu roku drugiego.

$$a(1 + r) + ar(1 + r) = (a + ar)(1 + r) = a(1 + r)(1 + r) = a(1 + r)^2$$

Kapitał znowu ten zoflawiony w banku na rok trzeci, przyniesie procentu rocznego $ar(1 + r)^2$, który dodawszy do kapitału $a(1 + r)^2$, będzie kapitał wraz z procentem na końcu roku trzeciego

$$a(1 + r)^2 + ar(1 + r)^2 = (a + ar)(1 + r)^2 = a(1 + r)(1 + r)^2 = a(1 + r)^3$$

Tym sposobem postępując dalej, znajdziemy, że kapitał wraz z procentem na końcu roku czwartego będzie $a(1 + r)^4$; na końcu roku piątego $a(1 + r)^5$ i t. d. na końcu roku ostatecznego czyli n , $a(1 + r)^n$.

Początkowy zatem kapitał a wraz z kapitałami na końcu roku 1go, 2go, 3go... n-go składa następujący postęp iometryczny:

$$\therefore a: a(1+r): a(1+r)^2: a(1+r)^3: \dots$$

$a(1+r)^n$, w którym $1+r$ jest stosunkiem, liczba wyrazów $n+1$, a wyraz ostatni $a(1+r)^n = A$.

Zwyczajny procent jest po 5 od sta: w tym więc przypadku będzie

$$r = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}; \text{ a t\kern-0.1em} \text{ sam\kern-0.1em} 1+r = 1 + \frac{1}{20} = \frac{21}{20}.$$

Cheąc się np. dowiedzieć, w jaką sumę urosnie na końcu 25 roku kapitał 1000 zł. dany na takowy procent po 5 od sta, trzeba w równaniu $A = a(1+r)^n$ uczynić $a = 1000$, $r = \frac{1}{20}$, $n = 25$; tym sposobem równanie to zamieni się w następujące:

$$A = 1000 \left(\frac{21}{20}\right)^{25}, \text{ co rozwiązawszy za pomocą logarytmów, będzie } \lg A = \lg 1000 + (121 - 120) \times 25 = 5,5297322.$$

Logarytm ten w tablicach odpowiada liczbie 3386,353 blisko. To jest: 1000 zł. dane na takowy procent na końcu 25 roku urosłyby w sumę 3386,353.

Gdyby summa zostawała w banku przez lat 100, znaleźlibyśmy $A = 1000 \left(\frac{21}{20}\right)^{100} = 1000 \times 131,5 = 131500$ blisko.

To jest: 1000 zł. dane na takowy procent na końcu 100 roku urosłyby w sumę 131500. Skąd się okazuje jak szybko rosną kapitały przez przydawanie do nich procentów składanych.

Z równania $A = a(1+r)^n$, można wyprowadzić cztery zagadnienia: 1. *Mając wiadomy kapitał początkowy a , procent roczny r , i liczbę lat pobieranych procentów n ; znaleźć kapitał ostateczny A .* Zagadnienie to rozwiązaliśmy wyżej.

2. *Mając wiadome a , A i n , znaleźć r .*

W równaniu $A = a(1+r)^n$ podzieliwszy obie strony przez a będzie $(1+r)^n = \frac{A}{a}$ czyli

$$\lg(1+r) \times n = \lg A - \lg a; \text{ więc}$$

$$\lg(1+r) = \frac{\lg A - \lg a}{n}$$

np. Dłużnik mając za lat 12 zapłacić sumę 20122, zł. chce dla pozbycia się tego długu oddać natychmiast wierzycielowi 10000 zł: iakiż potrąca sobie procent?

W powyższej formule położymy 20122 zamiast A , 10000 zamiast a , 12 zamiast n , będzie

$$\lg(1+r) = \frac{\lg 20122 - \lg 10000}{12} = \frac{3,3036711}{12} = 0,2753059$$

Logarytm ten wzięty z cechę 2, w tablicy odpowiada liczbie 106: ten sam więc logarytm wzięty z cechę 0 odpowiadać będzie liczbie 100 razy mniejszy: a t\kern-0.1em} sam\kern-0.1em} 1+r = 1,06, więc $r = 0,06$; to jest: dłużnik potrąca sobie po 6 od sta.

3. *Mając wiadome A , r i n , znaleźć a .*

Zrównania $A = a(1+r)^n$ wypada $a =$

$$\frac{A}{(1+r)^n}; \text{ czyli } 1a = 1A - 1(1+r) \times n.$$

np. Dłużnik za lat 15 winien jest zapłacić 100000 zł, bez procentu: iakż summe ma teraz oddać wierzycielowi dla pokrycia się tego długu, z potrąceniem sobie procentu po 5 od sta?

Uczyniwszy $100000 = A, 15 = n, \frac{5}{100} = r$, a tём samém $\frac{21}{20} = 1+r$; powyższa formuła zamieni się w następującą:

$$1a = 100000 - 1\left(\frac{21}{20}\right) \times 15.$$

Ze zaś $1\left(\frac{21}{20}\right) = 121 - 120$, trzeba wiece różnice tych dwóch logarytmów rozmnożyć przez 15, iloczyn ten odjąć od logarytmu liczby 100000; reszta będzie logarytmem liczby szukanej.

4. Mając wiadome A, a i r , znaleźć n .

Z równania $A = a(1+r)^n$, wypada $1A = 1a + 1(1+r) \times n$; więc

$$n = \frac{1A - 1a}{1(1+r)}.$$

Chcąc np. dowiedzieć się za ile lat kapitał a dany na procent po 5 od sta, zostanie podwojony, w równaniu $A = a(1+r)^n$ położymy naznaczone wartości, będzie

$$2a = a\left(\frac{21}{20}\right)^n \text{ czyli } 2 = \left(\frac{21}{20}\right)^n; \text{ więc}$$

$$12 = (121 - 120) \times n, \text{ a tём samém}$$

$$n = \frac{12}{121 - 120} = 14, \text{ a blisko};$$

to jest: kapitał umieszczony w banku na procent składany po 5 od sta rocznie, podwojony zostanie za lat 14, miesięcy 2 i dni blisko 15.

155. Zagadnienie III. Umieszczono w banku pierwszego roku summe a , drugiego roku przydano summe b , 5go summe c , 4go summe d , ostatniego roku summe k , na procent składany: it.d. iakż będzie kapitał wraz z procentami na końcu roku n ?

Pierwsza summa a leżąc w banku przez liczbę lat n , urosnie na końcu w kapitał $a(1+r)^n$ (154).

Druga summa b leżąc w banku przez lat $n-1$ urosnie w kapitał $b(1+r)^{n-1}$.

Trzecia summa c leżąc w banku przez lat $n-2$ urosnie w kapitał $c(1+r)^{n-2}$ it.d. na koniec ostateczna summa k leżąc w banku przez jeden tylko rok urosnie w kapitał $k(1+r)$. Będzie więc kapitał ostateczny, czyli

$$A = a(1+r)^n + b(1+r)^{n-1} + c(1+r)^{n-2} + \dots + k(1+r).$$

Znalazszy wartość każdego wyrazu sroiny drugiego tego równania, znajdziemy kapitał ostateczny A .

Działanie to jest nierównie łatwiejsze, gdy jest

$$a=b=c=d=\dots=k; \text{ gdyż na ten czas wypadnie } A = a(1+r)^n + a(1+r)^{n-1} + a(1+r)^{n-2} + \dots + a(1+r).$$

Druga sroina tego równania składa postępieć geometryczny, w którym wyraz pierwszy jest $a(1+r)$, wyraz ostatni $a(1+r)^n$ iloczyn $1+r$. A zatem summa postępu tego będzie (154)

$$\frac{a(1+r)^n(1+r) - a(1+r)}{r} = \frac{a(1+r)^{n+1} - a(1+r)}{r}; \text{ czyli}$$

$$\frac{a(1+r) \{ (1+r)^n - 1 \}}{r} = A.$$

Zrównania tego można także wyprowadzić cztery zagadnienia takie jakieśmy wyprowadzili z równania $A = a(1+r)^n$.

156. Zagadnienie IV. Dłużnik winnym będąc summe A , umawia się z wierzycielem, że mu dług ten wraz z procentem ratami wypłacić będzie. Na mocy tej umowy wierzyciel przy końcu każdego roku dostaje od dłużnika summe a . Tym sposobem przez lat n dług wraz z procentami od procentów uiszczony zostaje. Ileż wynosiła summa A ?

Początkowy kapitał A zostając w ręku dłużnika przez rok pierwszy, na końcu roku tego urosnie w summe $A(1+r)$, a po oddaniu wierzycielowi summy a , na początku roku drugiego zostanie u dłużnika $A(1+r) - a = B$.

Kapitał B zostając w ręku dłużnika przez rok drugi, na końcu roku tego urosnie w summe $B(1+r)$, a po oddaniu wierzycielowi summy a na początku roku trzeciego, zostanie u dłużnika $B(1+r) - a$; czyli, zamiast B położywszy jego wartość, $A(1+r)^2 - a(1+r) - a = C$.

Kapitał C zostając w ręku dłużnika przez rok trzeci, na końcu roku tego zamieni się w summe $C(1+r)$; a po oddaniu wierzycielowi summy a , na początku roku czwartego zostanie u dłużnika $C(1+r) - a$; czyli zamiast C położywszy jego wartość,

$$A(1+r)^3 - a(1+r)^2 - a(1+r) - a = D$$

Tu już łatwo pomiarować, że na końcu roku n po oddaniu wierzycielowi summy a zostanie u dłużnika

$$A(1+r)^n - a(1+r)^{n-1} - a(1+r)^{n-2} - \dots - a(1+r) - a.$$

Ze zaś podług warunków zagadnienia dług na ten czas będzie zaspokojony, będzie więc

$$A(1+r)^n - a(1+r)^{n-1} - \dots - a(1+r) - a = 0$$

$$A(1+r)^n - a - a(1+r) - a(1+r)^2 - \dots - a(1+r)^{n-1} = 0, \text{ czyli}$$

$$A(1+r)^n - a \{ 1 + (1+r) + (1+r)^2 + \dots + (1+r)^{n-1} \} = 0.$$

Wyrazy przez które ilość a jest rozmnożona, składają polepie i geometryczny, którego wyraz pierwszy jest 1 , ostatni $(1+r)^{n-1}$ a stosunek $1+r$: summa zatem polepie tego będzie

$$\frac{(1+r)^n - 1}{r} \times (1+r) - 1 = \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

(133):

Powyższe więc równanie zamieni się w następujące:

$$A(1+r)^n - \frac{a \{ (1+r)^n - 1 \}}{r} = 0; \text{ a tem}$$

samém

$$A(1+r)^n = \frac{a\{(1+r)^n - 1\}}{r}, \text{ więc}$$

$$a = \frac{Ar(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}.$$

Chcąc np. dowiedzieć się ile należy rocznie płać dla umorzenia w przeciągu 12 lat długu wynoszącego zł. 100 pożyczonych na od sta rocznie, trzeba w równaniu ostatecznym uczynić $A=100$, $n=12$, $r=\frac{5}{100}$, a tćm samą będzie

$(1+r)^n = (\frac{21}{20})^{12} = 1,79586$. Ważności tej położywszy w równaniu powyższem na miejsce a głośkę, równanie to zamieni się w następujące:

$$a = \frac{100 \cdot \frac{5}{100} \cdot 1,79586}{1,79586 - 1} = \frac{5 \cdot 1,79586}{0,79586} = 11,28.$$

To jest: dla umorzenia w przeciągu 12 lat długu wynoszącego zł. 100 i procentów od niego rachowanych po 5 od sta rocznie, trzeba co rok wierzycielowi płać zł. 11, 28.

$$\text{Z równania } A(1+r)^n = \frac{a\{(1+r)^n - 1\}}{r}$$

można wyprowadzić cztery następujące zagadnienia:

1. Mając wiadome A, r, n , znaleźć a .
2. Mając wiadome a, r, n , znaleźć A .
3. Mając wiadome A, a, n , znaleźć r .
4. Mając wiadome A, a, r , znaleźć n .

Pierwsze z tych czterech zagadnień rozwiązyaliśmy wyżej; podobnym sposobem można rozwiązać drugie i trzecie: chcąc rozwiązać

czwarte, trzeba się udać do logarytmów, a namód ilość niewiadomą $(1+r)^n$ uwolnić potrzeba od wiadomych. W równaniu

$$A(1+r)^n = \frac{a\{(1+r)^n - 1\}}{r}, \text{ zniósłszy}$$

miennik, i rozwinąwszy licznik drugiego strona, to jest wykonawszy mnożenie wskazane, będzie

$$Ar(1+r)^n = a(1+r)^n - a.$$

Dodawszy a po obu stronach, i odiawszy

$$Ar(1+r)^n \text{ będzie}$$

$$a(1+r)^n - Ar(1+r)^n = a, \text{ rozłożywszy na}$$

czynniki,

$$(a - Ar)(1+r)^n = a, \text{ więc } (1+r)^n = \frac{a}{a - Ar}.$$

Równanie to przez użycie logarytmów zamieni się w następujące:

$$\lg(1+r)^n \times n = \lg a - \lg(a - Ar), \text{ zatem}$$

$$n = \frac{\lg a - \lg(a - Ar)}{\lg(1+r)}.$$

Gdyby było np. zagadnienie: Zaciągnięto długu 10000 cz. zł. na 6 od sta, z warunkiem że dłużnik wypłacać będzie co rok wierzycielowi po 1000 cz. zł. póty, póki się zupełnie z długu nie uiszi; za ileż lat dług ten z procentami od procentów umorzony będzie?

w powyższej formule uczyniwszy $A=10000$, $a=1000$, $r=0,06$; znajdziemy $n=15,7$.

157. Wyłożone wyżej trzy główne zagadnienia o procentach składanych nale-

zycie zrozumiane, ułatwia rozwiązywanie innych tegoż rodzaju zagadnień w rozmaitym sposobie ułożonych, iak są np. następujące:

Kupiec ma w iednym handlu 100000. w drugim 120000; kapitał pierwszy przynosi mu rocznie 15, drugi 12 od sta: procenta te przyłącza do kapitałów: za ileż lat dwa te kapitały będą sobie równe?

Oznaczywszy liczbę szukaną lat przez x , kapitał pierwszy na końcu tego roku wraz procentami będzie $100000 \left(\frac{115}{100}\right)^x$, drugi zaś będzie $120000 \left(\frac{112}{100}\right)^x$. Aże podług zagadnienia dwa te ostateczne kapitały mają być sobie równe będzie,

$$100000 \left(\frac{115}{100}\right)^x = 120000 \left(\frac{112}{100}\right)^x.$$

Podzieliwszy obie strony przez 100000 będzie

$$\left(\frac{115}{100}\right)^x = 1,2 \left(\frac{112}{100}\right)^x.$$

Zniostwszy mianownik 100^x i podzieliwszy obie strony przez 112^x wypadnie $\left(\frac{115}{112}\right)^x = 1,2$, czyli $(115 - 112) \times n = 112$, więc

$$n = \frac{11,2}{115 - 112} = \frac{0,0702811}{0,0114793} = 6,9 \text{ blisko}$$

Inne zagadnienie. Jedna osoba dała 10 procent składany 12000 zł. po 6 od sta rocznie, druga zaś dała także na procent składany 11800 zł. po $\frac{1}{2}$ od sta miesięcznie: za ileż lat dwa te kapitały będą równe?

W pierwszym kapitale procent roczny od 1 wypada $\frac{6}{100}$, w drugim procent miesięczny od 1 jest $\frac{1}{200}$. Oznaczywszy zatem liczbę szukaną lat przez n , a tём samém liczbę szukaną miesięcy przez $12n$, powyższe dwa kapitały przy końcu tego czasu zamieniają się pierwszy w summe

$12000 \left(\frac{106}{100}\right)^n$, drugi w summe $11800 \left(\frac{201}{200}\right)^{12n}$ (154); i będzie podług warunków zagadnienia

$$12000 \left(\frac{106}{100}\right)^n = 11800 \left(\frac{201}{200}\right)^{12n};$$

$$60 \left(\frac{106}{100}\right)^n = 59 \left(\frac{201}{200}\right)^{12n}; \text{ czyli}$$

$160 + 1 \frac{106}{100} \times n = 159 + 1 \frac{201}{200} \times 12n$, więc $1 \frac{201}{200} \times 12n - 1 \frac{106}{100} \times n = 100 - 159$, czyli $n(12 \frac{201}{200} - 1 \frac{106}{100}) = 160 - 159$; a tём samém

$$n = \frac{160 - 159}{12 \frac{201}{200} - 1 \frac{106}{100}}; \text{ i t. d.}$$

ROZDZIAŁ IX.

Zawierający obszerniejszy wykład niektórych wiadomości dotąd wyłożonych.

158. Wszystko to, cośmy w poprzedzających rozdziałach wyłożyli, uważać należy iako pierwszy kurs Algiebry Elementarnej, w którym rzeczy tylko łatwiejsze i do początków

istotnie należące mieścić się powinny. Opuściłszy wiele wiadomości wyższych, z wyjątkiem dotąd ścisły związek mających, które wymagają głębszego zastanowienia i obszerniejszych wykładów, nie jednego z poczynających mogłyby odstręczyć, a które będąc dopiero w dalszemy Algiebrze potrzebne, wyłożone na właściwszem dla siebie miejscu, opóźniłyby wykład wiadomości w początkowy Algiebrze najpotrzebniejszych, i same mogłyby pierwey z pamięci wypaść, nimby przyszło do oswolenia się z niemi przez częste ich używanie w rozwiązywaniu zagadnień trudniejszych po większey części, niż są podane dotąd. Wszystkie takie wiadomości razem zebrane umieścićśmy w tym i w następującym rozdziele; które pod tym względem za przedtek do rozdziałów poprzedzających uważać należy.

I. Dzielenie ilości Algiebraicznych wielorakich

159. Ze czterech działań arytmetycznych znakami ogólnemi odbywających się pozostało jeszcze do wyłożenia dzielenie ilości algiebraicznych wielorakich. Dzielenie to, bez którego początkowa Algiebra łatwo obejść się może, do zrozumienia dalszych ięy wiadomości będzie istotnie potrzebne: teraz je więc wykładamy.

Ponieważ dzielnik rozmnożony przez iloraz daie iloczyn równy dzielnu, dzielnia zatem

10.

powinna w sobie zamykać wszystkie cząstkowe iloczyny każdego wyrazu dzielnika rozmnożonego przez każdy wyraz ilorazu; i gdyby można było rozpoznać te iloczyny cząstkowe w dzielnu zawarte, dzieląc je przez wiadome wyrazy dzielnika, znaleźlibyśmy wyrazy ilorazu, tak jak w Arytmetyce znajduią się wszystkie cyfry ilorazu dzieląc następie przez dzielnik liczby uważane za cząstkowe iloczyny tegoż dzielnika rozmnożonego przez wszystkie cyfry ilorazu. Ale w liczbach cząstkowe te iloczyny łatwo można rozpoznać: następie one po sobie porządnie zaczynając od jedności umieszczonych w ostatnim rzędzie po lewey stronie; gdyż jedności każdej cyfry w liczbie dzielnu zalegają od rzędu który cyfra tu zastępie: co w wyrażeniach algiebraicznych nie ma miejsca; lecz się temu zaradza układając wyrazy dzielnu i dzielnika w takim porządku, aby wykładniki potęg iedneyże głoski były coraz mniejsze zaczynając od lewey ręki ku prawey, iak jest w dwóch następujących ilościach:

$$4a^3 - 22a^2b + 12a^2b^2 - 6a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5, 5a^4 - 2a^2b + 4a^2b^2,$$

z których pierwsza jest iloczynem, druga mnożnikiem w przytoczonym wyżey (56) przykładzie ułożenia, a w obudwoch wykładniki głoski a są coraz mniejsze idąc od lewey ręki do prawey: ułożenie takowe wyrazów dzielnu i dzielnika nazywa się *uporządkowaniem* danych ilości.

Gdy dwie dane ilości są tym sposobem uporządkowane, trzeba jest widzieć, że jakkolwiek jest czynnik przez który mnożyć należy druga dla otrzymania pierwszej, wyraz $5a^7$, od którego zaczyna się pierwsza, powstał z rozmnożenia wyrazu $5a^4$, od którego zaczyna się druga, przez wyraz w którym głoska a ma najwyższy wykładnik w czynniku szukanym, i od którego zaczynać się musi tenże czynnik szukany, gdy w nim wyrazy są uporządkowane podług wykładnika głoski a . Podzieliwszy zatem $5a^7$ przez $5a^4$, iloraz a^3 (42) będzie pierwszym wyrazem, potrzebnego czynnika. Aże podług prawideł mnożenia, całkowity iloczyn powinien w sobie zamykać rozmaite iloczyny cząstkowe powstałe z rozmnożenia wszystkich wyrazów mnożony przez każdy wyraz mnożnika; wypada więc ilość wzięta tu za dzielną powinna zamykać iloczyny wszystkich wyrazów dzielnika, który jest $5a^4 - 2a^3b + 4a^2b^2$, przez pierwszy wyraz ilorazu, to jest przez a^3 , i że tym samym odiawszy od dzielnej te cząstkowe iloczyny, które są: $5a^7 - 2a^6b + 4a^5b^2$, reszta $-20a^6b + 8a^5b^2 - 6a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5$, zamykać w sobie będzie te tylko cząstkowe iloczyny, które pozostały z rozmnożenia wszystkich wyrazów dzielnika przez drugi, trzeci i t. d. wyraz szukanego ilorazu.

Pozostała zatem reszta może być uważana jako cząstkowa dzielna, a pierwszy ićy wy-

raz, w którym głoska a ma najwyższy wykładnik, nie mógł inaczey powstać, jak tylko z rozmnożenia pierwszego wyrazu w dzielniku przez wyraz drugi w szukanym ilorazie: podzieliwszy zatem pierwszy wyraz pozostałej reszty, to jest $-20a^6b$, przez pierwszy wyraz dzielnika to jest przez $5a^4$, znaleziony iloraz $-4a^2b$ (46) będzie drugim wyrazem szukanego ilorazu. Przez ten drugi wyraz rozmnożywszy wyrazy dzielnika, i powstałe itad iloczyny cząstkowe odiawszy od reszty, druga reszta $+10a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5$, zamykać w sobie będzie te tylko cząstkowe iloczyny, które powstały z rozmnożenia wszystkich wyrazów dzielnika przez wyraz trzeci i t. d. szukanego ilorazu.

Tę drugą pozostałą resztę uważając znowu jako drugą cząstkową dzielną, pierwszy ićy wyraz $10a^4b^3$ nie mógł powstać innym sposobem, jak tylko z rozmnożenia pierwszego wyrazu w dzielniku przez trzeci wyraz w szukanym ilorazie: podzieliwszy zatem pierwszy wyraz drugiej reszty, który jest $10a^4b^3$, przez pierwszy wyraz dzielnika, to jest przez $5a^4$, iloraz $2b^3$ będzie trzecim wyrazem szukanego ilorazu. Przez ten trzeci wyraz rozmnożywszy wszystkie wyrazy dzielnika, i cząstkowe iloczyny z rozmnożenia tego wyniku odiawszy od drugiej reszty, nie się nie zostanie: co dowodzi że szukany iloraz ma tylko trzy wyrazy.

161. Chcąc działanie to porządknie odbyć, trzeba zachować następujące prawidła:

1^o. Uporządkowawszy wyrazy dzielne i dzielnika podług wykładników iedneyże głoski, to jest tak aby wykładniki te coraz się zmniejszały zaczynając od ręki lewéj ku prawéj, pisze się dzielnik obok dzielne. po prawéj łronie, i między dwiema temi ilościami daje się liniyka pionowa.

2^o. Dzieli się pierwszy wyraz dzielne przez pierwszy wyraz dzielnika podług prawideł na dzielenie ilości pojedynczych, a znaleziony iloraz pisze się na przeznaczoném dla niego miejscu w drugim wierszu pod dzielnikiem.

3^o. Mnożą się wszystkie wyrazy dzielniaka przez znaleziony wyraz pierwszy ilorazu, a wypadający iloczyn pisze się pod dzielnią w drugim wierszu i od niéy się odeymnie pozostała zaś reszta pisze się w wierszu trzecim.

4^o. Dzieli się pierwszy wyraz pozostałej reszty przez pierwszy wyraz dzielnika, a znaleziony wypadek pisze się na swoim miejscu jako drugi wyraz szukanego ilorazu: z wyrazem tym postępuje się tak, iak się wyżej postąpiło z wyrazem pierwszym. I to samo działanie pótý się powtarza, aż póki wszystkie wyrazy dzielne nie zostaną zniszczone: mając zawsze uwagę naprzód na znaki wyrazów, powtóre na spółczynniki i potrzebie na głoski ich wykładniki.

WZOR DZIELENIA.

<i>Dzielnik</i>	<i>Dzielnik</i>
$5a^2 - 2a^2b + 12a^2b^2$	$5a^4 - 2a^2b + 4a^2b^2$
$-6a^2b^3 - 4a^2b^4 + 8a^2b^5$	<i>Iloraz</i>
$-5a^2 + 2a^2b - 4a^2b^2$	$a^2 - 4a^2b + 2b^2$
$\text{Reszta} - 20a^2b + 8a^2b^2$	
1. $-6a^2b^3 - 4a^2b^4$	
$+ 8a^2b^5;$	
$+ 20a^2b$	
$- 8a^2b^2 + 16a^2b^3$	
R. 2. $+ 10a^2b^2 - 4a^2b^3$	
$+ 8a^2b^5;$	
$- 10a^2b^3$	
$+ 4a^2b^4 - 8a^2b^5$	
R. 3. $\quad \quad \quad 0 \quad \quad \quad 0$	

Pierwszy wyraz dzielne to jest $5a^2$ podzielony przez pierwszy wyraz dzielnika, to jest przez $5a^4$, daje na iloraz a^2 , który się pisze pod dzielnikiem. Przez ten iloraz rozmnożywszy trzy wyrazy dzielnika, i w trzech cząstkowych iloczynach z rozmnożenia tego wynikłych odmieniwszy znaki wypadnie $-5a^2 + 2a^2b - 4a^2b^2$. Ilość ta pisze się pod dzielnią i od niéy się odeymnie; poczem zostaje reszta iwsza $-20a^2b + 8a^2b^2$ $-6a^2b^3 - 4a^2b^4 + 8a^2b^5$.

Pierwszy wyraz téy reszty to jest $-20a^2b$ podzielony przez pierwszy wyraz dzielnika to jest przez $5a^4$, daje na iloraz $-4a^2b$, który się pisze na swoim miejscu jako drugi wy-

raz, szukanego ilorazu. Przez ten drugi wyraz rozmnożywszy trzy wyrazy dzielnika, i w trzech cząstkowych iloczynach z rozmnożenia tego wyników odmieniwszy znaki, wypadnie ilość $+20a^6 - 8a^5b^2 + 16a^4b^3$, która się pisze pod pierwszą resztą i od niej się odeymnie: początek zostaje resztą drugą, to jest $+10a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5$.

Pierwszy wyraz drugiey reszty to jest $+10a^4b^3$ podzielony przez pierwszy wyraz dzielnika to jest przez $5a^4$, daie na iloraz $+2b^3$ który się pisze na swoim miejscu jako trzeci wyraz szukanego ilorazu. Przez ten trzeci wyraz rozmnożywszy trzy wyrazy dzielnika, i w trzech cząstkowych iloczynach z rozmnożenia tego wyników odmieniwszy znaki, wypadnie ilość $-10a^4b^3 + 4a^3b^4 - 8a^2b^5$, którą odjąwszy od drugiey reszty, nic się nie zostaje, co okazuje że $+2b^3$ jest wyrazem ostatnim szukanego ilorazu, i że tém samém iloraz ten jest $a^3 - 4a^2b + 2b^3$.

101. Częstokroć w ciągu dzielenia mnożąc dzielnik przez różne wyrazy ilorazu powstają takie cząstkowe iloczyny, które się nie znajdują w dzielnéy, i które potem dzielić potrzeba przez pierwszy wyraz dzielnika. Iloczynami temi są te, które mając przed sobą odmiennie znaki i będąc sobie równe, zniknąć musiały. Kiedy się formowała dzielna przez rozmnożenie dwóch idę czynników ilorazu i dzielnika. Niech będzie np. $a^3 - b^3$ do podzielenia przez $a - b$.

Dzielenie.

$$\begin{array}{r} a^3 - b^3 \overline{) a - b} \\ - a^3 + a^2b \overline{) a^2 + ab + b^3} \\ + a^2b - b^3 \\ - a^2b + ab^2 \\ + ab^2 - b^3 \\ - ab^2 + b^3 \\ \hline 0 \end{array}$$

Mnożenie.

$$\begin{array}{r} a - b \\ a^2 + ab + b^2 \\ \hline a^3 - a^2b \\ + a^2b - ab^2 \\ + ab^2 - b^3 \\ \hline a^3 - b^3 \end{array}$$

Pierwszy wyraz dzielnéy, który jest a^3 podzielony przez pierwszy wyraz dzielnika to jest przez a , daie na iloraz a^2 ; rozmnożywszy dzielnik przez ten iloraz i odmieniwszy znaki w dwóch cząstkowych iloczynach, wypadnie $-a^3 + a^2b$: wyraz pierwszy $-a^3$ dodany do wyrazu pierwszego dzielnéy, zniknie; lecz pozostaje wyraz drugi $+a^2b$, który z początku nie znajdował się w dzielnéy. Ponieważ wyraz ten zamyka głoskę a , można go dzielić przez pierwszy wyraz dzielnika, i wypada na iloraz $+ab$. Rozmnożywszy dwa wyrazy dzielnika przez ten iloraz, i odmieniwszy znaki w iloczynach, wypadnie $-a^2b + ab^2$: wyraz $-a^2b$ dodany do pierwszego wyrazu pozostałej reszty zniknie, lecz zostaje wyraz $+ab^2$, który także nie znajdował się w dzielnéy. Podzieliwszy go przez a , wypadnie na iloraz b^2 ; przez ten cząstkowy iloraz rozmnożywszy dwa wyrazy dzielnika, i odmieniwszy znaki w iloczynach, wypadnie $-ab^2 + b^3$: pierwszy wy-

raz — ab^2 dodany do pierwszego wyrazu drugiego reszty niknie; i drugi wyraz $+b^3$ dodany do ostatniego wyrazu — b^3 który pozostaje z dzielnicy, niknie także.

Dla tém lepszego objęcia tego mechanizmu dzielenia, dosyć jest rzucić okiem na mnożenie dzielnika $a-b$ przez iloraz a^3+ab+b^3 , umieszczone obok poprzedzającego dzielenia: potrzeżemy, że wszystkie wyraży nowo powstałe w dzieleniu są te które nikną w wypadku mnożenia.

162 Czasem się przytrafia, że głoska, podług której porządkują się dwie ilości dane, w kilku wyrazach znayduje się z jednymże wykładnikiem, czy to w dzielnicy czy to w dzielniku. W przypadku tym trzeba te wyraży umieścić w iedney kolumnie, albo też napisać jeden po drugim, porządkując je podług wykładnika innej głoski. Niech będzie np. ilość $-a^2b^2+b^2c^4-a^2c^4-a^6+2a^4c^2+b^4+2b^2c^2+a^2b^2$ którą podzielić trzeba przez $a^2-b^2-c^2$.

Porządkując pierwszą z tych ilości podług głoski a , umieścimy w iedney kolumnie dwa wyraży — a^4b i $+2a^4c^2$; w innej kolumnie wyraży $+a^2b^4$ i — a^2c^4 ; nakoniec w ostatniej kolumnie trzy wyraży $+b^6$ + $2b^4c^2$ + b^2c^4 , porządkując je podług wykładnika głoski b , iak to widzieć można w przytaczanym wzorze.

Wzór działania.

$-a^6 - a^4b^2 + a^2b^4 + b^6$	$a^2 - b^2 - c^2$
$+2a^4c^2 - a^2c^4 + 2b^4c^2$	$-a^4 - 2a^2b^2b^4$
$+a^4 - a^2b^2$	$+b^2c^4$
$-a^4c^2$	$+a^2c^2 - b^2c^2$
Reszta 1. $-2a^4b^2 + a^2b^4 + b^6$	
$+a^4c^2 - a^2c^4 + 2b^4c^2$	$+b^2c^4$
$+2a^4b^2 - 2a^2b^4$	$-2a^2b^2c^2$
Reszta 2. $+a^4c^2 - a^2b^4 + b^6$	
$-2a^2b^2c^2 - 2b^2c^2$	$-a^2c^4 - b^2c^4$
$-a^4c^2 + a^2b^2c^2$	$+a^2c^4$
Reszta 3. $-a^2b^4 + b^6$	
$-a^2b^2c^2 + 2b^4c^2$	$+b^2c^4$
$+a^2b^4 - b^6$	$-b^2c^2$
Reszta 4. $-a^2b^2c^2 + b^4c^2$	
$+a^2b^2c^2 - b^2c^4$	$-b^2c^4$
0	

Pierwszy wyraz dzielnicy, to jest — a^4 podzielony przez pierwszy wyraz dzielnika to jest

przez a^2 , daie na pierwszy wyraz ilorazu $-a^2$, rozmnożywszy wszystkie wyrazy dzielnika przez ten iloraz, i w ilocynie ślad wynikłym odmieniwszy znaki, aby go można było odjąć od dzielnej, mieszcząc w iedneyże kolumnie wyrazy mające tę samą potęgę głoski a , pozostanie rwsza reszta, która się bierze za drugą dzielną cząstkową.

Pierwszy wyraz tęj nowęj dzielnej, który jest $-2a^2b^2$, podzielony przez a^6 daie na drugi wyraz ilorazu $-2a^2b^2$; rozmnożywszy wszystkie wyrazy dzielnika przez ten drugi wyraz ilorazu, i w iloczynach odmieniwszy znaki dla odjęcia ich od częściowęj dzielnej, mieszcząc w iedneyże kolumnie wyrazy mające tę samą potęgę głoski a , po odjęciu zostanie druga reszta, która się bierze za trzecią dzielną cząstkową.

Odbyszy to samo działanie z resztą drugą i następniemi, znajdziemy ieszcze trzy wyrazy na iloraz. Ostatni rozmnożony przez wszystkie wyrazy dzielnika daie ilocyny, które odjąwszy od 4tęj reszty, nic się nie zostaje: dzielna więc mieści się zupełnie w dzielnej, a tém samém jest ięj czynnikiem.

Czasem można ułatwić dzielenie rozkładając dzielną na czynniki, które częstokroć na samo weyrażenie upatrzeć można. Tak np. gdyby przyszło ilość $8a^6 - 4a^3b^2 + 4a^3 + 2a^3 - b^2 + 1$, podzielić przez $2a^3 - b^2 + 1$; ponieważ dzielnik ten składa ostatnie trzy wyrazy dzielnej, dosyć będzie spróbować, czy nie

jest także czynnikiem trzech pierwszych wyrazów dzielnej. Trzy te wyrazy mają widocznie za spólny czynnik $4a^3$: gdyż

$$8a^6 - 4a^3b^2 + 4a^3 = 4a^3(2a^3 - b^2 + 1).$$

Dzielną zatem można wyrazić w następującym kształcie:

$$4a^3(2a^3 - b^2 + 1) + 2a^3 - b^2 + 1; \text{ czyli } (2a^3 - b^2 + 1)(4a^3 + 1),$$

i dzielenie można odbyć bez długiego zachodu; przekreśliwszy bowiem dzielnik i pierwszy czynnik dzielnej, który jest zupełnie równy dzielnikowi, drugi czynnik $4a^3 + 1$ będzie szukany ilorazem.

Wprawa podae wiele podobnych sposobów, przez które znacznie skrócić można zwykłe działanie.

II O naywiększym spólnym dzielniku dwóch ilości algiebraicznych.

163. Kiedy dzielenie dwóch ilości algiebraicznych nie może być wykonane, na ten czas iloraz zostaje pod postacią ułamka, którego licznikiem jest dzielna a mianownikiem dzielnik. Chcąc potem wyraziy ułomka tego zmniejszyć, trzeba uważać czy licznik i mianownik nie mają iakiego czynnika spólnego, przez który można ie podzielić. Lecz gdy wyraziy ułomka są ilościami wielorakimi, spólny ich dzielnik nie tak łatwo być może upatrzony, iak w ilościach pojedynczych: w o-
płności szukać go należy sposobem takim,

aki już widzieliśmy w Arytmetyce, szukając największego dzielnika wspólnego dwóm liczbom danym. Działanie to zasadza się na następującej prawdzie:

Wszelki dzielnik wspólny dwóm liczbom jest także dzielnikiem reszty pozostałej z podzielenia jednej liczby przez drugą.

Daymy że dwóch liczb iakichkolwiek wspólny dzielnik, który oznaczamy przez D , mieści się zupełnie w jednej z nich razy A , w drugiey razy B . Ponieważ dzielnik rozmażony przez iloraz daie na iloczyn dzielny, pierwsza zatem z dwóch danych liczb jest AD , druga BD . Niech Q oznacza całkowitą ilość z podzielenia liczby pierwszej przez drugą wypadający, a R , całkowitą resztę z dzielenia pozostałą: będzie więc

$$\frac{AD}{BD} = Q + \frac{R}{BD}.$$

Zniósłszy mianownik, i obidwie strony podzieliwszy przez D , wypadnie

$$A = BQ + \frac{R}{D}.$$

Pierwsza strona tego równania jest liczbą całkowitą podług założenia, więc i druga musi być także liczbą całkowitą: a że wyraz pierwszy drugiey strony jest liczbą całkowitą, więc i drugi wyraz $\frac{R}{D}$ musi być liczbą całkowitą, a tem samém R jest podzielne przez D ; to jest pozostała reszta z podzielenia dwóch liczb

danych jest podzielna przez wspólny dzielnik tychże ilości.

Zastosuymy to naprzód do przykładu liczebnego. Niech będą dwie liczby dane 637 i 143. Największy wspólny dzielnik tych dwóch liczb widocznie przechodzić nie może liczby mniejszey 143: wypada więc naprzód spróbować czy liczba ta, sama siebie dzieląca, nie jest szukany wspólnym dzielnikiem. Liczba 143 sama w sobie mieści się raz 1, w liczbie zaś 637 mieści się 4 razy, i pozostała reszta 65: co dowodzi że liczba 143, nie jest szukany dzielnikiem.

Ze zaś wszelki dzielnik wspólny dwóm ilościom jest także dzielnikiem reszty z podzielenia ilości jednej przez drugą pozostałej, wspólny zatem dzielnik dwóch liczb 637 i 143 powinien być także dzielnikiem tak liczby 143, iako też liczby 65, która jest resztą z podzielenia pozostała. Największy wspólny dzielnik dwóch liczb 143 i 65 nie może być większym od liczby 65: trzeba zatem spróbować, czy liczba 65 nie jest szukany dzielnikiem. Liczba 65 sama w sobie mieści się raz 1, w liczbie zaś 143 mieści się razy 2, i pozostała reszta 13: co dowodzi że liczba 65 nie jest szukany dzielnikiem. Lecz wspólny dzielnik liczb 143 i 65 powinien być także wspólnym dzielnikiem tak dla liczby 65, iako też dla pozostałej reszty 13: trzeba więc szukać największego wspólnego dzielnika liczb 65 i 13. Największy wspólny dzielnik tych dwóch liczb nie może

być większy od liczby mniejszy to jest 13: należy więc spróbować, czy 13 nie jest tym dzielnikiem. Liczba 13 mieści się w sobie raz 1; w liczbie zaś 65 mieści się razy zupełnie.

Liczba zatem 13 dzieląca liczby 65 i 143, dzieli także liczbę $143 = 65 \cdot 2 + 13$; ta sama liczba, 13 dzieląca liczby 65 i 143, dzieli także liczbę $637 = 143 \cdot 4 + 65$; więc liczba ta jest wspólnym dzielnikiem dwóch liczb danych. Zaś ten wspólny dzielnik nie może być większym od 13, to się okazuje z samego działania, przy dług którego szukany dzielnik powinien mieścić się zupełnie w liczbie 13.

Tym samym sposobem postępuje się szukając największego wspólnego dzielnika dwóch ilości algebraicznych: *probuje się naprzód czy jedna z dwóch danych ilości nie jest dzielnikiem drugiey: a jeżeli z dzielenia pozostanie reszta, przez tę resztę dzieli się pierwszą dzielnik, potem pierwsza reszta dzieli się przez drugą, i tak dalej; aż póki się nie przyjdzie do takiej reszty, która poprzedzającą dzieli zupełnie: reszta ta będzie największym wspólnym dzielnikiem dwóch danych.*

164. Nim przystąpimy do przykładów, czynić tu pierwszy potrzeba następującą uwagę: że największy wspólny dzielnik dwóch ilości nie podpada żadnej zmianie, gdy się je jedna z nich rozmnóży lub podzieli przez ilość, która nie jest dzielnikiem drugiey, i która nie ma żadnego wspólnego czynnika z drugą. Tak

np. dwie ilości *ab* i *ac* mają *a* za wspólny dzielnik: rozmnóżywszy *ab* przez *d* będzie ilość *abd*, która z drugą ilością *ac* ma tenże sam wspólny dzielnik, jaki jest między *ab* i *ac*.

Inaczej się rzecz ma, gdy rozmnóżywszy *ab* przez ilość będącą dzielnikiem ilości drugiey *ac*, czyli któraby miała wspólny czynnik z ilością *ac*. Rozmnóżywszy *np.* *ab* przez *c*, będzie *abc*: ilość ta ma z ilością *ac* za wspólny dzielnik *ac*. Podobnież rozmnóżywszy *ab* przez ilość *cd*, która ma wspólny czynnik z ilością *ac*, będzie ilość *abcd*, która z ilością *ac* ma za wspólny dzielnik *ac*.

Wnieśmy stąd *ród* że jeżeli szukając największego wspólnego dzielnika dwóch ilości potrzebujemy w ciągu działania, że dzielnik albo dzielna ma jaki czynnik, który nie jest czynnikiem ilości drugiey, można się go będzie pozbyć dzieląc przezeń jedną z dwóch ilości danych; że można jedną z dwóch danych ilości rozmnóżyć przez jakąkolwiek liczbę, byleby liczba ta nie była dzielnikiem drugiey ilości danej, i nie miała żadnego wspólnego z nią czynnika.

Po takowem przygotowaniu przystąpimy już do przykładów. Weźmy dwie ilości takie, któreby miały niektóre głoski wspólne, gdyż inaczej nie mogłyby mieć wspólnego dzielnika. Niech będą *np.* dwie ilości

$3a^3 - 3a^2b + ab^2 - b^3$, i $4a^2b - 5ab^2 + b^3$, w których wyrazy uporządkowane są podług wykładników głoski *a*, jak wymaga dzielenie.

Pierwszą weźmy za dzielną drugą za dzielnik, lecz zaraz zachodzi trudność, która w ilościach liczebnych miejsca nie ma; to jest, że pierwszy wyraz dzielnika nie mieści się zupełnie w pierwszym wyrazie dzielnicy, z przyczyny dwóch czynników 4 i b , które znajdują się w jednym a w drugim ich nie masz. Ale że głoska b jest wspólnym czynnikiem wszystkich wyrazów dzielnika, a niektórych tylko wyrazów dzielnicy, można się więc iey pozbyć w dzielniku, dzieląc go przez b , przez co, podług uwagi powyższej, szukany wspólny dzielnik dwóch danych ilości w niczem się nie zmieni. Podzielwszy drugą ilość przez b wypadnie $4a^2 - 5ab + b^3$. Idzie więc teraz o to, ażeby znaleźć największy wspólny dzielnik dwóch następujących ilości:

$3a^2 - 3a^2b + ab^2 - b^3$, i $4a^2 - 5ab + b^3$. Lecz jeszcze pierwszy wyraz dzielnika, to jest $4a^2$ nie mieści się zupełnie w pierwszym wyrazie dzielnicy, który jest $3a^2$, gdyż liczba 4 będąca współczynnikiem pierwszego, większa jest od liczby 3 będącej współczynnikiem drugiego. Ale można rozmnożyć pierwszą ilość daną przez jakąkolwiek liczbę, byleby liczba ta nie była wspólnym czynnikiem wszystkich wyrazów ilości drugiej, co, podług uwagi powyższej, w niczem nie zmieni największego dzielnika wspólnego dwóch ilości danych. Rozmnożmy więc ilość pierwszą przez liczbę 4, która nie jest czynnikiem ilości drugiej: tym sposobem otrzymamy ilość

$$12a^2$$

$$12a^3 - 12a^2b + 4ab^2 - 4b^3 \text{ podzielić przez } 4a^2 - 5ab + b^3:$$

iloraz częściowy z podzielenia tego wypadła 3a. Rozmnożywszy dzielnik przez ten iloraz, i odiawszy iloczyn od dzielnej, zostanie reszta

$$3a^2b + ab^2 - 4b^3.$$

Ilość ta podług tego cośmy powiedzieli wyżej, powinna mieć z ilością $4a^2 - 5ab + b^2$ tenże sam największy wspólny dzielnik, co ilość pierwsza. Korzystając z powyższych uwag, dzielę pozostałą resztę przez b , i mnożę ją przez 4, aby tym sposobem pierwszy wyraz iey stał się zupełnie podzielny przez pierwszy wyraz dzielnika: będzie zatem dzielna $12a^2 + 4ab - 16b^2$, dzielnik zaś $4a^2 - 5ab + b^2$, a częściowy iloraz 3. Rozmnożywszy dzielnik przez ten iloraz, i od dzielnej odiawszy iloczyn, zostanie reszta $19ab - 19b^2$, i cała rzecz idzie o to, aby wyznaleźć największy wspólny dzielnik téj reszty i ilości $4a^2 - 5ab + b^2$.

Ze zaś głoska a , podług której odbywa się dzielenie, w pozostałej reszcie jest stopnia pierwszego, w dzielniku zaś stopnia drugiego i dzielnik więc należy wziąć za dzielną, a pozostałą resztę za dzielnik.

5. Przed zaczęciem tego nowego dzielenia, dzielnik $19ab - 19b^2$ dzielę przez $19b$: gdyż ilość ta jest wspólnym czynnikiem wszystkich tego wyrazów, a nie jest czynnikiem dzielnej: mam więc na dzielną ilość

$$4a^2 - 5ab + b^2 \text{ a na dzielnik ilość } a - b.$$

Odbiwszy dzielenie żadną resztą nie pozostaje: a zatem $a-b$ jest szukanym największym wspólnym dzielnikiem. Jakoż pierwszą ilość dana podzieloną przez $a-b$, daie na iloraz $3a^2+b^2$; druga ilość dana podzielona przez $a-b$ daie na iloraz $4a-b$.

165. Kiedy ilość wzięta za dzielnik składa się z kilku wyrazów mających ten sam stopień głoski podług której wyrazy zostały uporządkowane, na ten czas, postępując drogą zwyczajną, działanie nie miałoby końca. Weźmy np. dwie ilości

$a^2b+ac^2-d^3$ i $ab-ac+d^2$:
przygotowawszy działanie jak do zwyczajnego dzielenia, będzie

$$\begin{array}{r|l} a^2b+ac^2-d^3 & ab-ac+d^2 \\ -a^2b+a^2c-ad^2 & a \\ \hline a^2c+ac^2-ad^2-d^3, & \end{array}$$

dzielnik naprzód a^2b przez ab , wypadnie iloraz a ; przez który rozmnożywszy dzielnik i odjąwszy iloczyn od dzielnej, w reszcie znajdzie się nowy wyraz w którym a jest drugiego stopnia, to jest a^2c , powstający z rozmnożenia $-ac$ przez a . Wziąwszy resztę $a^2c+ac^2-ad^2-d^3$ za dzielną i rozmnożywszy ją przez b , aby tym sposobem można ją było podzielić przez ab , będzie

$$\begin{array}{r|l} a^2bc+abc^2-abd^2-bd^3 & ab-ac+d^2 \\ -a^2bc+a^2c^2-acd^2 & ac \\ \hline a^2c^2+abc^2-acd^2-abd^2-bd^3 & \end{array}$$

w reszcie téj znówu przybył nowy wyraz a^2c^2 , w którym a jest drugiego stopnia: to samo miałoby ciągle miejsce w dalszém działaniu.

Dla uniknienia téj nieprzyzwoitości, trzeba uważać że dzielnik $ab-ac+d^2=a(b-c)+d^2$; uczyniwszy dla skrócenia $b-c=m$, dzielnik zamieni się na $am+d^2$; lecz w tym przypadku trzeba dzielną $a^2b+ac^2-d^3$, rozmnożyć przez m , ażeby w nowém dzielnej tym sposobem utworzonéj pierwszy wyraz podzielny był przez ilość am , będącą pierwszą wyrazem dzielnika: będzie zatem działanie

$$\begin{array}{r|l} a^2bm+ac^2m-d^3m & am+d^2 \\ -abm-abd^2 & ab+c^2 \\ \hline 1. \text{ reszta } -abd^2+ac^2m-d^3m & \\ -ac^2m-c^2d^2 & \\ \hline 2. \text{ reszta } -abd^2-c^2d^2-d^3m; & \end{array}$$

teraz wyrazy mające głoskę a w drugim stopniu zniknęły w dzielnej, i pozostały tylko wyrazy mające a w pierwszym stopniu. Abyśmy je znieśli, podzielimy naprzód ac^2m przez am , wypadnie iloraz c^2 ; rozmnożywszy dzielnik przez iloraz, i odjąwszy iloczyn od dzielnej, pozostanie zga reszta: wzięwszy tę drugą resztę za dzielną, i podzieliwszy ją przez d^2 , które nie jest czynnikiem dzielnika, będzie

$-ab-c^2-dm$, co rozmnożywszy przez m , wypadnie

$$\begin{array}{r|l} -abm^2 - c^2m - dm^2 & am + d^2 \\ +abm + bd^2 & -b \\ \hline +bd^2 - c^2m - dm^2 & \end{array}$$

Ponieważ reszta $bd^2 - c^2m - dm^2$ nie zamyka w sobie głoski a , wypada stąd, że jeżeli dwie dane ilości mają między sobą spólny dzielnik, dzielnik ten nie zależy od głoski a . Doszedłszy do tego punktu, nie można już kończyć dzielenia podług głoski a ; lecz uważać potrzeba, że jeżeli znajduie się spólny dzielnik niezależący od głoski a między ilościami $bd^2 - c^2m - dm^2$ i $am + d^2$, dzielnik ten powinien z osobna dzielić oba wyrazy dzielnika $am + d^2$: gdyż w ogólności, jeżeli ilość iaka uporządkowana jest stosownie do potęg głoski a , wszelki dzielnik tej ilości nie zależący od a powinien dzielić z osobna ilości które mnożą różne potęgi tej głoski.

Aby się o tём przekonać, dosyć jest uważać że w tym przypadku każda z ilości danych powinna być iloczynem ilości zależącej od a rozmnożonej przez spólny dzielnik, który od a nie zależy. Jakoż niech będzie np. wyrażenie

$$Aa^4 + Ba^3 + Ca^2 + Da + E,$$

w którym głoski A, B, C, D, E oznaczają ilości iakiekolwiek nie zależące od a ; rozmnożywszy wyrażenie to przez ilość M także od a nie zależącą, wypadnie iloczyn

$$MAa^4 + MBe^3 + MCa^2 + MDe + ME:$$

iloczyn ten uporządkowany podług a , zamyka ieszcze te same potęgi głoski a iak pierwé; lecz spółczynnik każdej z tych potęg jest podzielny przez M .

Po takowém przygotowaniu, w dwóch ilościach

$$bd^2 - c^2m - dm^2, am + d^2$$

przywróciwszy zamiast m ilość $(b - c)$, którą głoska ta wyraża; będzie

$bd^2 - c^2(b - c) - d(b - c)^2$, i $a(b - c) + d^2$, i rzeczka jest widoczna że w dzielniku ilości $b - c$ i d^2 nie mają żadnego spólnego czynnika: więc dwie dane ilości spólnego dzielnika nie mają!

Gdyby na samo weyrażenie nie można było poznać że nie masz spólnego dzielnika między $b - c$ i d^2 , należałoby szukać największego spólnego ich dzielnika, porządkując je podług iedneyze głoski, a potem spróbować czy dzielnik ten mieści się zupełnie w ilości

$$bd^2 - c^2(b - c) - d(b - c)^2.$$

166. Zawsze iednak wygodniéj jest zaraz na początku działania szukać największego spólnego dzielnika nie zależącego od głoski, podług której są uporządkowane wyrazy: gdyż odkładając szukanie to na koniec działania, częstokroć reszty wypadają coraz bardziéj zawiłane i rachunek staje się coraz trudniejszy.

Niech będą np. ilości

$$\begin{aligned} a^4b^2 + a^3b^3 + b^4c^2 - a^4c^2 - a^3bc^2 - b^2c^6 \\ a^2b + ab^2 + b^3 - a^2c - abc - b^2c. \end{aligned}$$

Uporządkowawszy je podług głoski a , wypadnie

$$(b^2 - c) a^4 + (b^3 - bc) a^3 + b^4 c^2 - b^2 c^4 \\ (b - c) a^2 + (b^2 - bc) a + b^3 - b^2 c.$$

Uważam naprzód że jeżeli dwie te ilości mają spólny dzielnik nie zawisły od a , dzielnik ten powinien zupełnie mieścić się osobno w każdej z ilości mnożących rozmaite potęgi głoski a (155), iako też w ilościach $b^4 c^2 - b^2 c^4$ i $b^3 - b^2 c$, które nie mają głoski a .

Jdzie więc tylko oto, ażeby znaleźć spólne dzielniki dwóch ilości $b^2 - c^2$ i $b - c$, i spróbować potem, czy między temi dzielnikami nie znajduie się taki, któryby razem był dzielnikiem następujących ilości: $b^2 - bc^2$, i $b^2 - bc$ tudzież $b^4 c^2 - b^2 c^4$ i $b^3 - b^2 c$.

Podzieliwszy $b^2 - c^2$ przez $b - c$ wypadła iloraz $b + c$: a zatem $b - c$ jest dzielnikiem spólnym ilości $b^2 - c^2$ i $b - c$, które widocznie mieć nie mogą innych dzielników: gdyż ilość $b - c$ może tylko być podzielona przez siebie samę i przez 1. Trzeba się więc zapewnić czy $b - c$ dzieli także inne ilości wyżej wymienione, albo też czy ilość ta dzieli także dwie ilości dane, co ma miejsce w samej rzeczy: gdyż podzieliwszy dwie te ilości przez $b - c$, wypadną ilorazy

$$(b + c) a^4 + (b^2 + bc) a^3 + b^3 c^2 + b^2 c^3, \\ a^2 + ba + b^2.$$

Dwie ostatnie ilości chcąc sprowadzić do prostszego jeszcze wyrażenia, należy spróbo-

wać czy pierwsza nie jest podzielna przez ilość $b + c$ która nie jest czynnikiem ilości drugiej $a^2 + ba + b^2$: odbywszy dzielenie znajdziemy iloraz zupełny, pozostanie tylko szukać spólnego dzielnika dwóch następujących ilości: $a^4 + ba^2 + b^2 c^2$ i $a^2 + ba + b^2$.

Przytłapiwszy do działania podług podanego wyżej sposobu, za drugim dzieleniem wypadnie reszta zawierająca głoskę a w pierwszym stopniu: przez tę resztę dzieląc dwie dane ilości przekonamy się że ona nie jest ich spólnym dzielnikiem; skąd wniesiemy że głoska a nie wchodzi do spólnego dzielnika którego szukamy, i że tem samem dzielnik ten składa się tylko z jednego czynnika $b - c$.

Gdyby oprócz tego spólnego dzielnika nie zawisłego od głoski a znalazł się drugi do którego wchodzi ta głoska, należałoby dwa te dzielniki przez siebie rozmnóżyc, a iloczyn ich byłby największym spólnym dzielnikiem szukany.

Uwagi te przy należytych wprawie w rachunku Algiebraicznym będą dołateczne do wynalezienia w każdym przypadku największego spólnego dzielnika.

Przytaczamy tu kilka przykładów dla 5 wprawy.

$$1; x^4 - 3ax^3 - 8a^2x^2 + 18a^3x - 8a^4, \\ x^3 - ax^2 + 8a^2x + 6a^3 \\ 2; 6a^4 + 4a^3b - 9a^2b^2 - 3ab^3 + 2b^4, \\ 4a^4 - 4a^2b^2 + 4ab^3 - b^4.$$

$$\begin{array}{l}
 3; 6a^3 - 6a^2y + 2ay^2 - 2y^3, 12a^2 - 15ay + 5y^3, \\
 4; 5a^3 - 18a^2 + 11ab^2 - 6b^3, 7a^2 - 25ab + 6b^2, \\
 5; \quad 6a^5 + 15a^4b - 4a^3c^2 - 10a^2bc^2, \\
 \quad \quad 9a^3b - 27a^2bc - 6abc^2 + 18bc^3, \\
 6; 2a^4 + 2a^3b - ab^2d - ab^2d, 3a^3 + 3a^2b \\
 \quad \quad \quad + 4ab^2 + 4b^3.
 \end{array}$$

Z pierwszemi czterema przykładami odbywszy działanie zwyczajne, znajdziemy największy spólny dzielnik w przykładzie pierwszym $-a^2 - 2ax + 2a^2$, czyli $x^2 + 2ax - 2a^2$; w drugim $2a^2 + 2ab - b^2$; w 3cim $a - y$; w 4tym $a - 3b$.

W przykładzie 5tym podzieliwszy ilość pierwszą przez a^2 , drugą przez $3b$, będzie

$$\begin{array}{r}
 6a^3 + 15a^2b - 4ac^2 - 10bc^2 \quad 5a^3 - 9a^2c \\
 - 6a^3 + 18a^2c + 4ac^2 - 13c^3 \quad - 2ac^2 + 6c^3 \\
 \hline
 15a^2b^2 + 18a^2c - 10bc^2 - 12c^3. \quad \text{Że zaś ta reszta} \\
 \text{mniejsza jest od dzielnika, będzie więc} \\
 3a^3 - 9a^2c - 2ac^2 + 6c^3 \quad \begin{array}{l} 15a^2b + 18a^2c \\ - 10bc^2 - 12c^3. \end{array}
 \end{array}$$

Rozłożywszy dzielnik na czynniki, będzie

$$\begin{array}{r}
 3a^3 - 9a^2c - 2ac^2 + 6c^3 \quad \begin{array}{l} 3a^2(5b + 6c) \\ - 2c^2(5b + 6c). \end{array}
 \end{array}$$

Podzieliwszy dzielnik przez $5b + 6c$, i resztę działania odbywszy sposobem zwyczajnym, znajdziemy $3a^2 - 2c^2$ największy spólny dzielnik dwóch ilości danych.

W przykładzie 6, pierwszą ilość daną podzieliwszy przez a , rozmnożywszy przez 3 i

odbywszy dzielenie, znajdziemy iloraz $2z$ z pozostałą resztą $-8ab^2 - 3abd - 8b^3 - 3b^4d$; którą rozłożywszy na czynniki będzie $-a(8b^2 + 3bd) - b(8b^2 + 3bd)$. Reszta ta jako mniejsza od drugiey ilości daney, będzie dzielnikiem $8b^2 + 3bd$ podzieliwszy ją zatem przez czynnik $8b^2 + 3bd$, wypadnie dzielić drugą ilość daną przez $-a - b$. Odbywszy dzielenie sposobem zwyczajnym, otrzymamy iloraz bez żadney reszty. A zatem największym spólnym dzielnikiem dwóch danych ilości jest $-a - b$, czyli, co na jedno wychodzi, $a + b$.

Czasem dwie dane ilości można zaraz rozłożyć na czynniki: i tak z dwóch danych ilości

$$\begin{array}{l}
 a^2d^2 - a^2c^2 + c^4 - c^2d^2, i 4ad - 2ac^2 - 4acd \\
 + 2c^3, \text{ pierwszą można rozłożyć na dwa następujące czynniki: } a^2(d^2 - c^2) - c^2(d^2 - c^2). \\
 \text{Druga podzielona przez } 2 \text{ daie się także rozłożyć na dwa czynniki } a(2ad - c^2) - c(2ad - c^2).
 \end{array}$$

Podzieliwszy zatem ilość pierwszą przez $d^2 - c^2$, drugą przez $2ad - c^2$; pozostanie dzielić $a^2 - c^2$ przez $a - c$. Odbywszy dzielenie otrzymamy iloraz bez żadney reszty. A zatem największy spólny dzielnik dwóch danych ilości jest $a - c$.

Podobnie gdyby były dwie dane ilości $3bcq + 5mp + 18bc + 5mpq, i 4adq - 7fgq - 42fg + 4adq$; pierwszą i drugą rozłożywszy na czynniki znajdziemy $q(3bc + 5mp) + 6(3bc + 5mp), i q(4ad - 7fg) + 6(4ad - 7fg)$.

Pierwszą zatem ilość podzieliwszy przez $3bc + 5mp$, drugą przez $4ad - 7fg$, i odbywszy działanie zwyczajne, znajdziemy że największym spólnym dzielnikiem dwóch danych ilości, iest $q + 6$.

III. O wyciąganiu pierwiastku kwadratowego z ilości algebraicznych.

167. Powiedzieliśmy wyżey (108) że kiedy z ilości jakiej nie można wyciągnąć pierwiastku kwadratowego, na ten czas przed ilością tą daie się znak pierwiastkowy $\sqrt{}$. Często się trafia że niektóre czynniki ilości będących pod znakiem pierwiastkowym są kwadratami: np. $\sqrt{a^2m}$: w takowym przypadku ilość pod znakiem pierwiastkowym będąca może być sprowadzona do wyrazu prostszego. Jakoż podniosszy do kwadratu iakiegokolwiek iloczynu bcd , będzie $bcd \times bcd = b^2c^2d^2$: skąd wnosiemy że kwadrat iloczynu iest iloczynem kwadratów z iego czynników, a tём samém pierwiastek kwadratu $b^2c^2d^2$ iest iloczynem pierwiastków $b, c, i d$ z czynników $b^2c^2 i d^2$. Zastosowawszy uwagę tę do iloczynu a^2m , wniesiemy że pierwiastek iego powinien być iloczynem z a , które iest pierwiastkiem pierwszego czynnika a^2 , przez $\sqrt{m}$ pierwiastek drugiego czynnika m będzie zatem $\sqrt{a^2m} = a\sqrt{m}$.

Podobnież $\sqrt{abc^2d^2} = cd\sqrt{ab}$.

W ogólności prawidło które w tym razie zachować należy, iest następujące: *wziąć osobno pierwiastki wszystkich czynników będących kwadratami, i napisać ie przed znakiem pierwiastkowym iako mnożniki tegoż znaku pierwiastkowego, pod którym zostawią się tak iak są czynniki nie będące kwadratami.*

168. Dla zachowania tego prawidła potrzeba, pierwey poznać sposób, podług którego można osądzić czy ilość algebraiczna iest kwadratem: a do tego potrzeba rozróżnić ilości poiedyncze od wielorakich.

Z prawidła mnożenia ilości mających wykładniki wypada, że druga potęga iakiegokolwiek ilości ma zawsze wykładnik dwa razy większy od wykładnika tęy ilości. Jakoż $a^2 \times a^2 = a^4$; $a^2 \times a^2 = a^4$, $a^3 \times a^3 = a^6$ i t. d.

Skąd wypada, że wszelki czynnik będący kwadratem powinien mieć wykładnik parzysty, i że chcąc otrzymać pierwiastek tego czynnika, trzeba go napisać z wykładnikiem dwa razy mniejszym niż był początkowy; np.

$\sqrt{a^2} = a^1 = a$; $\sqrt{a^4} = a^2$; $\sqrt{a^6} = a^3$ i t. d.

Co się tycze czynników liczebnych, z tych wyciąga się pierwiastki, iestli to być może, sposobem zwyczajnym.

Podług tych uwag ponieważ w wyrażeniu $\sqrt{64a^6b^4c^2}$ czynniki a^6, b^4, c^2 są kwadratami

mi, i liczba 64 jest także kwadratem z 8; wyrażenie więc to, iako iloczyn czynników kwadratowych, będzie miało za pierwiastek iloczyn pierwiastków każdego z tych czynników. A zatem.

$$\sqrt{64a^6b^4c^2} = 8a^3b^2c.$$

169. Gdy okoliczność ta nie ma miejsca, trzeba licząc się rozłożyć iloczyn dany na dwa inne, z którychby jeden zamykał same czynniki kwadratowe, drugi same czynniki niekwadratowe. Niech będzie np.

$$\sqrt{72a^4b^3c^5}.$$

Łatwo jest dostrzedz, że pomiędzy dzielnikami liczby 72 niektóre są kwadratami zupełnemi, to jest: 4, 9 i 36, wzięwszy z nich największy, będzie

$$72 = 36 \times 2.$$

Czynnik a^4 jest kwadratem zupełnym z a^2 .

Czynnik b^3 mający wykładnik nieparzysty, nie jest w prawdzie kwadratem zupełnym; lecz go można rozłożyć na dwa inne b^2 i b , z których pierwszy jest kwadratem: będzie więc $b^3 = b^2 \times b$.

Podobnież $c^5 = c^4 \times c$. Tym samym sposobem postąpilibyśmy ze wszystkimi głoskami mającemi wykładniki nieparzyste. Wypadnie zatem

$$72a^4b^3c^5 = 36 \times 2a^4b^2 \times bc^4 \times c.$$

Zebrawszy osobno czynniki kwadratowe, druga strona równania tego będzie $36a^4b^2c^4 \times 2bc$. Wreszcie wzięwszy pierwiastek czynnika

pierwszego, a oznaczywszy go w drugim, wypadnie

$$\sqrt{72a^4b^3c^5} = 6a^2bc^2 \sqrt{2bc}.$$

Inne przykłady.

$$1. \sqrt{\left(\frac{a^3}{b}\right)} = \sqrt{\left(a^2 \times \frac{a}{b}\right)} = a \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)}$$

$$= a \sqrt{\left(\frac{ab}{b^2}\right)} = \frac{a}{b} \sqrt{ab}$$

$$2. 6 \sqrt{\left(\frac{75}{98} ab\right)} = 6 \sqrt{\left(\frac{25}{49} \cdot \frac{3ab}{2}\right)}$$

$$= 6 \sqrt{\left(\frac{25b^2}{49} \cdot \frac{3a}{2}\right)} = \frac{6 \cdot 5}{7} b \sqrt{\left(\frac{3a}{2}\right)}$$

$$= \frac{30b}{7} \sqrt{\left(\frac{3a}{2}\right)}.$$

$$3. \sqrt{\left(\frac{a^2m^2}{n^2} + \frac{a^2m}{n}\right)} = \sqrt{\left(\frac{a^2m^2 + a^2mn}{n^2}\right)}$$

$$\sqrt{\left(\frac{a^2}{n^2}(m^2 + mn)\right)} = \frac{a}{n} \sqrt{m^2 + mn}, \text{ i t. d.}$$

170. Poydźmyż teraz do wyciągania pierwiastków kwadratowych z ilości wielorakich, czyli iak ie zwyczajnie zowią, z wielomianów, a naprzód przypomnieć tu potrzeba, że żaden dwumian, czyli ilość z dwóch wyrazów złożona, nie może być kwadratem zupełnym: ilość bowiem pojedyncza podniesiona do kwadratu jest także ilością pojedynczą; a kwadrat ilości dwumiennéj zamyka zawsze trzy części (101). Tak np. $a^2 + b^2$ nie jest kwadratem z $a + b$,

choć a jest pierwiastkiem kwadratu a^2 , b pierwiastkiem kwadratu b^2 : gdyż kwadrat z $a + b$, który jest $a^2 + 2ab + b^2$, zamyka jeszcze wyraz $+ 2ab$, który się nie znajduje w ilości daney $a^2 + b^2$.

Weźmy więc ilość z trzech wyrazów złożoną

$$24a^2b^3c + 16a^4c^2 + 9b^6.$$

Abyśmy w tém wyrażeniu znaleźli trzy części składające kwadrat, którego pierwiastek jest dwumienny, uporządkujemy wyrazy podług wykładnika którejkolwiek głoski *np.* głoski a : będzie więc

$$16a^4c^2 + 24a^2b^3c + 9b^6.$$

Jakikolwiek jest pierwiastek szukany, byłoby tylko być uporządkowany podług tej samej głoski a , kwadrat pierwszego w nim wyrazu musi być pierwszym wyrazem w daney ilości, to jest musibyc wyrazem $16a^4c^2$; podwojny iloczyn pierwszego wyrazu w szukany pierwiastku przez tego wyraz drugi, musiał dać początek drugiemu wyrazowi w daney ilości to jest wyrazowi $24a^2b^3c$; nakoniec kwadrat drugiego wyrazu w tymże pierwiastku powinien być ostatnim wyrazem $9b^6$ w daney ilości. Po tych uwagach przystąpmy do działania.

$$\begin{array}{r} 16a^4c^2 + 24a^2b^3c + 9b^6 \\ - 16a^4c^2 \quad \quad \quad 4a^2c + 3b^3 \\ \hline \quad \quad \quad + 24a^2b^3c + 9b^6 \\ \quad \quad \quad - 24a^2b^3c - 9b^6 \\ \hline \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 0 \end{array}$$

Biore naprzód pierwiastek kwadratowy z wyrazu pierwszego $16a^4c^2$, a wypadek $4a^2c$ (168) jest pierwszym wyrazem szukanego pierwiastku, który się pisze po prawey stronie danej ilości w tym samym wierszu.

Odejmuję potem kwadrat pierwszý części pierwiastku od danej ilości, po czém zostana tylko dwa wyrazy $+ 24a^2b^3c + 9b^6$.

Ponieważ wyraz $24a^2b^3c$ jest podwojnym iloczynem pierwszego wyrazu $4a^2c$ przez wyraz drugi szukanego pierwiastku, otrzymam więc ten drugi wyraz dzieląc $24a^2b^3c$ przez dwa razy wzięty wyraz pierwszy, to jest przez $8a^2c$ który się pisze pod pierwiastkiem w drugim wierszu; iloraz $3b^3$ jest drugim wyrazem szukanego pierwiastku.

Pierwiastek jest już znaleziony: lecz aby się przekonać czy jest prawdziwy, trzeba uważać czy kwadrat drugiego wyrazu jest $9b^6$, albo też czy wyraz pierwszy dwa razy wzięty to jest $8a^2c$ powiększony drugim znalezionego pierwiastku wyrazem, który jest $3b^3$, i rozmnożony przez tenże wyraz drugi, daie na iloczyn dwa ostatnie wyrazy danego kwadratu. A zatem obok $8a^2c$ z prawey strony piszę $+ 3b^3$, i mnożę $8a^2c + 3b^3$ przez $3b^3$: iloczyn stąd wypadający odiawszy od dwóch ostatnich wyrazów danego kwadratu, nic się nie zostaje: co dowodzi, że znaleziony pierwiastek $4a^2 + 3b^3$ jest prawdziwy.

Rzeczą jest przez się widoczną, że to samo rozumowanie i ten sam sposób postępo-

wania zastosować można do wszelkiej ilości z trzech tylko wyrazów złożonej, czyli trzymiennę.

171. Kiedy ilość, której szukamy pierwiastku kwadratowego, ma więcej wyrazów niż trzy, pierwiastek szukany będzie miał więcej wyrazów niż dwa. Przypuściwszy że pierwiastek ten ma trzy wyrazy $m+n+p$, i uczyniwszy $m+n=l$, będzie $m+n+p=l+p$, a tém samém ilość dana równa będzie kwadratowi z $l+p$, który jest

$$l^2 + 2lp + p^2.$$

W kwadracie tym $l^2 = m^2 + 2mn + n^2$. A zatem uporządkowawszy ilość daną podług wykładnika jedneży gloski, pierwszy wyraz téj ilości będzie widocznie kwadratem z pierwszego wyrazu w pierwiastku, a wyraz drugi zawierać będzie podwójny iloczyn wyrazu pierwszego przez drugi tegoż pierwiastku; drugi zaś wyraz znajdziemy dzieląc drugi wyraz ilości daney przez dwa razy wzięty wyraz pierwszy pierwiastku. A mając dwa pierwsze wyrazy szukanego pierwiastku, kwadrat ich wyrażony tu przez l^2 odjąwszy od ilości daney zostanie $2lp + p^2$; to jest: podwójny iloczyn dwóch pierwszych wyrazów $m+n$ pierwiastku rozmnożonych przez wyraz trzeci, i kwadrat wyrazu trzeciego.

Weźmy np. ilość

$$64a^2bc + 25a^2b^2 + 40a^3b + 16a^4 + 64b^2c^2 - 80ab^2c,$$

z któ-

z której potrzeba wyciągnąć pierwiastek kwadratowy. Uporządkowawszy wyrazy podług wykładników gloski a , przystępuję do działania:

$$\begin{array}{r|l} 16a^4 - 40a^3b + 25a^2b^2 & 4a^2 + 5ab + 8bc \\ + 64a^2bc - 80ab^2c & 8a^2 - 5ab \\ + 64b^2bc^2 & 8a^2 - 10ab + 8bc \\ \hline -16a^4 & \\ -40a^3b + 25a^2b^2 - 80ab^2c + 64b^2c^2 & \\ + 64a^2bc & \\ + 40a^3b - 25a^2b^2 & \\ + 64a^2bc - 80ab^2c + 64b^2c^2 & \\ - 64a^2bc + 80ab^2c - 64b^2c^2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Wyciągam naprzód pierwiastek kwadratowy z pierwszego wyrazu $16a^4$, i mam $4a^2$ pierwszy wyraz szukanego pierwiastku; podnoszę go do kwadratu i odejmuję od ilości daney.

Podwaiam potem pierwszy wyraz pierwiastku, i wypadek $8a^2$ piszę w drugim wierszu pod pierwiastkiem: przez $8a^2$ dzielę $-40a^3b$ pierwszy wyraz pierwszy reszty, i mam $-5ab$ drugi wyraz szukanego pierwiastku, który piszę obok $8a^2$ po prawey stronie, i mnożę tak $8a^2$ iako i $-5ab$ przez ten drugi wyraz, a iloczyn odejmuję od pierwszey reszty.

Tym sposobem odjąłem od daney ilości kwadrat dwumianu $4a^2 - 5ab$: a że druga re-

szta zamyka tylko w sobie podwójny iloczyn tego dyumianu przez trzeci wyraz szukanego pierwiastku, i kwadrat tegoż wyrazu trzeciego; podwajam więc ilość $4a^2 - 5ab$, i wypadek $8a^2 - 10ab$ napisawszy pod $8a - 5ab$, dzielę tę drugą resztę przez $8a^2 - 10ab$. Pierwszy wyraz ilorazu to jest $8bc$ jest trzecim wyrazem szukanego pierwiastku. Piszę go także obok $8a^2 - 10ab$, i mnożę $8a^2 - 10ab + 8bc$ przez ten trzeci wyraz, a wypadający iloczyn odjąwszy od drugiey reszty, nic nie zostaje: co dowodzi że pierwiastek daney ilości jest $4a^2 - 5ab + 8bc$.

Wreszcie działanie to zupełnie podobne do wyciągania pierwiastku kwadratowego z ilości liczebnych, łatwo jest zastosować do wszelkich ilości algebrycznych; z których wyciągnąć chcemy pierwiastek kwadratowy.

IV. O wyciąganiu pierwiastku z innych potęg wyższych od stopnia drugiego, tak z ilości liczebnych iako też z Algebrycznych.

172. Działanie arytmetyczne, od którego zależy rozwiązywanie równ. n stopnia drugiego, i za pomocą którego mając dany kwadrat dochodzimy jego pierwiastku, jest tylko szczególnym przypadkiem działania ogólniejszego, służącego do znalezienia liczby, której wiadoma jest potęga iakiegokolwiek stopnia, i którą także zowiemy pierwiastkiem, lecz z przy-

daniem stopnia z którego pochodzi. Działanie to, od którego zależy rozwiązywanie równań stopni wyższych, podaje także sposób wynajdowania logarytmów nierównie krótszy i łatwiejszy, niż są dwa wyłożone wyżej. Lubo więc za pomocą logarytmów łatwo otrzymać można pierwiastek liczby każdego stopnia, wypada jednak podać tu sposób zwyczajny wyciągania tych pierwiastków, abyśmy i nowy sposób wynajdowania logarytmów wyłożyli mogli, i obeznawszy się z działaniem tem na liczbach, łatwiej ie potem do ilości algebrycznych zastosowali, i nakoniec dopełnili wiadomości o wyciąganiu pierwiastków, którąśmy dotąd na drugi tylko stopień podali.

173. Chcąc wyciągać z liczby pierwiastki sześciennie czyli trzeciego stopnia, trzeba na-przód poznać sześcianny liczb jednocyfrowych: liczby te i sześcianny im odpowiadające umieszczamy w dwóch następujących wierszach:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	8	27	64	125	216	343	512	729.

Aż sześciann liczb najmniejszy dwucyfrowy, to jest sześciann z 10 jest 1000: wszelka zatem liczba z trzech cyfr złożona nie może być sześciannem liczby dwucyfrowy, lecz jednocyfrowy.

Liczba dwucyfrowa to jest z dziesiątków i jednostki złożona, podnosi się do sześciannu sposobem takim, jakim ją podnosimy do kwadratu: gdyż rozłożywszy ją na dziesiątki i ie-

dnosci, i oznaczywszy dziesiątki przez a , i edności przez b , będzie

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Skąd się okazuje, że sześciann czyli trzecia potęga liczby złożony z dziesiątków i edności, zamyka cztery części; to jest: sześciann dziesiątków, potrójny kwadrat dziesiątków rozmnożony przez edności; potrójny kwadrat edności rozmnożony przez dziesiątki i sześciann edności.

Niech będzie liczba 47, którą trzeba podnieść do potęgi trzeciej: użyciemy $a=4$ dziesiątkom czyli 40, $b=7$ ednościom.

Będzie

$$a^3 = 64000$$

$$3a^2b = 33600$$

$$3ab^2 = 5880$$

$$b^3 = 343$$

$$\text{Summa } 103823 = 47 \cdot 47 \cdot 47$$

174. Chcąc teraz z danego sześciannu 103823 dożyć jego pierwiastku, uważać naprzód potrzeba, że w sześciannie 4 dziesiątków to jest w liczbie 64000 ostatnie trzy cyfry z prawej ręki jako zera nie mają żadnej wartości liczebnej; szukając przeto sześciannu dziesiątków, można w liczbie 103823 oddzielić przecinkiem trzy ostatnie cyfry, a szukać go w pozostałych liczbach ze strony lewej. Poczém porzadzając działanie jak do wyciągania pierwiastku kwadratowego, po trzeciej cyfrze z prawej strony dać się prze-

cinek; największy sześciann	103,823	47
mogący się mieścić w liczbie	64	48
103 z lewej ręki pozostał	398,23	

będzie sześciannem z dziesiątków szukanego pierwiastku. Przypatrując się sześciannom liczb jednocyfrowych wyżej unieszczonym, postrzegam, że największy sześciann jaki mieścić się może w liczbie 103, jest 64, którego pierwiastek jest 4. Napisawszy więc 4 na miejscu przeznaczonem dla pierwiastku, odejmując liczbę 64 od 103, a obok pozostałej reszty 39 piszę ostatnie trzy cyfry danego sześciannu. Pozostała reszta 39823 zawiera w sobie jeszcze trzy części sześciannu; to jest: potrójny kwadrat dziesiątków rozmnożony przez edności, czyli $3a^2b$; potrójny kwadrat edności rozmnożony przez dziesiątki czyli $3ab^2$, i sześciann edności czyli b^3 . Gdyby ważność iloczynu $3a^2b$ była wiadoma, podzieliwszy iloczyn ten przez $3a^2$ ilość wiadomą, znaleźlibyśmy na iloraz b czyli edności szukanego pierwiastku; ale chociaż ważność iloczynu $3a^2b$ nie jest wiadoma, wiemy przecież, że w iloczynie tym ostatnie dwie cyfry z prawej strony nie mogą mieć żadnej wartości liczebnej; iloczyn albo wien ten ma ieden czynnik a^2 wyrażający kwadrat dziesiątków, a tćm samćm zakończony jest na dwa zera. Iloczyn zatem $3a^2b$ znajdować się musi w części 398, która zostaje z liczby 39823 po odłączeniu od nić dziesiątków i edności, i która prócz tego zawiera jeszcze w sobie sta wypadające z potrójnego iloczynu

dziesiątków przez kwadrat jedności, i z sześciannu jedności.

Dzielnik 398 przez potroiny kwadrat 4 dziesiątków to jest przez 48, wypada na iloraz 8; ale pierwszy należy spróbować, czy trzy części sześciannu pozostałe w reszcie 39823 nie będą za wielkie, przypniącwszy że szukane jedności czyli $b=8$. Jakoż znajdziemy

$$3a^2b = 38400$$

$$3ab^2 = 7680$$

$$b^3 = 512$$

$$\text{Summa} = 46592.$$

Wypadek ten większy od pozostałej reszty 39823, dowodzi, że trzeba zmniejszyć liczbę 8 wziętą za jedności szukanego pierwiastku. Odbyszy tę samą próbę z liczbą 7, okaże się że liczba ta czyni zadosyć warunkom: więc szukanym pierwiastkiem będzie 47.

Zamiałś sprawdzania takiego jakie jest powyższe, zwyczajnie podnosi się zaraz do sześciannu liczba którą wyrażają dwie cyfry znalezione. Działanie to odbyszy z liczbą 48, znajdziemy

$$48 \cdot 48 \cdot 48 = 110592;$$

a liczba ta iako większa od daney 103823 dowodzi że w pierwiastku cyfra 8 jest za wielka.

Tym samym sposobem postępuję się z każdą liczbą mającą cyfr więcej niż trzy, a mniej niż siedm. Oddzieliwszy trzy pierwsze cyfry po prawy stronie, bierze się największy sześciann zawarty w cyfrach pozostałych z lewéy

strony; pierwiastek tego sześciannu pśse się na miejscu dla niego przeznaczoném, a sam sześciann odeymuie się od téy liczby pod którą jest podpisany; obok pozostałej reszty piszą się trzy ostatnie cyfry, z których dwie pierwsze z prawéy strony odłączwszy przecinkiem, pozostałe ze strony lewéy dzielą się przez potroiny kwadrat znalezionych na pierwiastek dziesiątków; lecz przed napisaniem ilotazu na miejscu przeznaczonem, trzeba go pierwszy sprawdzić, podnosząc do sześciannu dwie cyfry na pierwiastek znalezione: jeżeli sześciann ten większy jest od liczby danéy, cyfrę mającą w pierwiastku wyrażać jedności potrzeba zmniejszyć, i przystąpić do sprawdzenia potwornego. Sprawdzanie to pótý się powtarza, poki otrzymany sześciann nie wypadnie równy danéy liczbie, albo też od niéy mniejszy, jeżeli dana liczba nie jest zupełnym sześciannem; a w przypadku tym pierwiastek znaleziony jest pierwiastkiem sześciannu największego, który się zawiera w danéy liczbie. Ponieważ częstokroć po odjęciu sześciannu tego od danéy liczby pozostaia znaczne reszty, czy znaleziony pierwiastek nie jest za mały, przekonać się można sposobem następującym:

$$(a+1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1.$$

Sześciann ten większy jest od sześciannu a^3 ilością $3a^2 + 3a + 1$. Skąd wypada, że kiedy reszta po wyciągnięciu pierwiastku sześciannego pozostała, mniejsza jest aniżeli potroiny kwadrat znalezionego pierwiastku, więcéy

trzy razy wzięty tenże pierwiastek k więcej i, znaleziony pierwiastek nie będzie za mały.

175. Chcąc wyciągnąć pierwiastek sześcienny z liczby 105823817, uważać naprzód potrzeba, że iakakolwiek jest liczba cyfr w szukany pierwiastku, rozłożywszy go na jedności i dziesiątki, sześcian dziesiątków nie może wchodzić do trzech ostatnich cyfr po prawej stronie będących, a tem samem znajdować się musi w liczbie 105823. Lecz największy sześcian zawarty w liczbie 105823 musi mieć więcej niż iedną cyfrę w swoim pierwiastku, który tem samem można będzie znowu rozłożyć na jedności i dziesiątki: aże sześcian tych dziesiątków nie może wchodzić do ostatnich trzech cyfr po prawej stronie, odłączwszy zatem trzy te cyfry przecinkiem, w pozostałej liczbie 105 trzeba szukać tego sześcianu. Gdyby po takowem odłączeniu tych trzech cyfr zolało się jeszcze więcej niż trzy cyfry po lewej stronie, należałoby powtórzyć znowu powyższe rozumowanie; a tak oznaczylibyśmy miejsce sześcianowi z jedności rzędu najwyższego, rozkładając daną liczbę na oddziały trzycyfrowe poczynawszy od ręki prawej ku lewej: ostatni jednak oddział po lewej stronie może mieć cyfr mniej a niżeli trzy.

Po takowem przygotowaniu rozporządziwszy działanie iak zwyczajnie, szukam naprzód podług prawideł w poprzedzającym artykule wyłożonych pierwiastku sześciennego dwóch pierwszych oddziałów z lewej ręki, i mam na wypadek 47; odłączwszy sześcian ręk liczbę od dwóch oddziałów które go w sobie zawierają; obok reszty 2000 piszę oddział następujący 817; a liczba 2000817 powinna jeszcze w sobie zawierać trzy ostatnie części sześcianu z liczby, w której 47 wyrażają dziesiątki, a których jedności są szukane: znajdziemy zatem te jedności iak w przykładzie artykułu poprzedzającego, oddzielając dwie ostatnie cyfry z prawej strony od innych, a część z lewej strony pozostałą dzieląc przez potrójny kwadrat ze 47 to jest przez 6627. Znaleziony iloraz 3 należy sprawdzić podnosząc 473 do sześcianu, a wypadek okaże się równym liczbie danej; gdyż liczba ta jest zupełnym sześcianem.

Wyłożenie przykładu powyższego może zastąpić miejsce ogólnego prawidła. Gdyby dana liczba miała cztery oddziały, z oddziałem czwartym należałoby odbyć takie działanie, iakie się odbyło z trzecim; a kiedy potrójny kwadrat z cyfr na pierwiastek znalezionych nie mieści się w reszcie po odłączeniu od niej

105,823,817	473
64	48
418,23	6627
105823	
20008,17	
105823817	

dwóch cyfr pierwszych z prawej strony, na ten czas napisawszy w pierwiastku zero, przytaczając się do reszty oddział następujący, i z tą resztą postępuje się tak jak z poprzedzającą.

176. Ponieważ sześcienn ułomek otrzymuje się mnożąc ułomek ten przez jego kwadrat, czyli co na jedno wychodzi podnosząc do sześciannu tego licznik i dzieląc go przez sześciann mianownika, wypada stąd, że chcąc otrzymać pierwiastek sześcienny ułamka, trzeba osobno wyciągnąć pierwiastek z licznika i z mianownika. I tak sześcienn ułomek $\frac{5}{125}$ ieli $\sqrt[6]{\frac{5}{125}}$; wzięwszy pierwiastek sześcienny liczb 125 i 216, wypadnie pierwiastek $\frac{5}{6}$.

Sposobu tego trzymać się należy gdy tak licznik jak mianownik jest zupełnym sześciannem: lecz gdy okoliczność ta nie ma miejsca, zamiast wyciągania pierwiastku osobno z licznika osobno z mianownika, można się wyrazić danego ułamka przez kwadrat mianownika; tym sposobem ułomek dany zamienia się na inny, którego mianownik będzie zupełnym sześciannem z mianownika początkowego; i dosyć będzie wziąć tylko pierwiastek największego sześciannu zawartego w liczniku. Gdyby przyszło np. wyciągnąć pierwiastek sześcienny z ułamka $\frac{75}{5 \cdot 5 \cdot 5}$; rozmnożywszy oba wyrazy tego ułamka przez kwadrat mianownika to jest przez 25, wypadnie $\frac{75}{5 \cdot 5 \cdot 5}$. W ułamku tym pierwiastek mianownika jest 5; co się zaś tyczy

licznika 75 ponieważ największy sześcienn w liczniku tym mieszczący się jest 64, którego pierwiastek jest 4, wniesiemy że $\frac{4}{5}$ jest przybliżonym pierwiastkiem sześciennym ułamka $\frac{4}{5}$; iakoż różnica między sześciannem danym a sześciannem znalezione go pierwiastku wynosi

tylko $\frac{11}{125}$. Chcąc mieć pierwiastek bliższy

prawdziwego, trzeba z liczby 75 wyciągnąć pierwiastek przez przybliżenie podług sposobu który podamy niżej.

Jeżeli mianownik danego ułamka jest już kwadratem, dosyć będzie obadwa wyrazy ułamka rozmnożyć przez pierwiastek kwadratowy mianownika. Chcąc np. znaleźć pierwiastek sześcienny ułamka $\frac{5}{6}$, rozmnożywszy obadwa wyrazy ułamka przez pierwiastek kwadratowy

mianownika to jest przez 3, będzie $\frac{12}{3 \cdot 3 \cdot 3}$.

Największy sześcienn mieszczący się w liczniku jest 8, którego pierwiastek jest 2; pierwiastek zaś sześcienny mianownika jest 3: a zatem ułomek $\frac{2}{3}$ jest pierwiastkiem największego sześciannu zawartego w ułamku $\frac{5}{6}$.

177. Można by wyciągać przybliżone pierwiastki sześcienne za pomocą ułamków zwyczajnych sposobem podobnym do podanego wyżej (115) na przybliżone pierwiastki kwadratowe; to jest: trzeba liczbę daną obroczyć na ułomek któregooby mianownik był sześciannem zupełnym. Tak np. chcąc otrzymać pier-

wiastek sześcienny z liczby 22, wyrażam liczbę tę w ksmacie ułamka następującego:

$$\frac{22.125}{125} = \frac{2750}{125}.$$

Pierwiastek największego sześciannu mogącego się mieścić w liczniku jest 14; pierwiastek zaś mianownika jest 5: będzie więc $\frac{14}{5}$ czyli $2\frac{4}{5}$ pierwiastkiem sześciennym liczby 22.

Zwyczajnie jednak wyciąga się przybliżone pierwiastki sześcienne za pomocą ułamków dziesiętnych, obracając liczbę daną na ułamek dziesiętny taki, któregoby mianownikiem był sześciann zupełny. Lecz obaczmy pierwy jak się tworzą sześcianny liczb dziesiętnych.

$$(1,2)^3 = 1,2 \times 1,2 \times 1,2 = 1,728;$$

$$(0,12)^3 = 0,001728.$$

$$(1,25)^3 = 1,953125.$$

$$(0,125)^3 = 0,001953125; \text{ i t. d.}$$

Widzimy tu, że w sześciannie zawsze jest cyfr dziesiętnych trzy razy więcej niż ich ma pierwiastek. Jakoż wszelki iloczyn powinien mieć tyle cyfr dziesiętnych, ile ich jest w jego czynnikach: sześciann zatem jako iloczyn trzech czynników między sobą równych, powinien mieć cyfr dziesiętnych trzy razy więcej, niż ich ma jeden jego czynnik to jest pierwiastek.

Skąd wniesiemy, że obracając liczbę daną na ułamek dziesiętny, trzeba iey przydać

zer trzy razy więcej, niż mieć chcemy cyfr dziesiętnych w iędy pierwiastku sześciennym.

Chcąc np. z liczby 2 otrzymać pierwiastek sześcienny przybliżony do trzech cyfr dziesiętnych, przydaie do liczby téj dziewięć zer czyli mnożę ią przez 1000000000, i zamieniam ią w ułamek następujący: $\frac{2000000000}{1000000000}$, będzie więc

$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{\frac{2000000000}{1000000000}} = \frac{\sqrt[3]{2000000000}}{1000}.$$

Wyciągam potem sposobem wyłożonym wyżej pierwiastek z licznika

2,000,000,000	1,259
1	
10,00	5
1728	
2720,00	432
1953125	
468750,00	46875
1995616979	
4385021	

A zatem $\sqrt[3]{2} = 1,259$: iakoż $(1,259)^3 = 1,995616979$;
liczba zaś $(1,260)^3 = 2,000376000$.

To jest: *ród* przydaie do liczby 2 po prawę stronie dziewięć zer, gdyż chcę mieć w pierwiastku trzy cyfry dziesiętne; *zre* wypadek rozkładam na oddziały trzycyfrowe po-

czyniając od ręki prawej ku lewej; 3cie wy-
ciągam pierwiastek sześcienny z pierwszego po-
lewę ręce oddziału, który jest 2, i pierwiastek
którym jest 1, piszę na miejscu dla niego prze-
znaczonem; 4te od pierwszego oddziału ode-
muję sześcienną znalezione pierwiastku, i obok
pozostałej reszty, która jest 1, piszę trzy zera
składające oddział drugi, skąd powstała liczba
1000; 5te w liczbie tej odłączam dwa pier-
wsze zera z prawej strony, a liczbę pozostałą
ze strony lewej to jest 10, dzielę przez potro-
ny kwadrat znalezione pierwiastku, to jest
przez 3; 6te przed napisaniem ilorazu, którym
jest 3 na miejscu swoim pierwszy go spr-
awdzam podnosząc 15 do sześciannu; aże ten
sześciannu wypada większy od liczby z którą
działam, to jest od 2000, zmniejszam więc ten
iloraz jednością, i piszę w pierwiastku 2; 7me
sześciannu z 12 to jest 1728, odejmuję od dwóch
pierwszych oddziałów wchodzących do dzia-
łania, a obok reszty, która jest 272, piszę od-
dział następujący, i mam liczbę 272000; 8me
w liczbie tej odłączwszy dwa ostatnie zera z
prawej strony, liczbę pozostałą ze strony le-
wej to jest 2720, dzielę przez potroiny kwa-
drat z 12 czyli, przez 432, i mam na iloraz
6; lecz przed napisaniem ilorazu tego w pier-
wiastku, próbuję czy nie jest zawielki: podnios-
szy 126 do sześciannu, znajduję wypadek wię-
kszy niż 2000000; zmniejszam więc iloraz ten
jednością, i piszę 5 obok dwóch pierwszych
cyfr w pierwiastku. 9te sześciannu ze 125 to jest

1953125 odejmuję od trzech oddziałów do
działania w chodzących, to jest od 2000000,
i obok pozostałej reszty, która jest 46875,
piszę trzy zera oddział czwarty składające,
tym sposobem mam liczbę 46875000, w któ-
rą odłączwszy dwa zera po prawej stronie,
część pozostałą ze strony lewej to jest 468750,
dzielę przez potroiny kwadrat znalezione do-
tąd pierwiastku, a iloraz 9 piszę na swoim
miejscu w pierwiastku, i mam liczbę 1259, w
którą odłączwszy trzy ostatnie cyfry, będzie
szukany pierwiastek sześcienny 1,259 10te.
Nakoniec podnoszę do sześciannu tak pierwia-
stek znaleziony, iako też liczbę 1,260, i po-
strzegam że pierwiastek sześcienny liczby 2
większy jest od 1,259, a mniejszy od 1,260.
Liczba jednak 1,260 bliższa jest prawdziwego
pierwiastku liczby 2, niżeli liczba 1,259; gdyż
różnica między sześciannem liczby 1,260 i sze-
ściannem danym jest mniejsza aniżeli różnica
między tymże sześciannem danym i sześciannem
liczby 1,259, o czém łatwo przekonać się mo-
żna.

178. Gdyby liczba dana miała inż cyfr
dziesiętne, przydać do niej należy tyle zer,
aby liczba wszystkich cyfr dziesiętnych w niej
będących była trzy razy większa od liczby
cyfr dziesiętnych którąśmy zamierzeli w szu-
kanym pierwiastku. Chcąc np. z liczby 1,25
wyciągnąć pierwiastek sześcienny z dwiema cy-
frami dziesiętnymi, powinien sześciann szuka-
nego pierwiastku mieć cyfr dziesiętnych sześć:

aże ich ma już dwie, potrzeba więc przypisać cztery zera po prawej stronie liczby 1,25, i sposobem zwyczajnym wyciągnąć pierwiastek sześcienny z liczby 1250000. Po odbytem działaniu znajdziemy że pierwiastek liczby téj przypada między 105 i 106, pierwiastek zatem liczby 1,25 przypadać będzie między 1,05, i 1,06.

179. Wreszcie im więcej zer przydamy do liczby daney, tém pierwiastek otrzymany bliższy będzie prawdziwego; nigdy jednak nie będzie zupełnie równy prawdziwemu, choćby działanie to jak najdalej posunięte było: i pierwiastek sześcienny liczby która nie jest zupełnym sześcianiem, równie jak pierwiastek kwadratowy liczby nie będący zupełnym kwadratem, nie może być wyrażony przez żaden ułomek choćby też mianownik jego był tak wielki jak tylko być może. Abyśmy się o téj prawdzie widocznie przekonali, trzeba pierwej okazać, że nie tylko kwadraty i sześcianny ułomków właściwych są zawsze ułomkami, jak omy to uważać mogli; ale też wszelka liczba ułomkowa nie mogąca być sprowadzoną do mniejszych wyrazów, czyli składająca się z dwóch liczb między sobą pierwszych (143), podnieszona do kwadratu, sześciannu, i t. d. dać zawsze wypadek, ułomkowy nie mogący być sprowadzonym do mniejszych wyrazów.

Prawda ta zasada się na następujący:
Wszelka liczba pierwsza P dzieląca zupeł-
nie

nie iloczyn dwóch liczb A i B , dzielić także musi iedną z tych liczb.

Daymy że liczba ta nie dzieli zupełnie liczby B , i że B jest większa od P ; oznaczwszy przez q iloraz całkowity a przez B' pozostałą resztę, będzie

$$B = Pq + B';$$

rozmnóżwszy obie strony przez A , wypadnie,

$$AB = APq + AB'.$$

Podzieliwszy obie strony przez P , będzie

$$\frac{AB}{P} = Aq + \frac{AB'}{P}.$$

Że zaś pierwsza strona równania tego jest liczbą całkowitą, gdyż podług założenia iloczyn AB jest podzielny przez P ; druga więc strona być powinna także liczbą całkowitą; a gdy wyraz pierwszy drugiey strony jest liczbą całkowitą z założenia, więc i drugi, wyraz $\frac{AB'}{P}$

musi być liczbą całkowitą; a tém samém iloczyn AB' musi być podzielny przez P .

B' jako reszta pozostała z dzielenia B przez P jest mniejsza od P ; nie mogąc zatem dzielić B' przez P , podzielny P przez B' , a otrzymany iloraz całkowity oznaczmy przez q' , pozostałą zaś resztę przez B'' ; dzielny potem P przez B'' , a otrzymany iloraz oznaczmy przez q'' , pozostałą zaś resztę przez B''' ; i tak dalej, aż poki na resztę nie zostanie 1; co nastąpić musi: gdyż P jest liczba pierwsza. Tym sposobem otrzymamy następujące równania:

$$P = Bq' + B''; P = B''q'' + B''' \text{ i t. d.}$$

Rozmnożywszy obie strony każdego równania przez A , będzie

$$AP = ABq' + AB''; AP = AB''q'' + AB''' \text{ itd.}$$

Podzieliwszy przez P , wypadnie

$$A = q' \frac{AB'}{P} + \frac{AB''}{P}; A = q'' \frac{AB''}{P} + \frac{AB'''}{P}$$

i t. d.

Wypadki te okazują, że ponieważ AB jest podzielne przez P , iloczyn także AB' , AB'' i t. d. powinny być podzielne przez P . Ze zaś pozostałe reszty B' , B'' , B''' i t. d. są coraz mniejsze, aż na koniec za ostatniem dzieleniem wypadnie na resztę 1; ostatni zatem iloczyn będzie $A \times 1$, który także być musi podzielny przez P ; to jest P dzielić musi liczbę A .

Stąd wypada że jeżeli liczba pierwsza P nie dzieląca zupełnie podług założenia liczby B nie dzieli zupełnie liczby A ; nie może także zupełnie dzielić ich iloczynu AB .

Jeżeli zatem ułomek $\frac{b}{a}$ nie może być sprowadzonym do mniejszych wyrazów, nie może żadną liczbę pierwszą, któraby razem dzielić mogła liczbę b i a ; aże podług tego co poprzedziło, wszelka liczba pierwsza która nie dzieli liczby a nie może także dzielić iloczynów $a \times a$, $a \times a \times a$ i t. d. czyli a^2 , a^3 i t. d. i że każda liczba pierwsza, która nie dzieli zupełnie b , nie dzieli także iloczynów $b \times b$ czyli b^2 , $b \times b \times b$, czyli b^3 i t. d.

rzeczą jest widoczną, że ułamki $\frac{b^2}{a^2}$, $\frac{b^3}{a^3}$ itd. nie mogą być sprowadzonymi do wyrazów mniejszych tak jak i ułomek $\frac{b}{a}$, a tym bardziej nie mogą zamienić się w liczby całkowite.

Z tej ostatniej prawdy wypada, że wszystkie liczby całkowite, które nie są zupełnemi kwadratami lub sześcianami i t. d. nie mają pierwiastków nie tylko w liczbach całkowitych ale też w liczbach ułamkowych.

180. Ilość której wyrazić nie można ani w liczbie całkowitej ani w ułamkowej, nie może mieć wspólnej miary z jednością lub z jakąkolwiek częścią: Pierwiastki zatem sześciennicze liczb nie będących zupełnemi sześcianami, tak jak pierwiastki kwadratowe liczb nie będących zupełnemi kwadratami, są nie wspólne czyli bezśosunkowe (116).

Ponieważ pierwiastek sześcienny liczby np. 64 jest 4, a pierwiastek kwadratowy liczby 16 jest także 4; więc pierwiastek sześcienny liczby 64, równy jest pierwiastkowi kwadratowemu liczby 16; czyli $\sqrt[3]{64} = \sqrt{16}$.

Pierwiastek sześcienny liczby 43 większy jest od 3, a mniejszy od 4; pierwiastek kwadratowy liczby 12 większy jest od 3, a mniejszy od 4. Mogłoby zatem kto rozumieć, że pierwiastek sześcienny liczby 43 równy jest pierwiastkowi kwadratowemu liczby 12; czyli że

$\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{12}$. Lecz równanie to jest fałszywe: gdyż pierwsza sirona podniesiona do sześciennu czyni 43; druga zaś sirona podniesiona do sześciennu wynosi $\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{12} = 12 \sqrt[3]{12} (167)$. Skąd się okazuje, że pierwiastki sześcienne liczb nie będących zupełnemi sześciennami stanowią ilości niespotwierzone innego gatunku niż pierwiastki liczb niebędących kwadratami: gdyż najczęściej rzecz jest nie podobną iedne wyrazić przez drugie.

181. Poznaawszy sposób wyciągania pierwiastków kwadratowych i sześciennych z ilości liczebných, łatwo go można będzie zastosować do wyciągania pierwiastków wszelkiego stopnia. Lecz pierwszy nim ten sposób wyłożymy, uczynić tu wypada niektóre uwagi nad wyciąganiem pierwiastków z potęg, których wykładniki są podzielne przez 2 lub 3.

Pierwiastek czwartéj potęgi otrzymać można przez podwójne wyciągnięcie pierwiastku kwadratowego: gdyż wzięwszy pierwiastek kwadratowy ilości podniesionéj do potęgi 4tór np. a^4 , wypadnie kwadrat a^2 , z którego wyciągnawszy znowu pierwiastek kwadratowy, wypadnie a pierwiastek szukany.

Podobnież potrójne wyciągnięcie pierwiastku kwadratowego odpowiada wyciągnięciu pierwiastku ósméj potęgi: gdyż iód $\sqrt[3]{a^6} = a^2$; aże $\sqrt[3]{a^4} = a^2$; 3cie $\sqrt[3]{a^2} = a$.

Tu już łatwo postrzedz można, że przez następne wyciąganie pierwiastku kwadratowego,

go, można będzie otrzymać pierwiastek wszelkiéj potęgi, który wykładnikiem jest iedna z liczb 4, 8, 16, 32 i t. d.

Pierwiastki, których wykładniki nie są liczbami pierwszemi, mogą być sprowadzone do innych niższego stopnia: tak np. pierwiastek stopnia szóstego można otrzymać przez wyciągnięcie naprzód pierwiastku kwadratowego, a potem sześciennego: iakoż $\sqrt{a^6} = a^3$;

$$\sqrt[3]{a^3} = a \text{ i t. d.}$$

182. Obaczmy teraz iak się wyciągaia pierwiastki potęg których wykładniki są liczbami pierwszemi. Niech będzie np. liczba 251554007, z której potrzeba wyciągnąć pierwiastek stopnia piątego. Uważam naprzód że ponieważ najmniejsza z liczb dwucyfrowych, to jest 10 ma w piątéj swoiéj potędze sześć cyfr, gdyż $10^5 = 100000$; więc pierwiastek piątego stopnia liczby danéj musi mieć przynajmniéj dwie cyfry: oznaczywszy zatem dziesiątki szukanego pierwiastku przez a , iedności przez b , ilość $a + b$ oznaczać będzie pierwiastek szukany: liczbę więc daną można wyrazić następującym sposobem:

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 = 251554007.$$

Po takowém przygotowaniu, uważam że ponieważ w a^5 czyli w piątéj potędze dziesiątków tego pierwiastku ośiatnie pięć cyfr z prawéj sirony iako zera nie mają żadnéj wazności liczebnéj, oddzielam więc przecinkiem

te pięć cyfr; gdyby w pozostałej części lewéj strony przecinka znajdowało się jeszcze więcej niż pięć cyfr, przylisowałbym do nich to samo rozumowanie, jakie jest poprzedzające; i tym sposobem daną liczbę rozłożyłbym na oddziały pięciocyfrowe poczynając od ręki prawéj ku lewéj; ostatni oddział po lewéj stronie zamykać będzie piątą potęgę jedności rzędu najwyższego w szukanim pierwiastku.

Podnosząc liczby jednocyfrowe do potęgi piątéj, postrzegam że pierwszy oddział danej liczby to jest 2315, przypada między piątą potęgą liczby 4 i 5: gdyż piątą potęgą pierwszéj z tych dwóch liczb jest 1024, drugiey 3125: biorę więc 4 za dziesiątki skutanego pierwiastku, a odiawszy $2315:54007$ 47
piątą potęgę téj liczby to 1024 1280
jest 1024 od pierwsz- $12915:4007$
ego oddziału liczby danéj, obok pozostałéj reszty, która jest 1291, piszę oddział następujący. Liczba liad wypadająca powinna w sobie zamykać wyrazy $5a^4b + 10a^3b^2 + i$ t. d. które pozostaia w ilości $(a+b)^5$, po odieciu od niéy piątéj potęgi dziesiątków czyli a^5 . Gdyby ważność liczebna iloczynu $5a^4b$ była wiadoma, podzieliwszy ważność tę przez $5a^4$, miałbym na iloraz b jedności skutanego pierwiastku. Lecz chociaż ważność iloczynu tego nie jest wiadoma, wiem atoli, że ostatnie cztery jego cyfry z prawéj strony nie mają żadnéj ważności znaczącéj: gdyż jeden jego czynnik a^4 , który jest czwartą

tą potęgą dziesiątków, kończy się na cztery zera. Odtńczywszy przeto w pozostałéj reszcie cztery ostatnie cyfry z prawéj strony, część pozostała ze strony lewéj, to jest 12915 zamykać będzie iloczyn $5a^4b$, czyli pięć razy wziętą potęgę czwartą znalezionych na pierwiastek dziesiątków, rozmnożoną przez jedności, i oprócz tego dziesiątki tysięcy należące do iloczynów $10a^3b^2 + i$ t. d.

Czwarta potęga liczby 4 wzięta pięć razy wynosi 1280; dzielać 12915 przez 1280, wypada na iloraz 10; lecz w pierwiastku nie można położyć więcej nad 9: a i tak jeszcze spróbować należy, czy i ta cyfra nie jest za wielka, podnosząc do potęgi piątéj znaleziony pierwiastek czyli liczbę 49. Próba takowa okazuje, że cyfrą mającą w szukanim pierwiastku wyrażać jedności powinna być liczba 7, i że tém samém pierwiastek ten jest 47, gdyż potęga piątą liczby 48 większa jest od liczby danéj; potęga zaś piątą liczby 47 jest 229345007 mniejsza od téjże liczby danéj.

Gdyby dana liczba miała jednym oddziałem więcej, przylaczyłbym go do reszty pozostałéj z odiecia potęgi piątéj znalezionego pierwiastku od dwóch pierwszych oddziałów liczby danéj; a z całkowitą resztą odbyłbym to samo działanie, iak z poprzedzającą; i tak dalej.

Wreszcie prawidła podane na wyciąganie pierwiastków kwadratowych i sześciennych z ułamków i liczb nie będących zupełnem kva-

dratami i szescianami, z łatwością być mogą zastosowane do wyciągania pierwiastków siopnia piątego.

183. Na tych samych zasadach polega sposób wyciągania tychże pierwiastków z ilości Algiebraicznych. Lecz nim to okazaemy na przykładach z ilościami wielorakimi, wypada pierwszy cokolwiek wspomnieć o pojedynczych.

Ponieważ w iloczynie każda głoska ma za wykładnik sumę wykładników które się znajdują w każdym czynniku (30), wypada ślad że potęga ilości pojedynczej otrzymuje się mnożąc wykładnik każdego czynnika przez wykładnik potęgi szukanej.

I tak trzecią np. potęgę ilości $a^2b^3c^4$ otrzymamy mnożąc wykładniki 2, 3 i 4 należące do głosek a , b i c przez liczbę 3, która jest potęgą szukaną: będzie więc $a^6b^9c^{12}$. Iakoż $(a^2b^3c^4)^3 = a^{2 \cdot 3}b^{3 \cdot 3}c^{4 \cdot 3} = a^6b^9c^{12}$.

Gdyby dana ilość miała współczynnik liczebny, trzeba go także podnieść do potęgi żądanej: i tak czwarta potęga ilości $3ab^2c^3$ jest $81a^4b^8c^{12}$.

184. Co się tycze znaków przed ilościami pojedynczymi będących, trzeba uważać, że wszelkie potęgi, których wykładnik jest parzysty, mają przed sobą znak +: wszelkie zaś potęgi, których wykładnik jest nieparzysty, mają przed sobą ten sam znak, iaki się znajduje przed ilościami, z których potęgi te powstają.

Jakoż potęga siopnia parzystego jest iloczynem ilości rozmnożonej przez siebie samę czyli wzięty za czynnik razy 2, 4, 6, 8 i t. d. iloczyn zaś ma zawsze przed sobą znak + kiedy liczba odmiennych czynników iloczyn ten składających jest 2, 4, 6, 8 i t. d. (34). Przeciwnie potęga siopnia nieparzystego z ilości odmiennych będąca iloczynem ilości tej wziętej za czynnik razy 3, 5, 7, 9 i t. d. musi mieć zawsze przed sobą znak —: gdyż iloczyn ma zawsze przed sobą znak — kiedy liczba odmiennych czynników iloczyn ten składających jest 3, 5, 7, 9 i t. d. iak to łatwo wnieść z tego, cośmy wyżey powiedzieli o mnożeniu (34).

185. A jako wyciąganie pierwiastków jest działaniem odwrotnym podnoszeniu ilości do potęgi; tak też chcąc daney potęgi wynaleźć pierwiastek, trzeba się trzymać prawda powyższemu odwrotnego, to jest podzielić wykładnik każdej głoski przez wykładnik oznaczający siopień pierwiastku żadanego.

Tym sposobem znajdziemy pierwiastek sześcienny ilości $a^6b^3c^9$ dzieląc wykładniki 6, 3 i 9 przez 3, i będzie pierwiastek szukany a^2bc^3 .

Gdy dana ilość ma współczynnik liczebny, trzeba także wziąć jego pierwiastek mający być współczynnikiem dla pierwiastku sposobem powyższym otrzymanego. Chcąc mieć np. pierwiastek siopnia czwartego z ilości $81a^4b^8c^{12}$, ponieważ 81 jest potęgą czwartą liczby 3,

szego (185), że chcąc wyciągnąć pierwiastek daney potęgi, trzeba podzielić wykładnik każdej głoski przez wykładnik oznaczający stopień pierwiastku szukanego. Tym sposobem będzie

$$\sqrt[3]{a^6} = a^{\frac{6}{3}} = a^2 \quad \sqrt[3]{a^9} = a^{\frac{9}{3}} = a^3 \quad \sqrt[3]{a^{12}} = a^{\frac{12}{3}} = a^4 \quad \sqrt[3]{a^{15}} = a^{\frac{15}{3}} = a^5$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \text{ i t. d.}$$

189. Pójdźmyż teraz do wyciągania pierwiastków iakiegokolwiek potęgi z ilości algebricznych wielorakich. Sposób postępowania w téj mierze dosyć będzie okazać na jednym tylko przykładzie: gdyż to, cośmy dotąd o wyciąganiu pierwiastków powiedzieli, łatwo jest zastosować do wszelkich przypadków. Dajmy że trzeba wyciągnąć pierwiastek szóstego stopnia z ilości następujący:

$$\begin{array}{r} 64x^{18} - 960a^3x^{15} + 6000a^6x^{12} \\ - 20000a^9x^9 + 37500a^{12}x^6 \\ - 37500a^{15}x^3 + 15625a^{18} \\ - 64x^{18} \\ \hline \text{Reszta} - 960a^3x^{15} + \text{i t. d.} \end{array} \quad \begin{array}{l} 2x^3 - 5a^3 \\ 192x^{16} \end{array}$$

Ponieważ ilość dana uporządkowana jest podług wykładnika głoski x , wypada stąd, że pierwszy iéy wyraz musi być szóstą potęgą wyrazu pierwszego w szukanym pierwiastku podług teyże głoski x uporządkowanym: wzięwszy zatem szósty pierwiastek ilości $64x^{18}$ podług prawideł podanych wyżej (185) będzie wypadek $2x^3$.

Wypadek ten podniósłszy do potęgi szóstey, i odiawszy od ilości daney, pierwszy wyraz pozostałéy reszty musi być wyrazem drugim w szóstéy potędze dwóch pierwszych wyrazów szukanego pierwiastku: dwa te wyrazy oznaczwszy przez $a + b$ i ilość tę podniósłszy do potęgi szóstéy (23), będzie

$$(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

Pierwszy zatem wyraz pozostałéy reszty jest iloczynem sześć razy wziętym piątéy potęgi wyrazu pierwszego w pierwiastku przez drugi wyraz tegóż pierwiastku: podzieliwszy go zatem przez $6a^5$, iloraz będzie drugim wyrazem b .

Piąta potęga pierwszego wyrazu w pierwiastku to jest wyrazu $2x^3$ rozmnożona przez 6, iest $6 \times 52x^{15} = 192x^{15}$, przez co podzieliwszy pierwszy wyraz pozostałéy reszty, który jest $-960a^3x^{15}$, iloraz $-5a^3$ iest drugim wyrazem szukanego pierwiastku. Dla sprawdzenia znalezionego pierwiastku $2x^3 - 5a^3$, trzeba go podnieść do potęgi szóstéy, a wypadek okaże się równy ilości daney.

Gdyby pierwiastek miał iednym wyrazem więcéy, odbywszy działanie powyższe, została by druga reszta, w którém wyraz pierwszy byłby sześć razy wziętym iloczynem piątéy potęgi dwóch pierwszych wyrazów pierwiastku, przez wyraz trzeci: a zatem pierwszy ten wyraz drugiéy reszty podzieliwszy przez $6(2x^3 - 5a^3)^5$, iloraz byłby trzecim wyrazem szukanego pier-

wiaстку; a dla sprawdzenia tego wyrazu należałoby podnieść do potęgi szóstey trzy wyrazy na pierwiastek otrzymane. Tym samym sposobem postąpićby należało, chcąc znaleźć następne wyrazy w pierwiastku, iakąbykolwiek była ich liczba.

V. O podnoszeniu ilości wielorakich do potęg i o kombinacyach.

190. Rozwijając potęgę szóstą dwumianów $a+b$, $2x^2 - 5a^3$ w poprzedzającym artykule, łatwo mogliśmy pomiarować, że podnoszenie ilości wielorakich do potęg drogą zwyczajną wykonywane, to jest biorąc je za czynnik tyle razy, ile wykładnik szukaney potęgi ma jedności, zabierać musi nie mało czasu i miejsca, zwłaszcza kiedy potęga szukana jest wysokiego stopnia. Przypatrzenie się z głębszą uwagą rozmaitym potęgom wielomianów i okolicznościom rozwijaniu tych potęg towarzyszącym, dało początek pewnym prawidłom, które długie to i częsty omyłkom podpadające działanie znacznie skracają. Lecz prawidła te zasadniają się w części na sposobach rozmaitego porządkowania głosek, któremi się ilości oznaczają: takowe więc sposoby porządkowania, czyli iak się zwyczajnie mówi, *kombinowania* głosek, pierwej wyłożyć potrzeba, nim przystąpimy do podania prawideł na rozwijanie potęg ilości wielorakich.

191. Trzy są gatunki *kombinacyi*: naprzód piszą się przy sobie głoski mające być kombinowanemi w takim porządku w jakim je tylko pisać można, powtarzając w iedneyże kombinacyi tę samą głoskę: np. trzy głoski a, b, c , dają *dwukrotnych* czyli dwugłoskowych tego gatunku kombinacyi dziewięć, które są: $aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc$.

W drugim gatunku kombinacyi piszą się w prawdzie przy sobie głoski w takim porządku, w jakim je tylko pisać można; lecz w iedneyże kombinacyi ta sama głoska nie powtarza się np. trzy głoski a, b, c , dają dwukrotnych tego gatunku kombinacyi sześć, które są: ab, ac, ba, bc, ca, cb .

W trzecim gatunku kombinacyi nie tylko się nie powtarza ta sama głoska w iedneyże kombinacyi, iak w kombinacyach gatunku pierwszego; ale też nie mają miejsca kombinacye złożone z tychże samych głosek, lubo w odmiennym porządku umieszczonych, iak jest w kombinacyach gatunku drugiego. Tak trzy głoski a, b, c dają dwukrotnych tego gatunku kombinacyi trzy, które są: ab, ac, bc .

192. *Pierwszy gatunek kombinacyi*. Niech będą np. cztery głoski a, b, c, d , mające być kombinowanemi. Rzecz naprzód jest widoczna że kombinacyi jednokrotnych czyli jednogłoskowych jest 4, które są: a, b, c, d .
are. Napisawszy głosek a polewey stronie każdej ze czterech kombinacyi jednokrotnych, będzie kombinacyi dwukrotnych cztery, z któ-

rych każda zaczyna się od *a*, i które są *aa*, *ab*, *ac*, *ad*. Napisawszy drugą głoskę *b* po lewéj stronie każdéj kombinacyi iednokrotnéj, przybędzie drugich cztery kombinacyi dwukrotnych, z których każda zaczyna się od głoski *b*, i które są: *ba*, *bb*, *bc*, *bd*. Podobnie napisawszy naprzód głoskę *c* potem *d* po lewéj stronie każdéj kombinacyi iednokrotnéj, przybędzie ośm kombinacyi dwukrotnych, z których cztery zaczynają się od *c*, a cztery od *d*, i które są: *ca*, *cb*, *cc*, *cd*, *da*, *db*, *dc*, *dd*.

Cztery zatem głoski *a*, *b*, *c*, *d* dają kombinacyi dwukrotnych $4 \times 4 = 4^2 = 16$, z których cztery zaczynają się od *a*, cztery od *b*, cztery od *c*, i cztery od *d*.

3cie. Napisawszy każdą ze czterech głosek do kombinowania danych po lewéj stronie każdéj ze 16 kombinacyi dwukrotnych, otrzymamy 4 razy 16, czyli 4^3 kombinacyi trzykrotnych, czyli trzygłoskowych, z których 16 zaczynają się od *a*, 16 od *b*, 16 od *c*, i 16 od *d*.

4te. Napisawszy każdą ze czterech głosek do kombinowania danych po lewéj stronie każdéj kombinacyi trzykrotnej, otrzymamy kombinacyi czterokrotnych czyli czterogłoskowych cztery razy więcej niż było trzykrotnych, aże liczba trzykrotnych jest $= 4^3$, więc liczba czterokrotnych będzie $= 4^3 \times 4 = 4^4$ i t. d.

W ogólności niech liczba głosek do kombinowania danych będzie *m*: kombinacyi dwukrotnych będzie *m*; dwukrotnych m^2 , trzy-

kro-

krotnych m^3 , czterokrotnych m^4 , pięciokrotnych m^5 , . . . *n* krotnych czyli złożonych z liczby głosek *n* będzie m^n . To jest: trzeba liczyć głoski do kombinowania danych podnieść do potęgi, któreby wykładnik miał tyle iedności, po ile głosek ma się znajdować w kombinacyach szukanych. Siedm głosek *np.* dają tego gatunku kombinacyi dwukrotnych, 7^2 , trzykrotnych 7^3 , czterokrotnych 7^4 , i t. d.

Kombinacyi tego gatunku, które się także nazywają *waryacyami*, mamy przykład w układzie liczenia, gdzie dziesięć znaków liczebnich, dają wszelkie liczby jakie tylko być mogą. Uważać tu iednak potrzeba, że ponieważ zero po lewéj stronie cyfry napisane nie odmienia iéy ważności, przeto te 10 znaków liczebnich nie dają kombinacyi dwukrotnych 10^2 czyli 100, lecz tylko 90: gdyż 01, 02, 03 i t. d. znaczą to samo co 1, 2, 3 i t. d. Podobnie kombinacyi trzykrotnych te same 10 znaków liczebnich dają tylko 900, lubo podług prawidła powinny być $10^3 = 1000$, i t. d.

Niektóre gry iak tryktrak są przykładem tego gatunku kombinacyi. Można by tu także wspomnieć głoski abecadla i odmienne dźwięki głosu ludzkiego, które tym sposobem między sobą kombinowane dają rozmaite słowa piane i wymawiane; toż mówić o znakach muzycznych i t. d. Wreszcie gatunek ten kombinacyi nie tak często używa się w praktyce iak dwa następujące.

193. *Drugi gatunek kombinacyi.* Niech będą te same cztery głoski *a, b, c, d* do kombinowania. Rzeczą jest widoczną że kombinacyi jednokrotnych będzie 4, które są *a, b, c, d*.

Napisawszy *a* po lewéj stronie każdej kombinacyi jednokrotnej, będzie kombinacyi dwukrotnych od *a* zaczynających się tylko 3 = 4 - 1, które są: *ab, ac ad*: kombinacyi bowiem *aa* w tym gatunku miejsca nie ma (191). Podobnie postępując z głoskami *b, c, i d*, otrzymamy trzy kombinacje dwukrotne zaczynające się od *b*, trzy zaczynające się od *c*, i trzy zaczynające się od *d*. A zatem czterech głoski *a, b, c, d* dają dwukrotnych tego gatunku kombinacyi 12 = 4. 3 = 4 (4 - 1).

Podobnymże sposobem postępując dalej okaże się że te same cztery głoski dają kombinacyi

trzykrotnych 24 = 4. 3. 2 = 4 (4 - 1) (4 - 2) (4 - 3); i t. d.

Wogólności, niech będzie liczba głoski do kombinowania danych *m*: postępując sposobem podobnym do poprzedzającego, wypadnie zawsze liczba kombinacyi

jednokrotnych = *m*;
dwukrotnych = *m* (*m* - 1);
trzykrotnych = *m* (*m* - 1) (*m* - 2);
czterokrotnych = *m* (*m* - 1) (*m* - 1) (*m* - 3);

pięciokrotnych = *m* (*m* - 1) (*m* - 2) (*m* - 3) (*m* - 4);

n krotnych = *m* (*m* - 1) (*m* - 2) . . . (*m* - *n* + 1).

I tak pięć głosek słowa *robak* dają tego gatunku kombinacyi jednokrotnych 5, dwukrotnych 5. 4 = 20, trzykrotnych = 5. 4. 3 = 60, czterokrotnych 5. 4. 3. 2 = 120, 5krotnych 5. 4. 3. 2. 1 = 120, 6krotnych 5. 4. 3. 2. 1. 0 = 0. Właśnie też tak być powinno: bo słowo z pięciu głosek złożone wtenczas tylko może dać kombinacyą sześciokrotną, kiedy jedna głoska wiedneyże kombinacyi będzie dwa razy powtórzona, a takowe kombinacje należące do gatunku pierwszego, w drugim miejsca nie mają.

Piszący *Logogryffy* i *Anagrammata* (*a*) mogą z tego gatunku kombinacyi korzystać.

(*a*). Słowo jakie przerobione na inne ze wszystkich tychże samych głosek, w odmiennym tylko porządku będących złożone, zowie się *Anagramma*. Tak ze słowa *Sigismundus* zrobiono *anagramma, dignus Musis*. Kiedy zaś z jakiego słowa biorą się wszystkie znaczące kombinacje z iedną, dwóch, trzech i t. d. głosek złożone, zbiór, takowych kombinacyi zowie się *Logogryfem* tego słowa. „*Freszki* te pracowite, mówi *Francœur*, przestały już męczyć uczonych, pomimo wielu szczęśliwych w tćy mierze wypadków. Z nazwiska zaboycy

Extrakty także determinowane Loteryj liczbawęy należą do kombinacyi tego gatunku. Kombinacye te nazywają się także *permutacye*, albo *iloczynny równoważne*.

194. Trzeci gatunek kombinacyi. W tym gatunku kombinacyi iakośmy powiedzieli, mają miejsce same tylko iloczyny z odmiennych czynników złożone czyli różną ważność mające, gdy tym czasem do poprzedzającego gatunku należą iloczyny złożone z tychże samych czynników w odmiennym tylko porządku umieszczonych. I tak ze 12 kombinacyi dwukrotnych drugiego gatunku, które dają cztery głoski *a, b, c i d*, i które są: *ab, ac, ad, ba, bc, bd, ca, cb, cd, da, db, dc*, następujące tylko sześć *ab, ac, ad, bc, bd i cd*, iako iloczyny różnoważne są kombinacyami dwukrotnymi trzeciego gatunku: pozostałe sześć iako iloczyny równoważne z pierwszemi miejsca tu nie mają. Liczba zatem dwukrotnych kombinacyi

Henryka Wielkiego, to jest ze słów *Fides Jacques Clemens*, zrobiono Anagramma *deus fer qui m'a crée*. Jabłoński dla Stanisława Leszczyńskiego, który później był królem Polskim, ze słów, *Domus Leszcina*, wyprosił anagrammata następujące: *Ades incolumis; Omnis es lucida; Mane sidus lesce; Sis columna Dei; Iscande solium*. Oświeca zasługę na uwagę z tego względu, iż znalazło w sobie przepowiedzenie późniejszy ziszczone, *Cours complet des Math.* Tom II. g.

gatunku trzeciego czterech głosek *a, b, c, d*, może być następującym sposobem wyrażona:

$$\frac{4(4-1)}{1 \cdot 2} = \frac{12}{2} = 6.$$

Podobnież przypatrując się 24 kombinacyom trzykrotnym drugiego gatunku, które dają te same 4 głoski *a, b, c, d*, postrzeżemy między niemi cztery tylko iloczyny różnoważne, które są *abc, abd, acd, bcd*; inne wszystkie iako z tychże samych czynników w odmiennym tylko porządku umieszczonych złożone miejsca tu mieć nie mogą. Liczba zatem kombinacyi trzykrotnych gatunku trzeciego ze czterech głosek *a, b, c, d* może być tak wyrażona:

$$\frac{4(4-1)(4-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{24}{6} = 4.$$

Nakoniec między 24 kombinacyami czterokrotnymi gatunku drugiego ze czterech głosek *a, b, c, d*, znajdziemy jeden tylko iloczyn różnoważny, *abcd*; inne wszystkie z tychże samych czynników w odmiennym tylko porządku umieszczonych złożone, są iloczynami równoważnemi. Liczba zatem kombinacyi czterokrotnych gatunku trzeciego ze 4 głosek *a, b, c, d*, może być tak wyrażona:

$$\frac{4(4-1)(4-2)(4-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{24}{24} = 1.$$

Z tego rozumowania, które można zastosować do jakiegokolwiek liczby głosek do kombinowania danych, łatwo jest ustanowić prawo ogólne.

Niech będzie m liczba glosek do kombinowania danych: będzie liczba kombinacy gatunku trzeciego

$$\text{jednokrotnych} = m = \frac{m}{1},$$

$$\text{dwukrotnych} = \frac{m(m-1)}{1.2},$$

$$\text{trzykrotnych} = \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3},$$

$$\text{czterokrotnych} = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4},$$

$$\text{pięciokrotnych} = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5},$$

$$n \text{ krotnych} = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{1.2.3\dots n}.$$

Loterya liczbową jest przykładem tego gatunku kombinacy: z 90 liczb wyciąga się zwyczajnie pięć. Te 90 liczb dają 1080 kombinacy jednokrotnych zwanych *czirakty*.

$$\text{2re } \frac{90.89}{1.2} = 4005 \text{ kombinacy dwukrotnych}$$

zwanych *amba*

$$\text{3cie } \frac{90.89.88}{1.2.3} = 117480 \text{ kombinacy trzy}$$

krotnych zwanych *terna*

$$\text{4te } \frac{90.89.88.87}{1.2.3.4} = 2555190 \text{ kombinacy}$$

czterokrotnych zwanych *kwaterna*;

$$\text{5te } \frac{90.89.88.87.86}{1.2.3.4.5} = 45949268 \text{ kombi-}$$

nacy pięciokrotnych zwanych *kwinterna*.

Łatwo jest zatem wyrachować iak się ma pewność wygranej do pewności przegranej na Loteryi liczbowej. Stawiać *np.* trzy liczby na samo terno, ponieważ z 90 liczb do ciągnięcia wziętych może wyjść ternów 117480, a wygrywa jedno tylko terno stawione; a zatem pewność wygranej do pewności przegranej ma się iak 1 do 117480; to iest: 117480 razy pewniejsza iest przegrana niż wygrana.

195. Poznawszy kombinacy gatunku trzeciego, łatwiej można będzie wyłożyć sposób krótszy rozwijania potęg ilości wielorakich.

Naypierwsza z takowych ilości iest ilość dwuwyrazowa czyli dwumian, iaki iest *np.* $x+a$. Dwumian ten podnoszony sposobem zwyczajnym do potęgi drugiej, trzeciej, czwartej i t. d. daje następujące wypadki.

$$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2.$$

$$(x+a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3.$$

$$(x+a)^4 = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4.$$

i t. d.

Przypatrzywszy się z uwagą tym i innym potęgom dwumianu $x+a$, łatwo byłoby ustalić prawidło, iakie mają być wykładniki dla x i dla a , tudzież iaka być powinna liczba wyrazów w każdej potędze; lecz nie tak iest łatwo domysleć się, iakie mają być współczynniki liczebne wyrazów każdej potęgi. Jakoż współczynniki te biorą początek z dodawania do

siebie wyrazów podobnych, które wypadają w podnoszeniu ilości do potęg, i których liczba w rozmaitych potęgach jest rozmaita, iak się o tém łatwo przekonać można zastanowiwszy nieco uwagę, nad mnożeniem z którego potęgi powstaia. Dla zapobieżenia tej niedogodności weźmy czynniki odmienne, iakie są np. $x + a$, $x + b$, $x + c$, $x + d$ i t. d. i szukajmy ich iloczynów, porządkując w nich wyrazy podług wykładników głoski x .

1^od. Iloczyn dwóch czynników $x + a$, $x + b$, jest

$$x^2 + ax + ab + bx.$$

2^oe. Iloczyn trzech czynników $x + a$, $x + b$, $x + c$, jest

$$x^3 + ax^2 + abx + abc + bx^2 + acx + cx^2 + bcx$$

3^ocie Iloczyn czterech czynników $x + a$, $x + b$, $x + c$, $x + d$, jest

$$x^4 + ax^3 + abx^2 + abcx + abcd + bx^3 + acx^2 + abdx + cx^3 + adx^2 + acdx + dx^3 + bcdx + bdx^2 + cdx^2$$

W iloczynach tych, wszystkie wyrazy wie dneyże kolumnie umieszczone, w których x ma tenże sam wykładnik, biorąc za jeden wyraz, postrzeżemy 1^od że wykładnik głoski x zmniejsza się jednością w każdym wyrazie zaczawszy

od pierwszego, w którym wykładnik ten równa się liczbie czynników iloczyn składających, aż do ostatniego, w którym $x^0 = 1$, jest domyslnie.

2^oe. Ze spółczynnik pierwszego wyrazu jest 1; spółczynnik drugiego wyrazu jest równy summie drugich wyrazów a , b , c i t. d. znajdujących się w czynnikach; spółczynnik trzeciego wyrazu jest równy summie iloczynów różnoważnych dwukrotnych z tychże głosek a , b , c i t. d. spółczynnik czwartego wyrazu jest równy summie iloczynów trzykrotnych różnoważnych z tychże głosek a , b , c i t. d.

Jakoż w iloczynie czterech czynników wyraz drugi x^3 ma za spółczynnik summe $a + b + c + d$, która wyraża summe iloczynów jednokrotnych czterech głosek a , b , c , d ; wyraz trzeci x^2 ma za spółczynnik summe $ab + ac + ad + bc + bd + cd$, która jest summa dwukrotnych iloczynów różnoważnych z tychże czterech głosek a , b , c , d (194). Wyraz czwarty x ma za spółczynnik summe $abc + abd + acd + bcd$, która jest summa trzykrotnych iloczynów różnoważnych z tychże czterech głosek a , b , c , d . Nakoniec spółczynnik ostatniego wyrazu, w którym domyslnie jest $x^0 = 1$, równa się iloczynowi czterokrotnemu tychże głosek a , b , c , d .

195. Tu już łatwo wnieść można że kształt tych iloczynów powinien podlegać tym samym prawom, iakakolwiek będzie liczba czynników:

lecz wniosek ten, na domyśle oparty, może być także następującym sposobem dowiedziony.

Rzeczą naprzód jest widoczną, że wszelki iloczyn tego gatunku, powinien w sobie zawierać wszystkie potęgi głoski x , zaczawszy od potęgi której wykładnik równy jest liczbie czynników iloczyn składających, aż do potęgi której wykładnikiem jest 0. Abyśmy wypadek wyrazili ogólnie, niech m oznacza liczbę czynników: potęgi głoski x następnie po sobie idące będą x^m, x^{m-1}, x^{m-2} i t. d.

Daymy że głoski $A, B, C, \dots Y$ są ilościami potęgi te mnożącemi zaczawszy od x^{m-1} ; lecz ponieważ liczba wyrazów zależąca od ważności szczególny wykładnika m jest nie wyznaczona póty, póki wykładnik ten nie jest dany w liczbach; możemy tylko napisać wyrazy początkowe i ostatnie szukany iloczyn składające; a na miejsce wyrazów domysłnych położymy kropki: tym sposobem otrzymamy następującą formułę:

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \dots Y,$$

która wyraża iloczyn powstały z liczby jakiegokolwiek m czynników dwumiennych $x + a, x + b, x + c, \dots$ i t. d.

Rozmnożywszy iloczyn ten przez nowy czynnik $x + l$, będzie (30).

$$x^{m+1} + Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \dots IX.$$

Tu już rzeczą jest widoczną i ód że jeżeli ilość A jest sumą głoszek a, b, c i t. d. będących drugimi wyrazami czynników dwumiennych,

nych, których liczba jest m , ilość $A + l$ będzie sumą tychże głoszek $a, b, c, \dots l$, których summa jest $m + 1$; i że tém samém jeżeli A jest prawdziwym spółczynnikiem drugiego wyrazu w iloczynie stopnia m , $A + l$ będzie także prawdziwym spółczynnikiem drugiego wyrazu w iloczynie stopnia $m + 1$.

2ga. Jeżeli B jest sumą dwukrotnych iloczynów różnoważnych głoszek a, b, c i t. d, których liczba jest m , $B + lA$ wyrażać będzie summe dwukrotnych iloczynów różnoważnych z tychże głoszek $a, b, c, \dots l$, których liczba jest $m + 1$: bo kiedy $A = a + b + c + \dots$ i t. d. będzie $lA = l(a + b + c + \dots)$ i t. d. A zatem jeżeli B jest prawdziwym spółczynnikiem wyrazu trzeciego w iloczynie stopnia m , $B + lA$ będzie także prawdziwym spółczynnikiem trzeciego wyrazu w iloczynie stopnia $m + 1$.

3cie. Jeżeli C jest sumą trzykrotnych iloczynów różnoważnych głoszek a, b, c i t. d, których liczba jest m , $C + lB$ będzie sumą trzykrotnych iloczynów różnoważnych z głoszek $a, b, c, \dots l$, których liczba jest $m + 1$: bo gdy $B = ab + ac + ad + \dots$ i t. d, będzie $lB = l(ab + ac + ad + \dots)$ i t. d. Jeżeli więc C jest prawdziwym spółczynnikiem wyrazu czwartego w iloczynie stopnia m , $C + lB$ będzie także prawdziwym spółczynnikiem wyrazu czwartego w iloczynie stopnia $m + 1$.

Ten sam sposób rozumowania rozciągnąć można do wszystkich wyrazów; i jeżeli Y jest iloczynem wszystkich głoszek a, b, c i t. d,

których liczba jest m , IV musi być iloczynem tychże głosek powiększonych głosem I , których też samą liczbą jest $m+1$.

Jeżeli więc uwagi czynione wyżej (195) nad iloczynem słupnia czwartego mają miejsce, muszą mieć także miejsce nad iloczynem słupnia piątego, szóstego i wszystkich innych.

Wypada stąd że kiedy iloczyn czynników dwumiennych $x+a$, $x+b$, $x+c$, i t. d. których liczba równa się m , jest wyrażony w następującym kształcie:

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \text{i t. d.}$$

 A , będzie zawsze summa głosek a, b, c i t. d. których liczba jest m ; B , summa dwukrotnych iloczynów różnoważnych z tychże głosek; C , summa trzykrotnych iloczynów różnoważnych z tychże głosek, i tak dalej.

Abysmy prawo któremu to wyrażenie podlega, zamknęli w jednym wyrazie, weźmy wyraz umieszczony w miejscu nie wyznaczonym, który dla téj przyczyny oznaczmy przez Nx^{m-n} . Wyraz ten będzie drugim jeżeli czynimy $n=1$; trzecim jeżeli $n=2$, iedylnym jeżeli $n=10$. i t. d. W pierwszym przypadku głoska N będzie summa głosek a, b, c i t. d. których liczba jest m , w drugim summa dwukrotnych iloczynów różnoważnych tychże głosek a, b, c i t. d. w trzecim summa dziesięćkrotnych iloczynów różnoważnych tychże głosek, i t. d.

197. Chcąc iloczyny powyższe (195)
 $(x+a)(c+b)$, $(x+a)(x+b)(x+c)$, $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)$ i t. d.

zamienić na potęgi dwumianu $x+a$; $(x+a)^2$, $(x+a)^3$, $(x+a)^4$ i t. d. dosyć jest w iloczynach tych uczynić

$a=b$, $a=b=c$, $a=b=c=d$ i t. d.

Na ten czas wszystkie ilości mnożące tę samą potęgę głoski x będą między sobą równe: a tak spółczynnik wyrazu drugiego, który w iloczynie $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)$, jest $a+b+c+d$, zamieni się na $4a$.

Spółczynnik wyrazu trzeciego, który w tymże iloczynie jest

$ab+ac+ad+bc+bd+cd$,

zamieni się na $6a^2$.

Spółczynnik wyrazu czwartego, który w tymże iloczynie jest $abc+abd+acd+bcd$, zamieni się na $4a^3$. A stąd łatwo jest pomiarować, że spółczynniki rozmaitych potęg głoski x , zamieniają się na jednę potęgę głoski a , wziętą tyle razy, ile jest w tych spółczynnikach wyrazów, i oznaczoną przez liczbę czynników wyrazu te składających. A tak spółczynnikiem N mnożącym potęgę x^{m-n} w powyższym iloczynie ogólnym, będzie potęga n ta głoski a , czyli a^n wzięta tyle razy, ile otrzymać można iloczynów różnoważnych n krotnych, z głosek których liczba jest m .

Podług teorii kombinacyi liczba głosek m dać różnoważnych iloczynów n krotnych

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\dots(m-n+1)}{1. 2. 3. \dots n} \quad (194)$$

Biorąc następnie 1, 2, 3, 4 i t. d. zamiast n będzie $\frac{m}{1}$ współczynnikiem liczebnym wyrazu

drugiego; $\frac{m(m-1)}{1. 2}$ współczynnikiem liczebnym

wyrazu trzeciego; $\frac{m(m-1)(m-2)}{1. 2. 3}$ współczyn-

nikiem liczebnym wyrazu czwartego; a w ogólności

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\dots(m-n+1)}{1. 2. 3. 4. \dots n}$$

spółczynnikiem liczebnym dla wyrazu zastępującego miejsce $n+1$. Szukana zatem formuła będzie

$$(x+a)^m = x^m + \frac{m}{1} ax^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1. 2} a^2 x^{m-2} +$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1. 2. 3} a^3 x^{m-3} + \text{i t. d.}$$

Z formuły téj wyprowadzić można prawidło następujące: Chcąc z iednego wyrazu otrzymać wyraz następujący, trzeba współczynnik liczebnym rozmnożyć przez wykładnik głoski x danego wyrazu; podzielić przez liczbę oznaczającą miejsce tegoż wyrazu; wykładnik głoski a powiększyć iednością, a wykładnik głoski x zmniejszyć iednością.

I tak, chcąc np. wyraz x^m który jest pierwszy, przerobić na wyraz drugi, trzeba iego

spółczynnikiem liczebnym, którym jest 1, rozmnożyć przez wykładnik głoski x , którym jest m , i podzielić przez liczbę oznaczającą miejsce tegoż wyrazu; którą jest 1; tym sposobem utworzy się dla drugiego wyrazu współczynnik liczebnym $\frac{m}{1}$; potem wykładnik głoski x zmniejszy się iednością i będzie x^{m-1} , wykładnik zaś głosek a który tu jest 0; powiększa się iednością, i będzie a^1 : wyraz zatem drugi będzie $\frac{m}{1} ax^{m-1}$.

Ten znowu drugi wyraz chcąc przerobić na trzeci, trzeba współczynnik iego liczebnym $\frac{m}{1}$ rozmnożyć przez wykładnik głoski x to jest przez $m-1$, i podzielić przez liczbę 2, która oznacza miejsce tego wyrazu; i będzie $\frac{m(m-1)}{1. 2}$ współczynnikiem liczebnym dla wyrazu trzeciego: zmniejszwszy potem wykładnik głoski x iednością, a wykładnik głoski a powiększwszy iednością, będzie wyraz trzeci $\frac{m(m-1)}{1. 2} a^2 x^{m-2}$.

Tymże sposobem postępując znajdziemy

$$\text{Wyraz czwarty } \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} a^3 x^{m-3}$$

$$= \frac{m(m-1)(m-2)}{1. 2. 3} a^3 x^{m-3} \text{ i t. d. Lubo}$$

w tęj formule nie można wyznaczyć liczby wyrazów, chyba nadawszy dla m ważność szczególną, nie trudno jednak będzie wynaleźć wyraz zastępujący miejsce $n+1$ podług powyższej formuły będzie

$$\frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} a^{m-n}$$

Ostatnia ta formuła zowie się wyrazem

ogólnym ciągu $x^m + \frac{m}{1} ax^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^2 x^{m-2} + i \cdot t$. d. gdyż czyniąc następnie $n=1$, $n=2$, $n=3$, i t d., formuła ta daie wszystkie wyrazy tego ciągu:

198. Chcąc podług prawidła w poprzedzającym artykule wyprowadzonego podnieść dwumian $x+a$ do potęgi n , dziesiątę będzie

Wyraz 1szy $= x^{10}$, czyli $a^0 x^{10}$

$$2gi = \frac{10}{1} a^1 x^9 = 10ax^9$$

$$3ci = \frac{10}{1} \times \frac{9}{2} a^2 x^8 = 45a^2 x^8;$$

$$4ty = 45 \times \frac{8}{3} a^3 x^7 = 120a^3 x^7;$$

$$5ty = 120 \times \frac{7}{4} a^4 x^6 = 210a^4 x^6;$$

$$6ty = 210 \times \frac{6}{5} a^5 x^5 = 252a^5 x^5;$$

$$7my = 252 \times \frac{5}{6} a^6 x^4 = 210a^6 x^4;$$

$$8my = 210 \times \frac{4}{7} a^7 x^3 = 120a^7 x^3;$$

$$9ty = 120 \times \frac{3}{8} a^8 x^2 = 45a^8 x^2;$$

$$10ty = 45 \times \frac{2}{9} a^9 x^1 = 10a^9 x;$$

$$11ty = 10 \times \frac{1}{10} a^{10} x^0 = a^{10}; \text{ więc}$$

$$(x+a)^{10} = x^{10} + 10ax^9 + 45a^2x^8 + 120a^3x^7 + 210a^4x^6 + 252a^5x^5 + 210a^6x^4 + 120a^7x^3 + 45a^8x^2 + 10a^9x + a^{10}.$$

Widzi-

Widzimy tu że wyraz pierwszy od początku, to jest x^{10} , i pierwszy od końca, to jest a^{10} , mają te same współczynniki i te same wykładniki; lecz liczba 10 w pierwszym wyrazie od początku jest wykładnikiem dla x , w pierwszym zaś od końca jest wykładnikiem dla a ; podobnież w wyrazie drugim od początku, który jest $10ax^9$, i w drugim od końca, który jest $10a^9x$, te same są współczynniki i wykładniki; lecz w drugim od początku liczba 9 jest wykładnikiem dla x , liczba 1 jest wykładnikiem dla a ; w drugim zaś od końca liczba 9 jest wykładnikiem dla a , liczba 1 jest wykładnikiem dla x : toż mowić o innych wszystkich wyrazach. Jeżeli, iak jest w przykładzie poprzedzającym, wykładnik szukany potęgi jest parzysty, a tém samém liczba wyrazów potęgę te składających nieparzystą, na ten czas w wyrazie miejsce średnie trzymającym iak to jest $252a^5x^5$ równie od początku i od końca oddalonym głoski a i x mają także sam wykładnik, który jest równy połowie wykładnika potęgi szukanej.

Podług uwag tych, chcąc *np.* dwumian $x+a$ podnieść do potęgi szóstę, dosyć jest wynaleźć cztery pierwsze wyrazy szukanej potęgi; ostatnie trzy łatwo będzie wyprowadzić z trzech wyrazów pierwszych.

199. Formułę w artykule powyższym umieszczoną z łatwością można zastosować do wynalezienia potęg wszelkiego dwumianu. Chcąc *np.* podnieść do potęgi szóstę dwa-

mian $2x^3 - 5a^3$: dosyć będzie w formule wspomnionęj położyć $2x^3$ zamiast x , a $-5a^3$ zamiast a . Jakoż uczyniwszy $2x^3 = x'$, $-5a^3 = a'$, będzie

$$(2x^3 - 5a^3)^6 = (x' + a')^6 = x'^6 + 6a'x'^5 + 15a'^2x'^4 + 20a'^3x'^3 + 15a'^4x'^2 + 6a'^5x' + a'^6.$$

Zamiast a' , x' położywszy ilości których miejsce głoski te zastępują, będzie

$$\begin{aligned} (2x^3 - 5a^3)^6 &= (2x^3)^6 + 6(-5a^3)(2x^3)^5 \\ &+ 15(-5a^3)^2(2x^3)^4 + 20(-5a^3)^3(2x^3)^3 \\ &+ 15(-5a^3)^4(2x^3)^2 + 6(-5a^3)^5(2x^3) \\ &+ (-5a^3)^6 \text{ czyli} \\ (2x^3 - 5a^3)^6 &= 64x^{18} - 960a^3x^{15} + 6000a^6x^{12} \\ &- 20000a^9x^9 + 37500a^{12}x^6 - 37500a^{15}x^3 \\ &+ 15625a^{18}. \end{aligned}$$

Widzimy tu że wyrazy są na przemian raz dodawne, drugi raz odjemne. Jeleń w danym dwumianie wyraz drugi jest odjemny, wyrazy w rozwinięty potędze zastępujące miejsce 2gie, 4te, 6te i w ogólności miejsce parzyste zawsze są odjemne: gdyż w tych wyrazach wykładnikami ilości w danym dwumianie odjemny są liczby nieparzyste; a wszelka potęga ilości odjemny mająca za wykładnik liczbę nieparzystą ma zawsze przed sobą znak — (184). Przeciwnie, wyrazy które w rozwinięty potędze zastępują miejsce nieparzyste, jakie jest 1sze, 3cie, 5te i t. d. są zawsze dodawne: gdyż w tych wyrazach wykładnikami ilości w danym dwumianie odjemny są liczby parzyste; a wszelka potęga z wykładnikiem pa-

nytych ma zawsze przed sobą znak +, czyli to ilość do téj potęgi podniesiona jest dodawna, czyli też odjemna.

200. Ponieważ $x^{m-1} = \frac{x^m}{x}$, $x^{m-2} = \frac{x^m}{x^2}$ i t. d. (43), można zatem powyższą formułę (197) zamienić w następującą.

$$(x+a)^m = x^m + \frac{ma}{1 \cdot x} x^{m-1} + \frac{m(m-1)a^2}{1 \cdot 2 \cdot x^2} x^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)a^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x^3} x^{m-3} + \text{i t. d.}$$

Rozłożywszy drugą stronę na czynniki, będzie

$$(x+a)^m = x^m \left(1 + \frac{ma}{1 \cdot x} + \frac{m(m-1)a^2}{1 \cdot 2 \cdot x^2} + \frac{m(m-1)(m-2)a^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x^3} + \text{i t. d.} \right).$$

Chcąc podług téj formuły otrzymać szukaną potęgę danego dwumianu, trzeba ułożyć następujący ciąg liczb:

$$\frac{m}{1}, \frac{m-1}{2}, \frac{m-2}{3}, \frac{m-3}{4}, \frac{m-4}{5} \text{ i t. d.}$$

Pierwsza z tych liczb to jest $\frac{m}{1}$ mnożysz

przez ułamek $\frac{a}{x}$, potem wypadek ten, który

jest $\frac{ma}{1 \cdot x}$, mnoży się przez drugą liczbę

$\frac{m-2}{2}$ i przez ułamek $\frac{a}{x}$; potem wypadek ten,

dniki zaś głoski a ciągle się jednością powiększają.

Podobnie dzieląc $x^m - a^m$ przez $x - a$, znajdziemy na iloraz

$x^{m-1} + a^2 x^{m-2} + a^2 x^{m-3} + a^3 x^{m-4} + \text{it. d.}$ w którym wykładniki głoski x zawsze się zmniejszają jednością, wykładniki zaś głoski a zawsze się jednością powiększają: wyraz zatem ostatni tego ilorazu musi być a^{m-1} ; przedostatni zaś $a^{m-2} x$. Abyśmy się o prawdzie tej przekonali, weźmy od razu równanie

$$\frac{x^m - a^m}{x - a} = x^{m-1} + a x^{m-2} + a^2 x^{m-3} + \dots + a^{m-2} x + a^{m-1}.$$

Rozmnożywszy obie strony przez mianownik $x - a$, z pierwszej strony zostanie sam licznik czyli dzielna $x^m - a^m$; druga zaś strona zamieni się w następującą:

$$x^m + a x^{m-1} + a^2 x^{m-2} + \dots + a^{m-2} x^2 + a^{m-1} x - a x^{m-1} - a^2 x^{m-2} - a^3 x^{m-3} - \dots - a^{m-1} x - a^m.$$

Summa dwóch tych wyrażeń składa się tylko z wyrazu pierwszego w pierwszym wierszu, i z ostatniego w wierszu drugim, czyli równa jest dwumianowi $x^m - a^m$; wszystkie inne wyrazy obu wierszów różniące się od siebie tylko znakami, w dodawaniu znikną. Kiedy więc druga strona równania powyższego rozmnożona przez dzielnik $x - a$ daje na iloraz dzielną, jest to dowodem, że ta druga strona jest ilorazem wypadającym z podzielenia $x^m - a^m$ przez $x - a$.

Uważać tu trzeba że po wyrazie $a^2 x^{m-2}$ w wierszu pierwszym następować powinien wyraz $a^3 x^{m-3}$, który dodany do odpowiadającego sobie wyrazu w drugim wierszu zniknie; i że podobnie w drugim wierszu przed wyrazem $-a^{m-1} x$, znajdować się powinien wyraz $-a^{m-2} x^2$; który dodany do odpowiadającego sobie wyrazu w wierszu pierwszym zniknie. Wyrazy te nie są napisane, lecz ich domysleć się należy w przerwie oznaczony kropkami

203. Przystąpmy teraz do wyłożenia drugiego sposobu na rozwinięcie potęg dwumianu. A naprzód uważać trzeba, że ponieważ

$$x + a = x \left(1 + \frac{a}{x}\right) \text{ a t\acute{e}m sam\acute{e}m } (x + a)^m;$$

$$= x^m \left(1 + \frac{a}{x}\right)^m; \text{ zamiast wi\acute{e}c rozwini\acute{e}cia}$$

dwumianu $(x + a)^m$, można rozwinąć dwumian

$$x^m \left(1 + \frac{a}{x}\right)^m, \text{ albo te\acute{z} dwumian } x^m(1 + y)^m$$

$$\text{czyni\acute{a}c } \frac{a}{x} = y.$$

Przypatrując się początkowym potęgom dwumianu $1 + y$, postrzeżemy że rozwinięcie jakiegokolwiek potęgi tego dwumianu powinno być zawsze następującego kształtu.

$$1 + Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + Ey^5 + \dots$$

gdzie współczynniki A, B, C, D, E , i t. d. są liczbami nie zależącymi bynajmniej od wartości głoski y , lecz jedynie od wykładnika tej

potęgi, do której podniesiony jest dwumian $1+y$ (a). Po takowem przygotowaniu, niech będzie

$$(1+y)^m = 1 + Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + \dots$$

$$(1+z)^m = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \dots$$

Odiąwszy drugie równanie od pierwszego zostanie

$$(1+y)^m - (1+z)^m = A(y-z) + B(y^2-z^2) + C(y^3-z^3) + D(y^4-z^4) + \dots$$

Uczyniwszy $1+y=u$, $1+z=v$, $(1+y)^m = u^m$, $(1+z)^m = v^m$; będzie

$$u^m - v^m = A(y-z) + B(y^2-z^2) + C(y^3-z^3) + D(y^4-z^4) + \dots$$

Ze zaś $1+y=u$, $1+z=v$, a tém samém $y-z=u-v$; podzieliwszy zatem pier-

- (a) W rozwinięciu potęgi stopnia m dwumianu $y+1$, wykładnik głoski y zmniejszałby się w każdym wyrazie iednością; w żadnym iednak wyrazie wykładnik ten nie może być odmienny; bo gdyby był np. wyraz iaki w kształcie następującym: $Ry^{-r} = \frac{R}{y^r}$ założywszy że $y=0$,

wyraz ten zamieniłby się na $\frac{R}{0}$, co iak ob-

czymy niżej, oznacza ilość nieskończenie wielką; gdy tym czasem to samo założenie czyni wszelkie potęgi dwumianu $y+1$ czyli $1+y$ równymi iedności.

wszą stronę ostatniego równania przez $u-v$, drugą przez $y-z$, znajdziemy (202)

$$u^{m-1} + u^{m-2}v + u^{m-3}v^2 + \dots + uv^{m-2} + v^{m-1} = A + B(y+z) + C(y^2+yz+z^2) + D(y^3+y^2z+yz^2+z^3) + \dots$$

Ponieważ to ostatnie równanie zawsze powinno mieć miejsce, iakiekolwiek będą wartości dane dla y i z , więc utrzyma się także kiedy uczynimy $y=z$, a tém samém $u=v$. W tym zaś przypadku z pierwszej strony tego równania wyraz drugi $u^{m-2}v$ zamieni się na $u^{m-2}u = u^{m-1}$ (30); toż mówić o innych wszystkich wyrazach stronę pierwszą składających; aże liczba tych wyrazów musi być koniecznie równa liczbie iedności w wykładniku m znajdujących się, o czém łatwo przekonać się można, zastanowiwszy się z uwagą nad dzieleniem dwumianu $x^m - a^m$ przez $x - a$; pierwsza zatem strona równania tego zamieni się na mu^{m-1} . Z drugiej zaś strony przez przypuszczenie że $y=z$, czynnik $y+z$ zamieni się na $2y$; czynnik y^2+yz+z^2 zamieni się na $3y^2$ i t. d. Równanie więc to zamieni się w następujące:

$$mu^{m-1} = A + 2By + 3Cy^2 + 4Dy^3 + \dots$$

Rozmnożywszy obie strony przez u , wypadnie

$$mu^m = u(A + 2By + 3Cy^2 + 4Dy^3 + \dots)$$

Ze zaś podług przypuszczenia, $u=1+y$, będzie więc

$$m(1+y)^m = (1+y)(A + 2By + 3Cy^2 + 4Dy^3 + \dots)$$

Ze strony pierwszy zamiast $(1+y)^m$ położywszy wartość założoną, która jest $1 + Ay + By^2 + Cy^3 + \dots$ i z obu stron odwszy mnożenie wskazane przez nawiasy; będzie

$$m + mAy + mBy^2 + mCy^3 + mDy^4 + mEy^5 + \dots = A + (A + 2B)y + (2B + 3C)y^2 + (3C + 4D)y^3 + \dots$$

Przeniosłszy wszystkie wyrazy na pierwszą stronę i uporządkowawszy je podług wykładników głoski y ; wypadnie

$$m - A + (mA - A - 2B)y + (mB - 2B - 3C)y^2 + (mD - 3C - 4D)y^3 + \dots = 0.$$

Nadałszy dla y wartość rzeczywistą iakąkolwiek pierwsza strona równania tego nie może być inaczej równa zeru, chyba w ten czas tylko, kiedy współczynniki mnożące wszystkie potęgi głoski y będą równe zeru. Wypada zatem

$$m - A = 0; mA - A - 2B = 0; mB - 2B - 3C = 0; \text{ i t. d. Wieg}$$

$$A = m = \frac{m}{1},$$

$$B = \frac{mA - A}{2} = \frac{A(m-1)}{2} = \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2},$$

$$C = \frac{mB - 2B}{3} = \frac{B(m-2)}{3} = \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

$$\frac{(m-2)}{3!}; \text{ i t. d.}$$

Będzie zatem $1 + Ay + By^2 + Cy^3 + \dots$, czyli

$$(1+y)^m = 1 + \frac{m}{1}y + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}y^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}y^3 + \dots$$

Że zaś podług założenia $y = \frac{a}{x}$, będzie więc

$$\left(1 + \frac{a}{x}\right)^m \text{ czyli } \left(\frac{x+a}{x}\right)^m, \text{ czyli} \\ \frac{(x+a)^m}{x^m} = 1 + \frac{m}{1} \frac{a}{x} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \frac{a^2}{x^2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{a^3}{x^3} + \dots$$

Ponieważ m jest liczba całkowita, z drugiej strony równania tego wyraz zastępujący miejsce oznaczne liczbą $m+1$ będzie ostatni; gdyż w następującym wyrazie b byłby jeden czynnik $m-1$ czyli 0. Rozmnożywszy obie strony równania tego przez x^m , wypadnie formuła taka sama, iakąśmy otrzymali wyżey (200).

204. Ten sam jest sposób postępowania, kiedy wykładnik szukany potęgi dwumianu jest ułomkiem albo też liczbą ujemną. Jakoż w pierwszym przypadku weźmy dwa równania

$$(1+y)^n = 1 + Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + \dots$$

$$(1+z)^m = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + \dots$$

Uczyniwszy $(1+y)^{\frac{1}{m}} = u$, $(1+z)^{\frac{1}{m}} = v$,
będzie

$$(1+y)^{\frac{1}{m}} = u^m, (1+z)^{\frac{1}{m}} = v^m \quad (183); \text{ a t\acute{e}m sam\acute{e}m}$$

$$u^m - v^m = A(y-z) + B(y^2 - z^2) + C(y^3 - z^3) + D(y^4 - z^4) + \dots$$

Ze zaś podług przypuszczenia $(1+y) = u^m$,
 $(1+z) = v^m$; wypada stąd że $y - z = u^m - v^m$;
a t\acute{e}m sam\acute{e}m

$$\frac{u^m - v^m}{u^m - v^m} = \frac{A(y-z)}{y-z} + \frac{B(y^2 - z^2)}{y-z} + C \frac{(y^3 - z^3)}{y-z} + \dots$$

Ponieważ zaś podług tego cośmy powie-
dzieli wyżej (202). iest

$$u^m - v^m = (u-v)(u^{m-1} + u^{m-2}v + \dots + uv^{m-2} + v^{m-1});$$

$$u^m - v^m = (u-v)(u^{m-1} + u^{m-2}v + \dots + uv^{m-2} + v^{m-1});$$

w powyższ\acute{e}m wi\acute{e}c równaniu odbywszy z dru-
giej strony dzielenie przez $y - z$, a z\acute{e} strony
pierwsz\acute{e}j zamiast licznika i mianownika po-
łożywszy znalezione ich wa\acute{z}no\acute{s}ci, i podzieli-
wszy tak licznik iak mianownik przez sp\acelny
czynnik $u - v$; równanie to zamieni si\acute{e} w na-
st\acute{e}puj\acute{a}ce:

$$\frac{u^{m-1} + u^{m-2}v + \dots + uv^{m-2} + v^{m-1}}{u^{m-1} + u^{m-2}v + \dots + uv^{m-2} + v^{m-1}} = A + B(y+z) + C(y^2 + yz + z^2) + D(y^3 + y^2z + yz^2 + z^3) + \dots$$

Uczyniwszy $y = z$, a t\acute{e}m sam\acute{e}m $1 + y = 1 + z$, i $u = v$; równanie ostatnie zamieni
si\acute{e} w nast\acute{e}puj\acute{a}ce:

$$\frac{mu^{m-1}}{uu^{m-1}} = A + 2By^2 + 3Cy^3 + 4Dy^4 + \dots (V)$$

Rozmnożywszy z pierwsz\acute{e}j strony licznik
i mianownik przez u , a obie strony rozmnoży-
wszy przez u^n , b\acute{e}dzie

$$\frac{m}{n} u^n = u^n (A + 2By + 3Cy^2 + 4Dy^3 + \dots)$$

Zamiast u^m , i u^n położywszy ich wa\acute{z}no-
\acute{s}ci, które s\acute{a} $(1+y)^{\frac{m}{n}}$ i $1 + y$, wypadni\acute{e}

$$\frac{m}{n} (1+y)^{\frac{m}{n}} = (1+y) (A + 2By + 3Cy^2 + 4Dy^3 + \dots)$$

Ze strony pierwsz\acute{e}j zamiast czynnika

$(1+y)^{\frac{m}{n}}$ położywszy jego wa\acute{z}no\acute{s}ć która iest:
 $1 + Ay + By^2 + Cy^3 + \dots$, i z obu stron
wykonawszy mno\acute{z}enie wskazane przez nawia-
sy, b\acute{e}dzie

$$\frac{m}{n} + \frac{m}{n} Ay + \frac{m}{n} By^2 + \frac{m}{n} Cy^3 + \dots$$

$$= \{ A + 2By + 3Cy^2 + 4Dy^3 + 5Ey^4 + \dots + Ay + 2By^2 + 3Cy^3 + 4Dy^4 + \dots \}$$

W równaniu tém przeniosłszy wszystkie wyrazy na stronę pierwszą i spóliczynniki mnożące wszystkie potęgi głoski y uczyniwszy równe zeru, iak wyżey (205), znajdziemy

$$A = \frac{m}{n}, 2B = \frac{m}{n} A - A^2; 3C = \frac{m}{n} B - 2B^2;$$

i t. d; a stąd

$$B = \frac{\frac{m}{n} A - A^2}{1. 2} = \frac{A \left(\frac{m}{n} - 1 \right)}{1. 2}$$

$$= \frac{\frac{m}{n} \left(\frac{m}{n} - 1 \right)}{1. 2};$$

$$C = \frac{\frac{m}{n} B - 2B^2}{3} = \frac{B \left(\frac{m}{n} - 2 \right)}{3}$$

$$= \frac{\frac{m}{n} \left(\frac{m}{n} - 1 \right) \left(\frac{m}{n} - 2 \right)}{1. 2. 3}, \text{ i t. d.}$$

Ważność tę położywszy w pierwszym z dwóch danych równań zamiast A, B, C i t. d. będzie

$$(1+y)^{\frac{m}{n}} = 1 + \frac{m}{n} y + \frac{\frac{m}{n} \left(\frac{m}{n} - 1 \right)}{1. 2} y^2 + \frac{\frac{m}{n} \left(\frac{m}{n} - 1 \right) \left(\frac{m}{n} - 2 \right)}{1. 2. 3} y^3 + \dots$$

Zamiast y położywszy iego ważność którą jest $\frac{a}{x}$, i odbywszy inne działania, iak wyżey (205), znajdziemy formułę na rozwinięcie potęgi ułomkowej dwumianu $x+a$.

Uważać tu potrzeba iód, że w ostatnim równaniu ciąg wyrazów drugą stronę składających nie może mieć końca: ponieważ liczby m i n są między sobą pierwsze, żaden zatem z czynników rozmaite potęgi głoski y mnożących przez odjęcie od niego liczb 1, 2, 3, 4... nie może się zamienić na zero; 2^o że z roz-

winięcia dwumianu $(1+y)^{\frac{m}{n}}$, otrzymać można rozwinięcie dwumianu $(1+y)^m$, uczyniwszy $n=1$; a tém sposobem formuła druga zamieni się na pierwszą w poprzedzającym artykule otrzymaną; i odwrotnie formułę pierwszą zamienić można na drugą kładąc w pierwszej $\frac{m}{n}$ zamiast m .

205. Pozostało jeszcze okazać iaka jest formuła na rozwinięcie dwumianu, kiedy wykładnik m jest odienyny: tym końcem dosyć jest w równaniu (F), z którego w poprzedzającym artykule wyprowadziliśmy formułę na rozwinięcie dwumianu z wykładnikiem ułomkowym, zamienić m na $-m$. A tu uważać potrzeba, że

$$u^{-m} - v^{-m} = \frac{1}{u^m} - \frac{1}{v^m} = \frac{v^m - u^m}{u^m v^m} \quad (43; 48).$$

Stąd zaś wypada

$$\frac{u^{m-1}-v^{m-1}}{u^m-v^m} = \frac{1}{u^m v^m} \left(\frac{u^m-v^m}{u^{m-1}-v^{m-1}} \right) =$$

$$- \frac{1}{u^m v^m} \left(\frac{u^{m-1}-v^{m-1}}{u^{m-2}-v^{m-2}} \right), \quad (35).$$

Aże podług tego co poprzedziło ilość $\frac{u^m-v^m}{u^{m-1}-v^{m-1}}$ zamieni się na $\frac{m u^{m-1}}{m u^{m-1}-1}$ kiedy $v=u$,

będzie więc w tymże przypadku

$$\frac{u^{m-1}-v^{m-1}}{u^m-v^m} = \frac{-1}{u^{2m}} \times \frac{m u^{m-1}}{m u^{m-1}-1} = \frac{-m u^{m-1}}{m u^{m-1}-1}$$

(39 i 42).

Druga strona równania (V) wcale nie odmienna swego kształtu: będzie zatem

$$\frac{m u^{m-1}}{m u^{m-1}-1} = A + 2By + 3Cy^2 + 4Dy^3 + \dots$$

Równanie to różni się jedynie od równania (V) znakiem głoski m ; powinno zatem doprowadzić do tych samych wypadków, którebyśmy otrzymali z równania (V), zamieniając w niem m na $-m$.

206. Formuły dwumianu można użyć do wyciągania pierwiastków wszelkiego stopnia.

Jakoż ponieważ $\sqrt[m]{a+b} = (a+b)^{\frac{1}{m}}$ (188), chcąc zatem wyciągnąć pierwiastek stopnia m z dwumianu tego dosyć jest rozwinąć jego potęgę stopnia oznaczonego przez ułamek $\frac{1}{m}$

$$\frac{1}{m}$$

Day-

Daymy że z liczby wyrażóny przez $a+b$ trzeba wyciągnąć pierwiastek stopnia piątego. Ponieważ.

$$(x+a)^m = x^m \left(1 + \frac{m}{1} \frac{a}{x} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \frac{a^2}{x^2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{a^3}{x^3} \right).$$

trzeba więc w formule téy x zamienić na a , a zamienić na b , i zamiast m położyć $\frac{1}{5}$: tym sposobem formuła ta zamieni się w następującą:

$$(a+b)^{\frac{1}{5}} = a^{\frac{1}{5}} \left\{ 1 + \frac{\frac{1}{5}b}{1 \cdot a} + \frac{\frac{1}{5}(\frac{1}{5}-1)}{1 \cdot 2} \frac{b^2}{a^2} + \frac{\frac{1}{5}(\frac{1}{5}-1)(\frac{1}{5}-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{b^3}{a^3} + \dots \right\}$$

$$= a^{\frac{1}{5}} \left\{ 1 + \frac{1 \cdot b}{5 \cdot a} - \frac{1 \cdot 4 \cdot b^2}{2 \cdot 5^2 \cdot a^2} + \frac{1 \cdot 4 \cdot 9 \cdot b^3}{2 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot a^3} - \frac{1 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 14 \cdot b^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5^4 \cdot a^4} + \dots \right\}$$

Chcąc użyć formuły téy do wyciągania przybliżonego pierwiastku stopnia piątego liczby daney, trzeba rozłożyć liczbę tę na dwie części tak, ażeby część większa była zupełnie potęgą piątą, i część tę oznaczyć przez a , pozostałą zaś część przez b . Niech będzie np. liczba 260: rozłożmy ją na 243 + 17, gdyż 243 jest piątą potęgą liczby 3, i uczynmy

$$a = 245, b = 17, \text{ skąd wypadnie } a^{\frac{1}{2}} = 5, \\ \frac{b}{a} = \frac{17}{245}.$$

Położwszy liczby te w poprzedzającej formule, otrzymamy na szukany pierwiastek ciąg ułomków coraz mniejszych; a zamiast sprowadzania ułomków tych do jednakowego mianownika, lepiej jest obrócić je na ułomki dziesiętne. Wogolności, im większa zachodzi różnica między liczbami oznaczonemi przez a i b ; tem bardziej ułomki ciąg ten składające zmniejszać się będą, i tem prędzej będzie zbliżanie się do pierwiastku prawdziwego. W przykładzie tym ponieważ liczba b jest mniejsza od $\frac{1}{10}$ liczby a , wyrazy zastępujące w ciągu miejsce óste, 7me i t. d. są tak małe, że można opuścić, i przestać na pierwszych pięciu. Wyrazy te, z których każdy jest utworzony za pomocą wyrazu poprzedzającego (200 są następujące.

$$\text{1wszy wyraz} \dots \dots \dots + 1,0000000$$

$$2\text{gi } 1 \times \frac{b}{5a} = \frac{17}{1212} = A = + 0,0139918$$

$$3\text{ci } A \times 2 \frac{b}{5a} = - \quad B = \dots - 0,000394$$

$$4\text{ty } B \times 3 \frac{b}{5a} = \quad C = + 0,0000164$$

$$5\text{ty } C \times 4 \frac{b}{5a} = \quad - D = \dots - 0,0000001$$

$$1,0140082 - 0,000394$$

Odiawszy sumę wyrazów odmiennych od summy dodatnich, wypadnie reszta 1,0136159 wyrażająca summę pięciu wyrazów ciąg ten składających, którą rozmnożywszy przez $a^{\frac{1}{2}}$ czyli przez 5, iak wymaga powyższa formuła, znajdziemy 5,0408477 na pierwiastek piątej potęgi liczby 260; lecz lubo wypadek ma 7 cyfr dziesiętnych, dokładność jednak docho- dzi tylko do cyfry szóstey.

Tym samym sposobem postępuje się zawsze iakikolwiek jest stopień szukanego pierwiastku. Chcąc np. wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z liczby 101, albo z liczby 99; w pierwszym przypadku liczbę daną trzeba rozłożyć na 100 + 1, w drugim na 81 + 18, albo też na 100 - 1; położywszy potem w formule dwumianu 100 zamiast x , i zamiast a , $\frac{x}{2}$ zamiast m , znajdziemy

$$\sqrt{101} = 10 (1 + 0,005 - 0,0000125 \\ + 0,0000000625 - 0,0000000039 + \text{it. d.}) \\ = 10,049875621.$$

$$\sqrt{99} = \sqrt{100 - 1} = 10 (1 - 0,005 - 0,0000125 \\ - 0,0000000625 - 0,0000000039 - \text{it. d.}) \\ = 9,9949874371.$$

VI. Działania z ilościami pierwiastkowemi wszelkiego stopnia, i z ilościami maitg-cemi wykładniki.

207. Wielka liczba przypadków w których nie można wyciągnąć pierwiastków zupełnych,

stkowe jednegoż stopnia, trzeba ilości będące pod znakiem pierwiastkowym przez siebie rozmnóżyc, i przed iloczynem dać znak pierwiastkowy tegoż stopnia.

Podług tego prawidła będzie

$$\text{10d } 3\sqrt[5]{2a^2b^3} \times 7\sqrt[5]{5a^2bc} = 21\sqrt[5]{10a^4b^4c} \\ = 21a^2b^2\sqrt[5]{10c}.$$

$$\text{2rc } 4\sqrt[5]{a^2-b^2} \times \sqrt[5]{a^2+b^2} = 4\sqrt[5]{(a^2-b^2)(a^2+b^2)} \\ = 4\sqrt[5]{a^4-b^4}.$$

$$\text{3cie } \sqrt[5]{\frac{2a^9-a^3b^8}{a^4-b^4}} \times \sqrt[5]{\frac{a^2b^3c^2+b^5c^2}{d^2}}$$

$$= \sqrt[5]{\frac{2a^9-a^3b^8}{a^4-b^4}} \times \sqrt[5]{\frac{a^2b^3c^2+b^5c^2}{d^2}}$$

$$= \sqrt[5]{\frac{a^3(2a^6-b^8)}{(a^2+b^2)(a^2-b^2)}} \times \sqrt[5]{\frac{b^3c^2(a^2+b^2)}{d^2}}$$

$$= \sqrt[5]{\frac{a^3b^3c^2(2a^6-b^8)}{d^2(a^2-b^2)}}.$$

20g. Ponieważ siódma potęga wyrażenia

$$\sqrt[7]{\frac{a}{b}} \text{ jest } \frac{a}{b}, \text{ będzie więc } \sqrt[7]{\frac{a}{b}} = \sqrt[7]{\frac{a}{b}}.$$

Skąd wypada, że chcąc podzielić przez siebie dwie ilości pierwiastkowe jednegoż stopnia, trzeba przed ich ilorazem dać znak pierwiastkowy tegoż stopnia. Będzie więc podług tego prawidła

$$\text{10d } \frac{\sqrt[5]{6ab}}{\sqrt[5]{3a}} = \sqrt[5]{\frac{6ab}{3a}} = \sqrt[5]{2b}.$$

$$\text{2rc } \frac{\sqrt[5]{a^2-b^2}}{\sqrt[5]{a+b}} = \sqrt[5]{\frac{a^2-b^2}{a+b}}$$

$$= \sqrt[5]{\frac{(a+b)(a-b)}{a+b}} = \sqrt[5]{a-b}.$$

$$\text{3cie } \frac{\sqrt[5]{a^4b}}{\sqrt[5]{b^3c^2}} = \sqrt[5]{\frac{a^4b}{b^3c^2}} = \sqrt[5]{\frac{a^4}{b^2c^2}}, \text{ it.d.}$$

210. Z prawidła mnożenia ilości pierwiastkowych jednegoż stopnia (191) wypada, że chcąc podnieść ilość pierwiastkową do jakiegokolwiek potęgi, dożyć jest ilość będącą pod znakiem pierwiastkowym podnieść do téj potęgi, a przed wypadkiem dać tenże sam znak pierwiastkowy. Jakoż

$$(\sqrt[5]{ab})^3 = \sqrt[5]{ab} \times \sqrt[5]{ab} \times \sqrt[5]{ab};$$

ażé wszystkich trzech czynników znaki pierwiastkowe są jednegoż stopnia, trzeba więc ilości pod temi znakami będące rozmnóżyc przez siebie, a przed iloczynem dać tenże sam znak

$$\text{pierwiastkowy. Będzie więc } (\sqrt[5]{ab})^3 = \sqrt[5]{a^3b^3}.$$

$$\text{Podobnież } (\sqrt[7]{a^3b^3})^4 = \sqrt[7]{a^{12}b^{12}}$$

$$= ab\sqrt[7]{ab^5} \text{ it. d.}$$

Trzeba tu także uważać, że gdy wykładnik znaku pierwiastkowego jest podzielny

przez wykładnik potęgi do której się ilość dana podnosi, na ten czas wykładnik pierwszy dzieli się przez drugi np.

$$(\sqrt[6]{a})^2 = \sqrt[3]{a}; \text{ gdyż } \frac{6}{2} = 3.$$

Jakoż ponieważ wykładniki 2, 3, 4 i t. d. będące przy ilościach, znaczą że ilości te podnieść należy do potęgi 2gię, 3cię, 4tę i t. d. a te same wykładniki nad znakiem pierwiastkowym położone znaczą że z ilości pod temi znakami będących trzeba wyciągnąć pierwiastek stopnia 2go, 3go, 4go i t. d.; wykładniki zatem ilości i znaków pierwiastkowych mają znaczenie odwrotne. Jako więc dzieląc wykładnik ilości przez 2, 3, 4 i t. d. wyciągamy z ilości tę pierwiastek stopnia 2go, 3go, 4go i t. d.; tak odwrotnie dzieląc wykładnik znaku pierwiastkowego przez 2, 3, 4 i t. d. podnosimy ilość pod tym znakiem będącą do potęgi 2giej, 3cię, 4tę i t. d.

211. Dla teyże przyczyny iako mnożąc wykładnik ilości przez 2, 3, 4 i t. d. ilość tę podnosimy do potęgi 2giej, 3cię, 4tę i t. d. tak odwrotnie mnożąc wykładnik znaku pierwiastkowego przez 2, 3, 4 i t. d. z ilości pod tym znakiem będącej wyciągamy pierwiastek stopnia 2go, 3go, 4go i t. d.

Skąd wypada, że chcąc z ilości pod znakiem pierwiastkowym będącej wyciągnąć pierwiastek iakiegokolwiek stopnia, trzeba wykładnik znaku pierwiastkowego rozmnożyć przez wykładnik żądanego pierwiastku. I tak

$$\sqrt[2]{\sqrt[3]{a^4}} = \sqrt[15]{a^4}. \text{ Podobnie } \sqrt[15]{\sqrt[3]{a^4}} = \sqrt[3]{\sqrt[15]{a^4}} = \sqrt[3]{a^4} \text{ i t. d.}$$

Jeżeli jednak wykładniki ilości będących pod znakiem pierwiastkowym podzielne są przez wykładnik żądanego pierwiastku, działanie odbędzie się według prawidła wyżey podanego (185), dzieląc wykładniki ilości będących pod znakiem pierwiastkowym przez wykładnik żądanego pierwiastku np.

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{a^6}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{a^6}} = \sqrt[3]{a^2}; \sqrt[3]{\sqrt[3]{a^6 b^9}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{a^6 b^9}} = \sqrt[3]{a^2 b^3}$$

212. Ponieważ mnożąc wykładnik ilości będącej pod znakiem pierwiastkowym przez m , podnosi się ilość ta do potęgi m ; a mnożąc przez n wykładnik znaku pierwiastkowego wyciąga się z wypadku pierwiastek stopnia m ; wypada ślad, że to drogie działanie przywraca ilość daną do tęj pierwotnego stanu.

I tak wyrażenie $\sqrt[5]{a^3}$ zamienić można w następujące: $\sqrt[35]{a^{21}}$, które wypada z rozmnożenia wykładników 5 i 3 przez 7; gdyż mnożyć przez 7 wykładnik ilości a^3 , jest to ilość tę podnieść do potęgi 7mej, i będzie $\sqrt[7]{a^{21}}$; a mnożyć przez 5 wykładnik 3 znaku pierwiastkowego ilości $\sqrt[5]{a^3}$, jest to wyciągnąć

pierwiastek 7my z wypadku: drugie więc to działanie niszczy skutek pierwszego.

Przez to podwójne działanie sprowadzając się do jednakowego stopnia wszystkie ilości pierwiastkowe stopni różnych, mnożąc tak wykładnik każdego znaku pierwiastkowego, i każdy wykładnik ilości pod tym znakiem będących przez iloczyn wykładników wszystkich innych znaków pierwiastkowych. Podług tego prawa

dwa dwie ilości $\sqrt[5]{a^3b^2}$, $\sqrt[7]{c^4d^3}$ sprowadzone do jednakowego wykładnika znaku pierwiastkowego, zamieniają się w następujące

$$\sqrt[35]{a^{21}b^{14}}, \sqrt[35]{c^{28}d^{21}}.$$

Przez podobnie działanie trzy ilości $\sqrt[3]{ab^2}$

$$\sqrt[5]{a^2c^3}, \sqrt[7]{b^4c^3}, \text{ zamieniają się w następujące}$$

$$\sqrt[105]{a^{42}b^{70}}, \sqrt[105]{a^{42}b^{63}}, \sqrt[105]{b^{60}c^{45}}.$$

Gdyby pod znakami pierwiastkowemi znajdowały się liczby, te także podnieść trzeba do potęg wskazanych przez iloczyn wykładników innych znaków pierwiastkowych.

213. Można także przenieść pod znak pierwiastkowy czynnik znajdujący się za tym znakiem, podnosząc go do potęg wskazanych przez wykładnik znaku pierwiastkowego: np.

$$a^2\sqrt[5]{b} = \sqrt[5]{a^{10}b}; \text{ podobnież } 2a\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{8a^3b} \text{ i t. d.}$$

Sprowadziwszy podług powyższego prawa do jednego stopnia iakiegokolwiek znaki pierwiastkowe, łatwo można będzie zastosować do nich podane wyżej (208) prawidła mnożenia i dzielenia ilości pierwiastkowych jednego stopnia.

Niech będzie w ogólności

$$\sqrt[m]{a^p b^q} \times \sqrt[n]{b^r c^s}.$$

Będzie naprzód podług prawidła (212)

$$\sqrt[m]{a^p b^q} = \sqrt[m]{a^{mp} b^{mq}}; \sqrt[n]{b^r c^s} = \sqrt[n]{b^{nr} c^{ns}};$$

$$\text{a potem podług prawidła (208) wypadnie}$$

$$\sqrt[m]{a^{mp} b^{mq}} \times \sqrt[n]{b^{nr} c^{ns}} = \sqrt[mn]{a^{mp} b^{mq+nr} c^{ns}}.$$

Podobnież podług powyższego prawidła (300) będzie

$$\sqrt[m]{a^p b^q} = \sqrt[m]{a^{mp} b^{mq}} = \sqrt[mn]{a^{mp} b^{mq}}.$$

$$\sqrt[n]{b^r c^s} = \sqrt[n]{b^{nr} c^{ns}} = \sqrt[mn]{b^{nr} c^{ns}}. \text{ i t. d.}$$

214. Prawidła pod które podciągnęliśmy działania ze znakami pierwiastkowemi łatwo być mogą użyte do ilości rzeczywistych; lecz mogłyby wprowadzić w błąd w działaniach z liczbami bezistotnemi, gdybyśmy nie połączyli z niemi niektórych uwag wynikających z wiadomości wyżej wyłożonych. Tak np.

$$\text{z prawidła powyższego (208) wypada że}$$

$$\sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = \sqrt{-a \times -a} = \sqrt{a^2} = a;$$

Wypadek ten jest widocznie fałszywy: ponieważ iloczyn $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a}$ będzie kwadratem ilości $\sqrt{-a}$, będzie więc iloczyn ten $-a$ (208).

Trudność tę wyluszczyć można sposobem następującym: kiedy jest niewiadomo jakie sposobem utworzył się kwadrat a^2 , którego szukamy pierwiastku, na ten czas pierwiastek jego będzie podwójny $+a$ i $-a$. Lecz kiedy jest wiadomo która z tych dwóch ilości rozmnożona przez siebie dała początek kwadratowi a^2 , na ten czas nie można brać za pierwiastek drugi.

W wyrażeniu tém: $\sqrt{-a^2} = \sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = \sqrt{a^2}$, wiadomo jest że kwadrat a^2 umieszczony pod znakiem pierwiastkowym powstał z rozmnożenia ilości $-a$ przez $-a$: wszelka zatem wątpliwość ustaje, względem znaku przed pierwiastkiem tego kwadratu i będzie $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = \sqrt{a^2} = +a$.

Ta sama trudność miałaby miejsce względem iloczynu $\sqrt{a} \times \sqrt{a}$, gdybyśmy nie uważali, że ponieważ w wyrażeniu tém $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = \sqrt{a^2}$ nie masz znaku $-$, trzeba więc wziąć ważność tylko dodatnią ilości $\sqrt{a^2}$: w przypadku bowiem tym kwadrat powstał z rozmnożenia $+a$ przez $+a$, a ten sam pierwiastek będzie $+a$.

215. Działania z ilościami mającemi wykładniki łatwo być mogą wyprowadzone z

cośmy dotąd o ilościach tych na różnych miejscach powiedzieli. Jakoż wiemy już, że $a^m \times a = a^{m+1}$ (30); 2re, $\frac{a^m}{a} = a^{m-1}$

(31); 3cie, $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ (43); 4tc, $(a^m)^n = a^{mn}$;

5te, $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ (185); 6te, $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Stąd naprzód wypada, że

$a^2 b^3 \times \frac{1}{c^4} = a^2 b^3 \times c^{-4} = a^2 b^3 c^{-4}$;

podobnież

$\frac{a^2}{b^3} = a^2 \times \frac{1}{b^3} \times \frac{1}{c^5} = a^2 \times b^{-3} \times c^{-5}$

i t. d.

To jest: wszystkie czynniki mianownika można przenieść do licznika dając przed ich wykładnikami znak $-$.

Odwrotnie, kiedy ilość iaka, ma czynniki z wykładnikami odjemnymi, można je przenieść do mianownika dając przed ich wykładnikami znak $+$. I tak $a^2 b^5 c^{-2} d^{-3}$

$= \frac{a^2 b^5}{c^2 d^3}$ i t. d.

216. Ponieważ miejsce znaków pierwiastkowych zastąpić mogą wykładniki ułomkowe

(185); w działaniach zatem użycie wykładników ułomkowych powinno doprowadzić do tych samych wypadków, jakie się otrzymują odbywając działania te za pomocą znaków pierwiastkowych. Jakoż

10d; Ponieważ $\sqrt[5]{a^3b^2} = a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{2}{5}}$, $\sqrt[5]{a^4c^2} = a^{\frac{4}{5}}c^{\frac{2}{5}}$, więc
 $\sqrt[5]{a^3b^2} \times \sqrt[5]{a^4c^2} = a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{2}{5}} \times a^{\frac{4}{5}}c^{\frac{2}{5}} = a^{\frac{7}{5}}b^{\frac{2}{5}}c^{\frac{2}{5}}$.

Zważywszy zaś, że $\frac{6}{5} = 1 + \frac{1}{5}$, a tém samém $a^{\frac{6}{5}} = a^{1+\frac{1}{5}} = a \times a^{\frac{1}{5}}$; i że $a^{\frac{1}{5}}b^{\frac{2}{5}}c^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{ab^2c^2}$; wniesiemy, że
 $\sqrt[5]{a^3b^2} \times \sqrt[5]{a^4c^2} = a \sqrt[5]{ab^2c^2}$. Weźmiesz jeszcze przykład ogólny

$$\sqrt[m]{a^p b^q} \times \sqrt[n]{b^r c^s} = a^{\frac{p}{m}} b^{\frac{q}{m} + \frac{r}{n}} c^{\frac{s}{n}}$$

Dodawszy ułomki $\frac{q}{m}$ i $\frac{r}{n}$, i wszystkie mianowniki sprowadziwszy do jednakowego mianownika, druga strona równania tego zamieni się w następującą:

$$a^{\frac{p}{m}} b^{\frac{mq+nr}{mn}} c^{\frac{ns}{mn}}. \text{ A zatem}$$

$$\sqrt[m]{a^p b^q} \times \sqrt[n]{b^r c^s} = \sqrt[mn]{a^{np} b^{mq+nr} c^{ns}}$$

20e; $\frac{\sqrt[5]{a^3b^2}}{\sqrt[5]{a^4c}} = \frac{a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{2}{5}}}{a^{\frac{4}{5}}c^{\frac{1}{5}}} = \frac{b^{\frac{2}{5}}}{a^{\frac{1}{5}}c^{\frac{1}{5}}} = \frac{b^{\frac{2}{5}}}{a^{\frac{1}{5}}c^{\frac{1}{5}}}$

A zatem

$$\frac{\sqrt[5]{a^3b^2}}{\sqrt[5]{a^4c}} = \sqrt[5]{\frac{b^2}{ac}}. \text{ Wogólności}$$

$$\frac{\sqrt[m]{a^p b^q}}{\sqrt[n]{b^r c^s}} = \frac{a^{\frac{p}{m}} b^{\frac{q}{m}}}{b^{\frac{r}{n}} c^{\frac{s}{n}}} = \frac{a^{\frac{p}{m}} b^{\frac{q}{m} - \frac{r}{n}}}{c^{\frac{s}{n}}}$$

Sprowadziwszy do jednakowego mianownika wykładniki ułomkowe, będzie

$$\frac{\sqrt[m]{a^p b^q}}{\sqrt[n]{b^r c^s}} = \frac{a^{\frac{np}{mn}} b^{\frac{nq-mr}{mn}}}{c^{\frac{ns}{mn}}} = \sqrt[mn]{\frac{a^{np} b^{nq-mr}}{c^{ns}}}$$

Łatwo jest postrzedz że sprowadzenie wykładników ułomkowych do jednakowego mianownika zastępuje tu miejsce sprowadzenia znaków pierwiastkowych do jednakowego stopnia, i prowadzi do tychże samych wypadków.

3cie, I to jest także rzeczą widoczną że

$$(\sqrt[m]{a^r})^n = (a^{\frac{r}{m}})^n = a^{\frac{nr}{m}} = \sqrt[m]{a^{nr}};$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^r}} = \sqrt[mn]{a^r} = a^{\frac{r}{mn}} = \sqrt[n]{a^{\frac{r}{m}}} = \sqrt[n]{a_r}, \text{ i t. d.}$$

VII. Przydatek do teorii postępów arytmetycznych.

217. Podaliśmy wyżej (131) formułę na otrzymanie summy wszystkich wyrazów postępu arytmetycznego składających. Wystawmy sobie teraz że w postępie arytmetycznym

$$+ a, b, c, d, \dots, k, l,$$

którego liczba wyrazów jest n , a stosunek każdego wyrazu podniesiony jest do iednego potęgi jakiegokolwiek oznaczony przez m , i będzie potrzeba znaleźć sumnę tych wszystkich potęg.

Z postępu danego wypadają następujące równania (150).

$$b = a + r, c = b + r, d = c + r, \dots, l = k + r,$$

Podniószy obie strony każdego z tych równań do stopnia m , będzie (197).

$$b^m = a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} r + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^{m-2} r^2 + \dots$$

$$c^m = b^m + \frac{m}{1} b^{m-1} r + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} b^{m-2} r^2 + \dots$$

$$d^m = c^m + \frac{m}{1} c^{m-1} r + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} c^{m-2} r^2 + \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

$$l^m = k^m + \frac{m}{1} k^{m-1} r + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} k^{m-2} r^2 + \dots$$

Strony odpowiadające tych równań dajemy do siebie, przekreślwszy potem z obu stron wyrazy spólne, i a^m ze strony drugiej przeniosłszy na pierwszą; wypadnie

$$l^m - a^m = \frac{m}{1} r (a^{m-1} + b^{m-1} + c^{m-1} + \dots + k^{m-1})$$

$$+ \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} r^2 (a^{m-2} + b^{m-2} + c^{m-2} + \dots + k^{m-2})$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} r^3 (a^{m-3} + b^{m-3} + c^{m-3} + \dots + k^{m-3})$$

$$+ \dots \dots \dots$$

Niech

Niech będzie

$$b + c + d + \dots + k + l = S_1$$

$$b^2 + c^2 + d^2 + \dots + k^2 + l^2 = S_2$$

$$b^m + c^m + d^m + \dots + k^m + l^m = S_m$$

$$b^m + c^m + d^m + \dots + k^m + l^m = S_m$$

$$b + c + d + \dots + k = S_1 - l;$$

$$b^2 + c^2 + d^2 + \dots + k^2 = S_2 - l^2;$$

$$b^m + c^m + d^m + \dots + k^m = S_m - l^m.$$

Równanie więc powyższe zamieni się w następujące:

$$l^m - a^m = \frac{m}{1} r (S_{m-1} - l^{m-1}) +$$

$$\frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} r^2 (S_{m-2} - l^{m-2})$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} r^3 (S_{m-3} - l^{m-3}) + \dots (V).$$

Uczynimy iód $m = 1$: równanie (V) zamieni się w następujące:

$$l - a = r (S_0 - l^0);$$

gdź w wyrazie drugim, trzecim i t. d. drugi człon równania (V) znajdzie się czynnik $m - 1 = 0$.

Ze zaś $S_0 = a^0 + b^0 + c^0 + \dots + k^0 + l^0 = n$; będzie więc $l - a = r (n - 1)$; a tém samym

$$l = a + r (n - 1);$$

któreś też tak być powinna podług tego możemy powiedzieć wyżey (150).

Uczynimy zte $m = 2$: równanie (V) zamieni się w następujące:

$$l^2 - a^2 = 2r (S_1 - l) + r^2 (S_0 - l^0).$$

Zamiaszt dwumianu $S_0 - l^0$, położywszy
iego ważność wziętą z powyższego równania
 $l - a = r(S_0 - l^0)$; będzie

$$l^2 - a^2 = 2r(S_1 - l) + r(l - a). \text{ Wicé}$$

$$S_1 = \frac{l^2 - a^2 + rl + ra}{2r} = \frac{(l - a + r)(l + a)}{2r}$$

Ze zaś podług powyższego równania $l - a = r(n - 1)$ wypada $l - a + r = rn$; będzie więc

$$S_1 = \frac{n(l + a)}{2}$$

Właśnie też tak być powinno podług po-
danego wyżej prawidła (131).

Uczynimy więc $m = 3$; równanie (*V*) zmieni się w następujące:

$$l^3 - a^3 = 3r(S_2 - l^2) + 3r^2(S_1 - l) + r^3(S_0 - l^0).$$

Aże podług powyższych równań $S_0 - l^0 = \frac{l - a}{r}$,

$$S_1 - l = \frac{l^2 - a^2 - r(l - a)}{2r}; \text{ ważności te}$$

położywszy w ostatniem równaniu, będzie

$$l^3 - a^3 = 3r(S_2 - l^2) + \frac{3r(l^2 - a^2) - 3r^2(l - a)}{2} + r^2(l - a); \text{ czyli}$$

$$l^3 - a^3 = \frac{6r(S_2 - l^2) + 3r(l^2 - a^2) - r^2(l - a)}{2}$$

wicé

$$S_2 = l^2 + \frac{2(l^3 - a^3) - 3r(l^2 - a^2) + r^2(l - a)}{6r}$$

czyli

$$S_2 = \frac{2(l^3 - a^3) + 3r(l^2 + a^2) + r^2(l - a)}{6r}.$$

Tym samym sposobem znaleźć można S_3, S_4 i t. d.

Chcąc np. znaleźć ważność S_2 w posępie liczb naturalnych 1, 2, 3... n , trzeba w ostatniem równaniu zamiaszt l , położyć n , a zamiaszt a i r położyć jedność będzie więc

$$S_2 = \frac{2n^3 - 3n^2 + 5n - 1}{6} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

218. Za pomocą téj formuły można wyrachować liczbę kul ułożonych w osiogram, jakie po składach artyllerycznych widzieć się dają. Osiogramy te są troiakiiego kształtu: iedne z podstawami kwadratowemi, drugie z podstawami troykątnemi, trzecie z podstawami prostokątnemi.

Co do gatunku pierwszego, osiogramy te w swoiéy wysokości podzielone są na warszty kwadratowe, które, idąc od wierzchołka ku podstawie, składają ciąg kwadratów z liczb naturalnych. Jakoż w pierwszém warszcie od wierzchołka ieli tylko iedna kula. Kula ta opiera się na 4 innych w kwadrat ułożonych składających drugą warsztę. Te 4 kule opierają się na 9 innych w kwadrat ułożonych składających trzecią warsztę: podobnież w 4 warszcie jest kul 16, w 5tę 25 i t. d. A zatem liczba kul w warszcie 1széy $= 1 = 1^2$, w 2giéy $= 4 = 2^2$,

$$\begin{aligned} 1\text{sz\k{e}y,} &= 1 - - - - = (1^2 + 1) \frac{1}{2} \\ 2\text{gi\k{e}y,} &= 1 + 2 - - - - = (2^2 + 2) \frac{1}{2} \\ 3\text{ci\k{e}y,} &= 1 + 2 + 3 - - - = (3^2 + 3) \frac{1}{2} \\ n\text{t\k{e}y} &= 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = (n^2 + n) \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Oznaczywszy zatem przez S liczbę kul o-
sifrogran składających, będzie

$$\begin{aligned} S &= (1^2 + 1) \frac{1}{2} + (2^2 + 2) \frac{1}{2} + (3^2 + 3) \frac{1}{2} + \dots \\ &\quad (n^2 + n) \frac{1}{2}; \text{ czyli} \\ S &= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) \frac{1}{2} + (1 + 2 + 3 + \dots + n) \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \left(\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{n^2 + n}{2} \right) \\ &= \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{2 \cdot 3} \end{aligned}$$

$$\text{Jeżeli np. } n = 10, \text{ będzie } S = \frac{10 \cdot 11 \cdot 12}{2 \cdot 3} = 220.$$

Następująca tablica dostatecznie rozcią-
gnięta może zastąpić miejsce formuły lub słu-
żyć do ięj sprawdzenia:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
1	4	10	20	35	56	84	120	165	220

Pierwszy wiersz oznacza liczbę warszt o-
sifrogran składających albo liczbę kul umieszczo-
nych w jednym boku każdej warszty, drugi
wskazuje liczbę kul znajdujących się w ro-
zmaitych warsztach. Wiersz ten powstaje z na-
stępnego dodawania liczb naturalnych zaczy-
nający od jedności, aż do liczby wyrażającej
miejsce warszty. Trzeci wiersz powstaje z na-

stępnego dodawania liczb umieszczonych w wiers-
szu drugim, a t\k{e}m sam\k{e}m oznacza summę kul
we wszystkich warsztach czyli w całym o-
sifrogranie będących.

220. W osifrogranach prostokątnych warsz-
ty są prostokątami. Pierwsza warszta od
góry składa się tylko z jednego rz\k{e}du kul, któ-
rych liczba może być rozmaita; druga składa
się z dwóch rz\k{e}dów, z których każdy ma ie-
dn\k{e} kul\k{e} więcej niż ich jest w rz\k{e}dzie warszty
pierwsz\k{e}y, trzecia składa się z trzech rz\k{e}dów,
z których każdy ma jedn\k{e} kul\k{e} więcej, niż
ich jest w każdym rz\k{e}dzie warszty drugi\k{e}y,
czwarta składa się z czterech rz\k{e}dów, z któ-
rych każdy ma jedn\k{e} kul\k{e} więcej, niż ich jest
w każdym rz\k{e}dzie warszty poprzedzających, i
tak dalej. Jeżeli więc m jest liczba kul rz\k{e}-
du w pierwsz\k{e}y warszcie, w każdym z dwóch
rz\k{e}dów warszty drugi\k{e}y będzie kul $m+1$, w
każdym z trzech rz\k{e}dów warszty trzeci\k{e}y b\k{e}-
dzie kul $m+2$, w każdym ze 4 rz\k{e}dów warsz-
ty 4t\k{e}y będzie kul $m+3$, i w każdym
z n rz\k{e}dów warszty ostatni\k{e}y czyli nt\k{e}y będzie
kul $m+n-1$. Liczba zatem kul warszty

$$\begin{aligned} 1\text{wsz\k{e}y,} &= m = m + 1^2 - 1 \\ 2\text{gi\k{e}y,} &= (m+1) 2 = 2m + 2 = 2m + 2^2 - 2 \\ 3\text{ci\k{e}y,} &= (m+2) 3 = 3m + 6 = 3m + 3^2 - 3 \\ 4\text{t\k{e}y,} &= (m+3) 4 = 4m + 12 = 4m + 4^2 - 4 \\ &\dots \dots \dots \\ n\text{t\k{e}y} &= (m+n-1) n = nm + n^2 - n. \end{aligned}$$

Oznaczywszy więc przez S liczbę kul całej
osifrogran składających, będzie

$$S = m + 2m + 3m + \dots nm + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots n^2 \\ - 1 - 2 - 3 - \dots n; \text{ czyli}$$

$$S = m(1 + 2 + 3 + \dots n) + (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots n^2) \\ - (1 + 2 + 3 + \dots n); \text{ czyli}$$

$$S = m \times \frac{n^2 + n}{2} + \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} - \frac{n^2 + n}{2}$$

czyli

$$S = \frac{n^2 + n}{2} \times (m - 1) + \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

Odbywwszy działania wskazane, i wypadek
rozłożywszy, na czynniki, znajdziemy

$$S = \frac{n(n+1)(3m+2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 5}$$

Jeżeli np. $m = 5$, $n = 10$, będzie

$$S = \frac{10 \cdot 11 \cdot 53}{1 \cdot 2 \cdot 5} = 605. \text{ Dla zastąpienia lat}$$

sprawdzenia téj formuły można ułożyć nastę-
pującą tablicę, w której dla m naznacza się
ważność liczba kul pierwszą warsztę składe-
jących, iaką jest w tym przykładzie liczba 5:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5	12	21	32	45	60	77	96	117	140
5	17	38	70	115	175	252	348	465	605

Pierwszy wiersz oznacza liczbę warszt
liczbę rzędów każdej warszty, iako też mie-
jsce które ta warszta w ostrograniu zastępuje.
drugi wiersz wskazuje liczbę kul znajdujących
się w rozmaitych warsztach: wiersz ten powi-
nie z wyłożonéj wyżej formuły $n(m+n-1)$
czyniąc w niéj $m = 5$, $n =$ liczbie oznacz-
ający miejsce warszty. Wiersz trzeci powiata

z dodawania do siebie liczb w drugim wierszu
umieszczonych, a tém samém wyraża liczbę
wszystkich kul warszty te czyli ostrograu dany
składających.

221. Gdy ostrogran jest ścięty czyli nie
cały, należy go dopełnić w myśli, potem wy-
rachować osobno liczbę kul ostrogranu całego
i przydanego w myśli: różnica między temi
dwoma liczbami okaże liczbę kul składających
ostrogran ścięty.

Niech będzie np. ostrogran ścięty z pod-
stawą kwadratową z siedmiu warszt złożony,
w którym bok podławy ma kul 12. Ostrogran
ten gdyby był cały, składałby się z 12 warszt (118),

i miałby kul $\frac{12 \cdot 13 \cdot 25}{1 \cdot 2 \cdot 5} = 2 \cdot 13 \cdot 25 = 650.$

W ostrograniu z 5 warszt złożonym, który w
myśli dodać się do ściętego, znajdowałoby się
kul $\frac{5 \cdot 6 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 5} = 5 \cdot 11 = 55.$ A zatem w ostro-

granie ściętym znajduje się kul $650 - 55 = 595.$

Niech będzie ostrogran ścięty z podstawą
trojkątną z 9 warszt złożony, w którym bok
podstawy ma kul 15. Ostrogran ten gdyby był
cały, składałby się z 15 warszt (119), i miałby

kul $\frac{15 \cdot 16 \cdot 17}{1 \cdot 2 \cdot 5} = 5 \cdot 8 \cdot 17 = 680.$ W ostro-

granie z 6 warszt złożonym który w myśli do-
dać się do ściętego, byłoby kul $\frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 5} = 56.$

A zatem w ofrogranie ściętym jest kul 680—58 = 624.

Niech będzie nakoniec ofrogran ścięty z 7 warszt złożony z podstawą prostokątną, w której jeden bok ma kul 20 drugi 12: podstawa zatem czyli ostatnia warszta tego ofrogranu składa się z 12 rzędów, i ma w sobie kul 240. A zatem $nm + n^2 - n = 240$, (120). Ze zaś ofrogran ten gdyby był cały, składałby się z 12 warszt, iak to okazuje liczba rzędów warszty ostatniej, będzie więc $12m + 144 - 12 = 240$; a tén samém $m = 9$; to jest: pierwsza tego ofrogranu warszta miałaby kul 9. Liczba zatem wszystkich kul ofrogranu całego byłaby $\frac{12 \cdot 13 \cdot 49}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 1274$. W ofrogranie z 5

warszt złożonym, który w myśl dodaie się do ściętego, jest kul $\frac{5 \cdot 6 \cdot 35}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 175$. A zatem w ofrogranie ściętym znajduie się kul 1099.

222. Chcąc znaleźć liczbę warszt ofrogranu z podziawą kwadratową, kiedy wiadoma jest liczba kul cały ofrogran składających, trzeba w równaniu $S = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$, (118),

znieść mianownik i podzielić obie strony przez 2; będzie więc

$3S = n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$; skąd wniesiemy że $n^3 < 3S$; a tén samém $n < \sqrt[3]{3S}$.

Aże $(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$; więc $(n+1)^3 > 3S$; a tén samém $n + 1 > \sqrt[3]{3S}$.

Skąd się okazuje, że n czyli szukana liczba warszt jest pierwiastkiem sześciennym największego sześciannu zawartego w liczbie 3 S .

Co do ofrogranów trykątnych ponieważ tu jest $S = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6}$, (119), będzie $6S = n^3 + 3n^2 + 2n$; a zatem $n^3 < 6S$, $(n+1)^3 > 6S$: liczba więc n jest pierwiastkiem sześciennym największego sześciannu zawartego w liczbie 6 S .

Nakoniec w ofrogranie prostokątnym, ponieważ równanie $S = \frac{n(n+1)(3m+2n-2)}{6}$, (120), zamyka trzy ilości różne; trzeba mieć dwie wiadome np. S i m ażeby znaleźć trzecią n .

W reszcie w każdym przypadku liczba szukanych warszt może być łatwo znaleziona za pomocą tabliczek dostatecznie rozciągniętych, których wzory podaliśmy wyżej.

VIII. O postępach ieometrycznych malejących.

* 223. W postępie ieometrycznym, którego wyraz pierwszy $= a$, stosunek $= q$, liczba wyrazów $= n$, a ich summa $= s$, jest iakośmy już powiedzieli wyżej (135),

$$S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Kiedy q jest liczbą całkowitą, ilość q^n będzie tem większa, im większa będzie liczba n ,

i S może być większe od wszelkiéj ilości naznaczonej, dając dla n przyzwolną wartość; to jest biorąc dostateczną liczbę wyrazów postępieometrycznych składających. Lecz jeżeli q mniejsza od 1 , oznaczwszy ułomek ten przez $\frac{1}{m}$, równanie powyższe zamieni się w następujące

$$\begin{aligned} S &= \frac{a \left(\frac{1}{m^n} - 1 \right)}{\frac{1}{m} - 1} = \frac{a \left(\frac{1}{m^n} - 1 \right)}{\frac{1 - m}{m}} \\ &= a \left(\frac{1}{m^n} - 1 \right) \left(\frac{m}{1 - m} \right) = \frac{am \left(\frac{1}{m^n} - 1 \right)}{1 - m} \\ &= \frac{am \left(1 - \frac{1}{m^n} \right)}{m - 1} = \frac{am - \frac{am}{m^n}}{m - 1} \end{aligned}$$

Że zaś w ułamku $\frac{am}{m^n}$ podzieliwszy oba wyrazy przez m , będzie $\frac{a}{m^{n-1}}$; więc

$$S = \frac{am - \frac{a}{m^{n-1}}}{m - 1}.$$

Aż ułomek ma tem mniejszą wartość im jest większy jego mianownik; im większy zaś będzie liczba wyrazów n , tem mniej

szty będzie wyraz $\frac{a}{m^{n-1}}$, a tem samém wartość S tem bardziej przybliżać się będzie do ilości $\frac{am}{m-1}$. Może być nawet różnica między sumą S a ilością $\frac{am}{m-1}$, mniejsza od wszelkiéj ilości naznaczonej; lubo ściśle biorąc rzeczy, summa S ilości téj nigdy zupełnie równą nie będzie.

Ilość zatem $\frac{am}{m-1}$, którą oznaczać będziemy przez L , jest granicą, do której summy cząstkowe oznaczone przez S tem bardziej zbliżać się będą, im będzie większa liczba wyrazów postępieometrycznych składających.

Stosując uwagi te do postępu $\div 1: \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16} : \text{i t. d.}$ będzie $a = 1$, $q = \frac{1}{m} = \frac{1}{2}$, a zatem $m = 2$: $L = \frac{am}{m-1} = 2$; a im więcej weźmiemy wyrazów w postępie powyższym, tem bardziej summa ich przybliżona będzie do liczby 2. Jakoż

$$\begin{array}{rcl} 1 & = & 1 - 2 - 1 \\ 1 + \frac{1}{2} & = & \frac{3}{2} = 2 - \frac{1}{2} \\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} & = & \frac{7}{4} = 2 - \frac{1}{4} \\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} & = & \frac{15}{8} = 2 - \frac{1}{8} \\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} & = & \frac{31}{16} = 2 - \frac{1}{16} \text{ it. d.} \end{array}$$

Wyrażenie granicy L może być uważane jako summa postępu iometrycznego, w którym liczba wyrazów jest nieskończona: i zwyczajnie summa ta wyraża się tym sposobem; lecz aby mieć dokładne ię wyobrażenie, trzeba się sobie wystawić nie jako prawdziwą summe wszystkich wyrazów, ale jako granicę, do której tem bardziej summa ta jest przybliżona, im jest większa liczba wyrazów.

224. Z wyrażenia $S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$ można

wyprowadzić wszystkie wyrazy składające postęp iometryczny, których summe wyrażenie to wystawia: gdyż podzieliwszy $q^n - 1$, przez $q - 1$, znajdziemy podług tego cośmy powie-
dzieli wyżey (202)

$$\frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{1 - q^n}{1 - q} = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1}$$

Ważność tę położwszy w równaniu $S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$, będzie $S = a(1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1}) = a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^{n-1}$.

To samo wypadnie z ważności $L = \frac{am}{m - 1}$ gdy się skutecznie dzielenie ilości m przez $m - 1$, podług następującego wzoru:

$$\begin{array}{r} m \overline{) m - 1} \\ -m + 1 \\ \hline 1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^3} + \text{i. d.} \\ \hline -1 + \frac{1}{m} \\ -\frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} \\ -\frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^3} \text{ i. d.} \end{array}$$

Dzieli się naprzód m sposobem zwyczajnym przez pierwszy wyraz dzielnika; wypada na iloraz 1; mnoży się iloraz ten przez dzielnik, i odiawszy iloczyn od dzielnej, pozostała reszta 1; dzieli się przez pierwszy wyraz dzielnika, i wypada iloraz $\frac{1}{m}$: iloraz ten rozmnożony przed dzielnik daie iloczyn $\frac{m}{m} - \frac{1}{m}$, czyli $1 - \frac{1}{m}$, który odiawszy od pierwszey reszty, zostaje reszta druga $\frac{1}{m}$: z tą resztą odbywa się to samo działanie jak z poprzedzającą. Postępując tym samym sposobem dalej, łatwo jest postrzedz prawo któremu podlegają wszystkie ilorazy częściowe, i że iloraz wypadający z podzielenia m przez $m - 1$ składa szereg $1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^3} + \frac{1}{m^4} + \dots$ któ-

rego liczba wyrazów jest nieskończona. Będzie więc

$$\frac{m}{m-1} = 1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^3} + \text{i t. d.}$$

rozmnóżwszy obie strony przez a , będzie

$$\frac{am}{m-1} = L = a(1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^3} + \text{i t. d.})$$

Zamiast m położywszy wartość, która jest

$$\frac{1}{q}, \text{ będzie}$$

$$L = a(1 + q + q^2 + q^3 + \dots); \text{ czyli}$$

$$L = a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots$$

$$225. \text{ Szereg } 1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^3} + \dots$$

bierze się za wartość ułamka $\frac{m}{m-1}$, ilekroć

szereg ten jest *schodzący się* czyli *zbieżny*, *convergens*, to jest: kiedy wyrazy szeregu ten składające są tym mniejsze, im bardziej się oddalają od wyrazu pierwszego.

Jakoż poprzedzające dzielenie przetrwawszy po reszcie pierwszy, drugi, trzeci i t. d. znajdziemy.

Iloraz pierwszy 1	reszta 1
drugi $1 + \frac{1}{m}$	$\frac{1}{m}$
trzeci $1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2}$	$\frac{1}{m^2}$
i t. d.	i t. d.

Widzi-

Widziemy tu że ilorazy tym bardziej przybliżają się do prawdziwej wartości; im są mniejsze odpowiadające im reszty: lecz okoliczność ta ma w ten czas tylko miejsce, kiedy m większe jest od jedności. W każdym innym przypadku nie można zamierzać pozostałych reszt, które coraz bardziej rosną, dać poznać, że ilorazy oddalają się coraz bardziej od prawdziwej wartości.

Abyśmy to przykładem objaśnili, uczyn-

my naprzód $m=2$. będzie więc $\frac{m}{m-1} = 2$
 $= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$ Szereg drugiego równania tego składający, iakośmy już uważali, co raz bardziej przybliża się do 2.

Uczynimy powtórę $m=1$, będzie więc

$$\frac{m}{m-1} = \frac{1}{0} = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$$

Druga strona równania tego ciągnąca się bez końca jest wprawdzie ilością nieskończoną, iak tego wymaga ułamek $\frac{1}{0}$ pierwszą stronę składający, który oznacza ilość nieskończoną, iak to w krótkie obaczmy (233); lecz gdybyśmy nie uważali na pozostałe reszty, wypadłoby niepodobnieństwo: gdyż ponieważ dzielnik rozmnożony przez iloraz powinien być iloczynem równym dzielnicy, byłoby więc $(1 + 1 + 1 + \dots) \cdot 0 = 1$. W równaniu tym pierwsza strona jest zerem: wypadłoby więc $1=0$, co być nie może.

Uczyniwszy potrzenie $m=\frac{1}{2}$, będzie

$$\frac{m}{m-1} = 1 + \frac{1}{m-1} = 1 + \frac{1}{1+1} + \frac{1}{1+1+1} + \frac{1}{1+1+1+1} + \dots$$

co także być nie może.

Sprzeczności te nikną, gdy uważamy, że w drugim przypadku każda z pozostałych w dzieleniu reszt jest równa jedności, i że ponieważ reszty te nie zmniejszają się, nie można ich zaniedbywać, choćby też szereg był najdalej rozciągnięty. Przydawszy więc jednę z tych reszt do drugiej strony równania $1 = (1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^3} + \dots)$, równanie to będzie spełnione.

W przypadku trzecim pozostające reszty, $\frac{1}{m}, \frac{1}{m^2}, \frac{1}{m^3}$ i t. d. składają postęp rosnący 1, 2, 4, 8, 16 i t. d., a dodawszy do każdego ilorazu ułomek będący resztą ilorazu i ten odpowiadający, ściśle wyrażenia ułamka $\frac{m}{m-1}$ będą następujące:

$$1 + \frac{1}{m-1};$$

$$1 + \frac{1}{m-1} + \frac{1}{m(m-1)};$$

$$1 + \frac{1}{m-1} + \frac{1}{m(m-1)} + \frac{1}{m^2(m-1)};$$

i t. d. z których każde czyni 1 , kiedy $m = \frac{1}{2}$.

Uczyniwszy $m = -n$, ułomek $\frac{m}{m-1}$

zamieni się w następujący: $-\frac{n}{n-1} = \frac{n}{n+1}$:

podzieliwszy licznik przez mianownik znajdziemy na iloraz następujący szereg:

$$1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4} - \text{i t. d.}$$

a uczyniwszy $n = 1$, wypadnie

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \text{i t. d.}$$

Dodając następnie wyrazy szereg ten składające, wypadkiem będzie na przemiany raz 1, drugi raz 0: pierwszy wypadek jest większy, drugi mniejszy od prawdziwej wartości ułomka

$\frac{n}{n+1}$, która w przypadku tym jest $\frac{1}{2}$; ale że powyższy szereg nie jest schodzący się, nie może dać tej prawdziwej wartości, i na jakkolwiek zatrzymamy się wyrazie, trzeba także rachować pozostałą resztę.

Uczyniwszy $n = 2$, szereg powyższy zamieni się w następujący:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \text{i t. d.}$$

w którym summy cząstkowe 1, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{15}{16}$ i t. d. są na przemiany raz większe, drugi raz mniejsze od prawdziwej wartości ułomka $\frac{n}{n+1}$,

która w tym przypadku jest $\frac{2}{3}$, lecz do której summy te co raz bardziej przybliżają się: gdyż dany szereg jest schodzący się.

Lubo szeregi *rozchodzące się*, *divergentes*, to jest takie których wyrazy są tym większe, im są bardziej od pierwszego oddalone,

co raz więcej oddalała się od prawdziwej wartości wyrażenia tego, z którego biorą początek; uważane jednak jako wyrażenia te różniące, dają poznać te przynajmniej ich wartości które nie zależą od dodawania ich w różnych.

IX. Przydatek do teorii Logarytmów.

226. Chcąc otrzymać logarytm jakiegokolwiek liczby y , trzeba iakośmy już okazali wyżej, rozwiązać równanie $(10)^x = y$, w którym wykładnik x jest niewiadomy. Aże wynalezienie wartości dla x jest niezmiernie długie i pracowite, w liczbach zwłaszcza większych, obaczmy czyby nie była krótsza droga poszukiwać porządkiem odwrotnym, to jest: naznaczając wartości dla x , a szukając odpowiadających wartości dla y , któreby ułożone w tablice służyć mogły do wyznaczenia x przez

W równaniu $(10)^x = y$, uczyniwszy $x =$

będzie $(10)^{\frac{1}{10}} = y$.

Abyśmy znaleźli wartość dla y , kiedy liczba 10 ma za wykładnik $\frac{1}{10}$ wyciągnijmy przed pierwiastek kwadratowy z liczby 10

$$\sqrt{10} = (10)^{\frac{1}{2}} = (10)^{\frac{1}{10}} = 3,162277660.$$

Z wypadku tego wyciągnąwszy pierwiastek stopnia piątego, znajdziemy

$$\sqrt[5]{(10)^{\frac{1}{10}}} = (10)^{\frac{1}{10}} = 1,258925412 \dots (1)$$

Ze zaś $((10)^{\frac{1}{10}})^2 = (10)^{\frac{2}{10}}$, $((10)^{\frac{1}{10}})^3 = (10)^{\frac{3}{10}}$ i t. d. (185), w równaniu zatem (1) podnosząc drugą stronę do potęgi 2, 3, 4 ... 9, znajdziemy wartości dla y odpowiadające liczbie 10 podniesioną do potęgi $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{4}{10}$, ... $\frac{9}{10}$.

Wyciągnąwszy pierwiastek kwadratowy z obu stron równania (1), będzie

$$\sqrt{(10)^{\frac{1}{10}}} = (10)^{\frac{1}{20}} = (10)^{\frac{1}{100}} = 1,122018454;$$

z czego wyciągnąwszy pierwiastek piąty potęgi, wypadnie

$$\sqrt[5]{(10)^{\frac{1}{100}}} = (10)^{\frac{1}{1000}} = 1,023292991.$$

Drugą stronę tego równania podnosząc do potęgi 2, 3, 4 ... 9, znajdziemy wartości dla y odpowiadające liczbie 10 podniesioną do potęgi $\frac{2}{1000}$, $\frac{3}{1000}$, $\frac{4}{1000}$, ... $\frac{9}{1000}$.

Tym samym sposobem postępując dalej, znajdziemy wartości dla y odpowiadające liczbie 10 podniesioną do potęgi $\frac{1}{10000}$, $\frac{2}{10000}$, $\frac{3}{10000}$ i t. d. Idąc potem do potęgi 2, 3, 4 ... 9, otrzymamy wartości dla y odpowiadające liczbie 10 podniesioną do potęgi $\frac{2}{10000}$, $\frac{3}{10000}$, ... $\frac{9}{10000}$; tudzież $\frac{1}{100000}$, $\frac{2}{100000}$, ... $\frac{9}{100000}$ i t. d. Tym sposobem można będzie ułożyć następującą tablicę:

Logarytmy	Licz. Natur.	Logarytmy	Licz. Natur.
0,0	7,943282347	0,00000	1,000207214
8	6,309573441	8	1,000184221
7	5,011472396	7	1,000161124
6	3,981071706	6	1,000138161
5	3,164477660	5	1,000115184
4	2,511886482	4	1,000092199
3	1,995262311	3	1,000069209
2	1,584939193	2	1,000046263
1	1,259921012	1	1,000023325
0,002	1,259926771	0,0000009	1,000020724
8	1,202364131	8	1,000018421
7	1,174597151	7	1,000016118
6	1,148113621	6	1,000013816
5	1,122018454	5	1,000011512
4	1,096478126	4	1,000009212
3	1,071519301	3	1,000006920
2	1,047128148	2	1,000004623
1	1,023022002	1	1,000002302
0,009	1,020934944	0,0000009	1,000002077
8	1,018191388	8	1,000001844
7	1,016235694	7	1,000001611
6	1,014311386	6	1,000001381
5	1,012429444	5	1,000001151
4	1,010592886	4	1,000000921
3	1,008803166	3	1,000000690
2	1,007045174	2	1,000000460
1	1,005314238	1	1,000000239
0,0009	1,002074471	0,0000009	1,000000207
8	1,001843766	8	1,000000184
7	1,001613109	7	1,000000161
6	1,001382406	6	1,000000138
5	1,001151246	5	1,000000115
4	1,000920142	4	1,000000092
3	1,000689101	3	1,000000069
2	1,000458063	2	1,000000046
1	1,000227025	1	1,000000023

227. Chcąc za pomocą téj tablicy znaleźć logarytm liczby *np.* 2549, dzielić naprzód tę liczbę przez $(10)^3$ czyli przez 1000: gdyż ta jest największa potęga liczby 10, która w danej liczbie mieścić się może. Znalezione iloraz 2,549 rozmnożywszy przez dzielnik $(10)^3$, iloczyn wypadnie równy danej liczbie. Będzie więc

$$2549 = (10)^3 \times 2,549.$$

2re. Szukam w tablicy największą potęgę liczby 10, któraby się mieściła w czynniku

2,549. Potęgą tą jest $(10)^1 = 2,511886432$. Przez tę potęgę podzieliwszy 2,549, i otrzymamy iloraz rozmnożywszy przez dzielnik znajdziemy

$$2549 = (10)^4 \times 1,014775177.$$

3cie. Szukam w tablicy największą potęgę liczby 10, któraby się mieścić mogła w czynniku 1,014775177. Potęgą tą jest $(10)^0.006 = 1,013911386$. Przez tę potęgę podzieliwszy iloraz poprzedzający 1,014775177, i otrzymamy iloraz trzeci rozmnożywszy przez dzielnik, wypadnie

$$1,014775177 = (10)^0.006 \times 1,000851939.$$

4te. Szukam w tablicy największą potęgę liczby 10, któraby się mieścić mogła w trzecim ilorazie: potęgą tą jest $(10)^0.0003 = 1,000691015$. Przez tę potęgę podzieliwszy iloraz trzeci, i otrzymamy iloraz czwarty rozmnożywszy przez dzielnik, wypadnie

$$1,000851939 = (10)^0.0003 \times 1,000160812.$$

5te. Szukam w tablicy największą potęgę liczby 10 którą się mieścić mogła w ilorazie czwartym: potęga ta jest $(10)^{0.0003}$ = 1,000138165. Przez tę potęgę podzielam iloraz czwarty, i otrzymamy iloraz piąty rozumnie wyższy przez dzielnik, wypadnie

$$1,000160812 = (10)^{0.00006} \times 1,00062643$$

Widzimy tu że ilorazy za każdym działaniem otrzymane co raz bardziej zbliżają się do jedności: posłepniąc więc tym samym sposobem dalej, można będzie otrzymać ilorazy tak mało różniące się od jedności, iak się potrzebuje; za siódmym *np.* działaniem otrzymamy iloraz w pierwszych siedmiu cyfrach dziesiętnych nie różni się od jedności.

Przelicając na tém cośmy dotąd znaleźli, to jest, biorąc za jedność iloraz piąty, który od niey większy jest dwiema tylko jednościami dziesiętnymi piątego rzędu, liczbę daną możemy rozłożyć na pięć czynników będących różnemi potęgami liczby 10: wypadnie bowiem

$$2549 = (10)^3 \times (10)^{0.4} \times (10)^{0.006} \times (10)^{0.0003} \times (10)^{0.00006}; \text{ czyli } 2549 = (10)^{3.40636} \quad (30)$$

Skąd się okazuje, że 3,40636 jest logarytmem liczby 2549 (138).

Chcąc otrzymać logarytm téj liczby o siedmiu cyfrach dziesiętnych, trzeba powyższe działanie powtórzyć jeszcze dwa razy, przez co do pięciu czynników poprzedzających przybędą dwa nowe czynniki będące potęgami liczby 10, to jest:

$(10)^{0.0000009}$, i $(10)^{0.00000009}$; a zatem logarytm o siedmiu cyfrach dziesiętnych liczby 2549 będzie 3,4063698; taki też znajduje się w tablicach logarytmowych.

Sposób ten posłepowania łatwo zastosować można do wyrachowania logarytmu wszelkiej liczby iaka tylko dana być może. Wielkość liczby danej, iak to łatwo pomiarkować można, nie ma żadnego wpływu na długość czasu potrzebnego do wyrachowania téj logarytmu. Często nawet większy liczby logarytmu nie równie prędzej wyrachowany być może, a niżeli mniejszy, iak tego doświadczyc można szukając logarytmów liczb 25124, 63103, 100937 i t. d., tudzież liczb 79, 19, 7, i t. d.

ROZDZIAŁ X.

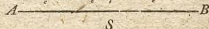
Obszerniejszy wykład teoryi równań stopnia pierwszego i drugiego.

1. Niektóre szczególniejsze wypadki w rozwiązywaniu równań stopnia pierwszego trafić się mogące.

228. Rozwiązując zagadnienia stopnia pierwszego wypadają czelłokroć wyrażenia ilości szukanych zupełnie od zwyczajnych odmienne, tak dalece, że z pierwszego wyrażenia zdaje się rzeczą niepodobną osądzić co te wyrażenia znaczyć mogą.

Lecz trudność ta zniknie natychmiast, gdy się należycie rozważa okoliczności z zagadnieniem połączone. Mielśmy już tego przykład w zagadnieniu powyższem (80), w którym ważność niewiadomey otrzymana ze znakiem —, iakkolwiek z początku dawała się do zrozumienia trudna, za rozważeniem jednak okoliczności z zagadnieniem połączonych utwierdzała: następujące zagadnienie dostarczy nam więcej tego rodzaju wypadków:

Zagadnienie. Dway gońce wystąpi o iednycyże godzinie z dwóch miast których odległość jest a , iadą na przeciw siebie: ieden przez godzinę uieżdża mil b , drugi o tymże czasie uieżdża mil c : po ileż mil x iadą nim się z sobą spotkają?



Niech linia AB wyraża wiadomą odległość a dwóch miast. Dajmy że punkt S jest punktem spotkania się dwóch gońców, i że gońiec pierwszy uieżdża drogę AS , drugi BS .

Oznaczywszy drogę uiechaną od pierwszego przez x , od drugiego przez y , będzie $x = AS$, $y = BS$: aże $AS + BS = AB$, a podług zagadnienia $AB = a$; będzie więc

$$x + y = a.$$

Że zaś droga przebyta podzielona przez prędkość, czyli przez liczbę mil na godzinę uiechanych, równa się liczbie godzin na przebycie drogi łożonych; pierwszy zatem gońiec

przed spotkaniem bawił w drodze godzin $\frac{x}{b}$,

drugi godzin $\frac{y}{c}$. Aże obadwa o iednycyże godzinie z miejsc swoich wyieżdżając bawili w drodze równą liczbę godzin, będzie więc drugie równanie

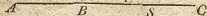
$$\frac{x}{b} = \frac{y}{c}.$$

Dwa te równania rozwiązawszy, znajdziemy

$$x = \frac{ab}{b+c}, y = \frac{ac}{b+c}.$$

Ponieważ do znalezionych ważności dla x, y , nie wchodzi znak —, rzeczą jest widoczną, że iakkolwiek liczby weźmiemy zamiast głosek a, b, c , zawsze dla x i y wypadną ważności dodawne, i że tem samém dane zagadnienie będzie zawsze rozwiązane w znaczeniu zgodnem z tego wysłowieniem. Jakoż nie trudno sobie wystawić, że w każdym przypadku gdy dway gońce iadą razem na przeciw sobie, muszą się koniecznie spotkać.

229. Przypuśćmy teraz że obadwa gońce iadą w iednymże kierunku, i że gońiec odchodzący z punktu A ściga gońca odchodzącego z punktu B , i dążącego ku punktowi C .



Rzeczą jest widoczną że w tym przypadku gońiec ścigający nie może inaczej dogonić uchodzącego, chyba że prędkość pierwsze-

go większa jest od prędkości drugiego, i odległość punktu spotkania S nie może być między punktami A i B , lecz między punktem B i C . Goniec zatem ścigający, nim doścignie drugiego, przebyć musi drogę AS , goniec uchodzący drogę BS . Ze zaś $AS - BS = AB$; oznaczając zatem drogę przebytą od gońca pierwszego przez x , drogę przebytą od gońca drugiego przez y , a odległość dwóch miast AB przez a , będzie równanie pierwsze

$$x - y = a.$$

Drugie równanie będzie tak iak w przykładu pierwszym

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{c},$$

które wyraża równość czasu tożonego przez obu gońców na przebycie swoich dróg, i w którym ilości b i c oznaczają liczbę mil wędzonych na jedną godzinę przez gońca pierwszego i drugiego.

Dwa te równania rozwiązawszy znajdziemy

$$x = \frac{ab}{b-c}, y = \frac{ac}{b-c}.$$

Tu wartości znalezione dla x i y w ten czas tylko będą dodatywne, gdy będzie b większe od c , to jest, gdy prędkość gońca ścigającego większa jest od prędkości gońca ściganego. Uczyniwszy np. $b = 4$, $c = 2$, znajdziemy $x = 2a$, $y = a$.

Skąd się okazuje, że w tym przypadku odległość punktu spotkania S od punktu A jest dwa razy większa a niżeli AB .

Założywszy potem, że b mniejsze jest od c , i że np. $b = 2$, $c = 4$; znajdziemy $x = -2a$.

Ważności te mające przed sobą znak — okazują, że zagadnienie to nie może być rozwiązane w znaczeniu tego wyślowienia (80). Jakoż rzeczka jest niepodobną, aby goniec ścigający, 2 mile tylko na godzinę wędzując, mógł doścignąć gońca uchodzącego, który 4 mile na godzinę wędzda.

250. Jednakże te same wartości rozwiąznją zagadnienie w pewnym znaczeniu: gdyż położywszy je zamiast x i y w równaniach

$x - y = a$, $\frac{x}{b} = \frac{y}{c}$, znajdziemy podług prawideł na znaki w odejmowaniu (24)

$$-a + 2a = a; \frac{-a}{2} = \frac{-2a}{4}.$$

Znalezione zatem wartości czynią zadość równaniom: gdyż w obudwu stronie pierwsza równa jest stronie drugiej.

Jeżeli się z uwaga zastanowimy nad znakami wyrazów składających pierwsze z tych dwóch ostatnich równań, postrzeżemy w iakim sposobie należy zmienić wyślowienie tego zagadnienia, aby w niem wytknięte wyżej niepodobieństwo mieysca nie miało. Jakoż pomniaw droga przebyta od gońca ścigającego,

która jest $-a$, ma być odjęta od drogi przebytej przez gońca ścigającego, to jest od $+x$ wypada stąd, że gońiec podług wystowienia ścigający, jest w istocie ściganyin przez drugiego, który podług wystowienia jest ściganyin i że ten drugi gońiec z punktu B odchodzi ściga pierwszego który odchodzi z punktu A .

Za takową zmianą w wystowieniu, nastąpić także zmiana w kierunku drogi gońców nie mogą już dążyć ku punktowi C , lecz przeciwną stronę ku punktowi C , iak okazuje figurka.....
 C
 $S \quad A \quad B \quad S$
 ra, a punkt spotkania jest S wypada stąd że B
 $-AS = AB$. a tém samém $y - x = a$. Drugie

zaś równanie jest zawsze to samo, to jest $\frac{x}{b} =$

Odbywszy działanie potrzebne, znajdziemy

$$x = \frac{ab}{c-b} = \frac{2a}{4-2} = a;$$

$$y = \frac{ac}{c-b} = \frac{4a}{4-2} = 2a;$$

dwie wartości dodawne, które rozwiązują zagadnienie w znaczeniu tego wystowienia.

231. Uczyniwszy $c=0$, to jest: przypuściwszy że gońiec ścigany zostaje na miejscu, rzeczą jest widoczną że gońiec ten żadnej drogi nie przebędzie, i że spotkanie się z pierwszym w ten czas będzie miało miejsce, gdy pierwszy gońiec przebędzie drogę AB czyli

Uczyniwszy znowu $b=0$, to jest przypuściwszy że gońiec ścigający zostaje na miejscu, rzeczą jest widoczną że droga przez niego przebyta powinna być równa 0, i że gońiec ten z drugim inaczej spotkać się nie może chyba w ten czas, kiedy drugi gońiec w kierunku odwrotnym przebędzie drogę AB czyli a ; co też w rzeczy samej wypada: położywszy bowiem zero zamiast b w równaniach

$$x = \frac{ab}{b-c}, y = \frac{ac}{b-c}, \text{ będzie}$$

$$x = \frac{a \times 0}{0-c} = \frac{0}{-c} = 0.$$

$$y = \frac{ac}{0-c} = \frac{ac}{-c} = -a.$$

Te same wartości w obu przypadkach czyli także założyć równaniu $x-y=a$, iak się o tem łatwo przekonać można. Co się tyczy równania drugiego $\frac{x}{b} = \frac{y}{c}$, równanie to miejsca mieć nie może w tych przypadkach kiedy jeden tylko z gońców puszcza się w drogę, a drugi zostaje na miejscu.

Właśnie też tak wypada: położywszy bowiem zero zamiast c w równaniach

$$x = \frac{ab}{b-c}, y = \frac{ac}{b-c}, \text{ będzie}$$

$$x = \frac{ab}{b} = a; y = \frac{a \times 0}{b} = \frac{0}{b}.$$

To jest: gońiec ścigający powinien przebyć drogę równą a , ażeby doścignął drugiego;

goniec zaś ścigany przebywa drogę $\frac{0}{b} = 0$.

232. Może tu być jeszcze taki przypadek, w którym zagadnienie to jest zupełnie niepodobnem. Przypadek ten ma w ten czas miejsce, gdy się naznacza dla obu gońców wielką prędkość: rzeczą jest przez się wiedzieć, że w jakkolwiek na ten czas iaką stronę, nie mogą się nigdy z sobą spotkać, gdyż zawsze są od siebie w takiej odległości, w jakiej się znajdowali w chwili ruszenia w drogę. Niepodobieństwo to, któremu żadnego przekształcenie wyśłowienia zapobiec nie może, wydaie się oczywiście w równaniach.

Jakoż ponieważ podług zagadnienia oba dwa gońce równą liczbę mil uieżdżają na godzinę, będzie więc $b = c$, a tém samem

wznanie $\frac{x}{b} = \frac{y}{c}$ zamieni się w następujące

$\frac{x}{b} = \frac{y}{b}$; zniosłszy mianownik, będzie $x =$

Równanie zatem $x - y = a$, zamieni się w następujące: $x - x = a$; czyli $0 = a$.

Wypadek ten jest niepodobny: gdyż podług niego ilość a oznaczająca odległość dwóch miejsc, z których puszczaą się gońce w drogę, powinna być poczytana za zero.

233. Niepodobieństwo to okazuje się sposobie osobliwszym w dwóch ważnościach iłości niewiadomych.

$$x = \frac{ab}{b-c}, y = \frac{ac}{b-c}.$$

Ponieważ bowiem z założenia jest $b = c$, będzie więc

$$x = \frac{ab}{0}, y = \frac{ac}{0}.$$

Nie tak łatwo jest pomiarować iaki może być iloraz, kiedy dzielnik jest zero: postrzedz tylko można, że gdyby ilość b bardzo mało różniła się od c , ważności dla x i y wypadłyby bardzo wielkie. Abyśmy się o tém przekonali, weźmy naprzód $b = 4$, $c = 3,9$: będzie więc $b - c = 4 - 3,9 = 0,1$, a tém samem

$$x = \frac{4a}{0,1} = 40a; y = \frac{3,9a}{0,1} = 39a.$$

Uczynmy potem $b = 4$, $c = 3,99$: będzie więc

$$b - c = 4 - 3,99 = 0,01; \text{ a tém samem}$$

$$x = \frac{4a}{0,01} = 400a; y = \frac{3,99a}{0,01} = 399a.$$

Skąd się okazuje, że im mniejsza weźmie się różnica między ilościami b i c , tém mniejszy wypada mianownik dla szukanych ważności, i tém większe wypadają te ważności.

Lecz ponieważ iakkolwiek ilość choćby najmniejsza nie może być nigdy równa zero, wypada stad, że choćbyśmy najmniejszą naznaczyli różnicę między liczbami oznaczonemi przez b i c , choćbyśmy tém samem otrzymali naywiększe ważności dla x i y , nigdy jednak ważności te nie mogą być tak wielkie,

iakieby wypadły w ten czas, kiedy między czkami oznaczonemi przez b i c nie ma żadnej różnicy, czyli kiedy $b=c$.

Ostatnie te ważności nie mogące być znaczonemi przez żadną liczbę, choćby też większą, iaka tylko być może, nazwane są łańcuchami nieskończonemi, *infiniteae*, i wszelkie wyrażenie w kształcie $\frac{m}{0}$, którego mianowa-

nie jest zero, uważa się za ilość nieskończoną.

Możnaby tu zapytać, jakim sposobem ważności $x = \frac{ab}{0}$, $y = \frac{ac}{0}$ czynią zadosyć danym równaniom: gdyż ta jest własność istotna ciągłości, że ważności niewiadomych w jakimkolwiek kształcie wyrażone, zawsze czynią zadosyć danym równaniom zagadnienia, gdy poddane będą działaniom wskazanym.

Ważności te położymy w równaniu $x - y = a$, $\frac{x}{b} = \frac{y}{b}$, które odpowiadają poprzedkowi temu, gdy $b=c$, równania te zamienią się w następujące:

$$\frac{ab}{0} - \frac{ab}{0} = a, \text{ czyli } \frac{ab - ab}{0} = a; \text{ więc } ab - ab = a \times 0; \text{ czyli } 0 = 0.$$

Drugie równanie w tym przypadku zamienia się na

$$\frac{ab}{0 \times b} = \frac{ab}{0 \times b}; \text{ czyli } \frac{a}{0} = \frac{a}{0}.$$

Ponieważ tak w pierwszym iak w drugim równaniu obie strony są sobie równe, ważności zatem znalezione czynią zadosyć tym równaniom.

Uważać tu jeszcze potrzeba, że na liczbę godzin, których goncy potrzebuja nim się spotkają, wypada także ilość nieskończona $\frac{a}{0}$; właśnie też tak być powinno: bo kiedy droga, którą mają przebyć nim się spotkają nie ma końca, liczba godzin do przebycia tej drogi potrzebnych końca także mieć nie powinna.

Te same ważności niewiadomych poprawiają sprzeczność i niepodobieństwo wypadku otrzymanego wyżej (232), podług którego $a=0$. Jakoż w równaniu $x - y = a$, podzieliwszy obie strony przez x , będzie $1 - \frac{y}{x}$

$= \frac{a}{x}$. Aże z równania $\frac{x}{b} = \frac{y}{b}$ wypada $x=y$; równanie zatem $1 - \frac{y}{x} = \frac{a}{x}$ zamie-

ni się w następujące: $1 - \frac{x}{x} = \frac{a}{x}$; czyli $1 - 1 = \frac{a}{x}$; czyli $0 = \frac{a}{x}$. W tym równaniu uchy-

bienie zależy na ilości $\frac{a}{x}$, którą druga strona przewyższa stronę pierwszą: lecz uchybienie to będzie tem mniejsze, im większa weźmie

się liczba na ważność dla x . Stosownie więc w przypadku tym algebra daie dla x ważność tak wielką, że iey żadna liczba choćby też największa wyrazić nie może.

234. Gdyby dway gońce iadąc z jedną kową prędkością i w jednymże kierunku, puścili się w drogę z jednegoż punktu, na ten czas spotkanie się ich miałyby miejsce na każdym punkcie tej drogi, którą przebyć mają. Obaczmy iakie w tym przypadku wypadną ważności dla niewiadomych x i y .

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

Ponieważ punkta A i B znajdują się razem, będzie więc w tym przypadku $a=0$; ale prędkość gońców iest jednakowa, więc $b=c$. Ważności te położywszy w równaniach:

$$x = \frac{ab}{b-c}; y = \frac{ac}{b-c}, \text{ będzie}$$

$$x = \frac{0 \times b}{0} = \frac{0}{0}; y = \frac{0 \times c}{0} = \frac{0}{0}.$$

Abyśmy poznali iaką mieć może ważność iloraz kiedy dzielna i dzielnik iest zero, weźmy dwa równania dane $x-y=a$, $\frac{x}{b} = \frac{y}{c}$.

W pierwszym położywszy o zamiast a , będzie $x-y=0$, a tēm samēm $x=y$. Ważność tę położywszy zamiast x w równaniu drugim, będzie $\frac{y}{b} = \frac{y}{c}$; gdyż $b=c$.

Równanie ostatnie którego obiedwiał strony są też same *identica*, to ieli ztożone z tychże samych wyrażeń mających przed sobą te same znaki, zawsze będzie sprawdzone iakakolwiek ważność naznaczymy dla y , a tēm samēm rzeczą ieli nie podobną wyznaczyć w szczególności tę niewiadomą. Prócz tego równanie drugie $\frac{x}{b} = \frac{y}{c}$ daie $x=y$, tak iak i równanie pierwsze $x-y=0$, z którego także wypada $x=y$. Okazuje się tylko z równania jednego i drugiego że dway gońce będą zawsze razem: gdyż drogi przebyte x i y zaczynają się obiedwie w punkcie A i są zawsze równe, lecz ich wyznaczyć nie można. Wyrażenie zatem $\frac{0}{0}$ iest znakiem ilości nie wyznaczonyj *indeterminata*.

235. Są jednak przypadki w których dana ilość zdawać się może ilością niewyznaczoną, lubo w istocie wyznaczyć ją można. I tak wyrażenie

$$\frac{a(a^2-b^2)}{b(a-b)}$$

zamienia się na $\frac{a}{b}$, iezeli iest $a=b$: gdy tym czasem rozłożywszy licznik na czynniki, wypadnie

$$\begin{aligned} \frac{a(a^2-b^2)}{b(a-b)} &= \frac{a(a-b)(a+b)}{b(a-b)} = \frac{a(a+b)}{b} \\ &= \frac{a(a+a)}{a} = 2a. \end{aligned}$$

Skąd wniesiemy, że gdy się trafi wyrażenie, które zamienić można na 3, dla zapewnienia się, czy wyrażenie to jest rzeczywiście ilością niewyznaczoną, trzeba pierwéj uważać, czy licznik i mianownik nie mają jakiego czynnika wspólnego, po zniesieniu którego można będzie otrzymać prawdziwą wartość danego wyrażenia.

236. To cośmy dotąd powiedzieli, okazuje widocznie, że rozwiązania algebraiiczne albo zupełnie czynią zadosyć wystowieniu zagadnienia, gdy jest podobne; albo wskazują, jakie zmiany uczynić należy w wystowieniu, gdy między danymi w zagadnieniu ilościami zachodzą sprzeczności, którym zaradzić można; albo nakoniec daia poznać zupełne niepodobieństwo, kiedy nie masz żadnego sposobu, ażeby dane zagadnienie z temi samemi ilościami wiadomemi mogło być rozwiązane tak w znaczeniu właściwem jego wystowienia, jak w znaczeniu podobnem do wystowienia danego.

237. Wrozwiązywaniu przez różne przypadki zagadnienia poprzedzającego uważać należy, że zmiana znaku niewiadomych x i y odpowiada zmianie w kierunku dróg, które te niewiadome oznaczają. Kiedy w przypadku pierwszym (228) niewiadoma y brana była od B ku A , miała przed sobą w równaniu $x + y = a$ znak $+$; a w przypadku drugim (229) przybrała znak $-$, gdyśmy ją wzięli w stronę przeciwną od B ku C : w tym bowiem przypadku wypadło równanie pierwsze $x - y = a$. Uczy-

nwszy tę samą zmianę znaku w równaniu drugim $\frac{x}{b} = \frac{y}{c}$, będzie $\frac{x}{b} = -\frac{y}{c}$: wypadek ten nie zgadza się z tym któryśmy otrzymali wyżej; lecz uważać tu potrzeba, że c oznacza drogę przez drugiego gońca wiednéj godzinie przebytą, i że droga ta powinna mieć ten sam kierunek, i tenże sam znak jaki ma droga y : będzie zatem równanie drugie

$$\frac{x}{b} = -\frac{y}{c}; \text{ czyli } \frac{x}{b} = \frac{y}{c}.$$

Sama więc zmiana znaków dostateczna jest, do zawarcia drugiego przypadku zagadnienia tego w przypadku pierwszym. Skąd się okazuje że Algebra daie razem rozwiązanie wielu zagadnień do siebie podobnych; iakośmy to inż uważali rozwiązując zagadnienia ślopnia drugiego (128).

238. Rozwiązaliśmy to zagadnienie za pomocą dwóch niewiadomych; lecz ie łatwo także rozwiązać można przez jednę tylko niewiadomą.

$$\frac{A}{S} = \frac{A}{S}$$

Jakoż jeżeli x oznacza drogę AS przebytą od gońca który wyjeżdża z punktu A , będzie $BS = AB - AS = a - x$ droga przebyta przez gońca drugiego. Aże dwie te drogi odbyte są w jednymże czasie, a predkość gońca pierwszego jest b , drugiego c ; będzie więc

$$\frac{x}{b} = \frac{a - x}{c}. \text{ A zatem } x = \frac{ab}{b + c}, \text{ i t. d.}$$

239. Częstokroć do zagadnienia w artykule 228, podanego przydać się następująca okoliczność:

A S C B

Daymy że goniec odchodzący z punktu *A*, pusił się w drogę *d* godzinami później, niż nastąpił wyjazd gonca z punktu *B*.

W przypadku tym goniec wiejeżdżający na godzinę mil *c*, przez liczbę godzin *d* wiejeżdża mil *cd*. Niech będzie $cd = BC$. Goniec zatem odchodzący z punktu *B* znajdować się będzie na punkcie *C* w chwili, kiedy goniec drugi rusza z miejsca: a zatem odległość miejsca, w których goniec wiejeżdża w iednymże czasie na przeciwko siebie jest

$$AC = AB - BC = a - cd.$$

W równaniu zatem $\frac{x}{b} = \frac{a-x}{c}$ (238)

zamiast *a* położywszy $a - cd$, będzie

$$\frac{x}{b} = \frac{a - cd - x}{c}; x = \frac{ab - bcd}{b + c}.$$

Jeżeli goniec iadą w kierunku iednakowym

A B C S

droga przebyta od gonca wiejeżdżającego z punktu *A* jest *AS*; droga zaś przebyta od gonca drugiego jest $CS = AS - AC = AS - AB$

$- CB = x - a - cd$. Równanie zatem $\frac{x}{b}$

$= \frac{a-x}{c}$, zamieni się w następujące:

$$\frac{x}{b} = \frac{x - a - cd}{c}; x = \frac{a + bcd}{b + c}.$$

240. Wystawione tym sposobem zagadnienie zamyka ieden przypadek w którym znaleziona ważność odiennia dla *x* nie łatwa jest do zrozumienia; to jest, kiedy przypuszczając kierunek przeciwny w drodze gonców, naznaczą się dla liczby *d* ważność taka, że droga *BC* wyrażona przez cd jest większa od *a* czyli od *AB*:

..... C S A B

w ten czas bowiem goniec z punktu *B* wiejeżdżający znajduje się na punkcie *C* z drugiego strony punktu *A* leżącym w chwili, kiedy drugi goniec rusza z punktu *A* ku *B*. Niepodobnielstwo zatem jest przypuszczać, aby tym sposobem dwaj goniec spotkać się z sobą mogli.

Gdyby było, np. $a = 100$ mil, $b = 3$ mile, $c = 2$ mile $d = 60$ godzin: wypadłoby zatem $cd = 120$ mil, a tem samem punkt *C* byłby o 20 mil za punktem *A*, względem punktu *B*. Lecz w przypadku tym położywszy naznaczone

ważności w równaniu $x = \frac{ab - bcd}{b + c}$ (239) bę-

dzie $x = \frac{100 \cdot 3 - 3 \cdot 2 \cdot 60}{3 + 2} = -12$.

A zatem spotkanie się gonców miałoby miejsce w punkcie *S* leżącym o 12 mil z drugiego strony punktu *A*, lecz między punktami *A* i *C*, chociaż zdać się, że goniec odiech-

wszy z punktu *B* mając odbywać drogę dalej za punktem *C*, nie może spotkać się z drugą gońcem gdzieindziej jak za punktem *C*.

Abysmy zrozumieli zagadnienie w tym przypadku, położmy zamiast *x* liczbę odmienną — *m*. Równanie

$$\frac{x}{b} = \frac{a - cd - x}{c}$$

zamieni się w następujące:

$$-\frac{m}{b} = \frac{a - cd + m}{c},$$

odmieniwszy znaki w całym równaniu, będzie $\frac{m}{b} = \frac{cd - a - m}{c}$.

Tu już widzimy że droga przebyta od gońca wyjeżdżającego z punktu *B* jest $cd - a - m$, czyli $BC - AB - AS = CS$, i że $CA = EC - AS = cd - a - m$, co wypada na to, jak gdyby gońiec drugi miał wyjeżdżać z punktu *C* na linie tym znajdując się w chwili wyjazdu gońca pierwszego: aże iadą w kierunku przeciwnym, spotkanie ich nastąpić musi w przeciągu drogi AS . Przypadek więc ten jest zupełnie taki jaki jest pierwszy w artykule powyższym (239) gdzie dać należy $a - cd$ zamiast $cd - a$, ażebyśmy nie trzymać ważności dla *m* w przypadku teraźniejszym.

II. Formuły ogólne na rozwiązywanie równań stopnia pierwszego z taką lub inną liczbą niewiadomych.

241. Sposoby podane wyżej (72) na rozwiązywanie równań stopnia pierwszego z dwiema

lub więcej niewiadomymi zależą w ogólności na tem, że niewiadome znoszą się następnie jedna po drugiej póty, póki nie wyjdzie równanie, z jedną tylko niewiadomą, którą znalazłszy, łatwo znajdziemy się inne. Spójrz który teraz wyłożył mamy, tém się od innych różni, że nie następnie jedna po drugiej, ale razem wszystkie niewiadome, iakąkolwiek była ich liczba, znoszą się oprócz jednej, od razu otrzymuje się równanie z tą tylko niewiadomą, której ważność najpierw wyznaczyć chcemy. Lubo sposób ten potrzebny jest tylko do rozwiązywania zagadnień z trzema, czterema i t. d. niewiadomymi; abysmy go jednak w zupełności tém lepij obić mogli, zamienimy od równań z dwiema niewiadomymi.

A naprzód oświadczyć tu należy, że dla ułupienia wielkości głosek, których użyć potrzeba na ogólne oznaczenie ilości danych, gdy mówimy o równaniach i niewiadomych większa jest od dwóch, zgodzono się oznaczać tą samą głoską wszystkie współczynniki iedneyże niewiadomej, dla oświadczenia że głoska ta w każdym równaniu ma inną ważność liczebną, dać się nad nią znamie jedno lub więcej podług liczby równań i niewiadomych. Równania ogólne z dwiema niewiadomymi piszą się tak:

$$ax + by = c; a'x + b'y = c'.$$

Obadwa współczynniki niewiadomej *x* są oznaczone przez *a*, współczynniki zaś niewiadomej *y* przez *b*; ale znamie położone nad głoskami drugiego równania oświadcza, że ważność

ich w tém równaniu nie jest ta sama jaka pierwszém.

Trzy równania piszą się tak

$$ax + by + cz = d;$$

$$a'x + b'y + c'z = p';$$

$$a''x + b''y + c''z = d''.$$

Gdy są cztery równania, głoski zastępujące miejsce wiadomych w pierwszém równaniu nie mają żadnego nad sobą zaamiennia, drugiem mają po jednym znamię, w trzecim po dwa, w czwartém po trzy i t. d.

Weźmyż teraz dwa równania

$$ax + by = c, a'x + b'y = c'$$

Pierwsze rozmnożywszy przez jakąkolwiek ilość m i od niego odiaływszy drugie, będzie

$$amx - a'x + bmy - b'y = cm - c';$$

$$x(am - a') + y(bm - b') = cm - c';$$

Ponieważ ważność ilości m zależy od podobania, dajmyż jej taką ważność, aby była $bm = b'$, a tém samém $bm - b' = 0$; co będzie, zawsze rzecz podobną czy to $b < b'$, czy też $b > b'$ czyli nakoniec $b = b'$. w pierwszym przypadku m ważyć powinno więcej niż jedność, w drugim mniej niż jedność, trzecim zaś będzie równe jedności.

W równaniu zatem oznaczonem głoską a będzie wyraz drugi $y(bm - b') = 0$: zostanie więc

$$x(am - a') = cm - c', \text{ a zatem } x = \frac{cm - c'}{am - a'}$$

Że zaś $bm = b'$; a tém samém $m = \frac{b'}{b}$;

znalezionéy więc ważności dla x położywszy zamiast m , będzie

$$x = \frac{\frac{b'}{b}c - c'}{\frac{b'}{b}a - a'} = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}.$$

Przypuśćmy znowu że m ma taką ważność, że $am = a'$, a tém samém $am - a' = 0$. W równaniu zatem (A) wyraz pierwszy jako mający zero za czynnik zniknie, i zostanie

$$(bm - b') = cm - c'; \text{ a zatem } y = \frac{cm - c'}{bm - b'}.$$

Że zaś z przypuszczenia $am = a'$ a tém samém $m = \frac{a'}{a}$; w znalezionéy więc ważności

dla y położywszy $\frac{a'}{a}$ zamiast m , znajdziemy

$$y = \frac{\frac{a'}{a}c - c'}{\frac{a'}{a}b - b'} = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'} \quad (53).$$

242. Weźmy znowu trzy równania

$$ax + by + cz = d$$

$$a'x + b'y + c'z = d'$$

$$a''x + b''y + c''z = d''.$$

Pierwsze z tych równań rozmnożywszy przez jakąkolwiek m , drugą przez ilość jakąkolwiek n , i dodawszy je do siebie a równanie trzecie od nich odiaływszy będzie

$$amx + a'nx - a''x + bmy + b'ny - b''y + cmz + c'nz - c''z = dm + d'n - d''.$$

Czyli $x(am + a'n - a'') + y(bm + b'n - b'') + z(cm + c'n - c'') = dm + d'n - d''$.

Ponieważ ważność ilości m i n zależy od upodobania, przypuścimy więc że

$$am + a'n = a'', \quad bm + b'n = b'', \quad \text{Będzie więc}$$

$am + a'n - a'' = 0, \quad bm + b'n - b'' = 0$. W równaniu zatem (A) wyrazy pierwszy i drugi mające za czynniki zero, znikną, i zostanie

$$z(cm + c'n - c'') = dm + d'n - d''. \quad \text{A zatem}$$

$$z = \frac{dm + d'n - d''}{cm + c'n - c''}.$$

W dwóch równaniach $am + a'n = a'', \quad bm + b'n = b''$, łatwo jest znaleźć ważności niewiadomych m i n , za pomocą wypadków w trzymany ch wartykułe poprzedzających: uczyniwszy bowiem $m = x, n = y$ a zamiast głoski a, b, c, a', b', c' , położywszy odpowiadające głoski

a, a', a'', b, b', b'' , dwa równania

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}, \quad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}, \quad \text{zamieniają się następujące:}$$

$$m = \frac{a''b' - b'a'}{ab' - ba'}, \quad n = \frac{ab'' - ba''}{ab' - ba'}.$$

Ważności te położywszy zamiast m i n znalezionej ważności dla z , i wszystkie wyrazy sprowadziwszy do jednakowego mianownika wypadnie

$$z = \frac{d(b'a'' - a'b'') + d'(ab'' - ba'') - d''(ab' - ba')}{c(b'a'' - a'b'') + c'(ab'' - ba'') - c'(ab' - ba')}$$

Podobnie uczyniwszy $am + a'n = a'', \quad cm + c'n = c''$ a tęp samém $am + a'n - a'' = 0, \quad cm + c'n - c'' = 0$, w równaniu (A) zniknie wyraz pierwszy i trzeci, i zostanie tylko

$$y(bm + b'n - b'') = dm + d'n - d''; \quad \text{więc}$$

$$y = \frac{dm + d'n - d''}{bm + b'n - b''}.$$

Znalazłszy potém ważność dla m i n za pomocą dwóch równań $am + a'n = a'', \quad cm + c'n = c''$, i odbywszy działanie iak poprzedzające, znajdziemy

$$y = \frac{d(c'a'' - a'c'') + d'(ac'' - ca'') - d''(ac' - ca')}{b(c'a'' - a'c'') + b'(ac'' - ca'') - b'(ac' - ca')}$$

Nakoniec uczyniwszy $bm + b'n = b'', \quad cm + c'n = c''$ w równaniu (A) zniknie wyraz drugi i trzeci, i zostanie tylko

$$x = \frac{dm + d'n - d''}{am + a'n - a''}.$$

Zamiast m i n położywszy ich ważności znalezionej za pomocą równań $bm + b'n = b'', \quad cm + c'n = c''$, i odbywszy działanie iak powyższe znajdziemy

$$x = \frac{d(c'b'' - b'c'') + d'(bc'' - cb'') - d''(bc' - cb')}{a(c'b'' - b'c'') + a'(bc'' - cb'') - a'(bc' - cb')}$$

W trzech znalezionych ważnościach dla z, y, x uskuteczniwszy mnożenie wskazane przez nawiasy, odmieniwszy znaki licznika i mianownika w ważności z i x , i ułożywszy wyrazy ta-

kim porządkiem, aby były naprzemian dodane i odejmne, wypadnie

$$\begin{aligned} z &= \frac{ab'd'' - ad'b'' + da'b'' - ba'd'' + bd'a'' - db'a''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''} \\ y &= \frac{ac'b'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''} \\ x &= \frac{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''} \end{aligned}$$

243. Gdyby były cztery równania i cztery niewiadome a, x, y, z , pierwsze równanie rozmnożylibyśmy przez m , drugie przez n , trzecie przez p : dodawszy potem trzy te równania a czwarte odjęwszy, i odbywszy działanie podobne do poprzedzającego, łatwobyśmy znaleźli cztery szukane wartości; lecz głębsza waga nad wypadkami powyższemi poda łatwiej sposób znajdowania tych wartości bez długiego zachodu.

Weźmy naprzód równanie $ax = b$; gdzie więc $x = \frac{b}{a}$. Tu potrzebujemy licznika danego równania, a mianownikiem współczynnika niewiadomej.

Z dwóch równań $ax + by = c$, $a'x + b'y = c'$ wypadło

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}, y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}$$

Tu

Tu mianownik znalezionych wartości składa się także z głosek a, a', b, b' , które są współczynnikami niewiadomych, a to w następującym sposobie: pisze się naprzód głoska a po lewej stronie głoski b ; skąd wypada ab ; potem odmienia się miejsce tym dwom głoskom, i powstaje ba : są dwa te wyrazy łączą się znakiem $-$, i będzie $ab - ba$: nakoniec dawszy w obu wyrazach znamie nad głoską drugą, wypada $ab' - ba'$ spólny mianownik dla szukanych wartości.

Co się tyczy licznika, ten w obu wartościach tak co do liczby wyrazów, iako też co do znaków i znamion nad głoskami podobny jest mianownikowi; lecz w wartości x miejsce współczynnika téj niewiadomej, którym jest a , zastępuje c wyraz wiadomy do danych równań wchodzący: w wartości y miejsce współczynnika téj niewiadomej, którym jest b zastępuje tenże wyraz wiadomy c . W równaniach zatem z dwiema niewiadomymi licznik tworzy się z mianownika, zamieniając współczynnik niewiadomej, szukanej na wyraz wiadomy w danych równaniach znajdujący się, zachowując z resztą znamiona takie iak są w mianowniku.

Przypatrzwszy się znalezionym wartościom z równań o trzech niewiadomych, potrzebujemy iód że mianownik składa się z samych tylko współczynników ilości niewiadomych a, y, z ; zre ze sześć wyrazów mianownika połączone są znakami na przemian $-$ i $+$; 3cie

że każdy z tych wyrazów jest iloczynem trzech czynników ilości niewiadomych; 4te że liczb tych ważności.

tak co do liczby wyrazów, iako też co do znaków i znamion nad głoskami, podobny jest mianownikowi, z tą tylko różnicą, że do niego wchodzi wyraz wiadomy w danych równaniach; znajdujący się, i zastępuje miejsce głoski spotczynnikiem téj niewiadomej, która następuje w każdym wyrazie: 1o*d* na miejscu pierwszym; 2o*e* na miejscu trzecim; 3o*e* na miejscu drugim; 4o*e* na miejscu pierwszym. Później wszem: tym sposobem z wyrazu *np. abc* powstała cztery następujące:

Dwa pierwsze spotczynniki *a* i *b* napisany raz w porządku prostym, drugi raz w porządku odwrotnym, powstała dwa wyrazy: *ab* i *ba*.

Wziąwszy potem trzeci spotczynnik *c*, i napisawszy go tak przy wyrazie *ab*, iako i przy wyrazie *ba* raz na końcu, drugi raz we środku, trzeci raz na początku; tym sposobem z wyrazu *ab* powstała trzy następujące: *abc*, *acb*, *cab*; i z wyrazu *ba* trzy także *bac*, *bac*, *cba*. Wszystkie te wyrazy, które są równoważne iloczynami trzykrotnemi głosek *a*, *b*, *c*, (12) potaczyszy z sobą znakami na przemian $+$, będzie $abc+acb+cab+bac+bac+cba$. Nakoniec dawszy nad głoską drugą każdego z tych sześciu wyrazów znamie jedno, a dawszy nad głoską trzecią, będzie $ab'c'-ac'b'+ca'b'-ba'c'+cb'a'-cba'$.

spólny mianownik dla wszystkich trzech szukanych.

Stąd już łatwo uczynić wniosek, że chcąc ułożyć mianownik dla czterech niewiadomych, trzeba do każdego z sześciu wyrazów $abc+acb+cab$ — i t. d. w prowadzić głoskę *d* będącą spotczynnikiem czwartą niewiadomą, mieszcząc ją następnie w każdym wyrazie: 1o*d* na miejscu pierwszym; 2o*e* na miejscu trzecim; 3o*e* na miejscu drugim; 4o*e* na miejscu pierwszym. Później wszem: tym sposobem z wyrazu *np. abc* powstała cztery następujące:

$abcd+abdc+adbc+adcb$.

Odbywszy to samo działanie z pięciu wyrazami pozostałemi, wypadek całkowity składać się będzie ze 24 wyrazów, a w każdym wyrazie głoska druga ma jedno znamie, trzecia dwa znamiona, czwarta trzy znamiona.

Co się tyczy licznika dla każdej niewiadomej, ten w każdym przypadku łatwo otrzymać można podług powyższej uwagi.

244. Chcąc formuły tych użyć do rozwiązywania równań liczebnych, trzeba porównywać każdy wyraz równania liczebnego z odpowiadającym mu wyrazem w równaniu ogólnem.

Chcąc *np.* rozwiązać trzy następujące równania:

$$7x + 5y + 2z = 79,$$

$$8x + 7y + 9z = 122,$$

$$x + 4y + 5z = 55;$$

trzeba równania te zbliżyć do równań ogólnych wyżey (242) podanych, i ułożyć które

w nich wyrazy są sobie odpowiadającami. Złóżmy więc równania tego wniesiemy że

$$\begin{aligned} a &= 7, & b &= 5, & c &= 2, & d &= 79, \\ a' &= 8, & b' &= 7, & c' &= 9, & d' &= 121, \\ a'' &= 1, & b'' &= 4, & c'' &= 5, & d'' &= 55. \end{aligned}$$

Położywszy liczby te zamiast głosek w równaniach ważnościach ogólnych dla x, y, z i odbywszy działania wskazane, znajdziemy

$$x = 4, y = 9, z = 3.$$

Uważyć tu potrzeba, że te same wartości ogólne niewiadomych służą do rozwiązywania równań liczebnych w ten czas nawiązuje się, gdy w nich nie wszystkie wyrazy mają przed sobą znak $+$, iak jest w równaniach ogólnych. Gdyby było np.

$$\begin{aligned} 3x - 9y + 8z &= 41, \\ -5x + 4y + 2z &= -20, \\ 11x - 7y - 6z &= 37; \end{aligned}$$

trzeba w porównywaniu wyrazów ogólnych liczebnymi mieć wzgląd na znaki które się znajdują przed wyrazami temi znajdując. Tu wypadłoby uwa-

nić

$$\begin{aligned} a &= +3, & b &= -9, & c &= +8, & d &= +79, \\ a' &= -5, & b' &= +4, & c' &= +2, & d' &= -121, \\ a'' &= +11, & b'' &= -7, & c'' &= -6, & d'' &= +55. \end{aligned}$$

i stosownie do prawideł wyżej podanych znaki (34) uważać iaki ma być znak przed każdym wyrazem w szukanych ważnościach ści niewiadomych.

Tym sposobem znaleźlibyśmy, że pierwszy wyraz spólnego mianownika to jest a

Niech będzie równy $+3 \times +4 \times -6 = -72$. Dając tę samą uwagę na wyrazy inne tak w mianowniku iak w liczniku, i biorąc osobno summę wyrazów dodatnich osobno summę wyrazów odjemnych, znajdziemy.

$$\begin{aligned} \frac{2774 - 2834}{59 - 622} &= \frac{-60}{-563} = + \frac{60}{563}, \\ \frac{3022 - 2032}{592 - 622} &= \frac{+90}{-50} = - \frac{90}{50}, \\ \frac{3859 - 3889}{592 - 622} &= \frac{-30}{-30} = +1. \end{aligned}$$

IV. Niektóre szczególniejsze wypadki w rozwiązywaniu równań stopnia drugiego trafić się mogące.

245. W rozwiązywaniu równań stopnia drugiego, tak iak i w równaniach stopnia pierwszego, wypadają czasem takie wyrażenia iloczynów szukanych, że ie nie łatwo zrozumieć i tak zagadnieniem iak i z wypadkami zwyczajnie otrzymywanemi pogodzić można. Głębsza tylko uwaga do ich prawdziwego znaczenia doprowadzić i zgodność ich z innemi okazać może. Obaczmy to na przykładzie w zagadnieniu następującem.

Podzielić daną liczbę na dwie części, którychby kwadraty miały się do siebie w stosunku danym.

Niech będzie a liczba dana, m stosunek kwadratów dwóch iey części. Oznaczmy iey

dnę część przez x , druga będzie $a - x$, i losownie do warunku zagadnienia wypadnie

$$\frac{x^2}{(a-x)(a-x)} = m.$$

Równanie to można rozwiązać dwoma sposobami: albo, nadawszy mu kształt równania ogólnego $x^2 + px = q$, rozwiązać je sposobem zwyczajnym; albo też korzystając z tego, że pierwszy sirony licznik i mianownik jest kwadratem, wyciągnąć zaraz z obu stron pierwiastek kwadratowy: tym sposobem wypadnie

$$\frac{x}{a-x} = \pm \sqrt{m}; \text{ więc } x = \pm (a-x)\sqrt{m}$$

Wyrażenie to, iak wiadomo zamyka dwu równania: pierwsze $x = (a-x)\sqrt{m}$; czyli $x = a\sqrt{m} - x\sqrt{m}$; drugie $x = -(a-x)\sqrt{m}$; czyli $x = -a\sqrt{m} + x\sqrt{m}$; a tćm samem $x + x\sqrt{m} = a\sqrt{m}$; czyli $x(1 + \sqrt{m}) = a\sqrt{m}$

$$x - x\sqrt{m} = -a\sqrt{m}; \text{ czyli } x(1 - \sqrt{m}) = -a\sqrt{m}. \text{ Wić}$$

$$x = \frac{a\sqrt{m}}{1 + \sqrt{m}}; \quad x = \frac{-a\sqrt{m}}{1 - \sqrt{m}}.$$

Podług pierwszćj ważności druga część liczby danćj iest

$$a - \frac{a\sqrt{m}}{1 + \sqrt{m}} = \frac{a + a\sqrt{m} - a\sqrt{m}}{1 + \sqrt{m}} = \frac{a}{1 + \sqrt{m}}.$$

summa znalezionych dwóch części które są

$$\frac{a}{1 + \sqrt{m}} + \frac{a}{1 + \sqrt{m}}, \text{ równa się liczbie danćj}$$

a; iakoż

$$\frac{a}{1 + \sqrt{m}} + \frac{a\sqrt{m}}{1 + \sqrt{m}} = \frac{a + a\sqrt{m}}{1 + \sqrt{m}} = \frac{a(1 + \sqrt{m})}{1 + \sqrt{m}} = a.$$

Kwadraty zaś dwóch tych znalezionych części są:

$$\left(\frac{a\sqrt{m}}{1 + \sqrt{m}}\right)^2 = \frac{a^2 m}{1 + 2\sqrt{m} + m}; \quad \left(\frac{a}{1 + \sqrt{m}}\right)^2 = \frac{a^2}{1 + 2\sqrt{m} + m};$$

i widocznie kwadrat pierwszy większy iest m razy od drugiego.

Podług drugićj ważności, która iest

$$-a\sqrt{m}, \text{ druga część liczby danćj iest}$$

$$a + \frac{a\sqrt{m}}{1 - \sqrt{m}} = \frac{a - a\sqrt{m} + a\sqrt{m}}{1 - \sqrt{m}} = \frac{a}{1 - \sqrt{m}}.$$

dwie znalezione części, to iest $\frac{-a\sqrt{m}}{1 - \sqrt{m}}$ i

$\frac{a}{1 - \sqrt{m}}$, dodane do siebie równają się także liczbie danćj a ; lecz ponieważ części te mają przed sobą znaki odmienne, liczba a właściwie mówiąc, nie iest ich summą, ale różnicą.

Uczyniwszy $m=1$, to jest założywszy że kwadraty dwóch szukanych części są równe, będzie $\sqrt{m}=1$; znalezione zatem dwie części podług pierwszego rozwiązania będą

$$x = \frac{a\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}} = \frac{a}{2}; a-x = \frac{a}{1+\sqrt{m}} = \frac{a}{2}$$

to jest: dwie znalezione części są równe. Tak też właśnie być powinno: lecz drugie rozwiązanie dać dwa wypadki nieskończone.

$$\text{Jakoż } x = \frac{-a\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}} = \frac{-a}{1-1} = \frac{-a}{0}$$

$$a-x = \frac{a}{1-\sqrt{m}} = \frac{a}{1-1} = \frac{a}{0}$$

co także być powinno: bo gdy podług drugiego rozwiązania liczba a jest różnicą dwóch szukanych ilości, stosunek kwadratów ilości tych w ten czas tylko może być poczytanym za równy 1, czyli, co na jedno wychodzi, kwadrat te w ten czas tylko mogą być poczytane za równe między sobą, kiedy ilości te są tak wielkie, że różnica ich a może być wzięta za zero, czyli gdy ilości te są nieskończenie wielkie względem swojej różnicy a .

Jakoż niech będą ilości x i $x-a$. Stosunek ich kwadratów jest

$$\frac{x^2}{x^2 - 2ax + a^2}.$$

Podzieliwszy licznik i mianownik przez x^2 będzie

$$\frac{1}{1 - \frac{2a}{x} + \frac{a^2}{x^2}}.$$

Tu już widocznie się okazuje, że im większa będzie liczba x , tym mniejsze będą ułomki

$\frac{2a}{x}$, $\frac{a^2}{x^2}$, i tem bardziej stosunek ten przybliżyć się będzie do $\frac{1}{1}$ czyli do 1.

246. Rozwiązując sposobem zwyczajnym powyższe równanie

$$\frac{(a-x)(a-x)}{x^2}, \text{ znajdziemy}$$

$$x^2 + \frac{2am}{1-m}x = \frac{a^2m}{1-m}, \text{ które rozwiązawszy}$$

sposobem podanym wyżej (122), wypadnie

$$x = -\frac{am}{1-m} \pm \sqrt{\frac{a^2m^2}{(1-m)(1-m)} + \frac{a^2m}{1-m}}$$

Lubo te ważności, zdają się wcale różne od tych któreśmy otrzymali, za pomocą sposobu pierwszego; w ilocie jednak kształtem tylko różnią się od nich, iak się o tem przekonamy poczyniwszy w nich niektóre zmiany.

A naprzód potrzeba sprowadzić do jednolitego mianownika dwa ułamki będące pod znakiem pierwiastkowym; tym końcem dosyć będzie licznik i mianownik drugiego rozmnożyć przez $1-m$; wypadnie bowiem

$$\frac{a^2m^2}{(1-m)(1-m)} + \frac{a^2m}{1-m} = \frac{a^2m^2 + a^2m(1-m)}{(1-m)(1-m)}$$

$$= \frac{a^2 m^2 + a^2 m - a^2 m^2}{(1-m)(1-m)} = \frac{a^2 m}{(1-m)(1-m)}$$

Ponieważ zaś mianownik ostatniego ułamka jest kwadratem, dosyć więc będzie sam tylko licznik umieścić pod znakiem pierwiastka: będzie zatem

$$\sqrt{\frac{a^2 m^2}{(1-m)(1-m)}} + \frac{a^2 m}{1-m} = \frac{\sqrt{a^2 m}}{1-m} \\ = \pm \frac{a\sqrt{m}}{1-m}$$

Wypadnie więc $x = -\frac{am}{1-m} \pm \frac{a\sqrt{m}}{1-m}$ to jest:

$$x = -\frac{am + a\sqrt{m}}{1-m}; \quad x = -\frac{am - a\sqrt{m}}{1-m}$$

I te jeszcze wyrażenia nie są takie jakieśmy otrzymali za pomocą sposobu pierwszego; a nawet chcąc je sprawdzić w przypadku kiedy $m=1$, wypadnie

$$x = \frac{-a+a}{1-1} = \frac{0}{0}, \quad x = \frac{-a-a}{1-1} = \frac{-2a}{0}$$

Ostatnie wyrażenie oznacza ilość nieskończoną tak jak wyżej; ale pierwsze należy do ilości niewyznaczonej, jakieśmy już widzieli w zagadnieniu o gońcach; lecz potrzeba pierwéj uważać, czy wyrażenie to nie jest takie jak w artykule 235, to jest czy nie ma w nim jakiego czynnika spólnego licznikowi i mianownikowi, który po założeniu że $m=1$ zamienia się na zero.

W wyrażeniu $-\frac{am + a\sqrt{m}}{1-m}$ rozłożywszy licznik na czynniki będzie

$$\frac{a(-m + \sqrt{m})}{1-m} = \frac{a(\sqrt{m}-m)}{1-m}$$

Tu już łatwo postrzedz można że licznik dla tego tylko zamienia się na zero, iż jego czynnik $\sqrt{m}-m$ musi być równy zero. Obaczmy więc czy ten czynnik $\sqrt{m}-m$ nie ma jakiego czynnika spólnego z mianownikiem $1-m$; a dla ułożenia działania, uczynimy $\sqrt{m}=n$; a tém samém $m=n^2$; będzie zatem

$$\frac{a(\sqrt{m}-m)}{1-m} = \frac{a(n-n^2)}{1-n^2}$$

Licznik i mianownik ostatniego wyrażenia rozłożywszy na czynniki, będzie

$$\frac{a(n-n^2)}{1-n^2} = \frac{a\{n(1-n)\}}{(1+n)(1-n)} = \frac{an}{1+n}$$

Aż $n=\sqrt{m}$ będzie więc

$$\frac{an}{1+n} = \frac{a\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}}; \text{ wypadek ten sam iak w artykule poprzedzającym.}$$

Podobnymże sposobem postąpić należy z drugą ważnością, która jest

$$x = \frac{-a\sqrt{m}}{1-m}$$

Rozłożywszy licznik i mianownik na czynniki, będzie

$$\frac{-a\sqrt{m}-am}{1-m} = \frac{-a(1+\sqrt{m})\sqrt{m}}{(1-\sqrt{m})(1+\sqrt{m})}$$

$$= \frac{-a\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}}$$

Ogólne to zagadnienie odpowiada nallepiucianemu szczególmu: *Na linii łączącej dwa światła znaleźć punkt który tak iedno światło iak drugie zarowno oświeca.*

Wiadomo z Fizyki że dzielność światła iedn w stosunku odwrotnym kwadratów z odległości to iest: w odległości dwa razy większey, światło iest 4 razy mnieysze; w odległości 3 razy większey, światło iest 9 razy mnieysze i t. d.

Kiedy więc podług powyższego zagadnienia x i $a-x$ są dwie odległości punktu szukanego od dwóch danych światel, iezeli odległości te są równe, kwadraty ich są także równe; a tём samém stosunek kwadratów czyli $m=1$; co w ten czas tylko być może, kiedy oba światła są równe.

Iezeli zaś stosunek kwadratów z odległości szukanych, czyli $m=4$, co tylko w ten czas być może, kiedy iedno światło iest 4 razy mocniejszy od drugiego, w przypadku tym odległość iedna musi być dwa razy większa od drugiey: iakoż w znalezionych wartościach dla x i $a-x$ zamiast $\sqrt{m}$ położywszy $\sqrt{4}=2$, będzie podług pierwszego rozwiązania

$$x = \frac{2a}{3}, a-x = \frac{a}{3},$$

podług drugiego

$$x = \frac{-2a}{-4} = 2a, a-x = \frac{a}{-1} = -a.$$

Dwa zatem są punkta szukane: ieden, stosownie do wysłowienia znajduje się na linii łączącej dwa światła w odległości dwa razy bliższey światła słabszego niż mocniejszego, drugi na przedłużeniu téj linii w odległości od światła słabszego takiéj, iaka iest między światłami. Dwa te punkta czynią zadość warunkom zagadnienia: gdyż odległość obu od światła słabszego iest dwa razy mnieysza niż odległość tychże punktów od światła mocniejszego; a zatem w obu przypadkach stosunek kwadratów z tych odległości będzie 4.

Kiedy zaś $m=1$, pierwsze tylko rozwiązanie czyni zadosć warunkom zagadnienia: gdy bowiem w przypadku tym punkt szukany powinien być w równéj odległości od dwóch światel danych, rzeczą iest niepodobną, aby punkt takowy mógł się znajdować na przedłużeniu linii łączącej te dwa światła, gdzie wszystkie punkta zawsze są w mnieyszey odległości od światła iednego niż od drugiego.

IV. Równania o dwóch wyrazach.

247. Wszelkie równanie, w którém znajduje się iedna tylko potęga niewiadomey połączoney z ilościami wiadomemi, może być zawsze sprowadzone do dwóch wyrazów, z których wiadym zebrane są razem wszystkie wy-

razy niewiadome, w drugim wszystkie wyrażenia wiadome. Widzieliśmy to już w równaniach stopnia drugiego (118): obaczmy to samo w innych.

Niech będzie np. równanie

$$a^2x^5 - a^2b^2 = b^4c^3 + acx^5; |$$

Przenioszmy wyrażenia niewiadome na jedną stronę, będzie

$$a^2x^5 - acx^5 = b^4c^3 + a^2b^2; \text{ czyli}$$

$$x^5(a^2 - ac) = b^4c^3 + a^2b^2.$$

Daymy że $a^2 - ac = p$, $b^4c^3 + a^2b^2 = q$; powyższe zatem równanie zamieni się w następujące:

$$px^5 = q; \text{ a t\AA m sam\AA m } x^5 = \frac{q}{p}; x = \sqrt[5]{\frac{q}{p}}.$$

W og\AA lno\AA ci, wszelkie równanie o dwóch wyrażach sprowadziwszy do kształtu $px^m = q$:

$$\text{wypadnie } x = \sqrt[m]{\frac{q}{p}}.$$

248. Trzeba tu uważać, że kiedy wykładnik m jest liczbą nieparzystą, znak pierwiastkowy będzie tylko miał przed sobą jeden znak albo dodayny, kiedy ilość pod nim będąca jest dodayna, albo odjemny, kiedy ilość pod nim będąca jest odjemna (184). Kiedy zaś wykładnik m jest liczbą parzystą na ten czas znak pierwiastkowy będzie miał przed sobą podwojny znak $\pm$; i jeżeli ilość $\frac{q}{p}$ jest odjemna, ilość pierwiastkowa jest bezistotna, i zagadnienie

będzie niepodobne, iak w równaniach drugiego stopnia. Przytoczmy tu niektóre przykłady.

1. Z równania $x^5 = -1024$, wypada $x = \sqrt[5]{-1024} = -4$; gdyż wykładnik 5 jest nieparzysty.

2. Z równania $x^4 = 625$, wypada $x = \sqrt[4]{625} = \pm 5$; gdyż wykładnik 4 jest parzysty.

3. Nakoniec z równania $x^4 = -16$, wypada $x = \pm \sqrt[4]{-16}$: to jest, wartość x jest ilością bezistotną, gdy wykładnik 4 jest parzysty, a ilość będąca pod znakiem pierwiastkowym jest odjemna.

249. W równaniu dwu wyrazow\AA m $\frac{q}{p}x^m = a^m$, uczyniwszy $\sqrt[m]{\frac{q}{p}} = a$, będzie $\frac{q}{p} = a^m$, czyli $x^m = a^m$ więc $x^m - a^m = 0$.

Ilo\AA c $x^m - a^m$ jest podzielna przez $x - a$, i podług tego cośmy powiedzieli wyżej (202) wypada

$$x^m - a^m = (x - a)(x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \dots + a^{m-2}x + a^{m-1}).$$

Przypu\AA ciwszy że $x - a = 0$, obie strony równania tego zamienia się na 0. Lecz druga strona, iako iloczyn dw\AA ch czynnik\AA w, mo\AA ze być równą 0, tak w ten czas kiedy $x - a = 0$, iak w ten czas kiedy drugi i\AA y czynnik jest równy 0: a w tym przypadku będzie

$$x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \dots + a^{m-2}x + a^{m-1} = 0$$

i gdyby była iakowa ważność dla x która czyniłaby zadosyć temu ostatniemu równaniu, ważność ta czyniłaby także zadosyć równaniu danemu.

Dla znalezienia téj ważności uczynimy $x = ay$: tym sposobem równanie $x^m - a^m = 0$ zamieni się na $a^m y^m - a^m = 0$: podzieliwszy obie strony przez a^m , będą $y^m - 1 = 0$. Skąd $y = 1$.
naprzd wypadu $y^m = 1$, $y = \sqrt[m]{1}$ czyli $y = 1$.
Podzieliwszy potem $y^m - 1$ przez $y - 1$ wypadnie (202)

$$\frac{y^m - 1}{y - 1} = y^{m-1} + y^{m-2} \dots + y^2 + y + 1; \text{ więc } y^{m-1} + y^{m-2} \dots + y^2 + y + 1 = 0, \text{ więc } y^{m-1} + y^{m-2} \dots + y^2 + y + 1 = 0.$$

Z równania tego można wyprowadzić tę ważność dla y , które równie iak ważność wyżej znalezioną to jest 1, powinny zadosyć czynić równaniu $y^m - 1 = 0$, czyli $y^m = 1$ to jest: potęgą stopnia m tych ważności będzie 1.

Skąd wypada ten osobliwszy na pierwszy wzrok wniosek, że jedność może mieć różne pierwiastki między sobą odmienne.

Pierwiastki te, które są bezistotne, częściej używają się w dalszém algiebrze: okażemy ich na pierwszych czterech stopniach: gdyż podług wiadomości dotąd wyłożonych w tych tylko czterech stopniach można rozwiązać równania

$$y^m - 1$$

$y^{m-1} + y^{m-2} \dots + y^2 + y + 1 = 0$, którego pierwiastki te wypadają.

Uczynimy ied $m = 2$. A zatem równanie $y^2 - 1 = 0$ zamieni się na $y^2 - 1 = 0$; więc $y = \pm 1$; czyli $y = +1, y = -1$.
Uczynimy $m = 3$; równanie $y^3 - 1 = 0$, zamieni się na $y^3 - 1 = 0$, więc $y^3 = 1, y = \sqrt[3]{1}$,
wypadnie

$$\frac{y^3 - 1}{y - 1} = y^2 + y + 1; \text{ więc } y^3 - 1 = (y - 1)(y^2 + y + 1) = 0.$$

Iloczyn dwóch czynników $(y - 1)(y^2 + y + 1)$ może być w dwóch przypadkach równym 0: naprzód kiedy $y - 1 = 0$; skąd wypada $y = 1$, a wyżej: powtórę kiedy $y^2 + y + 1 = 0$; a ten samém $y^2 + y + 1 = 0$.

W równaniu tem dopełniwszy kwadratu (203), i wyciągnąwszy pierwiastek kwadratowy obu stron, znajdziemy

$$y = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}, y = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$$

Mamy więc dla tego stopnia trzy pierwiastki, to jest:

$$y = 1, y = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}, y = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$$

ostatnie są bezistotne, ale czynią zadosyć równaniu: gdyż podnioszszy którykolwiek z nich do sześciannu, otrzymamy na wypadek 1.

I tak

$$\frac{(-1 + \sqrt{-3})}{2} = \frac{1 - 2\sqrt{-3} - 3}{4} \\ = \frac{-2 - 2\sqrt{-3}}{4}$$

Kwadrat znowu ten rozmnożywszy przez pierwiastek, będzie

$$\frac{2 + 2\sqrt{-3} - 2\sqrt{-3} - 2 \times -3}{8} =$$

3cie. Uczyniwszy $m=4$, równanie $y^4=0$, zamieni się $y^4-1=0$. Więc $y^4=y=1$. Lecz $y^4-1=(y^2-1)(y^2+1)$ będzie więc $(y^2-1)(y^2+1)=0$. Uczyniwszy naprzód $y^2-1=0$, będzie $y^2=1$ samém $y=+1$; to jest: $y=+1, y=-1$. Uczyniwszy potem $y^2+1=0$, będzie $y^2=-1$ samém $y=+\sqrt{-1}$; to jest: $y=+\sqrt{-1}, y=-\sqrt{-1}$. Mamy zatem w przypadku tym cztery pierwiastki;

$y=+1, y=-1, y=+\sqrt{-1}, y=-\sqrt{-1}$. Z tych czterech wartości dwie tylko rzeczywiście, drugie dwie są bezużyteczne, ale żda z nich podniesiona do potęgi czwartej, da na wypadek 1.

Widzimy tu że jedność ma tyle pierwiastków między sobą równych, ile wykładnik tego równania ma jedności. Ucząc się w Algebrze przekonamy się że w każdym równaniu iakiegokolwiek stopnia niewiadomej zawsze ma tyle wartości, ile ma jedności. Wyższy wykładnik niewiadomej w daném równaniu znajdujący się; a lubo nayeściej

nie wszystkie znalezione wartości czynią zadosyć danemu zagadnieniu, zawsze jednak podane działaniom wskazanym w równaniu z danego zagadnienia wyprowadzonym, wszystkie temu równaniu czynią zadosyć.

V. O równaniach stopni wyższych które mogą być rozwiązane na wzór równań stopnia drugiego.

250. Jlekoć równanie dane iakiegokolwiek stopnia ma tylko dwie odmienne potęgi ilości niewiadomej, a wykładnik jednéj dwa razy jest większy od wykładnika drugiey; równanie takowe może być zawsze rozwiązane sposobem takim, iakim się rozwiązują równania stopnia drugiego. I tak weźmy równanie ogólne:

$$x^{2m} + px^m = q,$$

w którym p i q są ilości wiadome, a jeden wykładnik niewiadomej $2m$ jest dwa razy większy od wykładnika drugiego m . Abyśmy równanie to rozwiązali, uczynimy $x^m = u$: podobniwszy obie strony do kwadratu będzie $x^{2m} = u^2$. W równaniu danem zamiast x^{2m} , u^2 położywszy u^m i u , będzie, $u^2 + pu = q$. Dopelnivszy kwadrat i wyciągnvwszy pierwiastek kwadratowy, będzie

$$u = x^m = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}.$$

Dwie wartości tego wyrażenia oznaczysz przez a i a' będzie $x^m = a, x^m = a'$: skąd wypadnie $x = \sqrt[m]{a}, x = \sqrt[m]{a'}$.

Jeżeli wykładnik m jest parzysty, zamiast dwóch wartości byłoby ich cztery: gdyż w tym przypadku przed obiema znalezionymi wartościami dać należy podwójny znak $\pm$ (187), i wypadłoby $x = \pm \sqrt[m]{a}$, $x = \pm \sqrt[m]{a}$; to jest $x = \sqrt[m]{a}$, $x = -\sqrt[m]{a}$, $x = +\sqrt[m]{a}$, $x = -\sqrt[m]{a}$; i cztery te wartości byłyby rzeczywiście gdyby ilości a i a były dodawne.

Chcąc wszystkie wartości x zamknąć w jednej formule, trzeba w równaniu $x^m = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}$ wyciągnąć z obu stron pierwiastek potęg m ; tym sposobem będzie:

$$x = \sqrt[m]{-\frac{1}{2}p \pm \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}}.$$

Następujące zagadnienia należą do równania tego rodzaju:

251. Zagadnienie I. Liczbę 6 rozłożyć na dwa czynniki takie, ażeby suma ich sześciątów czyniła 35.

Oznaczwszy przez x jeden z dwóch czynników szukanych, drugi będzie $\frac{6}{x}$. Sześcian

pierwszego jest x^3 , sześciąt drugiego jest $\frac{216}{x^3}$; ażeby suma tych sześciątów powinna być 35, będzie więc

$$x^3 + \frac{216}{x^3} = 35. \text{ Zniósłszy mianownik wprawdzie } x^6 + 216 = 35x^3; \text{ więc } x^6 - 35x^3 + 216 = 0.$$

Uczyniwszy $x^3 = u$, a tem samém $x^6 = u^2$, równanie ostatnie zamieni się w następujące: $u^2 - 35u + 216 = 0$.

Dopełniwszy kwadratu i odbywszy zwykłą czynność w tym przypadku działania, znajdziemy

$$u = x^3 = \frac{35}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{35}{2}\right)^2 - 216} = \frac{35}{2} \pm \frac{19}{2}$$

to jest:

$$x^3 = \frac{35}{2} + \frac{19}{2} = 27; \quad x^3 = \frac{35}{2} - \frac{19}{2} = 8.$$

Więc $x = 3$, $x = 2$.

Podług pierwszój wartości wypada drugi czynnik $\frac{6}{3} = 2$, podług drugiej wartości drugi czynnik jest $\frac{6}{2} = 3$. A zatem podług pierwszego rozwiązania szukane czynniki liczby 6 są 3 i 2, podług drugiego czynniki te są 2 i 3. Dwa te więc rozwiązania różnią się tylko od siebie porządkiem znalezionych czynników liczby 6.

252. Równanie za pomocą którego rozwiązaliśmy to zagadnienie jest stopnia szóstego: podług powyższej zatem uwagi (249) wiadomo x powinna mieć sześć wartości. Abyśmy te sześć wartości wyprowadzili, weźmy dwa wyżey otrzymane równania stopnia trzeciego $x^3 = 27$, $x^3 = 8$, z których wypada $x = 3$, $x = 2$.

Dwie te znalezione wartości rozmnożywszy przez trzy pierwiastki liczby 1 w stopniu trzecim które są

$$\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}, \quad \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} \quad (249), \text{ będzie}$$

$$x = 5;$$

$$x = 2;$$

$$x = \frac{-3 + 3\sqrt{-3}}{2};$$

$$x = \frac{-2 + 2\sqrt{-1}}{2};$$

$$x = \frac{-3 - 3\sqrt{-3}}{2};$$

$$x = \frac{-2 - 2\sqrt{-1}}{2};$$

z których dwie tylko są rzeczywiste, inne be-
 zifotne, czynią jednak zadosyć warunkom za-
 gadnienia; iak się o tćm łatwo przekonać mo-
 żna przez probę.

253. Zagadnienie 2. *Mając wiadomą wstawę i dostawę tuku a, znaleźć wstawę i dostawę ku dwa razy mniejszego.*

Podług twierdzenia fundamentalnego Trigonometrii prostopadłości jest

$$\text{wst } 2a = \frac{2 \text{wst } a \text{ dos } a}{R}; \text{ aże } \text{dos } a = \sqrt{R^2 - \text{wst}^2 a}$$

więc

$$\text{wst } 2a = \frac{2 \text{wst } a \sqrt{R^2 - \text{wst}^2 a}}{R}; \text{ a tćm samćm}$$

$$\text{wst}^2 2a = \frac{4 \text{wst}^2 a (R^2 - \text{wst}^2 a)}{R^2};$$

$$\text{wst}^2 2a = \frac{4R^2 \text{wst}^2 a - 4 \text{wst}^4 a}{R^2}; \text{ więc}$$

$$4 \text{wst}^4 a - 4R^2 \text{wst}^2 a = -R^2 \text{wst}^2 2a; \text{ czyli}$$

$$\text{wst}^4 a - R^2 \text{wst}^2 a = -\frac{1}{4} R^2 \text{wst}^2 2a.$$

Niech będzie $x = \text{wst}^2 a$; a tćm samćm $x^2 = \text{wst}^4 a$; równanie więc ostatnie zamie-
 się w następujące:

$$x^2 - R^2 x = -\frac{1}{4} R^2 \text{wst}^2 2a.$$

Dopełniwszy kwadratu i wziawszy pierwi-
 skę kwadratowy zobu sron, będzie

$$x = \text{wst}^2 a = \frac{1}{4} R^2 \pm \sqrt{\frac{1}{4} R^4 - \frac{1}{4} R^2 \text{wst}^2 2a}.$$

Ilość będąca pod znakiem pierwiastkowym
 rozłożywszy na czynniki, będzie

$$\text{wst}^2 a = \frac{1}{4} R^2 \pm \sqrt{\frac{1}{4} R^2 (R^2 - \text{wst}^2 2a)}.$$

Ażć $R^2 - \text{wst}^2 2a = \text{dos}^2 2a$; więc

$$\text{wst}^2 a = \frac{1}{4} R^2 \pm \sqrt{\frac{1}{4} R^2 \text{dos}^2 2a} = \frac{1}{4} R^2 \pm \frac{1}{2} R \text{dos } 2a.$$

Uczynimy $2a = a'$, a tćm samćm $a = \frac{1}{2} a'$;
 równanie więc ostatnie zamieni się w następu-
 iące:

$$\text{wst}^2 \frac{1}{2} a' = \frac{1}{4} R^2 \pm \frac{1}{2} R \text{dos } a'; \text{ a zatćm}$$

$$\text{wst } \frac{1}{2} a' = \pm \sqrt{\frac{1}{4} R^2 \pm \frac{1}{2} R \text{dos } a'}.$$

Ilość będąca pod znakiem pierwiastkowym
 rozłożywszy i podzieliwszy przez 4, będzie

$$\text{wst } \frac{1}{2} a' = \pm \sqrt{\frac{1}{2} R^2 \pm \frac{1}{2} R \text{dos } a'}$$

$$= \pm \sqrt{2R^2 - 2R \text{dos } a'}; \text{ czyli}$$

$$\text{wst } \frac{1}{2} a' = \pm \frac{1}{2} \sqrt{2R^2 \pm 2R \text{dos } a'}.$$

VI. Zagadnienia niewyznaczone stopnia
 pierwszego i drugiego.

254. Rozwiązując zagadnienia z dwiema
 lub więcej niewiadomymi, widzieliśmy, że li-
 czba równań, które zawsze z warunków zaga-
 dnienia wypływają, była w każdym zagadnie-
 niu równa liczbie niewiadomych do niego
 wchodzących. Zagadnienie do którego wcho-
 dzą dwie np. niewiadome, a z którego warun-
 ków nie można otrzymać więcej równań iak
 tylko iedno, inaczej rozwiązane być nie mo-
 że, tylko naznaczając dla iednej niewiadomej

ważność dowolną. Weźmy np. zagadnienie znaleźć dwie liczby iakiekolwiek, których summa czyniła 10, oznaczywszy dwie szukane liczby przez x, y , będzie $x + y = 10$, tём samém $x = 10 - y$. Rzeczą jest przez widoczną, że nie można z równania tego trzymać ważności dla x , tylko naznaczając ważność iakąkolwiek dla y : a że tę ostatnią ważność od woli naszey zależącą można nieznacznie odmieniać, czyniąc ją dodayną lub ujemną, całkowitą lub ułomkową, więc w każdym przypadku liczba rozwiązań musi być nieskończona i niepodobna wyznaczyć liczb jakie miał w myśli ten, który to zagadnienie ułożył. To samo ma miejsce we wszystkich zagadnieniach, w których większa jest liczba niewiadomych niż warunków czyli równań. Dla tego zagadnienia takowe nazwane nierozwiązane, *problemata indeterminata*.

255. Są i takie zagadnienia z których nie otrzymać można równań, ile w nich jest niewiadomych, a które jednak są niewyznaczone. Pochodzi to stąd, że lubo na pozór liczba warunków wystawionych, zdaje się być równa liczbie niewiadomych; mnieysza jest jednak ich liczba z przyczyny wzajemnéj warunku iednego od drugiego zależności, przez co niektóre warunki zdające się być różnemi od innych rzeczywiście też same, iak się to okazuje w następujących dwóch równaniach:

$$3x + 6y = 30, \quad 2x + 4y = 20;$$

8

rozmnóżywszy pierwsze równanie przez 2, drugie przez 3, tak pierwsze iak drugie zamieni się w następujące: $6x + 12y = 60$. Pochodzi to stąd, że każda z trzech liczb wiadomych do równania drugiego wchodzących, równa się dwóm trzecim częściom liczby sobie odpowiadającej w równaniu pierwszym: a kiedy np. 3 korce żyta i 6 korcy pszenicy kosztują talarów 30, tём samém dwie trzecie części trzech korcy żyta i dwie trzecie części sześciu korcy pszenicy powinny kosztować dwie trzecie części trzydziestu talarów. Warunek zatém drugi, z którego powstało drugie równanie, jest właściwie mówić warunkiem pierwszym; a tём samém zagadnienie to mające dwie niewiadome, a ieden tylko warunek, i przypuszczające iedno tylko równanie, jest niewyznaczone. Toż mówić o następujących trzech równaniach:

$$5x + 3y + 2z = 17,$$

$$8x + 2y + 4z = 20,$$

$$14x + 7y + 6z = 44;$$

w których równanie trzecie powstało z dodania wyrazów równania drugiego przez 2 podzielonego do odpowiadających wyrazów w równaniu pierwszym przez 2 rozmnóżonem: trzecie więc równanie będące wypadkiem dwóch pierwszych, nie wyraża żadnego nowego warunku, i zagadnienie z którego równania te powstały, ma dwa tylko oddzielne warunki w dwóch pierwszych równaniach wyrażone, aże ma trzy niewiadome, więc jest nie w

czone, iak się o tćm przez próbę łatwo przekonac można.

Weźmy jeszcze dwa następujące zagadnienia: *Znaleźć liczbę któraby sama przez siebie podzielona dała na iloraz 1.*

Znaleźć liczbę, którą rozmnożywszy przez 2, i iloczyn ten zmniejszywszy jednością, resztę rozmnożywszy przez 2, i ten drugi iloczyn zmniejszywszy dwiema jednościami, a tę drugą resztę podzieliwszy przez 4, iloraz będzie jednością mniejszy od liczby szukanej.

Pierwsze z tych dwóch zagadnień widocznie ież niewyznaczone: każda albowiem liczba sama przez siebie podzielona dała na iloraz 1. Równanie też $\frac{x}{x} = 1$, które z tego zagadnienia wypada, podlane działaniem zwyczajnym, zamienia się na $x = x$, $x - x = 0$, $x(1 - 1) = 0$; $x = \frac{0}{1-1}$, $x = \frac{0}{0}$ (24).

Wzagadnieniu drugim lubo z samego wysłowienia warunków nie tak łatwo doszrzeda można, że każda liczba może być wzięta za szukaną; ułożywszy jednak zagadnienie to w

równanie $\frac{2(2x-1)-2}{4} = x-1$, i równa-

nie to sposobem zwyczajnym rozwiązawszy, otrzymamy na wypadek $x = \frac{0}{0}$ a tćm samćm zagadnienie to równie iak poprzedzające, przyjmie nieskończoną liczbę rozwiązań, i wszę-

x

ka liczba całkowita lub ułomkowa, dodayna lub odienna spćlmierna lub niespćlmierna, a nawet bezistotna czyni zadosć warunkom zagadnienia.

256. Nie wszystkie jednak zagadnienia niewyznaczone przyjmują nieskończoną liczbę rozwiązań, Cześliokroć sama natura zagadnienia, albo jego warunki nie przypuszczają wazności ułomkowych i odiennych, a przynaymniey niespćlmiernych. I tak gdyby w zagadnieniu niewyznaczonćm szło o wynalezienie liczby, osób lub bydła i t. p., zagadnienie takie nie przypuszczaby rozwiązań ułomkowych. Podobnież gdyby było zagadnienie: *znaleźć dwie liczby całkowite dodayne, którychby summa czyniła 10*; w równaniu $x + y = 10$, gdyby tylko liczba y miała być całkowita dodayna, zamiast y moglibyśmy wziąć wszelkie liczby całkowite i dodayne iakie tylko być mogą poczawszy od 1. ale że podług warunków zagadnienia liczba także x ma być całkowita dodayna, wypada ślad że liczba y nie może być większa nad 10; gdyż inaczej liczba x stałaby się odienna, a nawet y nie może być równa 10: gdyż w tym przypadku nie dwie, iak wymaga zagadnienie, ale iedna tylko liczba byłaby znaleziona, a druga równałaby się 0. A zatem następujące tylko rozwiązania mogą mieć miejsce:

Jeżeli $y = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$,

będzie $x = 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1$.

Ażć cztery ostatnie są te same co cztery pierwsze, zagadnienie więc to nie przyjmie więcey rozwiązań iak tylko pięć.

257. Rozwiązanie zagadnienia ostatniego nie podpada żadnej trudności. Z równą łatwością rozwiązać można wszelkie inne zagadnienie niewyznaczone tak nieskończoną jak skończoną liczbę rozwiązań przyjmujące, jeżeli w równaniu do którego zagadnienie to prowadzi, albo obiedwie niewiadome, iak w poprzedzającym, albo jedna przynajmniej ma za współczynnik jedność. Niech będzie np. zagadnienie: *znaleźć dwie liczby całkowite i dodatnie, z którychby jedna zmniejszona drugą trzy razy wziętą czyniła 11*. Oznaczmy pierwszą niewiadomą przez x , drugą przez y ; będzie $x - 3y = 11$; więc $x = 11 + 3y$. W równaniu tym położymy, zamiast y iakąkolwiek liczbę byłaby całkowitą i dodatnią, zawsze wartość dla x wypadnie całkowitą i dodatnią, a tym samym liczba rozwiązań które zagadnienie to przyjmie będzie nieskończona.

Uczyniwszy $y = 1, 2, 3, 4, 5$ itd. Znajdziemy $x = 14, 17, 20, 23, 26$ itd.

Podobnież w zagadnieniu: *znaleźć dwie liczby, z których jedna dodana do drugiej trzy razy wziętej czyni 11*. Oznaczmy pierwszą niewiadomą przez x drugą przez y ; będzie $x + 3y = 11$, więc $x = 11 - 3y$.

Z równania tego okazuje się, że dla y nie można naznaczyć większych wartości iak 3, gdyż uczyniwszy np. $y = 4$ będzie $x = 11 - 12 = -1$; co się sprzeciwia warunkom zagadnienia. Dla teyże przyczyny wartość dla y nie może być mniejsza nad 1; gdyż iaczej liczba

y byłaby albo ułomkiem albo 0, albo ilością ujemną; co się także sprzeciwia warunkom, podług których dwie znalezione liczby powinny być całkowite i dodatnie; kiedy więc wartość dla y nie może być ani większa od 3, ani mniejsza od 1, a wartości ułomkowe w tym zagadnieniu miejsca nie mają, wypada ślad że dla y można dać trzy tylko następujące wartości: $y = 1, y = 2, y = 3$.

Jeżeli $y = 1, 2, 3$, będzie $x = 8, 5, 2$.

Co się tycze innych zagadnień niewyznaczonych prowadzących do równań w których współczynniki obu niewiadomych są różne od 1, rozwiązywanie takowych zagadnień zależy natem, ażeby równania z nich otrzymane przerobić na inne, w którychby jedna z niewiadomych miała za współczynnik 1. Sposób podług którego odbywa się to działanie, wyłożymy w następujących zagadnieniach.

258. Zagadnienie 1. *Pewna liczba kobiet i mężczyzn złożyła się na piknik mężczyzn zapłacili po 25 zł. kobiety po złotych 16 składka kobiet jest większa jednym złotym od składki mężczyzn. Ileż do składki należało kobiet ile mężczyzn?*

Oznaczmy liczbę kobiet przez x , liczbę mężczyzn przez y , będzie stosownie do warunków $16x - 25y = 1$; więc $x = \frac{25y + 1}{16}$;

czyli $x = y + \frac{9y + 1}{16}$.

Uczynimy $16d, \frac{9y+1}{16} = u$ więc $y = \frac{16u-1}{9}$

czyli $y = u + \frac{7u-1}{9}$;

$2rc, \frac{7u-1}{9} = t$; więc $u = \frac{9t+1}{7}$; czy

$u = t + \frac{2t+1}{7}$;

$3cie, \frac{2t+1}{7} = s$; więc $t = \frac{7s-1}{2}$, czy

$t = 3s + \frac{s-1}{2}$;

$4te, \frac{s-1}{2} = r$, więc $s = 2r + 1$. A

tém

$s = 2r + 1$.

$t = 3s + \frac{s-1}{2} = 6r + 3 + r = 7r + 3$.

$u = t + \frac{2t+1}{7} = 6r + 3 + 2r + 1 = 9r + 4$

$y = u + \frac{7u-1}{9} = 9r + 4 + 7r + 3 = 16r + 7$

$x = y + \frac{9y-1}{16} = 16r + 7 + 9r + 4 = 25r + 11$

Z dwóch ostatnich równań okazuje się, że dla r nie można mniejszej wartości nazwać, gdyż uczyniwszy np. $r = -1$ będzie $x = -25 + 11 = -14$; co być nie może.

że. Lecz położymy zamiast r inną jakąkolwiek liczbę większą od -1 , byleby liczba ta była całkowita, ważności dla niewiadomych x , y wypadną zawsze całkowite i dodatnie. A zatem zagadnienie to przybiera nieskończoną liczbę rozwiązań. Czyniąc np.

$r = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ itd. wypadnie

$x = 11, 36, 61, 86, 111, 136, 161, 186$ itd,
 $y = 7, 23, 39, 55, 71, 87, 103, 119$ itd.

Podług pierwszego rozwiązania składka kobiet wynosi $11 \cdot 16 = 176$ zł. d. składka mężczyzn $7 \cdot 25 = 175$ zł. d.

259. Zagadnienie 2. Gospodarz wydał sumę A na zakupienie wołów i koni, woły płać po 21 , konie po 31 talarów, ileż kupił wołów ile koni?

Oznaczywszy przez x liczbę kupionych wołów, przez y liczbę kupionych koni, będzie $21x + 31y = A$; więc $x = \frac{A - 31y}{21} = \frac{A - 10y}{21} - y$.

Uczyniwszy $\frac{A - 10y}{21} = u$, będzie

$x = y - y$.

Z równania $\frac{A - 10y}{21} = u$ wypada

$y = \frac{A - 21u}{10} = \frac{A - u}{10} - 2u$; a uczyniwszy

$\frac{A - u}{10} = t$, będzie $y = t - 2u$.

Zrównania $\frac{A-u}{10} = t$. wypada $u = A$

— 10t. Mamy więc $u = A - 10t$.

$$y = t - 2u = t - 2A + 20t = 21t - 2A.$$

$$x = u - y = A - 10t - 21t + 2A = 3A - 31t.$$

Daymy że $A = 1770$ talarów; ostatnie zatem dwa równania zamieniają się w następujące:

$$y = 21t - 3540, \quad x = 5310 - 31t.$$

Z ostatniego równania okazuje się że powinno być $31t < 5310$, czyli $t < \frac{5310}{31}$, czyli

$t < 172$: iakoż uczyniwszy $t = 172$, będzie $x = 5310 - 5332 = -22$, co być nie może. Z równania zaś przedostatniego okazuje się

że powinno być $21t > 3540$, czyli $t > \frac{3540}{21}$,

czyli $t > 169$: iakoż uczyniwszy $t = 168$, wypadnie $y = 3528 - 3540 = -12$, co być nie może. Kiedy więc t powinno mieć wartość większą od 168, mniejszą od 172, aważności w łomkowe w zagadnieniu niniejszem mieścić nie można. Kiedy więc t powinno mieć wartość większą od 168, mniejszą od 172, aważności w łomkowe w zagadnieniu niniejszem mieścić nie można, nie można zatem dla t nazwać, więcęć ważności, iak tylko trzy następujące: 169, 170 i 171; a tęp samęp zagadnienie to więcęć rozwiązań prziąć nie może, iak tylko trzy.

Uczyniwszy $t = 169, 170, 171$, znajdziemy

$$y = 9, 30, 51,$$

$$x = 71, 40, 9.$$

Podług pierwszego rozwiązania summa wydana za woły 21. 71 = 1491, summa wydany

zakonie 31. 9 = 279. Dwie te summy czynią razem 1770 i t. d.

260. Zastanowiwszy się z uwagą nad temi dwoma zagadnieniami z których pierwsze przymuie liczbę rozwiązań nieskończoną, drugie ograniczoną, wyprowadzimy następujące postrzeżenia:

16d. W zagadnieniu pierwszym zamiast liczb wiadomych do niego wchodzących, które są: 16, 25 i 1, położywszy głoski a, b, c , równanie $16x - 25y = 1$, zamieni się na $ax - by = c$.

Wszystkie tego gatunku zagadnienia przypuszczające nieograniczoną liczbę rozwiązań prowadzą do równania takiego iakie iest powyższe, w którym dwie niewiadome ilości składające pierwszą stronę są połączone z sobą znakiem —: gdy tym czasem zagadnienie drugie,

wszystkie inne tegoż gatunku, które przypuszczają liczbę rozwiązań ograniczoną, prowadzą do równania następującego kształtu: $ax + by = c$. Co się tyczy trzecięć ilości o wiadomęć do zagadnienia wchodząć, ta czasem iest podayna, iak w dwóch zagadnieniach poprzedzających; czasem odiemna, a czasem równa iak się okaże w innych zagadnieniach. Uwaga ta posłuży do poznania z samego wyczerpania na równanie, czy zagadnienie, z którego to równanie wzięło początek, przypuszczająć rozwiązań ograniczoną, czyli też nieograniczoną.

261. 2re. W równaniach $16x - 25y = 1$, $16x + 3y = 1770$, za pomocą których roz-

wiązaliśmy dwa poprzedzające zagadnienia. Jeden jest rosnący drugi malejący; gdy tym czasem w drugim równaniu są liczbami między składającymi nieskończoną liczbę tychże ważności. Warunek ten jest istotny w rozwiązaniu tego rodzaju; i jeżeli w równaniu $ax \pm by = c$, liczby a i b nie są między sobą pierwsze, równanie to będzie do rozwiązania podobne, chyba by trzecia także liczba była podobna, chyba ten sam dzielnik, który jest nym dzielnikiem dla a i b . Jakoż gdyby było $a = km$, $b = kn$, równanie powyższe mieniłoby się na $kmx \pm kny = c$, więc $mx \pm$

$\frac{c}{k}$; a tём samém byłoby rzeczą niepodobną, aby liczby, x , y były całkowite, c nie było podzielne przez k , iak tego dowiedzieć można na równaniach szczególnych $9x - 15y = 2$ i $9x - 15y = 6$. Uwaga ta przytacza będzie dla tych, którzyby sami chcieli układać tego rodzaju zagadnienia.

262. 3cie, Przypatrując się ważności dla x i y w poprzedzających dwóch zagadnieniach znalezionym, potrzeżemy, że ważności składają dwa postępy arytmetyczne. W postępie obeymującym ważności dla x w równaniu pierwszym (258) stosunkiem jest 16:25 będąca spółczynnikami niewiadomey w równaniu $16x - 25y = 1$. W postępie obeymującym ważności dla y stosunkiem jest 16:16 będąca spółczynnikami niewiadomey w tymże równaniu. Toż mówić o zagadnieniu drugim (259), z tą tylko różnicą, że d

postępów obeymujących ograniczoną liczbę ważności dla x i dla y w zagadnieniu drugim; jeden jest rosnący drugi malejący; gdy tym czasem w zagadnieniu pierwszym obadwa postępy składające nieskończoną liczbę tychże ważności są rosnące; właśnie też tak być powinno: gdy w zagadnieniu pierwszym składka kończąca jest większa jednym złotym od składki pierwszorzecz, rzeczą jest oczywistą, że im będzie większa liczba męszczyzn, tём większą być powinna liczba kobiet do składki należącej: przeciwnie w zagadnieniu drugim ponieważ woty i konie zapłacono razem talarów 1770, im większa zatem będzie liczba kupionych wotów, tём mniejsza być musi liczba kupionych koni, i odwrotnie. Okoliczności te we wszystkich zagadnieniach tego rodzaju mają miejsce. Jakoż daymy że w zagadnieniu niewyznaczonem znaleziona jest jedna ważność dla x i dla y , i że jest $x = a$, $y = s$. Położymy ważności te w równaniu $ax - by = c$, będzie $a - bs = c$. Równanie to odiawszy od poprzedzającego, zostanie $ax - as - by + bs = 0$; czyli $a(x - s) - b(y - s) = 0$; więc $a(x - s) = b(y - s)$; a tём samém $x - s = \frac{b}{a}(y - s)$.

Ze zaś liczby b i a są między sobą pierwsze (261); druga strona tego równania nie może być liczbą całkowitą, chyba w ten czas tylko, kiedy $y - s$ jest podzielne przez a . Daymy że $\frac{y - s}{a} = p$; a w tym przypadku równa

nie ostatecznie zamieni się na $x - a = bp$.
wyznaczenia zatem niewiadomych x i y ma
dwa rozwiązania:

$$x - a = bp, \quad y - a = ap; \text{ więc} \\ x = a + bp, \quad y = a + ap.$$

Czyniąc następnie $p = 1, 2, 3, 4, \dots$, za-
dziemy

$$x = a + b, \quad a + 2b, \quad a + 3b, \quad a + 4b, \dots \\ y = a + a, \quad a + 2a, \quad a + 3a, \quad a + 4a, \dots$$

dwa posępy takie, o iakich mówiliśmy w § 2.

Odbywszy to samo działanie z równaniem
 $ax + by = c$, przyjmującem liczbę rozwiązań
ograniczoną, znajdziemy $x = a - bp$, $y = a + bp$ i jeżeli $p = 1, 2, 3, 4, \dots$; będzie

$$x = a - b, \quad a - 2b, \quad a - 3b, \quad a - 4b, \dots \\ y = a + a, \quad a + 2a, \quad a + 3a, \quad a + 4a, \dots$$

Z dwóch tych posępów pierwszy i drugi
lejący, drugi rosnący: a pierwszego stosunkiem
jest b , drugiego a .

Uwaga ta posłuży do pędszego wyroczem
wani innych ważności dla x i dla y , gdy
początkowe znalezione.

263. 4te; Zastanowiwszy się nad sposobem
bem, którym rozwiązaliśmy pierwsze zagadnienie
(258), potrzebujemy, że sposób ten zależy od wypada z natury samego działania: liczba
szukaniu największego wspólnego dzielnika
dwóch liczb 25 i 16 które są współczynnika
niewiadomych do zagadnienia wchodzący
Jakoż dzieli się 16 liczbą większą 25
mniejszą 16, i wypada pierwsze równanie
silkowe $x = y + \frac{9y + 1}{16}$ czyli $x = y + u$.

2re. Dzieli się liczba mniejsza 16 przez
pierwszą resztę 9, i wypada drugie równanie

$$\text{posilkowe } y = u + \frac{7u - 1}{9}; \text{ czyli } y = u + t.$$

3cie. Dzieli się pierwsza reszta 9 przez
drugą 7, i wypada trzecie równanie posilkowe

$$u = t + \frac{2t + 1}{7}, \text{ czyli } u = t + s.$$

4te. Dzieli się druga reszta 7 przez trze-
cią 2, i wypada trzecie równanie $t = 3s + \frac{S - 1}{2}$

5te. Dzieli się nakoniec reszta trzecia
przez czwartą, i wypada piąte równanie
 $t = 2r + 1$.

Widzimy tu, że trzecia liczba wiadoma do
zagadnienia wchodząca to jest 1, téy tylko zmia-
nie w tych działaniach podpada, że w posilkow-
nym przed nią znajduje się w równaniu początkowem

$25y + 1$; w równaniu zaś posilkowem
drugim i czwartem ma przed sobą znak $-$,
w trzecim i piątym przed sobą znak $+$, to jest taki, iaki się
znajduje w równaniu początkowem
bowiem ta w równaniach posilkowych na-
zemiany raz się dodaje, drugi raz się ode-
mnie po obu stronach. Jeżeli więc liczba ró-
wnań tych jest nieparzysta, iak w tym przykła-
dnie, w ostatecznem równaniu posilkowem liczba
mnieć musi przed sobą znak $+$; gdyby zaś
była tychże równań była parzysta, iak będzie

w innych przykładach, w oślatniem równaniu posilkowem liczba trzecia wiadoma do zagadnienia wchodząca miałaby przed sobą znak — ale to w ten czas tylko, kiedy w początkowem równaniu przed tą liczbą znajduie się znak —, gdyby albowiem równanie początkowe miało kształt taki: $ax = by - c$, na ten czas liczba c w równaniu pierwszym, trzeciem, piątym itd. miećby musiała przed sobą znak —; w równaniu zaś drugim, czwartym i t. d. znak +, o ile jest przez się widoczna.

Te same uwagi służą także zagadnieniom drugiemu, które przypuszcza liczbę rozwiązań ograniczoną, z tą tylko różnicą, że trzecia liczba wiadoma oznaczona przez A żadnej ugięta nie podpada zmianie, i we wszystkich rozwiązaniach posilkowych zawsze ma przed sobą znak taki, jaki ma w równaniu początkowem.

Opuszczając zatem w równaniach posilkowych liczbę trzecią x , i tylko ją kładąc w równaniu oślatniem, powyższe działanie można będzie odbyć podług następującego wzoru:

$$\begin{array}{ll} 25 = 1. 16 + 9; & \text{czyli } x = 1. y + u \\ 16 = 1. 9 + 7; & y = 1. u + t \\ 9 = 1. 7 + 2; & u = 1. t + s \\ 7 = 3. 2 + 1; & t = 3. s + r \\ 2 = 2. 1 + 0; & s = 2. r + 1 \end{array}$$

Doszedłszy że $s = 2r + 1$, łatwo będzie znaleźć wartości dla x i y . Uwaga ta poprzedzająca sposób rozwiązywania takowych zagadnień. I tak niech będzie zagadnienie: *Dwudzieśa twierdzy zapytany, i a₃ licznę*

zalogę, odpowiedział: *liczba pieszych czterzy razy wzięta i powiększona 5, równa się liczbie iezdnych wziętę 7 razy.* Oznaczęszy liczbę żołnierzy pieszych przez x , iezdnych przez y , będzie równanie $4x = 7y - 5$, które rozwiązując podług powyższego wzoru, będzie

$$\begin{array}{ll} 7 = 1. 4 + 3; & \text{czyli, } x = 1. y + u \\ 4 = 1. 3 + 1; & y = 1. u + t \\ 3 = 3. 1 + 0; & u = 3. t - 5. \end{array}$$

W oślatniem równaniu posilkowem przed liczbą 5 daliśmy znak taki jaki się znajduje przed nią w równaniu początkowem: gdyż oślatnie równanie posilkowe jest trzecie. Doszedłszy że $u = 3t - 5$, łatwo znajdziemy że $y = 4t - 5$, $x = 6t - 10$. Z równań tych okazuje się, że najmniejszą wartość którą dla t naznaczyć można jest 2; i t. d.

264. Dwa poprzedzające zagadnienia które przypuszczają nieskończoną liczbę rozwiązań można ogólnie tak wysłowić: *znaleźć dwie liczby, z których jedna wzięta razy a i powiększona lub zmniejszona ilością c równa się drugiej wziętej razy b.* W reszcie jakiegokolwiek będzie wystowienie zagadnienia tego gatunku, zawsze ie można będzie sprowadzić do równania $ax = by \pm c$, które sposobem podanym wyżej z łatwością rozwiązane być może. Weźmy np. zagadnienie: *znaleźć liczbę która podzielona przez 39 daie reszty 16; podzielona zaś przez 86, daie reszty 27.*

Niech x oznacza całkowity iloraz wypadający z podzielenia liczby szukanej przez 39,

y całkowity iloraz wypadający z podzielenia tejże liczby przez 56: liczbę więc szukaną oznaczysz przez N , będzie stosownie do warunków zagadnienia $N = 39x + 16$ albo $N = 56y + 27$. A zatem $39x + 16 = 56y + 27$ czyli $39x = 56y + 11$. Rozwiązując równanie to podług podanego wyżéj wzoru, otrzymamy pięć równań posłtkowych, z których ostatecznie jest $s = 2r + 11$. Ważność tę położysz w innych czterech równaniach posłtkowych, znajdziemy $y = 39r + 176$; $x = 56r + 253$. Dwa z równań ostrzegają, że najmniejsza ważność, którą dla r naznaczyć można, jest -4 : gdy uczynisz $r = -5$, będzie $x = -280 + 253 = -27$, co być nie może. Lecz wszelka inna liczba całkowita, byleby większa od -4 , zamiaści r położoną, da dla x i y ważność całkowitą dodayną. Uczynisz $np. r = -1$, znajdziemy $x = 29$. Ważność tę położysz zamiaści x w równaniu $N = 39x + 16$, wypadnie $N = 1147$, najmniejsza liczba szukana czyniąca zadosyć warunkom zagadnienia; i t. d.

265. Ten sam jest sposób postępowania, gdy do zagadnienia wchodzą trzy niewiadome lub więcej. I tak niech będzie zagadnienie: znaleźć liczbę, która podzielona przez 11, daie resztę 3; podzielona przez 19, daie resztę 5; podzielona przez 29, daie resztę 10.

Oznaczysz przez N liczbę szukaną, a przez x, y, z , ilorazy całkowite wypadające z podzielenia téj liczby przez 11, 19 i 29, będzie

$N = 11x + 3$; $N = 19y + 5$; $N = 29z + 10$. Więc $11x + 3 = 19y + 5$; $11x + 3 = 29z + 10$; czyli $11x = 19y + 2$; $11x = 29z + 7$.

Pierwsze z tych dwóch równań rozwiązawszy sposobem zwyczajnym znajdziemy $x = 19r + 14$. A zatem $11x = 209r + 154$. Ważność tę położysz w równaniu drugim zamiaści $11x$, będzie $29z + 7 = 209r + 154$, czyli $29z = 209r + 147$. Równanie to rozwiązując podług podanego wyżéj wzoru, wypadnie

$$209 = 7 \cdot 29 + 6; \text{ czyli, } z = 7 \cdot r + q.$$

$$29 = 4 \cdot 6 + 5; \quad r = 4 \cdot q + p.$$

$$6 = 1 \cdot 5 + 1; \quad q = 1 \cdot p + n.$$

$$5 = 5 \cdot 1 + 0; \quad p = 5 \cdot n - 147$$

(263). A zatem

$$p = 5n - 147; \quad q = 6n - 147; \quad r = 29n - 735;$$

$$s = 209n - 5292. \text{ Ażé}$$

$$N = 29z + 10; \text{ będzie więc}$$

$$N = 29(209n - 5292) + 10 = 6061n - 153458.$$

Z równania tego okazuje się, że powinno być $6061n > 153458$, czyli $n > 25$. Najmniejszą zatem ważność, którą dla n naznaczyć można, jest 26; a w tym przypadku będzie $N = 4128$; i t. d.

266. Abyśmy ten sam sposób zastosowali do zagadnień przypuszczających liczbę rozwiązań ograniczoną, uważać należy, że w równaniu $21x = A - 31y$ (359), liczba większa 31 jest odjemną; dzielał zatem liczbę większą przez mniejszą która jest dodayną, tak iloraz jak pozostała reszta będą odjemne, dzielać zaś liczbę mniejszą dodayną przez pierwszą resztę,

która jest odiemna, iloraz będzie odiemny, a pozostała reszta druga dodayna; i tak dalej. Co się tycze trzeciéj liczby wiadoméj oznaczonéj przez A , ta iakośmy już uważali (203) nie podpada żadnéj zmianie, i iakakolwiek będzie liczba równań posilkowych, zawsze w statniem równaniu ma przed sobą znak $+$. Piątę uwadze, przystąpmy do działania.

$$\begin{aligned} -3t &= -1. \quad 2t - 10; & \text{czyli, } x &= -1. y + \\ 2t &= -2. \quad 10 + 1; & y &= -2. u + \\ -10 &= -10. \quad 1 + 0; & u &= -10. t + 17. \end{aligned}$$

Więc

$$\begin{aligned} u &= 1770 - 10t. \quad y = t - 2u = 21t - 3540 \\ x &= u - y = 5310 - 51t, \text{ iak wyżej (359).} \end{aligned}$$

Inne zagadnienia. *10d; Matka dała dwóm synom 100 groszy do rozdania między bogich: starszy dał każdemu ubogiemu po 8 gr. i zostało mu gr. 7, młodszy dał każdemu po gr. 10, i zostało mu także gr. 7, ileż groszy dostał od matki syn starszy, i młodszy?*

Zagadnienie to wystawione ogólniey zmieni się w następujące: *liczbę 100 rozdzielić na dwie części, z których pierwsza podzielona przez 8, a druga przez 10, dać resztę po 7; iakież są dwie części szukane?*

Iloraz całkowity wypadający z podzielenia pierwszéj liczby szukanéj oznaczywszy przez x , a przez y iloraz całkowity wypadający z podzielenia drugiéj liczby szukanéj przez 10, będzie liczba pierwsza $8x + 7$, druga $10y + 7$, więc $8x + 7 + 10y + 7 = 100$; czyli

$$4x = 45 - 5y. \quad \text{A zatem}$$

$$-5 = -1. 4 + 1; \text{ czyli } x = -1. y + u.$$

$$4 = -4. -1 + 0; \quad y = -4. u + 43.$$

Mamy więc

$$y = 45 - 4u; \quad x = 5u - 43.$$

Skąd się okazuje że powinno być $u < 11$, $u > 8$ i t. d.

2re. *Liczbę 109 rozdzielić na dwie części, z którychby jedna była podzielna przez 5, druga przez 24;*

Oznaczywszy przez x i przez y ilorazy wypadające z podzielenia dwóch szukanych liczb przez 5 i przez 24, będzie

$$5x + 24y = 109; \text{ czyli } 5x = 109 - 24y. \text{ Więc}$$

$$-24 = -4. 5 - 4; \text{ czyli, } x = -4y + u.$$

$$5 = -1. -4 + 1; \text{ czyli, } y = -1. u + t.$$

$$-4 = -4. 1 + 0; \quad u = -4t + 109.$$

A zatem

$$u = 109 - 4t; \quad y = st - 109; \quad x = 545 - 25t.$$

Skąd się okazuje że powinno być $t > 21$, $t < 23$. Jedna więc tylko ważność może być dla t oznaczona, to jest $t = 22$, i wypadnie $y = 1$, $x = 17$. Zagadnienie więc to iako przyymujące jedno tylko rozwiązanie należy do wyznaczonych, chociaż ma postać zagadnienia niewyznaczonego.

3cie. *Dłużnik winnym będąc 853 zł. chce dług ten zapłacić pięcio-złotówkami i talarami sześć-złotowymi: ileż ma wydać pierwszego i drugiego gatunku pieniędzy na zaspokoienie tego długu?*

Oznaczywszy przez x i przez y liczbę szukaną pięcio-złotówek i talarów, będzie

$$5x = 853 - 6x. \text{ Wieg}$$

$$-6 = -1.5 - 1; \text{ czyli } x = -1.y + u.$$

$$5 = -5. -1 + 0; \quad y = -5.u + 853.$$

A zatem

$$y = 853 - 5u; \quad x = 6u - 853. \text{ Skąd się oka-}$$

zuje że powinno być $u < 171, u > 142$. Można więc dla u naznaczyć 28 ważności, które są:

$$u = 143, 144, 145, 146, \dots, 170; \text{ będzie zatem}$$

$$y = 138, 133, 128, 123, \dots, 3,$$

$$x = 5, 11, 17, 23, \dots, 167.$$

267. Pozostały jeszcze zagadnienia przy-
mujące ograniczoną liczbę rozwiązań z trzema
lub więcej niewiadomymi i jakie są następujące:

*Złotnik ma trzy gatunki srebra: jeden
czternaście próby, drugie jedenaście, trzeci
dziewiąte. Po ileż ma wziąć grzywnien z
każdego gatunku, aby otrzymał masę wa-
żącą 30 grzywnien dwunastę próby?*

Szukaną liczbę grzywnien srebra gatunku
pierwszego oznaczywszy przez x , drugiego przez
 y , trzeciego przez z , będzie równanie pierwsze
 $x + y + z = 30$.

Ze zaś w jeden grzywnie czyli w 16 lo-
tach srebra czternaście próby znajduje się 14
łotów czystego srebra, a reszta miedzi; w liczbie
zatem grzywnien x znajdować się będzie czy-
stego srebra łotów $14x$. Podobnie w liczbie
grzywnien y drugiego gatunku znajdować się
będzie czystego srebra łotów $11y$, w liczbie grzy-
wnien z trzeciego gatunku znajdować się będzie

czystego srebra łotów $9z$; a we 30 grzywnach
dwunastę próby znajduje się czystego srebra
łotów $30.12 = 360$. Będzie więc drugie ró-
wnanie

$$14x + 11y + 9z = 360.$$

Pierwsze równanie rozmnożywszy przez 9,
i odiawszy od drugiego, będzie

$$5x + 2y = 90, \text{ czyli } 2y = 90 - 5x. \text{ A zatem}$$

$$-5 = -2.2 - 1; \text{ czyli } y = -2.x + u.$$

$$2 = -2. -1 + 0; \quad x = -2.u + 90.$$

Mamy więc

$$x = 90 - 2u, \quad y = 5u - 180.$$

Ze zaś podług równania pierwszego
 $30 - x - y$; będzie więc

$$z = 120 - 3u.$$

Z równań tych okazuje się że u nie mo-
że mieć ważności ani mniejszej od 36, ani
większej od 40.

Jeżeli $u = 36, 37, 38, 39, 40$; będzie

$$x = 18, 16, 14, 12, 10;$$

$$y = 0, 5, 10, 15, 20;$$

$$z = 12, 9, 6, 3, 0.$$

Zagadnienie więc to, przypuszczając roz-
wiązanie pierwsze i ostatnie, do których wcho-
dzą dwa tylko gatunki srebra przyymie pięć
rozwiązań. Podług rozwiązania np. drugiego
wypada

$$x + y + z = 16 + 5 + 9 = 30; \quad 14x + 11y + 9z$$

$$= 14.16 + 11.5 + 9.9 = 360; \text{ co dowodzi, że}$$

$$\text{ta mieszanina srebra jest dwunastę próby: gdyż}$$

$$\frac{360}{12} = 30; \text{ to jest na jeden grzywnę wypada}$$

$$\text{czystego srebra łotów } 12.$$

268. Tym samym sposobem rozwiązując się wszystkie inne tego gatunku zagadnienia, które każdy sam sobie układać może byleby zachował przestrożę w następujący uwadze podaną.

Weźmy dwa ogólne równania z trzema niewiadomymi

$$\begin{aligned} x + y + z &= a. \\ fx + gy + hz &= b. \end{aligned}$$

Daymy że z trzech liczb f, g, h , pierwsza f jest największa ostatnia h jest najmniejsza. Ponieważ $x + y + z = a$, będzie $fx + fy + fz = fa$. Ze zaś f jest większe tak od g , iak od h , wypada liąd że $fx + fy + fz > fx + gy + hz$; a tém samém powinno być $fa > b$, czyli $b < fa$.

Aże nadto $hx + hy + hz = ha$, a liczba h jest mniejsza tak od f , iak od g ; będzie więc $hx + hy + hz < fx + gy + hz$; a tém samém powinno być $ha < b$, czyli $b > ha$.

Jeżeli b nie jest mniejsze od fa , a większe od ha , zagadnienie będzie niepodobne do rozwiązania. Dwie te ilości fa i ha są dwiema granicami, między którymi ilość b powinna być zawarta, a prócz tego i jeszcze ilość b nie powinna się bardzo zbliżyć do iednej lub drugiey granicy: gdyż w tym przypadku inna głoski nie mogłyby być wyznaczone, okazany to na przykładzie. Dla 100 ubogich dano 100 zł, mężczyźni dostali po $3\frac{1}{2}$ zł, kobiety po $1\frac{1}{2}$ zł, dzieci po $\frac{1}{2}$ zł, ileż było mężczyzn, kobiet i dzieci?

Zagadnienie to prowadzi do następujących dwóch równań:

$x + y + z = 100$; $3\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 100$, w których $100 = a$, $100 = b$, $3\frac{1}{2} = f$, $1\frac{1}{2} = g$, $\frac{1}{2} = h$. Granice zatem dla b są 100, $3\frac{1}{2} = 350$, i 100. $\frac{1}{2} = 50$. Aże b nie wychodzi za te granice, ani się bardzo do nich zbliża, zagadnienie to jest podobne do rozwiązania. Lecz położywszy zamiast b liczbę wychodzącą za iednę z dwóch granic, lub do iednej z nich bardzo zbliżoną, zagadnienie będzie niepodobne do rozwiązania:

Uczyniwszy np. $b = 51$, będzie dwa równania

$$x + y + z = 100, \quad 3\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 51.$$

Zniósłszy mianowniki w równaniu drugim, a pierwsze rozmnożywszy przez 3 i odiawszy od drugiego, zostanie $18x + 5y = 6$; co być nie może: gdyż liczby x, y powinny być całkowite.

269. Weźmy ieszcze zagadnienie tego gatunku ze czterema niewiadomymi. Gospodarz potrzebował 100 rzemieślników czworakiego gatunku i zapłacił im 100 cz. zł. rzemieślnicy iednego gatunku dostali po 10 cz. zł. drugiego po 5, trzeciego po 2, czwartego po $\frac{1}{2}$ cz. zł. Ileż było rzemieślników każdego gatunku?

Zagadnienie to prowadzi do następujących dwóch równań:

$$\begin{aligned} u + x + y + z &= 100. \\ 10u + 5x + 2y + \frac{1}{2}z &= 100. \end{aligned}$$

Drugie równanie rozmnożywszy przez 2 i odiaższy od niego pierwsze, będzie $19u + 9x + 3y = 100$, więc $3y = 100 - 9x - 19u$; i uczyniwszy $100 - 9x = c$, wypadnie $3y = c - 19u$. A zatem

$$-19 = -6 \cdot 3 - 1; \text{ czyli } y = -6 \cdot u + t \\ 3 = -3 \cdot -1 + 0; \quad u = -3 \cdot t + c.$$

Mamy więc

$$u = c - 3t; \quad c = 100 - 9x; \quad y = t - 6u; \quad z = 100 - u - x - z, \text{ czyli} \\ u = 100 - 9x - 3t; \quad y = 19t + 54x - 600 \\ z = 600 - 46x - 16t.$$

Z równań tych okazuje się, że powinno być $9x + 3t < 100$, a $54x + 19t > 600$: gdy inaczej znalezione wartości byłyby odjemne. Resztę można iakąkolwiek wartość naznaczyć dla x i dla t , byleby ten warunek był zachowany. Uczyniwszy np $x = 1$, wypadnie $u = 91 - 3t$, $y = 19t - 546$, z których się okazuje że powinno być $t < 31$, $t > 28$. Kiedy więc $x = 1$, dwie tylko wartości dla t naznaczyć można, to jest: $t = 30$, i $t = 29$. Jeżeli $t = 30$, znajdziemy $u = 1$, $y = 24$, $z = 74$. Kiedy zaś $t = 29$, wypadnie $u = 4$, $y = 5$, $z = 90$.

Czyniąc potem $x = 2, 3, 4, 5$ i t.d. znajdziemy inne rozwiązania tym samym sposobem iakim znaleźliśmy dwa pierwsze.

270. Naznaczenie wartości dla x i dla y w poprzedzającym zagadnieniu zabiera nie mało czasu. Zapobieżć temu można używając następującego sposobu:

Z otrzy-

Z otrzymanego wyżej równania $19u + 9x$

$$+ 3y = 100, \text{ wypada } y = \frac{100 - 19u - 9x}{3}$$

$$= 33 - 6u - 3x + \frac{1 - u}{3}, \text{ czyli}$$

$$y = 33 - 6u - 3x - \left(\frac{u - 1}{3} \right).$$

Niech będzie $\frac{u - 1}{3} = t$, a tćm samćm

$u = 3t + 1$. Ważność tę położywszy w równaniu poprzedzającym, będzie $y = 27 - 19t - 3x$.

Równanie to okazuje że powinno być $19t + 3x < 27$: gdyż inaczej liczba y byłaby odjemną; z resztą dla t i dla x można dać wartości iakiekolwiek, byleby ten warunek był dopełniony. Uczynimy więc

1) $t = 0$; będzie $u = 1$; $y = 27 - 3x$.

2) $t = 1$; będzie $u = 4$; $y = 8 - 3x$.

3) $t = 2$; będzie $u = 7$; $y = -11 - 3x$, co być nie może.

A zatem dla t nie można więcej wartości naznaczyć, tylko dwie, to jest: $t = 0$, i $t = 1$. W pierwszym przypadku otrzymane równanie $y = 27 - 3x$ okazuje, że x nie może mieć więcej wartości nad 9: gdyż inaczej liczba y byłaby odjemną; w drugim przypadku otrzymane równanie $y = 8 - 3x$ okazuje że x nie może mieć więcej wartości nad 2. Przypuszczając zatem $t = 0$, można będzie dla x naznaczyć 10 wartości zaczawszy od 0, aż do 9 włącznie, przypuszczając zaś $t = 1$, można być

Gospodarz po ukończonych żniwach zapłaci żniwiarzom i żniwiarkom 1000 zł. Żniwiarze dostali po 19 zł. Żniwiarki po 2 zł. Ileż było żniwiarzów i żniwiarek?

132 osób znajdujących się na jedynym widowisku zapłaciły zł. 262; siedzący na pierwszym miejscu pierwszem placili po 3 zł. i groszy 5, na drugim po 2 zł. i gr. 5, na trzecim po 1 zł. gr. 5; ileż było siedzących na miejscu pierwszym, drugim i trzecim?

Znaleźć liczbę, która podzielona przez 2, 3, 5, dała reszty 1, 2, 3, albo podzielona przez 3, 4, 5, dała reszty 2, 3, 4, albo podzielona przez 3, 4, 5, 7, dała reszty 2, 3, 4, 5, albo znaleźć liczby zupełnie podzielone przez 11 i 32.

Mając dany ułamek $\frac{113}{335}$, który jest przybliżonym stosunkiem średnicy do obrotu, znaleźć ułamek drugi $\frac{x}{y}$ taki, aby różnica między temi dwoma ułamkami była jednakowego mianownika sprowadzonego do najmniejszego licznika jedności; i t. d.

Wszystkie te zagadnienia rozwiązują się sposobami podanemi wyżej; ostatnie prowadzi do

następującego równania $\frac{113}{335} - \frac{x}{y} = \pm \frac{1}{355}$

ułamek bowiem szukany może być mniejszy lub większy od danego. Gdyby ułamek dany był dziesiętny, trzeba go pierwój obrócić na zwyczajny. Dajmy że liczba 2,236, która

jest przybliżonym pierwiastkiem kwadratowym liczby 5, trzeba zamienić na ułamek wyczerpny przybliżający się do tego pierwiastku kwadratowego. Ponieważ $2,236 = 2 + \frac{236}{1000} = 2 + \frac{59}{250}$, trzeba zatem rozwiązać następujące równanie: $\frac{59}{250} - \frac{x}{y} = \pm \frac{1}{250}$; i t. d.

273. Pójdźmy teraz do zagadnień niewyrażonych stopnia drugiego. Niech będzie zagadnienie: Znaleźć dwie liczby x i y którychby iloczyn powiększony ich sumą wynosił 79. Zagadnienie to prowadzi do następującego równania: $xy + x + y = 79$. A zatem $y = \frac{79 - x}{x + 1} = \frac{-x + 79}{x + 1} = -1 + \frac{80}{x + 1}$ (160).

Skąd się okazuje że $x + 1$ powinno być dzielnikiem liczby 80. Dzielniki liczby 80 są następujące:

$x + 1 = 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40, 80$;
 $x = 0, 1, 3, 4, 7, 9, 15, 19, 39, 79$;
 $-79, 39, 19, 15, 9, 7, 4, 3, 1, 0$.

Z podaniem więc to przypuszcza 4 tylko rozwiązania to jest:

$x = 1, 3, 4, 7; y = 39, 19, 15, 9$.

Tym samym sposobem rozwiązać można następujące zagadnienia: 160. Wyznaczyć w liczbach całkowitych boki prostokąta, któregoby powierzchnia zamykana 4 razy więcej stop kwadratowych, aniżeli obwód ma stop liniowych. Ponieważ powierzchnia prostokąta

ta znajduje się mnożąc jego podstawię przez wysokość, oznaczwszy zatem dwa te boki przez x i y , będzie powierzchnia $= xy$, obwód $= 2x + 2y$: wypadnie więc podług warunków zagadnienia $xy = 8x + 8y$, a tćm samie

$$y = \frac{8x}{x-8} = 8 + \frac{64}{x-8}$$

Skąd się okazuje $x-8$ powinno być dzielnikiem liczby 64.

273. Wyznaczyć w liczbach całkowitych równoległoscian prostokątny z podstawą kwadratową, któregooby objętość zawierała 5 razy więcej stóp sześciennych, niż tego powierzchni ma stóp kwadratowych. Ponieważ objętość równoległoscianu znajduje się mnożąc jego wysokość przez podstawię, oznaczwszy zatem wysokość przez x , bok podstawy przez y , będzie objętość $= xy^2$, powierzchnia dwóch podstaw $= 2y^2$; powierzchnia czterech ścian pobocznych $= 4xy$; i stosownie do warunków zagadnienia wypadnie $xy^2 = 10y^2 + 20xy$, więc

$$y = \frac{20x}{x-10} = 20 + \frac{200}{x-10}$$

274. Mając daną w liczbach całkowitych oznaczoną przez a krawędź sześcienną, oznaczyć w liczbach całkowitych bok podstawy kwadratowej i wysokość równoległoscianu prostokątnego, któregooby objętość była się do objętości sześciennu, tak powierzchnia równoległoscianu do powierzchni sześciennu. Oznaczwszy przez x wysokość, po-

bok podstawy równoległoscianu szukanego, będzie xy^2 ; $a^3 = 2xy^2 + 4xy$; $6a^3$; więc $x = \frac{ay}{3y-2a}$;

$$\text{a tćm samie } 3x = \frac{3ay}{3y-2a} = a + \frac{2a^2}{3y-2a};$$

t. d.

274. Weźmy jeszcze równanie $a + bx + cx + dx^2 + exy + fy^2 = 0$, w którym obiedwie niewiadome podniesione do drugiego stopnia; nadawszy mu następujący kształt:

$$y^2 + \left(\frac{cx+c}{f}\right)y = -\frac{a+bx+dx^2}{f},$$

i rozwiązawszy je sposobem zwyczajnym, będzie

$$y = -\frac{cx+c}{2f} \pm \frac{\sqrt{(cx+c)^2 - 4f(a+bx+dx^2)}}{2f};$$

czyli

$$2fy + cx + c = \pm \sqrt{(cx+c)^2 - 4f(a+bx+dx^2)}.$$

Ilość będąca pod znakiem pierwiastkowym rozwiniawszy, i uporządkowawszy podług wykładników głoski x ; będzie

$$c^2 - 4af + 2cex - 4bf x + e^2 x^2 - 4df x^2; \text{ u-}$$

znaczwszy zaś $c^2 - 4af = m$, $2ce - 4bf = n$, $e^2 - 4df = v$; ilość ta weźmie kształt następujący:

$$m + nx + vx^2.$$

Gdybyśmy chcieli znaleźć dla x i dla y wartości tylko spótmierne czyli całkowite, czyli też ułamkowe, cała trudność rozwiąza-

nia zależałyby na znalezieniu takich wartości dla x , któreby ilość $m + nx + px^2$ czyniły kwadratem zupełnym, i kwadrat ten oznaczysz przez t^2 , będzie $2fy + cx + c = \pm t$.

Rozwiązawszy równanie $m + nx + px^2 = t^2$, wypadnie

$$x = \frac{-n \pm \sqrt{n^2 - 4mp + 4pt^2}}{2p}; \text{ więc}$$

$$2px + n = \pm \sqrt{n^2 - 4mp + 4pt^2}.$$

Uczyniwszy $4p = A$, $n^2 - 4mp = B$; będzie

$$2px + n = \pm \sqrt{At^2 + B}.$$

Wypadek ten okazuje, że chcąc rozwiązać zagadnienie, trzeba wyznaczyć t w taki sposób, ażeby ilość $\sqrt{At^2 + B}$ była kwadratem: bo gdyby tym kwadratem było u^2 , dwiema niewiadomymi x i y zależałyby jedynie od następujących równań stopnia pierwszego:

$$2fy + cx + c = t, \quad 2px + n = u$$

w których współczynniki c, e, f, n i t , tudzież ilości t i u są spółmierne.

Wyznaczenie ilości t podług warunku wyżej podanego, czyli, co na jedno wychodzi, rozwiązanie równania $u = \sqrt{At^2 + B}$ w ogólnych spółmiernych, połączone jest w ogólności z wielką trudnością. Jeden z przypadków najłatwiejszych w ten czas ma miejsce, kiedy A jest kwadratem; oznaczysz kwadrat ten przez a^2 , będzie

$= \sqrt{a^2 t^2 + B}$; a założysz, że $u = at + v$, wypadnie

$+ v = \sqrt{a^2 t^2 + B}$; a tym samym

$$\frac{B - v^2}{2av}.$$

Wziąwszy zamiast v liczbę spółmierną, ilości t i u będą spółmierne, równie jak ilości i i y .

Jeżeli B jest kwadratem oznaczonym; przez e^2 , równanie dane rozwiązuje się z taką samą łatwością, jak w przypadku poprzedzającym, zakładając $u = vt + s$, będzie

$$vt + s = \sqrt{At^2 + e^2}; \text{ skąd wypada } t = \frac{2se}{A - e^2}.$$

Nakoniec jeżeli ilość $At^2 + B$ może być złożoną na dwa czynniki spółmierne, np. takie: $at + s$, $at + s$, a tym samym, jeżeli będzie

$$(at + s)(at + s) = At^2 + B = u^2,$$

czynniki $u = v(at + s)$; skąd wypadnie

$$v^2(at + s)^2 = (at + s)(at + s); \text{ a tym samym}$$

$$v^2(at + s) = at + s, \text{ więc}$$

$$t = \frac{s - av^2}{av^2 - a}.$$

275. Znalazłszy jedną wartość spółmierną dla t , można z nię łatwo wyprowadzić nieograniczoną liczbę wartości innych, które czynią zadosyć danemu równaniu. Na okazanie tego niech będzie a wartość dana dla t , a s wartość dla u , z tamtęj wypływająca: będzie

$$\beta = \sqrt{Ax^2 + B}; \text{ czyli, } \beta^2 = Ax^2 + B.$$

Równanie to odiawszy od równania $u^2 = At^2 + B$, będzie

$$u^2 - \beta^2 = A(t^2 - x^2); \text{ czyli, } u^2 = A(t^2 - x^2) + \beta^2.$$

Uczynimy $u = (t - x)v + \beta$; więc $u^2 = (t - x)^2 v^2 + 2\beta v(t - x) + \beta^2$.

Ważność tę położywszy zamiast u^2 w równaniu poprzedzającym, będzie

$$v^2(t - x)^2 + 2\beta v(t - x) = A(t^2 - x^2); \text{ po}$$

dzieliwszy przez $t - x$,

$$v^2(t - x) + 2\beta v = A(t + x), \text{ a tém samém}$$

$$t - x = \frac{2\beta v}{A - v^2}.$$

Formuła ta da liczby spotmierne dla x i t , gdy się wezmą liczby spotmierne zamiast x i t .

276. Wyprowadzone dotąd formuły mogą być z łatwością zastosowane do rozwiązania rozmaitych zagadnień: przeistacimy tu tylko na następujących: *Znaleźć dwie liczby x i y takie, ażeby summa lub różnica kwadratów była równa danemu kwadratowi β^2 .* Równania mające być rozwiązane, do których zagadnienia to prowadzi, są:

$$y^2 + x^2 = \beta^2; y^2 - x^2 = \beta^2, \text{ z których wypadnie}$$

$$y = \sqrt{\beta^2 - x^2}; y = \sqrt{\beta^2 + x^2}.$$

Wyrażenia te zamknięte są w drugim przypadku artykułu poprzedzającego. Uczynimy $y = vx - \beta$; będzie zatem

$$vx - \beta = \sqrt{\beta^2 - x^2}; vx - \beta = \sqrt{\beta^2 + x^2}; \text{ tém samém}$$

$$(vx - \beta)^2 = \beta^2 - x^2; (vx - \beta)^2 = \beta^2 + x^2.$$

Rozwinąwszy dwa te równania, wypadnie

$$\text{pierwszego } x = \frac{2\beta v}{v^2 + 1}, \text{ z drugiego}$$

$$x = \frac{2\beta v}{v^2 - 1}.$$

Ważności te położywszy w równaniu poprzedzającym $y = vx - \beta$, znajdziemy

$$y = \frac{\beta(v^2 - 1)}{v^2 + 1}; y = \frac{\beta(v^2 + 1)}{v^2 - 1}.$$

Naznaczając potem ważności spotmierne dla x i dla y , otrzymamy ważności spotmierne dla x i dla y . Wziąwszy np. $\beta = 5$, dane równania zamieniają się w następujące:

$$y^2 + x^2 = 25; y^2 - x^2 = 25.$$

$$\text{szem jest } x = \frac{2\beta v}{v^2 + 1} = \frac{10v}{v^2 + 1};$$

$$\frac{\beta(v^2 - 1)}{v^2 + 1} = \frac{5(v^2 - 1)}{v^2 + 1};$$

$$\text{siem } x = \frac{10v}{v^2 - 1}; y = \frac{5(v^2 + 1)}{v^2 - 1}.$$

Skąd się okazuje, że najmniejsza ważność dla v naznaczyć można, jest 2: gdyż uwszy $v = 1$: byłoby w pierwszym przypadku

$$v = \frac{0}{2}, \text{ w drugim } y = \frac{10}{0}. \text{ Uczyniwszy}$$

$v = 2, 3, 4 \dots$ znajdziemy w iwszém rozwiązaniu

$$x = 4, 3, \frac{10}{17} \dots$$

$y = 3, 4, \frac{17}{17} \dots$ 5; w zgtem zaś równaniu

$$x = \frac{20}{3}, \frac{30}{8}, \frac{40}{13} \dots$$

$$y = \frac{25}{3}, \frac{50}{8}, \frac{75}{13} \dots$$

W równaniu drugim nie można otrzymać dla x i dla y wartości całkowitych, kiedy się daie na ważność dla v liczba całkowita. Lecz uczyniwszy $v = \frac{3}{2}$, znajdziemy $x = 14$, $y = 13$.

Rozwiązanie drugiego zagadnienia w liczbach całkowitych nayłatwiejsze jest w tym czasie, kiedy β^2 jest liczbą nieparzystą; ponieważ bowiem różnica między kwadratami dwóch ilości a i $a+1$ jest $2a+1$, do czego będzie wprowadzić równanie $2a+1 = \beta^2$, z którego wypada $a = \frac{\beta^2 - 1}{2}$; a wzięwszy $x = a$, $y = a$ wypadnie $y^2 - x^2 = \beta^2$.

W przykładzie danym, gdzie $\beta^2 = 5$ znajdziemy

$$a = \frac{5-1}{2} = 2; \text{ a t\`em sam\`em } x = 2, y = 2$$

jak wyżej.

je pierwiastków przybliżonych kar. 165 III, Zauważenia stosowne do dwóch ostatnich rozdziałów str. 172.

DZIAŁ VI. O równaniach stopnia drugiego. Rozwiązania stopnia drugiego proste kar. 177 II, Rozwiązania stopnia drugiego mieszane kar. 181 III, Uogólnienia stopnia drugiego kar. 193.

DZIAŁ VII. O postępach Arytmetycznych i geometrycznych.

O postępach arytmetycznych kar. 199. II, o Postępach geometrycznych kar. 207.

DZIAŁ VIII. O Logarytmach.

O Logarytmach w ogólności kar. 214. II, Pierwszy sposób wyrachowania logarytmów kar. 219. III, Drugi sposób wyrachowania logarytmów kar. 204. Uwaga nad logarytmami, i działania za pomocą logarytmów kar. 227.

Zagadnienia za pomocą log. rozwiązane kar. 240.

DZIAŁ IX. Obszerniejszy wykład wiadomości o działaniach algebraicznych dotąd wyłożonych.

Dzielenie ilości algebraicznych wielorakich kar. 36 II, O naywiększym spólnym dzielniku k. 267 I.

O wyciąganiu pierwiastku kwadratowego z ilości Alg. k. 282 IV, O wyciąganiu pierwiastku z innych potęg wyższych od stopnia drugiego k. 290.

O podnoszeniu ilości wielorakich do potęg, i o kombinacjach k. 318 VI, Działania z ilościami pierwiastkowymi i z ilościami mającymi wykładniki

kar. 355 VII, Przydatek do teorii postępów arytmetycznych k. 367 VIII, O postępach geometrycznych

kar. 379 IX, Przydatek do teorii Logarytmów kar. 388.

REJESTR

kana

ROZDZIAŁ X. *Obszerniejszy wykład teor.*
wzajemności *flopnia* pierwszego i drugiego.

1. Niektóre szczególniejsze wypadki w rozwiązywaniu równań *flopnia* pierwszego trafić się mogą. kar. 393 II. formuły ogólne na rozwiązywanie równań *flopnia* pierwszego kar. 410 III. Niektóre szczególniejsze wypadki w rozwiązywaniu równań *flopnia* drugiego trafić się mogące, kar. 421 IV. Równania o dwóch wyrazach kar. 429 V. Równania *flopni* wyższych nad drugi, które na wzajemności *flopnia* drugiego mogą być rozwiązane kar. 435 VI. Zagadnienia niewyznaczone *flopnia* pierwszego i drugiego 439



factully

450.-

1850 Nov 23

UP - Kraków BG



1050271986