

LIBRARY
PW
SP
CHAKOTY

788

C. A. LAISANT

Doktór nauk matematyczno-fizycznych.

Egzaminator w paryskiej Szkole Politechnicznej.

L. 490.

Nauczanie Początków Matematyki

(Initiation Mathématique)

KSIĄŻKA NAPISANA NIEZALEŻNIE OD PROGRAMÓW
SZKOLNYCH I POŚWIĘCONA PRZYJACIOŁOM DZIAŁY

Z 99 rysunkami w tekście.

Z upoważnienia Autora przetłumaczył z francuskiego

Z. CZUBALSKI

Słowem wstępnym opatrzył S. DICKSTEIN.



WARSZAWA

Skład główny w Księgarni Polskiej Warecka 14.

1908



34

788



UP - Kraków BG



1050154626

SPIS RZECZY.

	<i>Str.</i>
Słowo wstępne	1
Od tłumacza	3
Przedmowa	5
1. Kreski	9
2. Od jednego do dziesięciu	11
3. Pęczki i wiązki zapalek	13
4. Od jednego do stu	14
5. Tabliczka dodawania	16
6. Suma	18
7. Różnica	20
8. Tysiące i miliony	22
9. Różnokolorowe liczmany	25
10. Cyfry	27
11. Szereg patyczków	31
12. Linja prosta	31
13. Tworzenie różnic przy pomocy zapalek	33
14. Wkraczamy w dziedzinę algebry	34
15. Liczenie, mierzenie, stosunki	39
16. Tabliczka mnożenia	41
17. Iloczyn	43
18. Ciekawe rachunki	47
19. Liczby pierwsze	48
20. Iloraz	50
21. Podział ciastka na równe części. Ułamki.	53
22. Przechodzimy do geometrii	56
23. Pola wielokątów	63
24. Ośli most	67
25. Kilka łamigłówek; mieszanina matematyczna	69
26. Podział sześcianu na osiem części	71
27. Liczby trójkątne. Lot zórawi	73

Taką właśnie pracą jest dziełko niniejsze, napisane przez wybitnego uczonego i światłego pedagoga, który posiadał kunszt przemawiania do głów dziecięcych. W czasie swej długoletniej działalności pedagogicznej był C. A. Laisant energicznym i wymownym przeciwnikiem rutyny i skostniałych programów, stosowanych jakoby niewzruszony kanon nauczania. W wychowaniu i w nauczaniu początkowym zwalcza on ten przestarzały kierunek, stojący w poprzek żywemu, ciekawemu, rwącemu się ku poznaniu umysłowi dziecka. Książeczka niniejsza jest szczęśliwie pomyślanym wzorem, wskazującym nową a płodną drogę nauczania, wprowadzającą młodego wychowanka w świat pojęć matematycznych, zaciekawiającą go, pobudzającą jego samodzielność i otwierającą szerszy przed nim widnokrąg.

Metody w tej pracy podane gorąco polecić należy wychowawcom, rodzicom i nauczycielom i dlatego z przyjemnością witam przekład polski dziełka uczonego francuskiego, dokonany starannie przez p. Z. Czubalskiego. Dodaję jeszcze, że szanowny Autor, wyrażając zgodę swą tłumaczowi na ogłoszenie przekładu, uczynił to — jak się wyraża w liście do niżej podpisanego — z prawdziwym zadowoleniem, ze względu na wielką sympatję, jaką żywi dla naszego społeczeństwa.

S. Dickstein.

OD TŁUMACZA.

W książce prof. *Laisant* p. n. „Initiation mathématique“ znalazłem wiele oryginalnych poglądów na sprawę początkowego nauczania matematyki i niejedną cenną pod tym względem wskazówkę, postanowiłem przeto skorzystać z uprzejmiej mi przez autora udzielonego pozwolenia i zapoznać polskich czytelników z jego pracą. W mniemaniu o pożyteczności tego dziełka utwierdziło mnie też i Koło Matematyczno-Fizyczne, któremu miałem zaszczyt przedstawić niniejszy przekład na posiedzeniu w dn. 23 lutego r. b. (p. „Sprawozdania z posiedzeń Koła M. F.“, zeszyt 3 r. 1906/7).

Naogół trzymałem się wiernie oryginału, wprowadzając drobne zmiany tylko tam, gdzie tego wymagał wzgląd na polskiego wychowawcę, dla którego ten przekład jest przeznaczony, i na polskie dzieci. Dla tej też przyczyny grafik kolejowy „Paryż-Marsylja“ w oryginale (rozd. 48) zastąpiłem grafiką pociągów kurjerskich na kolei Warszawsko-Wiedeńskiej, oraz zamiast krzywych ciśnienia barometrycznego i temperatury, przytoczonych w oryginale (rozd. 50) za czasopismem „La Nature“ i odnoszących się do ostatniego tygodnia r. 1881, podałem szkice podobnych krzywych według udzielonych mi uprzejmie przez p. *Mereckiego* zapisów barografu i termografu Centralnej stacji Meteorologicznej przy Mu-

zeum Przemysłu i Handlu w Warszawie, za czas od 27 maja do 2 czerwca r. 1904. Nadto, w uwadze do rozdziału 64, w którym jest mowa o kwadratach magicznych, przytoczyłem z książki *Bachet de Méziriac* „Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres“ graficzny sposób tworzenia kwadratów magicznych z pierwszych 9 oraz z pierwszych 25 liczb, uważając, że może się to przyczynić do większego zainteresowania dzieci przedmiotem.

Warszawa, w grudniu r. 1907.

PRZEDMOWA.

W niniejszym dziełku rozwinąłem zasady, które wyłożyłem był przed kilku laty w odczycie, ogłoszonym w wydawnictwie: „Biblioteka filozofji współczesnej“ (Bibliothèque de Philosophie contemporaine) p. n.: „Wykształcenie oparte na naukach ścisłych“. (Education fondée sur la science). Ustąpiłem naleganiom przyjaciół, skłaniających mnie do tego kroku, w przekonaniu, że warto podjąć próbę rozwiązania przynajmniej tej części wielkiego zagadnienia wychowawczego, zwłaszcza wobec gorliwości, z jaką wielu stara się spaczyć umysły dziecięce. Wzywam rodziców, szczególniej matki i wychowawców do ulżenia doli dziatwy, albowiem można jej udzielić w wieku przedszkolnym (n. p. od 4 do 11 lat) dwadzieścia razy więcej wiadomości w zakresie matematyki, niż obecnie, bawiąc ją przytym zamiast torturować przedwczesną i nieumiejętną nauką.

Chociaż szereg następujących rozdziałów nie stanowi traktatu dydaktycznego, nie są one jednak rozrzucone bezładnie, lecz mogą być przewodnikiem w rękę sumiennego wychowawcy, który wciąż bada młodociany umysł, powierzony jego pieczy. Zależnie od rozwoju tego umysłu, można będzie posunąć się naprzód lub zatrzymać na pewnym przedmiocie, cofając się w razie potrzeby do rzeczy już poznanych; wystrzegać się w każdym razie należy zbyt szybkiego tempa, aby wiadomości poprzednio nabyte nie zatarły się w umyśle dziecięcym.

Korzystajcie z dość obfitego materiału, zawartego w tym dziełku, lecz nie trzymajcie się go niewolniczo. Przedewszystkim

zainteresujcie dziecko: niech się bawi, *niech się niczego nie uczy na pamięć*. Wtedy wasz przeciętnie uzdolniony wychowanec, mając lat 11, będzie więcej umiał i rozumiał z matematyki, niż znaczna część młodzieży, która ukończyła szkoły średnie, i, co ważniejsza, nabierze upodobania do przedmiotu i z przyjemnością rozpocznie naukę w tym kierunku.

Niech te zabawy matematyczne — nie należy ich nazywać lekcjami — nie przeciągają się zbyt długo, aby nie osłabła uwaga dziecka i nie wygasła jego ciekawość, gdyż w przeciwnym razie otrzymacie tylko szkodliwe wyniki.

Chciałbym, aby uczyniono podobne próby w zakresie fizyki i nauk przyrodniczych; sądzę nawet, że przysłoby to łatwiej. Może zjawiłyby się wtedy pokolenia, które oswojone w zaraniu swej umysłowości od kajdan, krępujących ich ojców, obdarzyłyby ludzkość wszystkimi skarbami bujnie rozwiniętej inteligencji.

Niniejsza książka nie ma nic wspólnego z t. zw. „Rozrywkami i zabawami matematycznymi“, którym poświęcono wiele wybornych dzieł, że wymienię tutaj wydane w języku francuskim lub przetłumaczone na francuski: *E. Lucas*: „*Récréations mathématiques*“ (w 4 tomach), tegoż autora: „*L'Arithmétique amusante*“, książkę p. *Rouse Ball*, tłumaczoną z angielskiego, oraz dzieło p. *Fourrey*, poświęcone przeważnie kwestjom arytmetycznym. W takich książkach, jak wskazuje sam tytuł, chodzi o zastosowanie znanych już czytelnikowi teorii matematycznych do różnych gier, zagadek, kombinacji i t. d., przyczym nieraz do zrozumienia udzielonych przez autora wyjaśnień potrzebne jest pewne wykształcenie matematyczne.

W danym razie postępujemy odwrotnie, posługując się zabawą jako środkiem pedagogicznym, który pozwala obudzić ciekawość dziecka i oswoić je w ten sposób z pierwszymi i najważniejszymi pojęciami matematycznymi, bez obarczania jego umysłu nadmiernymi wysiłkami. W poruszanych przytym rozmaitych kwestjach, pomimo ich pozornej chaotyczności, zawiera się szereg powiązanych z sobą pojęć, które, jako pożyteczne, wpajamy celowo w umysł dziecięcy.

W następstwie, podczas nauki szkolnej, młodzież ciekawa, przypominając sobie gry dzieciinne, będzie mogła z pożytkiem czytać książki w rodzaju „rozrywek i zabaw matematycznych“, które wtedy nasuną jej nowe myśli i spotęgują jej zdolność rozumowania. Gdyby znaleźli się tacy, którzyby twierdzili, że szkoda czasu na taką lekturę, możnaby im wskazać największych uczonych, nie pogardzających podobnemi kwestjami; jeżeli zaś czasami nauka matematyki pobudza nas do śmiechu, należy jej to poczytać za zasługę, gdyż, jak powiedział Rabelais: „Śmiech jest właściwością człowieka“. Gdyby jednak i te argumenty nie wystarczyły augurom, pociesmy się myślą, że ludzie, dla których wyraz „nauczać“ stał się synonimem wyrazów „nudzić“ lub nawet „torturować“, wyrządzają prawdziwą krzywdę społeczeństwu i czas już wielki, aby skończyło się ich opłakane panowanie.

Pisząc to dziełko, miałem na myśli głównie Francję, lecz dzieje się źle nietylko w naszym kraju. Wszędzie, chcąc ulżyć dzieciom, *musimy zerwać z programami szkolnemi*, kierując się zaś miłością dziecka, znajdziemy się niechybnie w kolizji z władzami szkolnemi, które jak gdyby wzięły sobie za cel tamowanie rozwoju umysłowego tego dziecka. Jeszcze jedna, prawie zbyt uczona, uwaga: książka niniejsza w ręku dziecka byłaby bezwartościową, a nawet szkodliwą, gdyż jest przeznaczona wyłącznie dla wychowawcy. Jednak uczeń, który już rozpoczął naukę systematyczną, może przeczytać z pożytkiem to dziełko, znajdując w nim jak gdyby rzut oka wstecz na pierwsze stadja rozwoju swego młodocianego umysłu.

1. Kreski.

Należy zawczasu rozwijać w dziecku umiejętność rysunku, już w tym wieku, kiedy budzi się jego działalność umysłowa, i zanim jeszcze przystąpi do nauki czytania i pisania.

Dajmy mu do rąk, w tym celu, tabliczkę szyfrową lub arkusz papieru kratkowanego, umieścimy w jego paluszkach z początku ołówek, następnie, kiedy nabierze pewnej zręczności, pióro i zachęćmy je do rysowania kresek. Nie żądamy jednak na razie od dziecka klasycznych kresek pochyłych, które stanowią przygotowanie do pisma pochyłego, lecz poprzestańmy na krótkich odcinkach, rysowanych w równych odstępach wzdłuż kratek.

Rysując najprzód zgóry na dół, następnie po upływie pewnego czasu z lewej ku prawej, dziecko utworzy w ten sposób *kreski pionowe* (fig. 1), oraz *kreski poziome* (fig. 2).

Fig. 1. — Kreski pionowe.

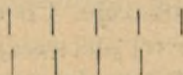
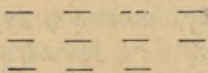


Fig. 2. — Kreski poziome.



Stopniowo nauczymy dziecko prowadzić dłuższe i krótsze kreski, rysować je wewnątrz kratek, wreszcie pochyło we wszystkich możliwych kierunkach. Następnie proponujemy mu łączyć dłuższe i krótsze kreski i tworzyć w ten sposób różne figury, o czym zresztą pomówimy później.

Z czasem zachęcimy małego rysownika do kreślenia najprostszych narzędziami (linjalem, trójkątem i cyrklem) lub

od ręki figur, składających się z linii krzywych, bacząc, aby te ćwiczenia, rozwijające zręczność ręki i miarę w oku, nie były zaniedbywane w ciągu całego okresu wychowawczego.

Chociaż o tych ćwiczeniach rysunkowych mówimy tutaj tylko tyle, ile potrzeba w związku z następującymi wskazówkami, musimy jednak gorąco zalecić wychowawcy, aby po-przestał na wskazaniu ich dziecku, wystrzegając się narzucania, gdyż przestawszy być zabawą, napewno chybią celu. Pozwólcie dziecku baw się na tabliczce, psuć arkusze papieru, udzielajcie mu tylko wskazówek, których ono napewno od was zażąda, lecz zauważywszy, że ma tego dosyć, nie wzbra-niajcie mu zająć się czym innym. Tak postępując, rozwinięcie w dziecku zdolność inicjatywy, utrzymanie w napięciu jego naturalną ciekawość, wreszcie zapobiegnięcie zmęczeniu i nudzie.

Możnaby napisać całą książkę o pierwszej nauce rysunku, o której zaledwie kilka słów powiedzieć mogłem; tyleż dałoby się napisać o późniejszej nauce pisania i czytania, lecz pomi-am te przedmioty ze względu na zakres niniejszego dziełka. Nie mogę się jednak powstrzymać od przypomnienia naczelnej zasady nauczania w tym okresie wychowawczym: trzeba nauczaniu wciąż nadawać pozór zabawy, uszanować swobodę dziecka, utrzymywać je wreszcie w złudzeniu (jeżeli to można nazwać złudzeniem), że to ono właśnie wykrywa prawdy, które wychowawca mu pokazuje. Co się tyczy wieku, w którym można przystąpić do tej pierwszej nauki matematyki, rozpoczynającej się od nauki rysunku i prowadzonej równolegle z nią w dalszym ciągu, to jakkolwiek niepodobna sformułować bezwzględnej zasady, można przyjąć, że, średnio biorąc, dziecko już w wieku $3\frac{1}{2}$ — 4 lat zdradza pewne upodobanie do ołówka, do lat zaś 10 — 11 można je zapoznać, moim zdaniem, z tym wszystkim, co stanowi przedmiot niniejszej książki, jeżeli tylko organizacja umysłowa dziecka jest normalna. Może niejedno dziecko po upływie kilku lat weźmie do rąk z przyjemnością tę książkę, która obecnie nie dla niego jest przeznaczona, a w której wtedy jego umysł, udoskonalony przez późniejszą naukę i uzdolniony do prawidłowego rozumowania, znajdzie podniecie do pożytecznych rozmyślań.

Na zakończenie powyższych uwag ogólnych, do których nie chciałbym już powracać w następstwie, muszę zwrócić uwagę rodzin i wychowawców, którzy zechcą czytać niniejszą książkę, na największy szkopuł w tym okresie wychowania dzieci: jestto nadmiar ćwiczeń pamięciowych, tak pospolity w naszej praktyce wychowawczej, a jednak tak szkodliwy. Ucząc wyrazów, zmuszając do ich powtarzania, zwichniemy umysły dzieci, zabijemy ich wrodzone zdolności i wychowamy pokolenie istot, pozbawionych inicjatywy, ciekawości i woli, słabych i przygnębionych, naszpikowanych niezrozumiałymi dla nich wzorami.

Jeżeli kochacie swoje dzieci, jeżeli kochacie dzieci, których wychowanie złożono w wasze ręce, jeżeli chcecie, aby wyrosły na ludzi silnych i dobrych, trzymajcie się zasad, głoszonych przez te wielkie umysły i serca, których imiona są La Chalotais¹⁾, Froebel²⁾, Pestalozzi³⁾.

Gdyby ziemia była zaludniona przez istoty rozumne, ci dobroczyńcy ludzkości mieliby pomniki we wszystkich krajach, imiona zaś ich wyrytoby złotymi głoskami we wszystkich szkołach.

2. Od jednego do dziesięciu.

Kiedy dziecko nabierze pewnej wprawy i szybkości w stawianiu kresek, może przystąpić do ich liczenia, wymawiając kolejno, w miarę pisania kresek, wyrazy: *jeden, dwa, trzy, cztery, pięć, sześć, siedem, osiem, dziewięć, dziesięć*.

¹⁾ *La Chalotais*, urzędnik francuski, urodzony w Rennes (1701 — 1785), autor „Zarysu wychowania narodowego“ (*Essai d'éducation nationale*).

²⁾ *Froebel*, pedagog niemiecki, urodzony w Oberweissbach (1782 — 1852), założyciel „ogródków dziecięcych“.

³⁾ *Pestalozzi*, nauczyciel szwajcarski, urodził się w Zurychu (1746 — 1827); jego metody użył Fichte jako środka do umysłowego podniesienia Niemiec.

Łącząc następnie kreski w grupy, oddzielone większymi odstępami, utworzy figury, którym nada nazwy:

Fig. 3.

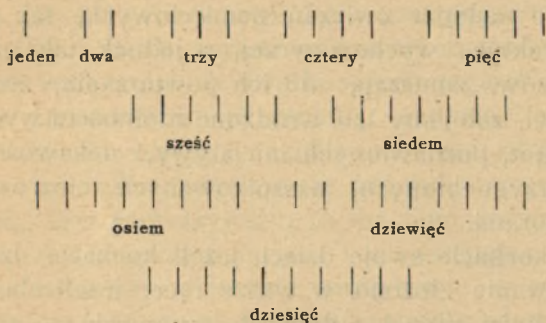
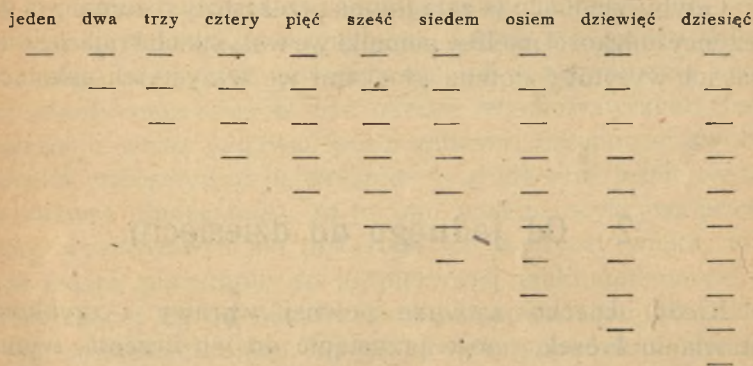


Fig. 4.



jedna, dwie,... dziesięć kresek pionowych (fig. 3); jedna, dwie,... dziesięć kresek poziomych (fig. 4). Jednocześnie tworzyć będzie podobne grupy z ziaren grochu, zboża, z krążków, wogóle z jakichkolwiek przedmiotów, mówiąc przytym:

jedno, dwa,... dziesięć ziaren grochu, zboża i t. d. Kiedy dziecko zacznie liczyć w podobny sposób ludzi, psy, owce i t. d. i powtarzając ustawicznie te ćwiczenia, oswoi się z nimi należycie, można mu powiedzieć, że używane przytym wyrażenia, jakoto: trzy kreski, sześć ziaren zboża, osiem owiec i t. d. są *licz-*

bami i w dodatku *liczbami mianowanemi*. Pokazawszy dziecku grupę, złożoną z pięciu kresek, inną, zawierającą pięć ziaren grochu, jeszcze inną, składającą się z pięciu krążków, wywoławszy w jego wyobraźni grupy pięciu psów, drzew i t. p., zwróćmy jego uwagę na powtarzający się w tych przykładach wyraz *pięć*. Powiemy mu przeto, że ten wyraz, użyty bez dopełnienia, jest *liczbą niemianowaną*; że można go używać do oznaczenia jakiegokolwiek innej grupy pięciu przedmiotów: koni, krzeseł, domów i t. d.

W ten sposób niezadługo malec nauczy się biegle liczyć przedmioty od jednego do dziesięciu. Dobrze jest również zawczasu przyzwyczajać dziecko do tego, aby rzuciwszy okiem na pokazaną mu grupę przedmiotów, n. p. ziaren grochu lub innych liczmanów, potrafiło od razu wymienić ich liczbę, nie licząc po jednym. W tym celu rozpoczynajmy od małych liczb, przechodząc stopniowo do większych.

3. Pęczki i wiązki zapalek.

Oprócz różnych przedmiotów, których używaliśmy dotąd i których możnaby używać, aby ułatwić dziecku wyrobienie sobie pojęcia o liczbie mianowanej, szczególnież zalecamy i uważamy prawie za niezbędne drewnienka równej długości, podobne do zwykłych zapalek szwedzkich, od których różnią się tylko brakiem t. zw. łepka. Podobne drewnienka, które stale będziemy nazywali zapałkami (wprawdzie niezapalającemi się), można uważać za modele kresek, stawianych na tabliczce lub w kajecie. Mając przed sobą garść takich zapalek, dziecko, które umie już wprawnie liczyć do dziesięciu, odłoży na bok dziesięć sztuk po kolei, następnie złoży je równo i, obwiązawszy n. p. używaną w sklepach opaską kauczukową, utworzy z nich pęczek.

Powiemy mu wtedy, że ten *pęczek*, składający się z dziesięciu zapalek, może być nazwany *dziesiątką* zapalek.

Następnie zachęcimy dziecko, aby przygotowało więcej takich pęczków, przeliczymy każdy i, znalazzy błąd, polecimy go naprawić.

Wtedy pokazując dwa pęczki, powiemy mu, że liczba zapalek w tych połączonych pęczkach (którą unaocznimy rozwiązując je i związując napowrót) oznacza się wyrazem *dwadzieścia*, czyli: *jeden* pęczek to *dziesięć* zapalek, *dwa* pęczki to *dwadzieścia* zapalek.

Postępując tak samo z trzema, czterema... dziewięcioma pęczkami, wyjaśnimy, że:

trzy	pęczki	to	trzydzieści	zapalek,
cztery	„	„	czterdzieści	„
pięć	„	„	pięćdziesiąt	„
sześć	„	„	sześćdziesiąt	„
siedem	„	„	siedemdziesiąt	„
osiem	„	„	osiemdziesiąt	„
dziewięć	„	„	dziewięćdziesiąt	„

Kiedy dziecko oswoi się należycie z powyższymi liczbami i ich nazwami, weźmiemy dziesięć pęczków i połączymy je w jedną całość przy pomocy nieco szerszej opaski kauczukowej, tworząc w ten sposób *wiązkę*. Wyjaśnimy wtedy, że wiązka jestto *setka* zapalek, że liczba zapalek, zawarta w wiązce, oznacza się wyrazem *sto*, dziecko zaś przekona się, że *dziesięć dziesiątek* stanowi *setkę*, ponieważ wiązka składa się z dziesięciu pęczków.

4. Od jednego do stu.

Wziąwszy garść zapalek, w której няма stu sztuk, proponujemy dziecku, aby je przeliczyło. Będzie ono w tym celu tworzyło pęczki po dziesięć zapalek, póki nie pozostanie mu ich zamało, aby utworzyć jeden pęczek. Niechaj wtedy umieści przed sobą z lewej strony utworzone pęczki, z pra-

wej — pozostałe zapalki i niech wymieni liczbę tych i tamtych, najprzód każdą z osobna, później obiedwie razem. W ten sposób dziecko wypowie liczbę wszystkich zapalek, które mu dano do przeliczenia.

Uformowawszy, na przykład, *trzy* pęczki i mając resztę złożoną z *ośmiu* zapalek, mały rachmistrz powie, patrząc nalewo: „trzydzieści“, patrząc zaś naprawo: „osiem“, następnie połączy obydwie wyrazy i powie: „trzydzieści osiem“.

Przerobiwszy dużo podobnych ćwiczeń, rozwiążemy wiązkę i składające je pęczki i przystąpimy do liczenia zapalek, kolejno po jednej. Liczymy najprzód: jeden, dwa trzy... do dziesięciu. Utworzony w ten sposób pęczek, nawet nie wiążąc go ponownie, przesuwamy nalewo i liczymy dalej, mówiąc:

jedenaste, dwanaście, trzynaście, czternaście, piętnaście, szesnaście, siedemnaście, osiemnaście, dziewiętnaście,

poczynam następną zapalką kompletujemy drugi pęczek, który umieszczamy nalewo obok pierwszego, mówiąc *dwadzieścia*. Tak liczymy aż do dziewiątego pęczka, potem do dziewiątej z pozostałych zapalek, przy której mówimy *dziewięćdziesiąt dziewięć*, wreszcie bierzemy do rąk ostatnią zapalkę, kompletujemy dziesiąty pęczek i umieszczamy go nalewo, obok pierwszych dziewięciu, wymawiając wyraz: *sto*.

Możemy teraz zwrócić uwagę młodocianego ucznia, że nauczyliśmy go *liczenia* w zakresie od jednego do stu; możemy mu nawet powiedzieć, że on sam, mówiąc: siedemdziesiąt trzy zapalek, stosuje się do zasad *liczenia ustnego*, układając zaś siedem pęczków po lewej stronie i trzy zapalki po prawej, postępuje według zasad *liczenia symbolicznego*. Małec tymbardziej będzie się czuł dumnym z tego zasobu wiedzy, ile że nie umie jeszcze napisać ani jednej litery, ani jednej cyfry, nie umie nawet sylabizować: b, a, ba. Ale umie on stawiać kreski, posiada oczy, któremi patrzy, i zaczyna rozumieć to, co widzi i co robi. Nauczyliśmy więc dziecko liczyć zapalki od jednej do stu. Przyzwyczajmy je do liczenia w podobny sposób innych jakichkolwiek przedmiotów, jako też przedmiotów niewidzianych, lecz tylko wyobraża-

nych, a będą to początki *rachunku pamięciowego*, tak ważnego w praktyce, który z wszelką łatwością można uprawiać już od najmłodszych lat, poczynając od rzeczy najprostszych i przechodząc stopniowo do trudniejszych.

Można jednak iść dalej, przyzwyczajając dziecko, aby począwszy od jednego liczyło co dwa: jeden, trzy.... dziewięćdziesiąt dziewięć, i wytłumaczyć mu, że otrzyma w ten sposób *liczby nieparzyste*.

Poczynając od dwóch i licząc również co dwa:
dwa, cztery, sześć,... sto,
otrzyma *liczby parzyste*.

Niech się też wprawia w liczenie co trzy i co cztery, rozpoczynając szereg liczb napoczątek od jednego, następnie od jakiegokolwiek innej liczby, przyczym wszystkie te ćwiczenia należy wykonywać początkowo na przedmiotach (najlepiej na zapalkach), później zaś pamięciowo.

Jednym słowem całą tę manipulację z liczbami od jednego do stu można urozmaicać do nieskończoności, przedłużając ją dopóty, dopóki będzie zajmowała dziecko, dopóki go nie znudzi. Lecz i później, chociaż dziecko posunie się trochę w swych wiadomościach matematycznych, dobrze jest od czasu do czasu powracać do niej.

5. Tabliczka dodawania.

Ułóżmy na stole w szeregu, od lewej ręki ku prawej, jedną, dwie,... dziewięć zapalek, czyli dziewięć grup zapalek w pewnych od siebie odstępach. Pod pierwszą zapalką tego szeregu umieścimy dwie, pod niemi trzy i t. d. aż do dziesięciu, tworząc w ten sposób pierwszą kolumnę, złożoną z dziesięciu grup zapalek. W podobny sposób utworzymy drugą kolumnę, rozpoczynając się od dwóch i kończącą się — na jedenastu zapalkach; postępując tak dalej, otrzymamy dziewięć

kolumn, przyczym ostatnia grupa dziewiętej kolumny będzie złożona z osiemnastu zapalek.

Skorzystajmy teraz z nabytej już wprawy rysunkowej i bieглиości w stawianiu kresek, wprowadziwszy jednak uprzednio pewne uproszczenia. Ponieważ, mianowicie, wyrysowanie dziesięciu kresek, wyobrażających pęczek zapalek, jest rzeczą nudną, umówimy się, aby za obraz tego pęczka uważać dwie grubsze kreski —|— połączone jedną poprzeczną, która nam będzie przypominała kauczukową opaskę pęczka. Uczymy się więc pisać liczby przy pomocy kresek, a odtworzywszy w ten sposób figurę, ułożoną poprzednio z zapalek, otrzymamy część fig. 5.

Aby ją dopełnić, stawiamy jedną, dwie... dziewięć kresek nalewo od dwóch, trzech,... dziesięciu, umieszczonych w pierwszej kolumnie, poczym oddzielamy tę nową kolumnę kreską pionową od pozostałych, jako też pierwszy wiersz kreską poziomą od pozostałych wierszy.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX	XX	XXI	XXII	XXIII	XXIV	XXV	XXVI	XXVII	XXVIII	XXIX	XXX																																																																																									
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX	XX	XXI	XXII	XXIII	XXIV	XXV	XXVI	XXVII	XXVIII	XXIX	XXX	XXXI	XXXII	XXXIII	XXXIV	XXXV	XXXVI	XXXVII	XXXVIII	XXXIX	XXXX	XXXXI	XXXXII	XXXXIII	XXXXIV	XXXXV	XXXXVI	XXXXVII	XXXXVIII	XXXXIX	XXXXX	XXXXXI	XXXXXII	XXXXXIII	XXXXXIV	XXXXXV	XXXXXVI	XXXXXVII	XXXXXVIII	XXXXXIX	XXXXXX	XXXXXXI	XXXXXXII	XXXXXXIII	XXXXXXIV	XXXXXXV	XXXXXXVI	XXXXXXVII	XXXXXXVIII	XXXXXXIX	XXXXXXX	XXXXXXXI	XXXXXXXII	XXXXXXXIII	XXXXXXXIV	XXXXXXXV	XXXXXXXVI	XXXXXXXVII	XXXXXXXVIII	XXXXXXXIX	XXXXXXXX	XXXXXXXXI	XXXXXXXXII	XXXXXXXXIII	XXXXXXXXIV	XXXXXXXXV	XXXXXXXXVI	XXXXXXXXVII	XXXXXXXXVIII	XXXXXXXXIX	XXXXXXXXX	XXXXXXXXXI	XXXXXXXXXII	XXXXXXXXXIII	XXXXXXXXXIV	XXXXXXXXXV	XXXXXXXXXVI	XXXXXXXXXVII	XXXXXXXXXVIII	XXXXXXXXXIX	XXXXXXXXXX	XXXXXXXXXXI	XXXXXXXXXXII	XXXXXXXXXXIII	XXXXXXXXXXIV	XXXXXXXXXXV	XXXXXXXXXXVI	XXXXXXXXXXVII	XXXXXXXXXXVIII	XXXXXXXXXXIX	XXXXXXXXXXX	XXXXXXXXXXXI	XXXXXXXXXXXII	XXXXXXXXXXXIII	XXXXXXXXXXXIV	XXXXXXXXXXXV	XXXXXXXXXXXVI	XXXXXXXXXXXVII	XXXXXXXXXXXVIII	XXXXXXXXXXXIX	XXXXXXXXXXX
II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX	XX	XXI	XXII	XXIII	XXIV	XXV	XXVI	XXVII	XXVIII	XXIX	XXX	XXXI	XXXII	XXXIII	XXXIV	XXXV	XXXVI	XXXVII	XXXVIII	XXXIX	XXXX	XXXXI	XXXXII	XXXXIII	XXXXIV	XXXXV	XXXXVI	XXXXVII	XXXXVIII	XXXXIX	XXXXX	XXXXXI	XXXXXII	XXXXXIII	XXXXXIV	XXXXXV	XXXXXVI	XXXXXVII	XXXXXVIII	XXXXXIX	XXXXXX	XXXXXXI	XXXXXXII	XXXXXXIII	XXXXXXIV	XXXXXXV	XXXXXXVI	XXXXXXVII	XXXXXXVIII	XXXXXXIX	XXXXXXX	XXXXXXXI	XXXXXXXII	XXXXXXXIII	XXXXXXXIV	XXXXXXXV	XXXXXXXVI	XXXXXXXVII	XXXXXXXVIII	XXXXXXXIX	XXXXXXXX	XXXXXXXXI	XXXXXXXXII	XXXXXXXXIII	XXXXXXXXIV	XXXXXXXXV	XXXXXXXXVI	XXXXXXXXVII	XXXXXXXXVIII	XXXXXXXXIX	XXXXXXXXX	XXXXXXXXXI	XXXXXXXXXII	XXXXXXXXXIII	XXXXXXXXXIV	XXXXXXXXXV	XXXXXXXXXVI	XXXXXXXXXVII	XXXXXXXXXVIII	XXXXXXXXXIX	XXXXXXXXXX	XXXXXXXXXXI	XXXXXXXXXXII	XXXXXXXXXXIII	XXXXXXXXXXIV	XXXXXXXXXXV	XXXXXXXXXXVI	XXXXXXXXXXVII	XXXXXXXXXXVIII	XXXXXXXXXXIX	XXXXXXXXXXX	XXXXXXXXXXXI	XXXXXXXXXXXII	XXXXXXXXXXXIII	XXXXXXXXXXXIV	XXXXXXXXXXXV	XXXXXXXXXXXVI	XXXXXXXXXXXVII	XXXXXXXXXXXVIII	XXXXXXXXXXXIX	XXXXXXXXXXX	
III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX	XX	XXI	XXII	XXIII	XXIV	XXV	XXVI	XXVII	XXVIII	XXIX	XXX	XXXI	XXXII	XXXIII	XXXIV	XXXV	XXXVI	XXXVII	XXXVIII	XXXIX	XXXX	XXXXI	XXXXII	XXXXIII	XXXXIV	XXXXV	XXXXVI	XXXXVII	XXXXVIII	XXXXIX	XXXXX	XXXXXI	XXXXXII	XXXXXIII	XXXXXIV	XXXXXV	XXXXXVI	XXXXXVII	XXXXXVIII	XXXXXIX	XXXXXX	XXXXXXI	XXXXXXII	XXXXXXIII	XXXXXXIV	XXXXXXV	XXXXXXVI	XXXXXXVII	XXXXXXVIII	XXXXXXIX	XXXXXXX	XXXXXXXI	XXXXXXXII	XXXXXXXIII	XXXXXXXIV	XXXXXXXV	XXXXXXXVI	XXXXXXXVII	XXXXXXXVIII	XXXXXXXIX	XXXXXXXX	XXXXXXXXI	XXXXXXXXII	XXXXXXXXIII	XXXXXXXXIV	XXXXXXXXV	XXXXXXXXVI	XXXXXXXXVII	XXXXXXXXVIII	XXXXXXXXIX	XXXXXXXXX	XXXXXXXXXI	XXXXXXXXXII	XXXXXXXXXIII	XXXXXXXXXIV	XXXXXXXXXV	XXXXXXXXXVI	XXXXXXXXXVII	XXXXXXXXXVIII	XXXXXXXXXIX	XXXXXXXXXX	XXXXXXXXXXI	XXXXXXXXXXII	XXXXXXXXXXIII	XXXXXXXXXXIV	XXXXXXXXXXV	XXXXXXXXXXVI	XXXXXXXXXXVII	XXXXXXXXXXVIII	XXXXXXXXXXIX	XXXXXXXXXXX	XXXXXXXXXXXI	XXXXXXXXXXXII	XXXXXXXXXXXIII	XXXXXXXXXXXIV	XXXXXXXXXXXV	XXXXXXXXXXXVI	XXXXXXXXXXXVII	XXXXXXXXXXXVIII	XXXXXXXXXXXIX	XXXXXXXXXXX		
IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX	XX	XXI	XXII	XXIII	XXIV	XXV	XXVI	XXVII	XXVIII	XXIX	XXX	XXXI	XXXII	XXXIII	XXXIV	XXXV	XXXVI	XXXVII	XXXVIII	XXXIX	XXXX	XXXXI	XXXXII	XXXXIII	XXXXIV	XXXXV	XXXXVI	XXXXVII	XXXXVIII	XXXXIX	XXXXX	XXXXXI	XXXXXII	XXXXXIII	XXXXXIV	XXXXXV	XXXXXVI	XXXXXVII	XXXXXVIII	XXXXXIX	XXXXXX	XXXXXXI	XXXXXXII	XXXXXXIII	XXXXXXIV	XXXXXXV	XXXXXXVI	XXXXXXVII	XXXXXXVIII	XXXXXXIX	XXXXXXX	XXXXXXXI	XXXXXXXII	XXXXXXXIII	XXXXXXXIV	XXXXXXXV	XXXXXXXVI	XXXXXXXVII	XXXXXXXVIII	XXXXXXXIX	XXXXXXXX	XXXXXXXXI	XXXXXXXXII	XXXXXXXXIII	XXXXXXXXIV	XXXXXXXXV	XXXXXXXXVI	XXXXXXXXVII	XXXXXXXXVIII	XXXXXXXXIX	XXXXXXXXX	XXXXXXXXXI	XXXXXXXXXII	XXXXXXXXXIII	XXXXXXXXXIV	XXXXXXXXXV	XXXXXXXXXVI	XXXXXXXXXVII	XXXXXXXXXVIII	XXXXXXXXXIX	XXXXXXXXXX	XXXXXXXXXXI	XXXXXXXXXXII	XXXXXXXXXXIII	XXXXXXXXXXIV	XXXXXXXXXXV	XXXXXXXXXXVI	XXXXXXXXXXVII	XXXXXXXXXXVIII	XXXXXXXXXXIX	XXXXXXXXXXX	XXXXXXXXXXXI	XXXXXXXXXXXII	XXXXXXXXXXXIII	XXXXXXXXXXXIV	XXXXXXXXXXXV	XXXXXXXXXXXVI	XXXXXXXXXXXVII	XXXXXXXXXXXVIII	XXXXXXXXXXXIX	XXXXXXXXXXX			
V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX	XX	XXI	XXII	XXIII	XXIV	XXV	XXVI	XXVII	XXVIII	XXIX	XXX	XXXI	XXXII	XXXIII	XXXIV	XXXV	XXXVI	XXXVII	XXXVIII	XXXIX	XXXX	XXXXI	XXXXII	XXXXIII	XXXXIV	XXXXV	XXXXVI	XXXXVII	XXXXVIII	XXXXIX	XXXXX	XXXXXI	XXXXXII	XXXXXIII	XXXXXIV	XXXXXV	XXXXXVI	XXXXXVII	XXXXXVIII	XXXXXIX	XXXXXX	XXXXXXI	XXXXXXII	XXXXXXIII	XXXXXXIV	XXXXXXV	XXXXXXVI	XXXXXXVII	XXXXXXVIII	XXXXXXIX	XXXXXXX	XXXXXXXI	XXXXXXXII	XXXXXXXIII	XXXXXXXIV	XXXXXXXV	XXXXXXXVI	XXXXXXXVII	XXXXXXXVIII	XXXXXXXIX	XXXXXXXX	XXXXXXXXI	XXXXXXXXII	XXXXXXXXIII	XXXXXXXXIV	XXXXXXXXV	XXXXXXXXVI	XXXXXXXXVII	XXXXXXXXVIII	XXXXXXXXIX	XXXXXXXXX	XXXXXXXXXI	XXXXXXXXXII	XXXXXXXXXIII	XXXXXXXXXIV	XXXXXXXXXV	XXXXXXXXXVI	XXXXXXXXXVII	XXXXXXXXXVIII	XXXXXXXXXIX	XXXXXXXXXX	XXXXXXXXXXI	XXXXXXXXXXII	XXXXXXXXXXIII	XXXXXXXXXXIV	XXXXXXXXXXV	XXXXXXXXXXVI	XXXXXXXXXXVII	XXXXXXXXXXVIII	XXXXXXXXXXIX	XXXXXXXXXXX	XXXXXXXXXXXI	XXXXXXXXXXXII	XXXXXXXXXXXIII	XXXXXXXXXXXIV	XXXXXXXXXXXV	XXXXXXXXXXXVI	XXXXXXXXXXXVII	XXXXXXXXXXXVIII	XXXXXXXXXXXIX	XXXXXXXXXXX				
VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX	XX	XXI	XXII	XXIII	XXIV	XXV	XXVI	XXVII	XXVIII	XXIX	XXX	XXXI	XXXII	XXXIII	XXXIV	XXXV	XXXVI	XXXVII	XXXVIII	XXXIX	XXXX	XXXXI	XXXXII	XXXXIII	XXXXIV	XXXXV	XXXXVI	XXXXVII	XXXXVIII	XXXXIX	XXXXX	XXXXXI	XXXXXII	XXXXXIII	XXXXXIV	XXXXXV	XXXXXVI	XXXXXVII	XXXXXVIII	XXXXXIX	XXXXXX	XXXXXXI	XXXXXXII	XXXXXXIII	XXXXXXIV	XXXXXXV	XXXXXXVI	XXXXXXVII	XXXXXXVIII	XXXXXXIX	XXXXXXX	XXXXXXXI	XXXXXXXII	XXXXXXXIII	XXXXXXXIV	XXXXXXXV	XXXXXXXVI	XXXXXXXVII	XXXXXXXVIII	XXXXXXXIX	XXXXXXXX	XXXXXXXXI	XXXXXXXXII	XXXXXXXXIII	XXXXXXXXIV	XXXXXXXXV	XXXXXXXXVI	XXXXXXXXVII	XXXXXXXXVIII	XXXXXXXXIX	XXXXXXXXX	XXXXXXXXXI	XXXXXXXXXII	XXXXXXXXXIII	XXXXXXXXXIV	XXXXXXXXXV	XXXXXXXXXVI	XXXXXXXXXVII	XXXXXXXXXVIII	XXXXXXXXXIX	XXXXXXXXXX	XXXXXXXXXXI	XXXXXXXXXXII	XXXXXXXXXXIII	XXXXXXXXXXIV	XXXXXXXXXXV	XXXXXXXXXXVI	XXXXXXXXXXVII	XXXXXXXXXXVIII	XXXXXXXXXXIX	XXXXXXXXXXX	XXXXXXXXXXXI	XXXXXXXXXXXII	XXXXXXXXXXXIII	XXXXXXXXXXXIV	XXXXXXXXXXXV	XXXXXXXXXXXVI	XXXXXXXXXXXVII	XXXXXXXXXXXVIII	XXXXXXXXXXXIX	XXXXXXXXXXX					
VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX	XX	XXI	XXII	XXIII	XXIV	XXV	XXVI	XXVII	XXVIII	XXIX	XXX	XXXI	XXXII	XXXIII	XXXIV	XXXV	XXXVI	XXXVII	XXXVIII	XXXIX	XXXX	XXXXI	XXXXII	XXXXIII	XXXXIV	XXXXV	XXXXVI	XXXXVII	XXXXVIII	XXXXIX	XXXXX	XXXXXI	XXXXXII	XXXXXIII	XXXXXIV	XXXXXV	XXXXXVI	XXXXXVII	XXXXXVIII	XXXXXIX	XXXXXX	XXXXXXI	XXXXXXII	XXXXXXIII	XXXXXXIV	XXXXXXV	XXXXXXVI	XXXXXXVII	XXXXXXVIII	XXXXXXIX	XXXXXXX	XXXXXXXI	XXXXXXXII	XXXXXXXIII	XXXXXXXIV	XXXXXXXV	XXXXXXXVI	XXXXXXXVII	XXXXXXXVIII	XXXXXXXIX	XXXXXXXX	XXXXXXXXI	XXXXXXXXII	XXXXXXXXIII	XXXXXXXXIV	XXXXXXXXV	XXXXXXXXVI	XXXXXXXXVII	XXXXXXXXVIII	XXXXXXXXIX	XXXXXXXXX	XXXXXXXXXI	XXXXXXXXXII	XXXXXXXXXIII	XXXXXXXXXIV	XXXXXXXXXV	XXXXXXXXXVI	XXXXXXXXXVII	XXXXXXXXXVIII	XXXXXXXXXIX	XXXXXXXXXX	XXXXXXXXXXI	XXXXXXXXXXII	XXXXXXXXXXIII	XXXXXXXXXXIV	XXXXXXXXXXV	XXXXXXXXXXVI	XXXXXXXXXXVII	XXXXXXXXXXVIII	XXXXXXXXXXIX	XXXXXXXXXXX	XXXXXXXXXXXI	XXXXXXXXXXXII	XXXXXXXXXXXIII	XXXXXXXXXXXIV	XXXXXXXXXXXV	XXXXXXXXXXXVI	XXXXXXXXXXXVII	XXXXXXXXXXXVIII	XXXXXXXXXXXIX	XXXXXXXXXXX						
VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX	XX	XXI	XXII	XXIII	XXIV	XXV	XXVI	XXVII	XXVIII	XXIX	XXX	XXXI	XXXII	XXXIII	XXXIV	XXXV	XXXVI	XXXVII	XXXVIII	XXXIX	XXXX	XXXXI	XXXXII	XXXXIII	XXXXIV	XXXXV	XXXXVI	XXXXVII	XXXXVIII	XXXXIX	XXXXX	XXXXXI	XXXXXII	XXXXXIII	XXXXXIV	XXXXXV	XXXXXVI	XXXXXVII	XXXXXVIII	XXXXXIX	XXXXXX	XXXXXXI	XXXXXXII	XXXXXXIII	XXXXXXIV	XXXXXXV	XXXXXXVI	XXXXXXVII	XXXXXXVIII	XXXXXXIX	XXXXXXX	XXXXXXXI	XXXXXXXII	XXXXXXXIII	XXXXXXXIV	XXXXXXXV	XXXXXXXVI	XXXXXXXVII	XXXXXXXVIII	XXXXXXXIX	XXXXXXXX	XXXXXXXXI	XXXXXXXXII	XXXXXXXXIII	XXXXXXXXIV	XXXXXXXXV	XXXXXXXXVI	XXXXXXXXVII	XXXXXXXXVIII	XXXXXXXXIX	XXXXXXXXX	XXXXXXXXXI	XXXXXXXXXII	XXXXXXXXXIII	XXXXXXXXXIV	XXXXXXXXXV	XXXXXXXXXVI	XXXXXXXXXVII	XXXXXXXXXVIII	XXXXXXXXXIX	XXXXXXXXXX	XXXXXXXXXXI	XXXXXXXXXXII	XXXXXXXXXXIII	XXXXXXXXXXIV	XXXXXXXXXXV	XXXXXXXXXXVI	XXXXXXXXXXVII	XXXXXXXXXXVIII	XXXXXXXXXXIX	XXXXXXXXXXX	XXXXXXXXXXXI	XXXXXXXXXXXII	XXXXXXXXXXXIII	XXXXXXXXXXXIV	XXXXXXXXXXXV	XXXXXXXXXXXVI	XXXXXXXXXXXVII	XXXXXXXXXXXVIII	XXXXXXXXXXXIX	XXXXXXXXXXX							
IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX	XX	XXI	XXII	XXIII	XXIV	XXV	XXVI	XXVII	XXVIII	XXIX	XXX	XXXI	XXXII	XXXIII	XXXIV	XXXV	XXXVI	XXXVII	XXXVIII	XXXIX	XXXX	XXXXI	XXXXII	XXXXIII	XXXXIV	XXXXV	XXXXVI	XXXXVII	XXXXVIII	XXXXIX	XXXXX	XXXXXI	XXXXXII	XXXXXIII	XXXXXIV	XXXXXV	XXXXXVI	XXXXXVII	XXXXXVIII	XXXXXIX	XXXXXX	XXXXXXI	XXXXXXII	XXXXXXIII	XXXXXXIV	XXXXXXV	XXXXXXVI	XXXXXXVII	XXXXXXVIII	XXXXXXIX	XXXXXXX	XXXXXXXI	XXXXXXXII	XXXXXXXIII	XXXXXXXIV	XXXXXXXV	XXXXXXXVI	XXXXXXXVII	XXXXXXXVIII	XXXXXXXIX	XXXXXXXX	XXXXXXXXI	XXXXXXXXII	XXXXXXXXIII	XXXXXXXXIV	XXXXXXXXV	XXXXXXXXVI	XXXXXXXXVII	XXXXXXXXVIII	XXXXXXXXIX	XXXXXXXXX	XXXXXXXXXI	XXXXXXXXXII	XXXXXXXXXIII	XXXXXXXXXIV	XXXXXXXXXV	XXXXXXXXXVI	XXXXXXXXXVII	XXXXXXXXXVIII	XXXXXXXXXIX	XXXXXXXXXX	XXXXXXXXXXI	XXXXXXXXXXII	XXXXXXXXXXIII	XXXXXXXXXXIV	XXXXXXXXXXV	XXXXXXXXXXVI	XXXXXXXXXXVII	XXXXXXXXXXVIII	XXXXXXXXXXIX	XXXXXXXXXXX	XXXXXXXXXXXI	XXXXXXXXXXXII	XXXXXXXXXXXIII	XXXXXXXXXXXIV	XXXXXXXXXXXV	XXXXXXXXXXXVI	XXXXXXXXXXXVII	XXXXXXXXXXXVIII	XXXXXXXXXXXIX	XXXXXXXXXXX								
X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX	XX	XXI	XXII	XXIII	XXIV	XXV	XXVI	XXVII	XXVIII	XXIX	XXX	XXXI	XXXII	XXXIII	XXXIV	XXXV	XXXVI	XXXVII	XXXVIII	XXXIX	XXXX	XXXXI	XXXXII	XXXXIII	XXXXIV	XXXXV	XXXXVI	XXXXVII	XXXXVIII	XXXXIX	XXXXX	XXXXXI	XXXXXII	XXXXXIII	XXXXXIV	XXXXXV	XXXXXVI	XXXXXVII	XXXXXVIII	XXXXXIX	XXXXXX	XXXXXXI	XXXXXXII	XXXXXXIII	XXXXXXIV	XXXXXXV	XXXXXXVI	XXXXXXVII	XXXXXXVIII	XXXXXXIX	XXXXXXX	XXXXXXXI	XXXXXXXII	XXXXXXXIII	XXXXXXXIV	XXXXXXXV	XXXXXXXVI	XXXXXXXVII	XXXXXXXVIII	XXXXXXXIX	XXXXXXXX	XXXXXXXXI	XXXXXXXXII	XXXXXXXXIII	XXXXXXXXIV	XXXXXXXXV	XXXXXXXXVI	XXXXXXXXVII	XXXXXXXXVIII	XXXXXXXXIX	XXXXXXXXX	XXXXXXXXXI	XXXXXXXXXII	XXXXXXXXXIII	XXXXXXXXXIV	XXXXXXXXXV	XXXXXXXXXVI	XXXXXXXXXVII	XXXXXXXXXVIII	XXXXXXXXXIX	XXXXXXXXXX	XXXXXXXXXXI	XXXXXXXXXXII	XXXXXXXXXXIII	XXXXXXXXXXIV	XXXXXXXXXXV	XXXXXXXXXXVI	XXXXXXXXXXVII	XXXXXXXXXXVIII	XXXXXXXXXXIX	XXXXXXXXXXX	XXXXXXXXXXXI	XXXXXXXXXXXII	XXXXXXXXXXXIII	XXXXXXXXXXXIV	XXXXXXXXXXXV	XXXXXXXXXXXVI	XXXXXXXXXXXVII	XXXXXXXXXXXVIII	XXXXXXXXXXXIX	XXXXXXXXXXX									

Fig. 5.

Utworzona figura jest *tabliczką dodawania*; zobaczmy zaś wkrótce, dlaczego tak się nazywa.

Ta figura posiada wiele ciekawych własności, z których niejedną wykryje z pewnością jej twórca.

Najprzód wszystkie liczby, znajdujące się na tej samej pochyłej prostej, poprowadzonej zdołu nalewo ku górze naprawo, są jednakowe; następnie wszystkie liczby, odczytywane z lewej ku prawej w wierszu poziomym lub zgóry nadół w kolumnie pionowej, są liczbami kolejnymi czyli rosnąciami o jedność; wreszcie liczby na tej samej pochyłej, poprowadzonej zgóry nalewo ku dołowi naprawo, rosną stopniowo o dwa, jeśli je będziemy odczytywali we wskazanym kierunku na pochyłej: są to liczby parzyste lub nieparzyste.

Odczytujemy pomienione liczby również i w porządku odwrotnym, a dziecko nauczy się biegle liczyć wstecz, zmniejszając liczby kolejno o jeden lub o dwa. Do tego pożytecz-

nego ćwiczenia możemy już i obecnie przystąpić, ponieważ małe liczby, z którymi mamy do czynienia, nie nastroją dziecku trudności.

6. S u m a .

Weźmy dwie garstki grochu (lub innych przedmiotów) i przeliczmy każdą z osobna. Połączmy je następnie w jedną i zapytajmy, ile ziaren zawiera? Aby odpowiedzieć na to pytanie, możnaby znowu przeliczyć nową garstkę grochu, utworzoną z dwóch poprzednich, lecz byłaby to czynność długa nudna i połączona z niepotrzebną stratą czasu. Wyjaśnimy mianowicie, że posiadamy środek prędzej prowadzący do celu; jestto działanie nazwane *dodawaniem*, poszukiwana zaś liczba przedmiotów, zawartych w większej garstce, nazywa się *sumą*.

Biorąc narazie liczby mniejsze od dziesięciu, przypomni my dziecku figurę 5 i zwróciwszy mu uwagę, że w tej tabliczce znajdzie wszystkie sumy dwóch jakichkolwiek garstek, zachęcimy je, aby utrwaliło sobie w pamięci te sumy. Osiągniemy ten wynik najpewniej, powtarzając często podobne ćwiczenia zalecając dziecku bezpośrednie przeliczenie, ile razy nie potrafi wypowiedzieć z pamięci żądanej sumy.

Jednak, zanim nawet dziecko utrwali sobie w pamięci tabliczkę dodawania, weźmy dwie jakiegokolwiek liczby, których suma nie przewyższa stu, i utwórzmy je z zapalek; n. p. trzydzieści cztery i dwadzieścia trzy. Pierwsza liczba będzie utworzona z trzech pęczków i czterech pojedynczych zapalek druga zaś — dwóch pęczków i trzech zapalek; pęczki umieścimy pod pęczkami (z lewej strony), zapalki pod zapalkami (z prawej strony).

Zapytamy wtedy dziecko, ile to będzie razem cztery zapalki i trzy zapalki, a kiedy odpowie siedem, posilkując się w razie potrzeby tabliczką dodawania, polecimy mu położyć nieco niżej siedem zapalek; znalazwszy następnie, że trzy pęczki i dwa pęczki stanowi pięć pęczków, położy je pod pęczkami.

Mamy więc sumę: pięć pęczków i siedem zapalek lub pięćdziesiąt siedem zapalek.

Powtórzmy te ćwiczenia z innemi liczbami, biorąc i takie, które składają się z samych pęczków bez pojedynczych zapalek, jak n. p. sześćdziesiąt, dwadzieścia, osiemdziesiąt, jakoteż złożone tylko z pojedynczych zapalek, czyli mniejsze od dziesięciu. Dobierzemy jednak liczby w każdym przykładzie tak, aby każda poszczególna suma, zapalek i pęczków, była mniejsza od dziesięciu.

Kiedy dziecko nabierze już pewnej wprawy w podobnych rachunkach, dajmy mu przykład, w którym ostatni warunek nie jest spełniony; niech doda, n. p., czterdzieści dziewięć i dwadzieścia pięć.

Ponieważ działanie będzie wyrażone symbolicznie (przy pomocy zapalek) w następujący sposób:

cztery pęczki dziewięć zapalek
dwa pęczki pięć zapalek,

dodamy najprzód dziewięć zapalek do pięciu i, otrzymawszy czternaście zapalek, utworzymy z nich jeden pęczek, który umieścimy pod pęczkami, pozostanie zaś cztery zapalki; liczymy następnie pęczki, poczynając od nowoutworzonego: jeden a cztery—pięć, pięć a dwa—siedem. Otrzymaliśmy sumę, złożoną z siedmiu pęczków i czterech pojedynczych zapalek, czyli siedemdziesiąt cztery.

Takie ćwiczenia, odpowiednio urozmaicone, należy powtarzać jaknajczęściej aż do nasycenia niemi umysłu dziecka, lecz tylko dotąd, dopóki je zajmują. Nigdy nie doprowadzajmy dziecka do znudzenia!

Przechodząc następnie do dodawania kilku liczb, których suma jest mniejsza od stu, będziemy postępowali w podobny sposób i zauważymy, że we wszystkich przerobionych przykładach potrafiliśmy znaleźć liczbę przedmiotów, zawartych w pewnym ich zbiorze, jeżeli wiadome były liczby przedmiotów w częściach, zbiór ten składających. ¹⁾

¹⁾ Przy przerabianiu wskazanych ćwiczeń dziecko, oprócz tabliczk dodawania, powinno umieć szybko dodawać liczbę mniejszą od dziesięć

I z tym dodawaniem kilku liczb należy dziecko należycie oswoić, przerabiając dużo przykładów, bacząc jednak zawsze przytym, aby w porę zapobiec zmęczeniu lub nudzie. Gdybyście zauważyli pewną niechęć dziecka, pogroźcie mu (wprowadzając pogrozkę w czyn w ciągu kilku dni), że przerwiecie zabawę w zapalki, krążki i t. d. Kto w porę użyje tego środka, może być pewnym, że *winowajca* sam poprosi o wznowienie przerwanej nauki, aby mu tylko nie kładziono w uszy tego brzydkiego wyrazu: nauka, który odstręcza dzieci.

7. R ó ż n i c a .

Wziąwszy sporą garść jakichkolwiek liczmanów, n. p. osiemdziesiąt siedem, usuniemy z niej (lub odejmiemy) garstkę, w której po przeliczeniu znajdziemy n. p. dwadzieścia pięć liczmanów. Pytanie, ile liczmanów pozostało? Aby odpowiedzieć na to pytanie, należy wykonać *odejmowanie*, którego wypadek nazywa się *resztą* lub *różnicą*. Zauważymy odrazu, że połączywszy resztę z liczbą odjętą (odejmnikiem), odtworzymy pierwotną garść liczmanów czyli liczbę (odjemną), od której odjęliśmy inną.

Abymy znaleźć różnicę dwóch danych liczb, napiszmy (w znaczeniu przenośnym) przy pomocy zapalek najprzód większą liczbę osiemdziesiąt siedem:

osiem pęczków siedem zapalek,
następnie pod spodem mniejszą dwadzieścia pięć:

dwa pęczki pięć zapalek,
przestrzegając, aby pęczki były umieszczone po lewej stronie, pojedyncze zaś zapalki—po prawej, oraz aby pęczki znalazły się pod pęczkami i zapalki pod zapalkami.

ci do liczby mniejszej od stu; n. p. sześćdziesiąt osiem a pięć — siedemdziesiąt trzy. Przez częste ćwiczenia w tym kierunku i przy pewnej cierpliwości można dość szybko wyrobić w dziecku odpowiednią wprawę.

Usuńmy z większej liczby najprzód pięć zapalek, których przeto pozostanie dwie; następnie usuńmy dwa pęczki, poczym pozostanie ich sześć. W ten sposób otrzymamy szukaną różnicę:

sześć pęczków dwie zapalki
lub sześćdziesiąt dwie zapalek.

W powyższym przykładzie wszystko było łatwe i zrozumiałe, wyszukanie zaś różnicy sprowadzało się do odejmowania liczb mniejszych od dziesięciu: odejmowaliśmy mianowicie pięć od siedmiu i dwa od ośmiu.

Przytrafiają się jednak i pewne trudności, o czym przekonamy się, odejmując n. p. od pięćdziesięciu dwóch liczmanów inną, mniejszą garstkę, składającą się z osiemnastu liczmanów; napisawszy bowiem, jak wyżej:

pięć pęczków dwie zapalki
jeden pęczek osiem zapalek,

widzimy, że nie można odjąć ośmiu zapalek od dwóch. Aby temu zaradzić, z pomiędzy pięciu pęczków bierzemy jeden i kładziemy go, w całości lub rozwiązawszy uprzednio, po prawej stronie razem z dwiema zapalkami, poczym będziemy mieli po prawej stronie dwanaście zapalek, po lewej zaś — tylko cztery pęczki zamiast poprzednich pięciu.

Usuniemy teraz osiem zapalek z dwunastu, znajdujących się po prawej stronie — pozostanie cztery; po usunięciu zaś jednego pęczka z czterech, pozostałych po lewej stronie, pozostanie ich trzy.

Znaleźliśmy więc różnicę:

trzy pęczki cztery zapalki
lub trzydzieści cztery.

W podobnych przykładach trzeba umieć odejmować liczbę, mniejszą od dziesięciu, od liczby wprawdzie większej od dziesięciu, lecz zawsze mniejszej od dwudziestu.

Te różnice, niezbędne przy odejmowaniu liczb, utrwalimy w pamięci dziecka, przerabiając z nim wiele odpowiednio urozmaiconych ćwiczeń. Nie idzie zatem, aby dziecko umiało

je recytować na pamięć: ciągle ćwiczenia nie pozwolą mu ich zapomnieć.

Zwracamy w końcu uwagę, że większa z dwóch liczb, na których wykonywamy odejmowanie, powinna być mniejsza od stu, ponieważ dotąd nie umiemy dalej liczyć.

8. Tysiące i miliony.

Jak dotąd, umiemy liczyć do stu. Jużci, jestto duża liczba, kiedy chodzi o wiek pewnej osoby, wyrażony latami; czło, wiek liczący sto lat jest bardzo stary, zaś starcy stuletni są rzadkością. W innych jednak wypadkach, kiedy n. p. liczymy ziarna zboża, ta sama liczba jest bardzo małą: garstka, złożona ze stu takich ziaren, nie wystarczyłaby do nakarmienia dziecka w ciągu jednego dnia. Nie możemy przeto zatrzymać się w tym punkcie, do którego doszliśmy, lecz należy posunąć się znacznie dalej w szeregu liczb, co zresztą nie sprawi nam trudności.

Otrzymaliśmy liczbę sto, połączywszy pojedyncze zapalki w pęczki po dziesięć, następnie zaś połączywszy dziesięć pęczków w jedną wiązkę, która zawiera jedną setkę lub sto zapalek. Połączmy dalej dziesięć wiązek w pęk, z dziesięciu pęków utwórzmy skrzynkę, z dziesięciu skrzynek — kosz, z dziesięciu koszy — pakę, z dziesięciu pak — wóz, z dziesięciu wozów — wagon, wreszcie z dziesięciu wagonów — pociąg.

Przytaczamy nazwy liczb, otrzymanych w ten sposób.

Jedna zapalka to jedność.

Pęczek zawiera dziesięć zapalek lub jedną dziesiątkę.

Wiązka, złożona z dziesięciu pęczków — sto zapalek lub jedną setkę.

Pęk czyli dziesięć wiązek — tysiąc zapalek.

Skrzynka czyli dziesięć pęków — *dziesięć tysięcy* zapalek lub jedną *dziesiątkę tysięcy*.

Kosz czyli dziesięć skrzynek — *sto tysięcy* zapalek lub jedną *setkę tysięcy*.

Paka czyli dziesięć koszy — *miljon* zapalek.

Wóz czyli dziesięć pak — *dziesięć milionów* zapalek lub jedną *dziesiątkę milionów*.

Wagon czyli dziesięć wozów — *sto milionów* zapalek lub jedną *setkę milionów*.

Pociąg czyli dziesięć wagonów — *miljard* zapalek.

Moglibyśmy tworzyć w podobny sposób coraz to większe liczby, lecz liczba miliard wystarcza do użytku zwykłego. Aby wytworzyć sobie pewne pojęcie o tej liczbie, zauważymy, że umieściwszy obok siebie miliard zwyczajnych zapalek, otrzymalibyśmy sznur dłuższy od obwodu kuli ziemskiej

Gdybyśmy chcieli przeliczyć miliard zapalek po jednej, używając na każdą jedną sekundę i przeznaczając na ten drobny rachunek dziesięć godzin dziennie, musielibyśmy liczyć siedemdziesiąt sześć lat z górą. Przyznacie chyba, że byłoby to zajęcie przydługie, trochę nudne i zgoła bezużyteczne.

Przystąpmy teraz do przeliczenia dużej garści zapalek i w tym celu powiążmy je najprzód w pęczki po dziesięć, kładąc z prawej strony zapalki, pozostałe po utworzeniu ostatniego pęczka; przypuśćmy, że pozostały *trzy* zapalki. Z pęczków tworzymy wiązki, używając po dziesięć pęczków na jedną, i pozostałe pęczki, n. p. *osiem*, umieszczamy z lewej strony obok trzech zapalek.

Łącząc dalej po dziesięć wiązek w pęki, otrzymamy n. p. *pięć* zbywających wiązek, które znowu umieścimy z lewej strony obok ośmiu pęczków; pęków zaś w ten sposób utworzonych niech będzie *sześć*.

Czynność liczenia została już ukończona; umieszczamy zatem sześć pęków z lewej strony obok pięciu wiązek i otrzymujemy szukaną liczbę zapalek:

sześć pęków, *pięć* wiązek, *osiem* pęczków, *trzy* zapalki, lub: *sześć* tysięcy pięćset osiemdziesiąt trzy zapalek.

Formując tylko pęczki i wiązki, możemy liczyć aż do tysiąca i utworzyć wszystkie liczby mniejsze od tysiąca, pamiętając zawsze, że wyrażenia:

wiązka, pęczek, pojedyncza zapalka
oznaczają odpowiednio:

sto zapalek, dziesięć zapalek, jedna zapalka.

Jeżeli liczba, którą mamy napisać, nie zawiera pojedynczych zapalek lub pęczków tychże, nie sprawia nam to żadnej trudności.

Naprzykład, w liczbie:

osiem wiązek sześć pęczków
mamy osiemset sześćdziesiąt zapalek, a liczba:

pięć wiązek trzy zapalki
zawiera pięćset trzy zapalek.

Niech dziecko tworzy wiele liczb mniejszych od tysiąca, niech wykona wskazanym wyżej sposobem wiele dodawań i odejmowań, rozciągając je obecnie już i na wiązki, zamiast poprzestawać, jak dotąd, na pęczkach.

Należy teraz zauważyć, że liczby dziesięć i sto lub dziesiątka i setka powtarzają się wielokrotnie w szeregu liczb.

Więc:

zapalka	}	oznaczają	{	jeden
pęczek				jedna dziesiątka
wiązka				jedna setka
pęk	}	"	{	jeden tysiąc
skrzynka				jedna dziesiątka tysiąca
kosz				jedna setka tysięcy
paka	}	"	{	jeden milion
wóz				jedna dziesiątka milionów
wagon				jedna setka milionów

Wskutek tego pewien zbiór tysięcy lub milionów może być tak przeliczony, jak garść pojedynczych zapalek od jednej do tysiąca. Naprzykład, w zbiorach:

trzy wagony	dwa wozy	siedem pak
jeden kosz		dziewięć pęczków
cztery wiązki		pięć pęczków

zawierają się następujące liczby zapalek:

trzysta dwadzieścia siedem milionów	}	zapalek.
sto dziewięć tysięcy		
czterysta pięćdziesiąt		

Można przerobić z dzieckiem kilka podobnych przykładów, lecz tymczasem nie należy kłaść nacisku na zbyt wielkie liczby. Poprzestańmy na pęczkach i wiązkach, dobierając conajwyżej pęki.

We wszystkich poprzednich przykładach przestrzegaliśmy, aby zapalki kłaść po prawej stronie, pęczki (dziesiątki) po lewej stronie zapalek, wiązki (setki) — nalewo od pęczków i t. d. Chociaż takie postępowanie nie stanowi koniecznego warunku liczenia, zaleca się jednak, jako dogodne i wprowadzające do niego pewien ład. Dziecko, oswojone należycie z takim sposobem układania zapalek, uzna go w następstwie za zupełnie naturalny, przekonawszy się o jego niezbędności w rachunkach.

Gdybyśmy zechcieli utworzyć z zapalek wszystkie liczby, o których dotąd mówiliśmy, a o których trzeba było mówić, aby je utrwalić w umyśle dziecka, musielibyśmy zgromadzić takie ilości tych liczmanów (nawet nie posuwając do wagonów), że sprawiłoby to nam trochę kłopotu, ponieważ niełatwo byłoby je ułożyć na stole lub na arkuszu papieru. Zobaczymy jednak zaraz, jak można zaradzić tej trudności i pokazać małemu rachmistrzowi, który nie umie jeszcze czytać biegle, ani pisać, że doskonale potrafi manipulować temi ogromnemi liczbami.

9. Różnokolorowe liczmany.

Każdy przyzna, że kłopotliwa to rzecz mieć do czynienia z tyloma pęczkami i wiązkami, kiedy chcemy przeliczyć zapalki choćby tylko do tysiąca. Zastąpmy przeto zapalki in-

nemi liczmanami, n. p. białemi krążkami, wiedząc, że wskutek takiej zamiany nic się nie zmieni w rachunkach, ponieważ, jak to wyjaśniono wyżej, pojęcie liczby stosuje się do jakichkolwiek przedmiotów. Używając następnie czerwonych liczmanów zamiast pęczków, ułatwimy sobie znacznie manipulację liczenia, w razie zaś potrzeby jeden liczman czerwony możemy zastąpić dziesięcioma białymi. W podobny sposób: wiązki zastąpimy liczmanami pomarańczowymi, pęki — żółtymi, skrzynki — zielonemi, kosze — błękitnemi, paki — niebieskimi, wozy — fioletowymi, wagony — czarnymi, wreszcie pociągi — znowu białymi, lecz innego kształtu, np. wydłużonemi.

Liczmany więc i liczby odpowiadają sobie wzajemnie w sposób następujący:

zapalki		pociągi, wagony, wozy, paki, kosze,
		skrzynki, pęki, wiązki, pęczki, zapalki,
liczmany		wydłużone białe, czarne, fioletowe, niebies., błęk.,
		zielone, żółte, pomarańczowe, czerwone, białe;
liczby		miljardy, setki milionów, dziesiątki milionów,
		miljony, setki tysięcy, dziesiątki tysięcy, tysiące,
		setki, dziesiątki, jedności.

Przy pomocy opisanych liczmanów możemy wyrazić jakąkolwiek liczbę aż do miljaru, a nawet większą, nie sprowadzając zapalek pakami, wagonami lub pociągami. Możemy również wykonywać dodawanie i odejmowanie, pamiętając tylko, że jeden liczman czerwony równa się dziesięciu białym, jeden pomarańczowy — dziesięciu czerwonym i t. d.

Zdawałoby się na pozór, że można zastąpić liczmany białe monetami kopiejkowymi, czerwone — dziesięcio-kopiejkowymi, pomarańczowe — stukopiejkowymi (czyli rublowymi) i t. d. Lecz po pewnym zastanowieniu przekonamy się, że podobna zamiana wymagałaby okazałego majątku, gdyż na oznaczenie miljaru musielibyśmy użyć monety, mającej wartość dziesięciu milionów rubli. Ponieważ, w dodatku, men-nica nie wybija takich monet, jako niepraktycznych, zacho-

wajmy lepiej dotychczasowe znaki i niechaj wydłużony liczman biały będzie i nadal obrazem jednego miljarda.

Podobnie jak zapałki, ich pęczki, wiązki, i t. d., liczmany, stosownie do ich barwy i kształtu, powinny być układane obok siebie w następującym porządku, licząc od prawej ręki:

wydłużone białe	czarne	fioletowe	niebieskie	błękitne	zielone	żółte	pomarańczowe	czerwone	białe

Wystarczy rzucić okiem na powyższą tabliczkę, aby wiedzieć, jakiego koloru liczman ma być położony na pewnym miejscu, liczonym od prawej ręki.

10. C y f r y .

Posiłkując się opisaniami liczmanami, potrafimy napisać każdą liczbę do dziesięciu miliardów włącznie, a nawet potrafilibyśmy napisać liczby znacznie większe, obmyśliwszy nowe liczmany. Kładziemy mianowicie na miejscach, przeznaczonych na białe, czerwone i t. d. liczmany (czyli na jedności, dziesiątki i t. d.), pewną ich liczbę, która jest zawsze mniejszą od dziesięciu.

Łatwo zrozumieć, że poznanie sposobu, uwalniającego nas od przeliczania za każdym razem białych, czerwonych i t. d. liczmanów, znacznie ułatwi odczytywanie liczb; ponieważ zaś nasz mały uczeń umie już trochę pisać, wprawiajmy go w kreślenie znaków, wyobrażających pierwsze dziesięć liczb i zwanych *cyframi*.

Te znaki czyli cyfry są następujące:

jeden dwa trzy cztery pięć sześć siedem osiem dziewięć

1 2 3 4 5 6 7 8 9.

Niech dziecko, z ołówkiem lub piórem w rękę, wprawia się w pisanie cyfr prosto, bez upiększeń i jednym pociągnięciem

pióra, z wyjątkiem 4, która pisze się dwoma pociągnięciami; dobrze jest z początku pisać cyfry na tabliczce kratkowanej lub takimże papierze, aby wszystkie posiadały jednakową wysokość. Wprawa i biegłość pod tym względem są bardzo ważne i wprost niezbędne przy dalszych rachunkach.

W zasadzie należy zalecać następujący kształt cyfr:

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Można przyto-
czyć w tym miej-
scu, jako osobi-
wość, twierdzenie

kilku starszych pisarzy (niezupełnie zresztą pewne), że kształt wszystkich cyfr da się wyprowadzić z figury ☒

mianowicie:

☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Przedewszystkim

trzeba zalecać dzieciom,
aby liczby, wyrażone

zapalkami, wyrażały przy pomocy używanych już liczmanów, następnie zaś—przy pomocy cyfr, dobierając narazie łatwiejsze przykłady. Zauważymy przytym, że niema potrzeby używania różnokolorowych cyfr, ponieważ miejsce zajmowane przez cyfrę poucza nas dostatecznie, czy ta oznacza jedności, czy też dziesiątki, setki i t. d. (lub też liczmany białe, czerwone, pomarańczowe i t. d., lub wreszcie zapalki, ich pęczki, wiązki i t. d.).

Trzeba jednak uwzględnić jedną ważną okoliczność.

Kiedyśmy, mianowicie, pisali liczby przy pomocy liczmanów, nie kładliśmy żadnego na oznaczonym miejscu, jeżeli liczba nie zawierała wcale liczmanów odpowiedniej barwy. Ponieważ zaś obecnie rozróżniamy cyfry nie barwami, lecz miejscem przez nie zajmowanym, gdyby nam przeto wypadło nie pisać żadnej cyfry na pewnym miejscu, należałoby to zaznaczyć szerszym odstępem między dwiema sąsiednimi cyframi, do czego niełatwo się przyzwyczaić; w przeciwnym razie wynikłoby pomieszanie wartości cyfr. Gdyby się nadto przytrafiło, że brakuje cyfry jedności, nie sposób byłoby przekonać się, co oznacza ostatnia cyfra. Aby uniknąć tych wszystkich szkopałów, piszemy na pustych miejscach okrągły znak O,

który zowiemy *zerem*¹⁾; ten znak nie posiada żadnej wartości, lecz tylko zajmuje miejsce. Można by porównać zero z wier-
nym stróżem domu, który mówi: „Niema tu nikogo, pomimo
to ja, który nic nie znaczę i którego ludzie nie biorą w ra-
chubę, nie puszcze nikogo.“

Zapoznawszy dzieci z cyframi, dyktujemy im często liczby
i polecamy odczytywać napisane, urozmaicając odpowiednio
przykłady, w których zero powinno się powtarzać jaknajczęś-
ciej. Jeżeli posiadamy kilku uczniów, możemy podrażnić zlek-
ka ich ambicję i zachęcić malców do współzawodnictwa
w szybkim i biegłym pisaniu i odczytywaniu liczb. Po pew-
nym przeciągu czasu, kiedy nasi młodociani uczniowie nabrali
już niejakej wprawy, oświadczmy im, że nauczyli się *licze-
nia piśmiennego*.

Teraz dobrze jest powrócić do przykładów na dodawa-
nie i odejmowanie, rozwiązywanych poprzednio przy pomocy
zapalek lub kolorowych liczmanów, i przerobić je, posiłkując
się cyframi. Przedewszystkiem jednak zrobimy kilka uwag,
które przedtym byłyby nie na miejscu.

Pierwszą uwagę nastręcza dodawanie, przy którym dziec-
ko powinno mówić jaknajmniej, unikając takich niepotrzeb-
nych frazesów, jak: „piszę pewną cyfrę, w pamięci zaś taka
a taka liczba“. Aby się jaśniej wytłumaczyć, przytaczam
przykład dodawania, który należy oddać ustnie w sposób
następujący.

7 a 4 jedenaście, a 8	dziewiętnaście, a 9	3087
dziesięć osiem, a 4	trzydzieści dwa.	6944
W tym miejs- cu, nic nie mówiąc, piszemy 2,	poczynamy dodajemy	560
w dalszym ciągu: z przeniesienia 3 a 8	jedenaście,	208
a 4	piętnaście, a sześć	29
dwadzieścia jeden, a 2		
dwadzieścia trzy (piszemy 3).		2004

Z przeniesienia 2 a 9 jedenaście, a 5 szes- 12832
naście, a 2 osiemnaście (piszemy osiem). Z przeniesienia

¹⁾ Nie wiemy, kto był wynalazcą zera, lecz zdaje się, że ten gie-
njalny pomysł należy przypisać Indom.

1 a 3 cztery, a 6 dziesięć, a 2 dwanaście, poczym piszemy 2, obok zaś z lewej strony 1. Wreszcie odczytujemy sumę: dwanaście tysięcy osiemset trzydzieści dwa.

Druga uwaga tyczy się odejmowania, w tych mianowicie przypadkach, kiedy w odjemnej znajdujemy na pewnym miejscu cyfrę mniejszą od odpowiedniej cyfry odjemnika. Powróćmy do przykładu w rozdz. 7, w którym od 52 odejmowaliśmy 18, i wyrazimy cyframi manipulację, uskuteczniłą poprzednio przy pomocy zapalek:

52	4	12
18	1	8
34	3	4

Lecz ponieważ popierwsze chodzi o to, aby przed znalezieniem różnicy nie potrzeba było pisać innych liczb oprócz danych 52 i 18, powtóre zaś może się łatwo przytrafić, iż zapomnimy o tym, że w odjemnej pozostały po pożyczaniu jednej tylko cztery dziesiątki, zamiast pierwotnych pięciu, postąpimy inaczej, zauważywszy, że zamiast odjąć 1 od 4 możemy, nie zmieniając rezultatu, odjąć 2 od 5. Przeprowadzimy przeto odejmowanie tak: 8 od dwunastu 4 (piszemy 4), z przeniesienia 1 a 1 dwa, od 5 trzy. Trzeba się przeto przyzwyczaić do przenoszenia 1 do odjemnika za każdym razem, kiedy poprzednią cyfrę odjemnej powiększyliśmy o dziesięć.

Według powyższych wskazówek należy przerobić z dzieckiem wiele przykładów na odejmowanie i dodawanie, które je niewątpliwie zainteresują, jeżeli odłożymy na później wszelkie teoretyczne wyjaśnienia. W razie zakłopotania, dajcie mu ponownie zapalki lub kolorowe liczmany, pamiętając, że chodzi nam tylko o naukę rachunku, nie dążymy zaś bynajmniej do obciążenia umysłu dziecięcego niezrozumiałymi wyrazami. Przysłuchujcie się pilnie uwagom, któremi dziecko dzieli się z wami od czasu do czasu, i nie wahajcie się powracać do dawniejszych lekcji, gdyż tylko w ten sposób umysł dziecka potrafi z czasem utożsamić nowe liczby, pisane cyframi, z dawniejszemi zbiorami zapalek, kolorowych liczmanów

i, wogóle, jakichkolwiek przedmiotów. Przedewszystkiem jednak, nie przedłużajcie zbytnio pogawędek, aby nie osłabić zainteresowania się dziecka przedmiotem i nie wywołać zmęczenia, tej śmiertelnej plagi nauczania.

11. Szereg patyczków.

Weźmy trzy garstki zapalek, składające się odpowiednio z 5, 3 i 4 sztuk, i ułóżmy je obok siebie w tym samym kierunku tak, aby się stykały końcami. Szereg, utworzony w ten sposób, będzie miał długość 12 zapalek czyli będzie sumą liczb, odpowiadających trzem danym garstkom. Otrzymaliśmy ten sam wynik, zastąpiwszy wszystkie zapalki pierwszej garstki jednym patyczkiem długości 5 zapalek, zapalki drugiej garstki—patyczkiem długości 3 zapalek, wreszcie zapalki trzeciej garstki—patyczkiem długości 4 zapalek.

Tak samo postąpilibyśmy z liczbami większemi i wziętemi w dowolnej ilości; cała różnica polegałaby na tym, że patyczki byłyby dłuższe i byłoby ich więcej.

Przekonywamy się więc, że: 1) każdą liczbę można zastąpić patyczkiem odpowiedniej długości; 2) aby znaleźć sumę kilku liczb, należy ułożyć obok siebie odpowiadające im patyczki tak, aby przystawały do siebie końcami, poczym długość utworzonego szeregu będzie szukaną sumą.

12. Linja prosta.

Patyczki, o których dopiero co mówiliśmy, należy tak układać obok siebie, aby tworzyły *linję prostą*. Cóż to jest jednak linja prosta lub, jak się mówi krócej, prosta? Wytworzamy sobie pojęcie o prostej, patrząc na kreskę, nakreśloną cienko zatemperowanym ołówkiem wzdłuż dobrego linjału, lub na bardzo cienką nitkę, np. na włos, napięty po-

między dwiema podstawkami. Tak utworzone pojęcie wystarczy nam w zupełności; rozumiemy, że gdyby, na przykład, linjał był dłuższy lub arkusz papieru szerszy, moglibyśmy przedłużyć nakreśloną prostą po za obydwie jej końce; ponieważ zaś niema powodu, aby to przedłużenie stało się w pewnym miejscu niemożliwym, łatwo rozumiemy, że prosta jest figurą nieograniczoną. Wprawdzie będziemy ją zawsze rozważali w pewnych, potrzebnych nam, granicach, lecz te granice zawsze można dowolnie rozszerzyć.

Jeżeli na prostej (fig. 6) obierzemy dwa punkty A i B, to część prostej AB, zawarta między nimi, nazywa się *odcinkiem prostej*. Patyczki, których używaliśmy w poprzednim rozdziale, przystają do

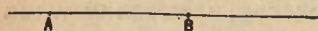


Fig. 6.

odcinków prostej, posiadających tę samą, co i one długość

Powracając do przykładu z poprzedniego rozdziału, obierzemy prostą (fig. 7) i na niej dowolny punkt O, od którego odmierzymy odcinek OA długi, jak 1-szy patyczek, na 5 zapalek, następnie od punktu A, w tym samym kierunku, drugi odcinek AB, posiadający, jak 2-gi patyczek, długość 3 zapalek; wreszcie

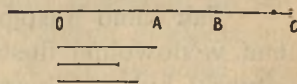


Fig. 7

umieścimy na prostej, w podobny sposób, obok pierwszych dwóch, trzeci odcinek BC, długi, jak i 3-ci patyczek, na 4 zapalki. Długość utworzonego odcinka OC równa się 12 zapalkom czyli sumie liczb 5, 3 i 4.

Dodawanie więc liczb, patyczków, odcinków prowadzi do tego samego rezultatu, wykonywa się zaś w ten sposób, że patyczki lub odcinki umieszczamy obok siebie tak, aby stykały się końcami.

To umieszczanie obok siebie albo też odmierzanie odcinków od pewnego punktu powinno się koniecznie odbywać w pewnym stałym kierunku na prostej, za który, w dalszym ciągu, będziemy zawsze uważali kierunek od lewej ręki ku prawej.

Tworząc przeto na prostej (fig. 7) sumy dowolnej liczby odcinków, otrzymamy odcinki dowolnej długości, lecz tylko po prawej, nie po lewej stronie punktu O.

13. Tworzenie różnic przy pomocy zapalek.

Posiłkując się zapalkami, możemy z równą łatwością utworzyć różnicę dwóch liczb, jak przedtym tworzyliśmy sumę dwóch lub kilku liczb. Mamy, na przykład, odjąć 4 od 11. Umieścimy w tym celu na prostej 11 zapalek obok siebie w ten sposób, aby początek każdej stykał się z końcem poprzedniej, poczym z prawego końca otrzymanego szeregu usuniemy 4 zapalki; pozostałe 7 zapalek wyobrażają różnicę liczb 11 i 4.

Gdybyśmy zamiast 11 zapalek umieścili na powyższej prostej patyczek takiej samej długości, należałoby, w celu znalezienia żądanej różnicy, odłamać od niego kawałek, długi na 4 zapalki.

Mamy jednak inny sposób na wynalezienie różnicy, który stanie się odrazu zrozumiałym, jeśli patyczki zastąpimy odcinkami prostej (fig. 8). Odmierzmy, mianowicie, na prostej od punktu O odcinek OB, długi na 11 zapalek, następnie zaś od punktu B drugi

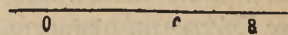


Fig. 8.

długości 4 zapalek, lecz zamiast skierować go na prawo, nadamy mu kierunek przeciwny BC od prawej ręki ku lewej; długość odcinka OC będzie wyobrażała szukaną różnicę 7.

Streścimy powyższe zasady dodawania i odejmowania, mówiąc, że przy dodawaniu kilku odcinków umieszczamy je obok siebie na prostej *w tym samym kierunku*, przy odejmowaniu zaś dwóch odcinków umieszczamy drugi na tej samej prostej, co i pierwszy, i również tak, aby jego początek sty-

kał się z końcem pierwszego, lecz nadajemy mu *kierunek przeciwny* względem pierwszego.

Wszystko, cośmy dotąd powiedzieli, jest nietylko łatwe, lecz i oczywiste; wystarczy też pewne urozmaicenie przykładów, aby zainteresować dziecko. Zachęcajmy je więc bez obawy znudzenia, aby jaknajwięcej manipulowało z zapalkami i patyczkami i odtwarzało na tabliczce lub papierze wykonywane w ten sposób działania.

Niebawem wasz mały uczeń wkroczy w dziedziny „wyższej nauki“. Gdybyście zauważyli, że zaczyna się tym pyszczyć, uspokójcie go i powstrzymajcie ten objaw uwagą, że pierwsze algiebra jest najłatwiejszą dziedziną nauk matematycznych, powtóre — wasz uczeń naprawdę niczego jeszcze nie umie i niczego się nie uczył, gdyż dotychczasowe jego zajęcia były tylko zabawami, z których skorzysta dopiero w przyszłości, zachowawszy je w pamięci.

14. Wkraczamy w dziedzinę algiebry.

Potrąfimy już tworzyć sumy przy pomocy dodawania, oraz różnice przy pomocy odejmowania. Dodawszy, na przykład, liczby 8, 5 i 14, znajdziemy sumę 27. Ponieważ na oznaczenie dodawania obmyślono znak +, który wymawiamy *więcej*, na oznaczenie zaś równości symbol =, wymawiany *jest równy*, przeto przytoczony rezultat możemy wyrazić piśmiennie

$$8 + 5 + 14 = 27$$

i odczytać: 8 więcej 5 więcej 14 jest równe 27.

Przy odejmowaniu posługujemy się znakiem —, który wymawiamy *mniej*. Jeżeli więc napiszemy

$$7 - 5 = 2,$$

należy czytać: 7 mniej pięć równa się 2, co znaczy, że, odjawszy 5 od 7, otrzymamy różnicę 2.

Wiemy już, że dodawanie i odejmowanie można uzmysłowić przy pomocy patyczków lub odcinków. Spojrzawszy np. na figurę 7, odrazu spostrzeżemy, że wyraża ona następujące dodawanie:

$$5+3+4=12,$$

któremu możemy nadać jeszcze inną postać, dodając odpowiednie odcinki:

$$OA+AB+BC=OC.$$

Podobnie figura 8 oznacza:

$$11-4=7.$$

Dajmy dziecku więcej podobnych przykładów, zalecając mu przedstawiać działania w tych różnych postaciach.

Łatwo zrozumieć, że, zamiast liczb 8, 5 i 14 lub 5, 3 i 4 w poprzednich przykładach, można wziąć jakiegokolwiek inne. Jeżeli te dowolne liczby oznaczmy literami a , b , c i napiszemy $a+b+c=s$, otrzymamy sumę jakichkolwiek trzech liczb, która w pierwszym przykładzie równa się 27, w drugim zaś 12.

Również wyrażenie $a-b=r$ oznacza, że po odjęciu b od a otrzymamy różnicę r . Na figurze 8 mamy np.: $a=11$, $b=4$, $r=7$.

Ponieważ często jest rzeczą bardzo dogodną wskazać działania odpowiednimi znakami, liczby zaś zastąpić literami, przyzwyczajmy się zawczasu do tego sposobu przedstawiania działań i liczb, aby skorzystać z niego w przyszłości i oszczędzić sobie немало pracy. Dobrze jest nawet wiedzieć, co oznaczają wyrażenia

$$(\quad) + (\quad) \text{ lub } (\quad) - (\quad),$$

w których nawiasy zawierają inne wyrażenia; należy tylko pamiętać, że każde wyrażenie zawarte w nawiasie powinno być zastąpione liczbą, którą otrzymamy po wykonaniu wskazanych działań. Naprzykład, wyrażenie

$$(a-b) - (c-d) + (e-f)$$

po zastąpieniu w nim liter

a, b, c, d, e, f

liczbami

10, 2, 9, 6, 7, 5

przybierze wartość

$$(10-2) - (9-6) + (7-5) \text{ lub}$$

$$8-3+2 \text{ czyli } 7.$$

Powyższe sposoby pisania nazywają się czasem *algiebraicznymi*. Nie chodzi nam tu jednak o nazwę, lecz o rzecz, a w następstwie poznamy rzeczy istotnie nowe.

Możemy zawsze dodać bez przeszkody ilekolwiek liczb: kilka garści grochu można zawsze połączyć w jedną. Innymi słowy, dodawanie jest zawsze możliwe, czy je wykonywamy przy pomocy cyfr, czy też posiłkujemy się kolorowemi liczmanami, zapalkami, patyczkami lub odcinkami prostej.

Inaczej ma się rzecz z odejmowaniem, gdyż od 7 liczmanów, na przykład, nie sposób odjąć 10 liczmanów.

Zastępując jednak w danym wypadku odejmowanie liczmanów odejmowaniem odcinków, jak to wyjaśniono wyżej na figurze 8, odmierzymy na prostej odcinek OB długości 7 zapalek (fig. 9), następnie od końca B tego odcinka odmierzymy *w kierunku przeciwnym* drugi

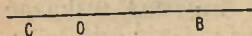


Fig. 9.

odcinek BC, którego długość, 10 zapalek, równa się odjemnikowi. Przytoczone wykreślenie jest zawsze możliwe, w danym zaś wypadku daje jako różnicę odcinek OC, mający długość 3 zapalek, lecz skierowany na lewo.

Otrzymana liczba nazywa się *ujemną*. Piszemy ją — 3, wymawiamy *mniej 3*, oraz możemy napisać $7-10=3$. Wprowadzenie liczb ujemnych umożliwiło więc odejmowanie we wszystkich przypadkach, podczas kiedy odejmowanie w dziedzinie liczb zwykłych, nazwanych dla odróżnienia od tamtych *dodatnimi*, niezawsze jest możliwe.

Na figurze 10 cały promień, skierowany na prawo od punktu O, wyobraża dziedzinę liczb dodatnich, czyli dziedzinę arytmetyki (strzałka 1), cały zaś lewy promień (strzałka 2) wyobraża dziedzinę liczb ujemnych. Obydwa promie-

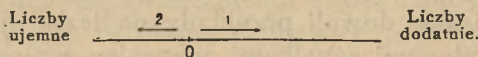


Fig. 10.

nie, tworzące całą prostą z jej dwoma wprost przeciwnymi kierunkami, wyobrażają dziedzinę algebry.

Odtąd, wyrażając liczby patyczkami lub odcinkami, musimy zwracać uwagę na ich kierunek czyli na znak liczby. Będzie więc (fig. 9) dodatni odcinek OB wyrażał liczbę 7 lub $+7$, odcinek zaś OC będziemy uważali za ujemny, któremu odpowiada liczba ujemna—3.

Dla uniknięcia nieporozumień jeden z dwóch końców każdego odcinka będziemy nazywali *początkiem*, drugi zaś—*końcem* danego odcinka, a za kierunek tegoż będziemy stale uważali kierunek, w którym porusza się punkt na odcinku od jego początku ku końcowi. Mówiąc lub pisząc odcinek AB, będziemy uważali punkt A za początek, punkt B za koniec odcinka. Aby przeto odróżniać z łatwością początek od końca, zmienimy nieco używane dotąd, jako liczmany, zapalki, poczerniwszy tuszem (który jest farbą nieszkodliwą) jeden koniec każdej z nich, poczym koniec niepoczerniony będziemy uważali za początek zapalki. Wskutek takiej umowy, jeżeli np. ułożymy w szeregu trzy zapalki, skierowawszy na prawo ich poczernione końce, wyrazimy liczbę $+3$, dwie zapalki obok siebie, których końce poczernione są skierowane na lewo, przedstawiają liczbę -2 , i t. d.

Mówimy, że dodajemy jedną liczbę do drugiej, jeżeli umieszczamy obok siebie na prostej odcinki odpowiedniej długości i kierunku, wyobrażające dane liczby. Tak, na przykład, aby do 11 dodać—4, odmierzymy na prostej odcinek OB, długi na 11 zapalek i skierowany na prawo, następnie od punktu B odmierzymy odcinek, długi na 4 zapalki, lecz skierowany na lewo. Ponieważ jednak postępowaliśmy tak samo

(fig. 8) przy wynajdywaniu różnicy $11 - 4$, możemy przeto napisać

$$11 + (-4) = 11 - 4 = 7,$$

czyli odejmowanie można zastąpić dodawaniem.

Urozmaicając dowoli przykłady na liczby ujemne, ilustrując je poczernionymi zapalkami, używając wreszcie, jeżeli zachodzi potrzeba, patyczków, dłuższych kilkakrotnie od zapalek i również poczernionych na końcach, oswoimy łatwo dziecko z prostym a jednocześnie niezbędnym pojęciem znaku i kierunku.

Zapewne, może się przytrafić, że liczby ujemne sprawią na razie pewien kłopot początkującemu, lecz wystarczy mu przytoczyć stosowne przykłady, a wyjaśni sobie należycie właściwą naturę tych liczb.

Zarzucają, że liczba nie może być mniejszą od niczego czyli od zera, a jednak mówi się często w życiu codziennym, że termometr wskazuje tyle a tyle stopni niżej zera. Kiedy zamierzamy wskazać wysokość pewnego punktu nad poziomem morza, rozumiemy doskonale, że punkt, znajdujący się w głębinie morskiej, leży pod poziomem. Kiedy wyszedłszy ze swego mieszkania, zmierzylem drogę, przebyłą w pewnym kierunku, następnie zaś odbyłem tę drogę z powrotem, zdaję sobie sprawę z tego, że tych dwóch dróg o kierunkach przeciwnych nie mogę wyrazić tą samą liczbą. Człowieka, nie posiadającego majątku, lecz i nie mającego długów, nie można uważać za bogatego; gdyby jednak los zrządził, że pozbywszy się majątku, pozostał jeszcze z długami, możnaby było o nim powiedzieć, że posiada mniej, niż nic, że majątek jego jest ujemny. Korek posiada pewien ciężar, ponieważ upuszczony w powietrzu spada na dół; zanurzony jednak w wodzie i puszczoney swobodnie podnosi się w górę, a więc jego ciężar stał się, przynajmniej pozornie, ujemnym. Jednym słowem, liczby ujemne nie tylko nie mają w sobie nic tajemniczego, lecz, przeciwnie, stosują się w sposób najzupełniej naturalny do wszystkich tych wielkości (a takich nie brak), które z istoty swej mogą nam się przedstawiać w dwóch wprost przeciwnych

stanach, jako to: ciepło i zimno, wysoko i nisko, majątek i dług, przyszłość i przeszłość i t. d.

Posiłkując się konkretnymi przykładami i urozmaicając swe wyjaśnienia manipulacjami z zapalkami i patyczkami, potrafiacie zainteresować przedmiotem nawet małe dzieci i utrwalić w ich umysłach te proste i dostępne pojęcia. Pod względem zaś wyrobienia umysłu takie zajęcia przyniosą dziecku z pewnością więcej pożytku, niż monotonne recytowanie niezrozumianych prawideł lub niezrozumiałych określeń.

Chociaż wasi wychowańcy poznali dopiero w swych zabawach pierwsze dwa działania arytmetyczne: dodawanie i odejmowanie, chociaż zaledwie od niedawna nauczyli się pisać cyfry i kilka liter, pomimo to wkroczyli za wamiśmiało w dziedzinę *algiebr*y. Wymawiając wobec dzieci to straszne słowo, nie zapomnijcie im powiedzieć, że użyteczna i piękna nauka, *algiebra*, jest względnie młodą, zasługę zaś jej stworzenia przypisują Franciszkowi Viète ¹⁾.

15. Liczenie, mierzenie, stosunki.

Dotychczasowe zadania polegały na liczeniu i mierzeniu. Jeżeli po przeliczeniu garści zboża znaleźliśmy w niej 157 ziaren, rozumieliśmy, że liczba 157 może równie dobrze wyobrażać zbiór krążków, zapalek, drzew, owiec, wogóle jakichkolwiek przedmiotów. Jeżeli dalej, chcąc zmierzyć pewną długość, pokryliśmy ją 157 jednakowymi zapalkami, umieszczonemi obok siebie, mówiliśmy, że ta długość ma 157 zapalek. Należy jednak zauważyć, że otrzymane odpowiedzi nie miałyby dla nas żadnego znaczenia, gdybyśmy nie mieli pojęcia o jednym ziarnie zboża, o jednym krążku, o jednym drzewie, o jednej owcy, wreszcie o jednej zapalce.

¹⁾ Viète, matematyk francuski, urodził się w Fontenay-le-Comte (1540—1603).

Istotnie, rola liczby polega na tym, iż wywołuje ona w naszym umyśle porównanie zbioru z pojedynczym przedmiotem (ziarnem, krążkiem i t. d.) Ten pojedynczy przedmiot, bez którego nie możnaby utworzyć liczby, nazywa się *jednością*, porównanie zaś, o którym mowa, oznaczamy mianem *stosunku*. Można przeto powiedzieć, że liczba jest stosunkiem zbioru do jedności.

Pojęcie stosunku trzeba należycie utrwalić w umyśle początkującego, tymbardziej, że jedność, z którą porównujemy dany zbiór, nie zawsze jest jednakowa. Powiązawszy, na przykład, daną garść zapalek w pęczki i przeliczywszy te ostatnie, znaleźliśmy ich siedem; liczba siedem jest stosunkiem danego zbioru zapalek do jednego pęczka, który tym razem uważamy za jedność. Gdybyśmy następnie rozwiązali pęczki i policzyli pojedyncze zapalki, znaleźlibyśmy liczbę siedemdziesiąt, która przeto jest stosunkiem tego samego zbioru zapalek do nowej jedności — jednej zapalki. Weźmy jeszcze trzy wiązki zapalek i przeliczmy tę garść pęczkami i pojedynczymi zapalkami; otrzymane przytym liczby: trzy, trzydzieści i trzysta są odpowiednio stosunkami tej samej garści zapalek do trzech różnych jedności: wiązki, pęczka i pojedynczej zapalki.

Można obmyślić mnóstwo rozmaitych przykładów tego rodzaju w celu należytego oswojenia ucznia z pojęciem stosunku, które jest podstawą wszelkiego liczenia i mierzenia, a jednak, wskutek dziwnego zaślepienia, zostało odsunięte na sam koniec szkolnego kursu arytmetyki, pomimo, że nie można przeliczyć nawet dwóch ziaren grochu, nie mając pojęcia o stosunku dwóch do jednego, lub zmierzyć długości, liczącej trzy zapalki, bez porównania jej z długością jednej zapalki (stosunek trzech do jednego) i t. d.

Teraz będzie najwłaściwiej *pokazać* uczniowi różne przedmioty, należące do układu metrycznego, jako to: metr, litr, kilogram i t. d., lecz pod warunkiem, że nie będziemy się wdawali w żadne wyjaśnienia teoretyczne, w żadne określenia, że wreszcie nie każemy mu niczego uczyć się na pamięć. Niech dziecko wprawia się w użycie tych miar, niech się nie-

mi posługuje przy mierzeniu i liczeniu, a wtedy w jego umyśle wyrzeźbi się pojęcie stosunku i połączy ściśle z pojęciem liczby, co będzie stanowiło niezbędny warunek należytego pojmowania rzeczy w owym czasie, kiedy od zabawy przejdzie do systematycznej nauki.

Nauka będzie je wtedy zajmowała i bawiła, zamiast stać się dlań nudną pańszczyzną lub nawet torturą.

16. Tabliczka mnożenia.

Przystąpimy teraz do utworzenia tabliczki, która nam będzie bardzo użyteczną w następstwie; w dodatku, sama jej budowa stanowi dobre ćwiczenie. Tabliczka w takiej postaci, w jakiej ją podamy, jest powszechnie przypisywana Pytagorasowi ¹⁾, jakkolwiek pod tym względem nie mamy pewności; w każdym razie pomysł nie jest świeżej daty.

Aby utworzyć tabliczkę mnożenia, wypisujemy najprzód na arkuszu papieru kratkowanego 9 pierwszych liczb w 9 następujących po sobie kratkach:

1 2 3 4 5 6 7 8 9,

poczynamy do pierwszej liczby 1 dodajemy tę samą liczbę, do otrzymanej sumy 2 dodajemy znowu 1 i otrzymujemy sumę 3 t. d., póki nie utworzymy w ten sposób pierwszej kolumny fig. 11. Podobnie utworzymy następne kolumny, bacząc, aby dziecko wykonywało w pamięci odpowiednie dodawania, w tabliczce zaś wypisywało tylko otrzymane sumy. Tworząc, na przykład, kolumnę, rozpoczynającą się od 7, mówimy: 7 a 7, 14; a 7, 21; a 7, 28; a 7, 35; a 7, 42; a 7, 49;

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Fig. 11.

¹⁾ *Pytagoras*, filozof grecki, urodz. na wyspie Samos w VI wieku przed Chr.

a 7, 56; a 7, 63 i piszemy jednocześnie w tej kolumnie liczby 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, jedną pod drugą. Do utworzenia przeto tabliczki mnożenia wystarcza dokładna znajomość tabliczki dodawania.

Po ukończeniu tabliczki łatwo spostrzeżemy, że odpowiednie wiersze i kolumny są w niej jednakowe. Naprzykład, zarówno kolumna rozpoczynająca się od 3, jako też rozpoczynający się od 3 wiersz składają się z tych samych liczb: 3, 6, 9, ... 27.

Znajomość tej tabliczki jest niezbędna. Nie zmuszajmy jednak dziecka do uczenia się jej na pamięć, zachęcajmy je natomiast do jej układania, sprawdzania, badania, wreszcie do posilkowania się nią, jak to zobaczymy w następstwie. Zapomniawszy, niech ją dziecko ponownie ułoży, a dojdzie wkrótce do tego, że będzie ją *widziało* z zamkniętymi oczyma.

Nie byłoby w tym nic zdrożnego, gdyby dziecko układało większe tablice mnożenia, lecz popierwsze ułożenie tablicy do 20, np., lub 25 zajęłoby sporo czasu, powtóre zaś niema koniecznej potrzeby obarczać pamięć większą tablicą, jakkolwiek mogłoby to przynieść pewien pożytek uczącemu się.

Dobrze jest zwrócić uwagę dziecka na pewne osobliwości tabliczki mnożenia. W kolumnie lub wierszu, rozpoczynających się od 5, cyfra jedności jest naprzemian 5 i 0, w kolumnie zaś lub wierszu, rozpoczynających się od 9, cyfry jedności 8, 7, 6... maleją stopniowo o 1, podczas gdy cyfry dziesiątek 1, 2, 3,... stopniowo wzrastają o 1. Przytoczone osobliwości łatwo można wytłumaczyć.

Można też ułożyć tabliczkę mnożenia, nie posilkując się zupełnie cyframi, jeżeli użyjemy w tym celu drobnokratkowego papieru. Przytoczona tabliczka (fig. 12) jest doprowadzona do 10.

Nakreślono ją w ten sposób, że na górnym poziomym brzegu tablicy oraz na lewym pionowym odmierzone kolejno 1, 2, 3, ... 10 kratek, poczym przez punkty podziału poprowadzono szereg linii pionowych i poziomych, które podzieliły tablicę na większe kratki. Każda z nich zawiera taką liczbę

małych kratek, jaka znajduje się na odpowiednim miejscu w tabliczce cyfrowej. Zgodność tabliczki, wyobrażonej na fig. 12, z poprzednią (fig. 11) wypływa poprostu stąd, że

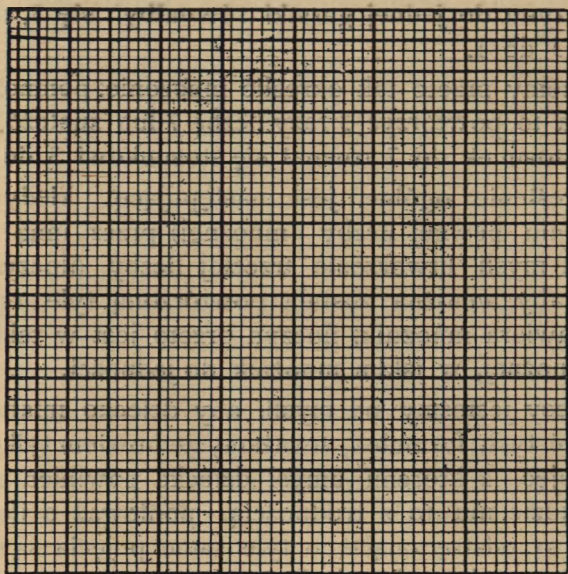


Fig. 12.

przy tworzeniu pierwszej wykonano graficznie te same działania, które doprowadziły do drugiej drogą zwykłego, cyfrowego rachunku.

17. I l o c z y n.

Wziąwszy do ręki 3 garstki zapalek, po 7 w każdej, zapytujemy, ile to czyni zapalek? Aby odpowiedzieć na to pytanie, należy wykonać *mnożenie* 7 przez 3. Rezultat tego działania nazywa się *iloczynem*, liczba 7 — *mnożną*, liczba zaś

3 — *mnożnikiem*. Gdybyśmy, zamiast pomieszać wszystkie zapalki, zachowali pierwotne 3 garstki czyli za jedność uważali nie pojedynczą zapalkę, lecz garstkę 7 zapalek, wtedy szukany iloczyn wyraziłby się liczbą 3 lub, inaczej, stosunek tego iloczynu do jednej garstki równałby się 3, a więc stosunkowi 3 do 1.

Możemy przeto tak określić mnożenie: pomnożyć 7 przez 3 oznacza to powtórzyć 3 razy liczbę 7 lub znaleźć taką liczbę, aby jej stosunek do 7 równał się stosunkowi 3 do 1.

Określenie ogólne jest następujące: kiedy mówimy o mnożeniu pewnej liczby (mnożnej) przez inną (mnożnik), mamy na myśli utworzenie trzeciej liczby (iloczynu) w taki sposób, aby mnożna została powtórzoną tyle razy, ile jedności zawiera mnożnik; iloczyn przeto jest w takim stosunku do mnożnej, w jakim mnożnik do jedności.

Dalecy jesteśmy od myśli, aby dziecko miało się uczyć na pamięć tych formułek, uważamy je bowiem tylko za streszczenia pojęć, z którymi umysł dziecka powinien się oswoić. Nie przyjdzie mu to z trudnością, ponieważ o ile powyższe formułki są odstręczające, o tyle same pojęcia są nadzwyczaj proste; można je nadto doskonale przygotować, przerabiając odpowiednie przykłady z ziarnami, zapalkami lub kratkami papieru kratkowanego.

Możemy być pewni, że dziecko odrazu spostrzeże, iż chcąc znaleźć iloczyn, należy wykonać pewne dodawanie; że n. p. iloczyn 7 przez 3 jest sumą $7+7+7$, podobnie jak liczba 3 jest sumą $1+1+1$. Ponieważ zaś tabliczka w poprzednim rozdziale została takim właśnie sposobem ułożona, łatwo więc w niej odnajdzie żądany iloczyn 21 w kratce, znajdującej się na przecięciu kolumny „7” z wierszem „3”.

Powiedzmy też dziecku, że $\times$ jest znakiem mnożenia, że przeto frazes „iloczyn 7 przez 3 jest 21” można zastąpić piśmiennym wyrażeniem $7 \times 3 = 21$.

Zamiast 7×3 piszemy często 7.3. Możemy też mieć do czynienia nie z określonymi liczbami 7 i 3, lecz z jakimikolwiek dwiema, które oznaczamy literami a , b , pisząc ich

iloczyn w postaci $a \times b$, $a \cdot b$ lub poprostu ab . Jeżeli przeto piszemy równość $ab = p$, to chcemy wyrazić, że iloczyn a przez b jest liczbą p .

Można też rozpatrywać takie iloczyny, jak $a \times b \times c \times d$ lub $abcd$, które tworzą się w ten sposób, że mnożymy a przez b , otrzymany iloczyn przez c , wreszcie drugi iloczyn przez d ; a, b, c, d są to *czynniki* iloczynu $abcd$. W podobny sposób można tworzyć iloczyny iluokolwiek czynników.

Przechodząc do rachunku mnożenia, zauważmy najprzód, że w tabliczce mnożenia znajdujemy gotowe iloczyny w tych wszystkich przypadkach, w których zarówno mnożna, jak mnożnik są mniejsze od dziesięciu.

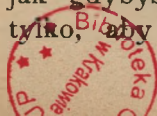
Następnie z łatwością da się wyjaśnić mnożenie liczby przez 10, 100, 1000... Dalej można wskazać (oczywiście bez żadnych wyjaśnień teoretycznych) zwykłe sposoby mnożenia dwóch liczb, podawane we wszystkich podręcznikach arytmetyki, i zachęcić dziecko do przerobienia wielu przykładów dla nabycia wprawy. Zalecałbym jednak gorąco zapoznać dziecko przedewszystkim z t. zw. metodą *muzułmańską*, która prawie równie prędko, jak zwykła, prowadzi do celu, ma zaś tę wyższość, że jest zrozumialszą i łatwiejszą w zastosowaniu. Metoda ta jest mało znaną w szkolnictwie, chociaż pisało o niej wielu autorów.

Wyjaśnimy ją (fig. 13) na prostym przykładzie:

9347×258 . Ponieważ w danym wypadku mnożna ma 4 cyfry, mnożnik zaś — 3, obieramy na papierze kratkowanym 3 wiersze po 4 kratki w każdym, poczym nad utworzoną w ten sposób figurą wypisujemy cyfry mnożnej 9, 3, 4, 7 *od lewej ręki ku prawej*, przy lewym zaś boku figury piszemy *od dołu ku górze* cyfry mnożnika 2, 5, 8. Wykreśliwszy następnie kropkowane linie figury, piszemy w każdej kratce iloczyn odpowiednich liczb, jak gdybyśmy układali tabliczkę mnożenia, przestrzegając tylko, aby cyfra dziesiątek tego iloczynu wypadła *pod*,

	9	3	4	7	
8	72	24	32	56	6
5	45	15	20	35	2
2	18	6	8	14	5
	2	4	1	1	

Fig. 13.



cyfra zaś jedności—*nad* linią kropkowaną. Dodajemy wreszcie kolumny w kierunku linii kropkowanych i znajdujemy iloczyn 2411526.

Dobre strony opisanej metody polegają na tym, że popierwsze oszczędza nam przenoszenia, niezbędnego przy zwykłym mnożeniu, powtórne nie zmusza nas do przestrzegania pewnego określonego porządku mnożenia. Istotnie, po zapełnieniu wszystkich krutek figury możemy być pewni, żeśmy niczego nie opuścili.

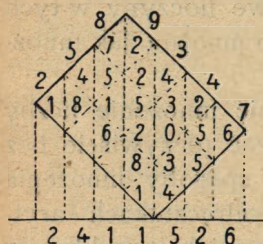


Fig. 14.

Zmieniwszy położenie figury (fig. 14), możemy wykonać powyższe mnożenie tak, aby dodawanie odbywało się w kolumnach pionowych, nie ukośnych, co dzieciom może się wydawać naturalniejszym.

Dla osób, obeznanych z teorią mnożenia, zasady przytoczonej metody są oczywiste, dzieciom zaś na razie niepożrebne. Ciekawsze z pomiędzy nich może same dojdą do jej zrozumienia, obecnie zaś chodzi nam przedewszystkim o to, aby potrafiły rachować poprawnie i *aby je to zajęło*.

Zmieniajmy corychlej przedmiot pogawędek, jeżeli spostrzeżemy, że nasi słuchacze są zmęczeni lud znudzeni.

Na zakończenie mnożenia nadmienimy, że iloczyn

$$a \times a \times a \dots \times a,$$

w którym wszystkie czynniki są równe, nazywa się *potęgą* a . Jeżeli taki iloczyn zawiera n czynników, nazywamy go n -tą potęgą a i oznaczamy symbolem a^n ; 2-ga potęga nazywa się *kwadratem*, 3-cia zaś—*sześcianem* (dowiemy się wkrótce, dlaczego wprowadzono te nazwy). Liczba n jest *wykładnikiem* potęgi.

Naprzykład, 4-ta potęga 2 oblicza się w sposób następujący:

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4 = 16; \text{wykładnik } 4.$$

Sześcian 5:

$$5 \times 5 \times 5 = 5^3 = 125; \text{wykładnik } 3.$$

Kwadrat 7:

$$7 \times 7 = 7^2 = 49; \text{wykładnik } 2$$



18. Ciekawe rachunki.

Niezwykłe wyniki działań, wykonanych na pewnych liczbach, pobudzają ciekawość dzieci i rozwijają w nich zamiłowanie do rachunku. Przytaczam przeto kilka przykładów tego rodzaju.

I. Dajcie dziecku zapieczętowaną kopertę i każcie mu napisać jakąkolwiek 3-cyfrową liczbę, np. 713. Niech napisze cyfry tej liczby w odwrotnym porządku i otrzymaną liczbę 317 odejmie od pierwszej. Niech następnie do różnicy $713 - 317 = 396$ doda liczbę 693, otrzymaną z cyfr różnicy, wypisanych w odwrotnym porządku; otrzyma sumę $396 + 693 = 1089$. Po otworzeniu koperty znajdzie tam napisaną na kawałku papieru tę samą liczbę 1089, którą mogliście zawczasu przygotować, ponieważ otrzymacie ją z każdej liczby 3-cyfrowej po wykonaniu wskazanych działań, aby tylko cyfry setek i jednostki obranej liczby były różne.

II. Jeżeli wykonamy następujące działania:

$$12 \times 9 + 3, 123 \times 9 + 4, \dots 123456789 \times 9 + 10,$$

otrzymamy w rezultacie liczby: 111, 1111, ... 1111111111, utworzone z samych jedynek.

Podobnie, rezultaty działań $9 \times 9 + 7, 98 \times 9 + 6, \dots 9876543 \times 9 + 1$ są liczbami, utworzonymi z samych ósemek.

III. Iloczyn 12345679×9 składa się z samych jedynek. Gdybyśmy zaś tę samą mnożną 12345679 pomnożyli odpowiednio przez mnożniki 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, otrzymalibyśmy również ciekawe iloczyny, ponieważ pierwszy składałby się z samych dwójek, drugi — z trójek i t. d.

IV. Jeżeli liczbę 142857 pomnożymy odpowiednio przez 2, 3, 4, 5, 6, otrzymamy iloczyny:

285714, 428571, 571428, 714285, 857142,

utworzone z tych samych cyfr, co i dana liczba.

Ta sama liczba, pomnożona przez 7, staje się liczbą 999999.

Jeżeli daną liczbę przetniemy na połowy i dodamy otrzymane liczby 142 i 857, otrzymamy sumę 999. Podobną własność posiada też każdy z powyższych 5 iloczynów.

V. Zauważymy wreszcie, że mnożenie pewnej liczby przez 9, 99, 999 można zastąpić pomnożeniem tej liczby przez 10, 100, 1000 i odjęciem od iloczynu mnożnej. Jeżeli mnożna jest niewielka, łatwo się wprawić w pamięciowe wykonywanie podobnych mnożeń.

19. Liczby pierwsze.

Przypatrując się tabliczce mnożenia, zauważymy, że zawiera ona tylko niektóre liczby w granicach pomiędzy jej najmniejszym i największym iloczynem. Innymi słowy, pewne liczby są iloczynami, inne nie są; ostatnie nazywają się liczbami *pierwszemi*, pierwsze — liczbami *złożonemi*.

Naprzykład, liczby 2, 3, 5, 7, 29, 71 są pierwsze, liczby

zaś 4, 6, 9, 87, 91 są złożone, ponieważ $4 = 2 \times 2$, $6 = 2 \times 3$, $9 = 3 \times 3$, $87 = 3 \times 29$, $91 = 7 \times 13$.

Jakkolwiek daleko posuwamy się w szeregu liczb, spotykamy wciąż liczby pierwsze i złożone, które różnią się zasadniczo jedne od drugich. A jednak, pomimo prac największych uczonych, wiemy bardzo mało o naturze liczb pierwszych i to do tego stopnia, że, mając do czynienia z nieco większą liczbą, musimy wykonać cały szereg prób, wymagających długich i mozolnych rachunków, aby orzec, czy dana liczba jest pierwszą, czy też złożoną. Ten przykład bezsilności nauki wobec tak prostych na pozór kwestji niechaj nas uczy skromności i przypomina, że drobną jest wiedza ludzka wobec ogromu rzeczy nieznanych.

Pomimo to już w starożytności znano sposób tworzenia dowolnie długich szeregów liczb pierwszych, który polega na wypisaniu wszystkich liczb po kolei w danych granicach i na wykreśleniu tych z pomiędzy nich, które są iloczynami

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37
38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61
62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73
74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85
86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97
98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109
110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121
122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133
134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144	145
146	147	148	149	150							

z pomnożenia innych przez 2, 3, 5 i t. d. Stosując ten sposób do pierwszych 150 liczb, wypiszemy je po kolei oprócz 1, która jest zbyteczną.

Począwszy od 2, wykreślimy w powyższej tablicy co drugą liczbę, ponieważ w ten sposób natrafimy na liczby 4,

6,..., które są iloczynami z pomnożenia przez 2 czyli liczbami parzystymi; opuścimy je wszystkie, jako złożone, aż do 150 włącznie.

Następnie wykreślimy, poczynawszy od 3, co trzecią liczbę (o ile która z nich nie została już poprzednio wykreślona, jako parzystą), gdyż w ten sposób pozbędziemy się iloczynów z pomnożenia przez 3.

Dalej, ponieważ pierwszą po 3 niewykreśloną liczbą jest 5, wykreślimy co piątą liczbę, od niej liczoną. Postąpiwszy tak samo z liczbami 7, 11 i t. d., znajdziemy, że w powyższej tablicy pozostaną następujące niewykreślane liczby:

2	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41
43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97
101	103	107	109	113	127	131	137	139	149,		

które stanowią wszystkie liczby pierwsze do 150.

Ten pomysłowy sposób wyszukiwania liczb pierwszych nazwano, na cześć jego wynalazcy, *sitę Eratostenesa* ¹⁾.

20. l l o r a z.

Z kilku garstek liczmanów, po 7 sztuk w każdej, utworzono jedną garść, liczącą 56 liczmanów. Ile garstek wzięto w tym celu?

Aby odpowiedzieć na to pytanie, należy wykonać działanie, które nazywa się *dzieleniem*. Można przeto powiedzieć, że, mając dany iloczyn dwóch czynników 56, oraz jeden z nich 7, znajdziemy drugi czynnik przy pomocy dzielenia.

¹⁾ *Eratostenes*, uczony aleksandryjski, urodził się w Cyrenie (276 — 193 przed Chr.)

Dany iloczyn 56 nazywa się *dzielną*, dany czynnik 7—*dzielnikiem*, poszukiwany zaś rezultat—*ilorazem*. Można znaleźć iloraz drogą kolejnego odejmowania dzielnika od dzielnej, następnie tegoż dzielnika od otrzymanej reszty i t. d., jeżeli przytym policzymy, ile razy należało odjąć w ten sposób dzielnik, aby z dzielnej nie pozostała żadna reszta. Po wykonaniu np. szeregu odejmowań 7 od 56, otrzymamy reszty 49, 42, 35, 28, 21, 14, 7, skąd widać, że dzielnik 7 należy 8-krotnie odjąć od dzielnej 56, aby ją całkowicie wyczerpać. Poszukiwanym więc ilorazem jest liczba 8, którą zresztą można było łatwo odszukać w tabliczce mnożenia. .

Ponieważ jednak opisany sposób nie dałby się zastosować do nieco większych liczb, ze względu na rosnącą niepomiernie liczbę odejmowań, wypada więc w tych wypadkach uciec się do klasycznego rachunku dzielenia, który skraca liczenie kolejnych odejmowań przez ich masowe wykonywanie.

Abym dzieci przyzwyczaiły się z łatwością do rachunku dzielenia, zalecamy im koniecznie z początku tworzenie tabliczki zawierającej iloczyny dzielnika przez 2, 3,... 9. Tym sposobem w ciągu rachunku unikną wahań, sprawiających tyle kłopotu początkującym rachmistrzom.

Wyjaśnimy rachunek na przykładzie dzielenia 643734 przez 273, w którym iloczyny dzielnika przez pierwsze dziewięć liczb są następujące:

$$1 \times 273 = 273$$

$$6 \times 273 = 1638$$

$$2 \quad \quad 546$$

$$7 \quad \quad 1911$$

$$3 \quad \quad 819$$

$$8 \quad \quad 2184$$

$$4 \quad \quad 1092$$

$$9 \quad \quad 2457$$

$$5 \quad \quad 1365$$

Dalej prowadzimy rachunek, jak zwykle:

$$\begin{array}{r}
 643734 \overline{) 273} \\
 \underline{546} \\
 977 \\
 \underline{819} \\
 1583 \\
 \underline{1365} \\
 2184 \\
 \underline{2184} \\
 0
 \end{array}$$

W dzielnej mamy 643 tysięcy, w liczbie zaś 643 dzielnik zawiera się 2 razy, jak widać z powyższej tabliczki; odjawszy przeto od dzielnej 546 tysięcy, wykonamy od razu 2000 odejmowań. W pozostałej reszcie 97734 znajdujemy 977 setek; ponieważ zaś 977 zawiera dzielnik 3 razy, odjawszy więc od reszty 819 setek, wykonamy od razu jeszcze 300 odejmowań. W drugiej reszcie 15834 mamy 1583 dziesiątek, w liczbie zaś 1583 dzielnik zawiera się 5 razy; odjawszy więc od tej reszty 1365, wykonamy 50 dalszych odejmowań. Ostatnia reszta 2184 zawiera dzielnik dokładnie 8 razy, czyli po odjęciu dzielnika jeszcze 8 razy wyczerpiemy dzielną w zupełności. Tym sposobem znaleźliśmy iloraz 2358, który jest liczbą wszystkich wykonanych odejmowań dzielnika.

Nie należy jednak kłaść zbytniego nacisku na powyższe wyjaśnienia, gdyż obecnie chodzi nam głównie o to, aby dziecko nabrało wprawy rachunkowej.

W przytoczonym przykładzie dzielenie było możliwe, ponieważ dobraliśmy odpowiednio dzielną i dzielnik. Gdybyśmy jednak te liczby obrali dowolnie, dzielenie najczęściej stałoby się niemożliwym, t. j. niemożnaby było odjąć dzielnika od dzielnej tyle razy, aby z niej nic nie pozostało. Stosując jednak i w tym wypadku powyższy rachunek, odejmiemy dzielnik od dzielnej *tyle razy, ile można*, poczym znajdziemy pewną liczbę, mniejszą od dzielnika, która nazywa się *resztą*.

Jeżeli np. chodzi o podzielenie 220 przez 12, łatwo się przekonamy, że to jest niemożliwe, gdyż po 18-krotnym odjęciu dzielnika 12 od dzielnej 220 znajdziemy resztę 4. Różnica jednak $220 - 4$, czyli 216, jest podzielna przez 12 i na iloraz otrzymamy liczbę 18. Widzimy więc, że każde dzielenie z resztą prowadzi bezpośrednio do dzielenia bez reszty, jeżeli pierwotną dzielną zmniejszymy o resztę.

Poprzestańcie zresztą na zapoznaniu dziecka z rachunkową stroną dzielenia, gdyż na teorię tego działania i inne, z nią związane, nie czas jeszcze w obecnym okresie przygotowawczym.

Dobrze jest wskazać dzieciom, że dzielenie wyrażamy znakiem : lub —, wskutek czego wyrażenia $56 : 7$ lub $\frac{56}{7}$ oznaczają iloraz z podzielenia 56 przez 7. Można więc napisać: $56 : 7 = \frac{56}{7} = 8$; ogólnie zaś równość $\frac{a}{b} = q$ wyraża, że iloraz z podzielenia liczby a przez liczbę b jest liczbą q .

21. Podział ciastka na równe części.

U ł a m k i.

Przypuśćmy, że pięć osób zamierza się podzielić okrągłym ciastkiem. Należy w tym celu podzielić ciastko na pięć równych kawałków (fig 15) kreskami, wychodzącymi ze środka, poczym każdej osobie przypadnie jeden kawałek taki, jak AOB. Działka AOB każdej osoby nazywa się piątą częścią ciastka i wyraża się liczbą $\frac{1}{5}$ ciastka.

Gdyby dwie z pomiędzy pięciu osób były nieobecne, a chcieliby im zachować

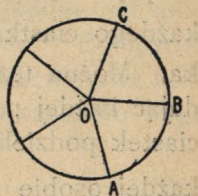


Fig. 15.

ich działki, odłożonoby na bok dwa równe kawałki, np. AOB i BOC, które stanowiłyby razem dwie piąte ciastka i wyrażałyby się liczbą $\frac{2}{5}$ ciastka. Takie liczby, jak $\frac{2}{5}$, nazywają się *ułamkami*, których *wyrazami* są 2 i 5. Liczba 2, umieszczona nad kreską i oznaczająca liczbę kawałków, nazywa się *licznikiem*, liczbę zaś 5, umieszczoną pod kreską i wskazującą, na ile części podzielono całe ciastko, nazywamy *mianownikiem*.

Wziąwszy $\frac{5}{5}$ ciastka, utworzymy oczywiście całe ciastko. Podzieliwszy wogóle ciastko na pewną liczbę równych części i wzięwszy je wszystkie razem, odtworzymy całe ciastko. Wyjaśniliśmy w ten sposób, że ułamek $\frac{a}{a}$, którego licznik i mianownik są jednakowe, równa się 1.

Gdyby do podziału ciastka stanęło dziesięć osób zamiast poprzednich pięciu, wypadłoby ciastko podzielić na dziesięć równych kawałków, na części dziesiąte, które można otrzymać z piątych, dzieląc każdą z nich, AOB, na połowy. Widzimy więc, że $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$. Z równą łatwością wyjaśnimy, że wogóle dwa ułamki są równe, jeżeli wyrazy jednego z nich zostały utworzone przez pomnożenie odpowiednich wyrazów drugiego przez tę samą liczbę. Zapoznaliśmy więc dziecko w sposób poglądowy z podstawową zasadą teorii ułamków, dowodzenie zaś zostawimy na później.

Przypuśćmy następnie, że mamy do podziału 17 jednakowych ciastek pomiędzy 5 osób. Podzieliwszy każde ciastko na pięć równych części i dając każdej osobie piątą część każdego ciastka, znajdziemy, że na każdą wypadnie $\frac{17}{5}$ ciastka. Można też 15 ciastek podzielić równo pomiędzy 5 osób, dając każdej po 3 ciastka, każde zaś z pozostałych dwóch ciastek podzielić na pięć równych części i dać dodatkowo każdej osobie piątą część każdego ciastka, czyli razem $\frac{2}{5}$. Wyjaśniliśmy więc, że $\frac{17}{5} = 3 + \frac{2}{5}$

Postępując w ten sposób, łatwo zapoznamy dziecko z rachunkiem ułamków. Trzeba jednak koniecznie używać w tym celu przykładów konkretnych: ciastek, jabłek, pomarańcz, miar z podziałkami, gdyż wtedy tylko dziecko zrozumie, że nowe wyrażenia arytmetyczne są również liczbami i wyrażają stosunki.

Powiedzmy też naszym uczniom, o czym się zwykle zapomina, że liczby ułamkowe można stosować tylko do tych przedmiotów, które z natury swej dają się podzielić na części. Gdybyśmy, na przykład, rozważali w pewnym zagadnieniu liczbę osób, wtedy stosowanie ułamków byłoby niedorzecznością, odpowiedź zaś ułamkowa dowodziłaby niemożliwości zagadnienia.

Innemi słowy, rachunek stosuje się tylko do tych rzeczy, których natura na to pozwala. Warto też zapamiętać jeszcze następującą maksymę: namysł i odwołanie się do zdrowego rozsądku winny zawsze poprzedzać rachunek.

Jako ilustrację przytaczamy następujący przykład, podany przez Edwarda Lucas ¹⁾. Pewien krawiec, mający 16 metrów materji, odcinał codziennie z tej sztuki po 2 metry. Pytanie, po ilu dniach pociął całą sztukę? Roztargnienie, połączone z automatycznym wykonywaniem rachunków, podszepnie z pewnością odpowiedź: po 8 dniach, zamiast po 7, czego wymaga zdrowy rozsądek.

Urozmaicajmy działania, wykonywane na ułamkach, stosując je, wedle możności, do przykładów konkretnych i unikając zbyt zawiłych rachunków.

Zwróćmy też uwagę dzieci na *ułamki dziesiętne*, na sposób ich pisania oraz na rachunek tych ułamków. Ponieważ dobre podręczniki arytmetyki dostarczają nauczycielowi niezbędnych wskazówek pod tym względem, poprzestanę więc

¹⁾ *Edward Lucas*, matematyk francuski, urodzony w Amiens (1842—1891). Niedoceniano go za życia, jakkolwiek pomiędzy współczesnymi był to jeden z najlepszych znawców teorii liczb. Zmartwienia i zawody przyczyniły się do przedwczesnej śmierci tego uczonego.

na zwróceniu uwagi, że dobrze jest posiłkować się przedewszystkiem miarami długości i monetami.

Wyjaśnijmy wreszcie dzieciom na przykładach konkretnych, że dwójakie znaczenie kreski —, którą uważamy za symbol ułamka i znak dzielenia, nie jest przypadkowe i nie prowadzi do nieporozumień, gdyż n.p. $\frac{15}{3}$ jest równie dobrze ilorazem z podzielenia 15 przez 3, jak ułamkiem $\frac{15}{3}$.

22. Przechodzimy do geometrii.

Zapoznaliśmy się już z linią prostą, która jest najprostszą figurą geometryczną. Aby wytworzyć sobie pojęcie *płaszczyzny*, uważajmy powierzchnię wody w spokoju, tafli szklanej, dobrze wypolerowanej, powierzchnię sufitu, podłogi, drzwi. Za płaszczyznę też możemy uważać powierzchnię tabliczki sztywnej lub arkusza papieru, naklejonego na gładkiej deszczulce.

Przyglądając się tym przedmiotom, nabieramy przeświadczenia, że płaszczyzna, podobnie jak prosta, może być przedłużaną nieograniczenie. Dokładny linjał przystaje do płaszczyzny we wszystkich kierunkach; na arkuszu papieru n.p. można nakreślić tyle prostych, ile nam się spodoba.

Jeżeli nakreślimy tylko dwie proste, może się przytrafić, że te proste są *równoległe*, jak AB i CD (fig. 16). Zauwa-

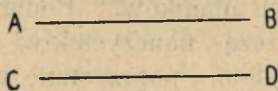


Fig. 16

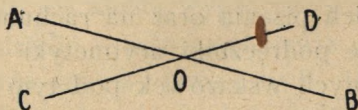


Fig. 17.

żymy, że na papierze linjowanym wszystkie proste są równoległe; spostrzeżemy też, że równoległe nigdzie się nie spotykają.

Jeżeli, przeciwnie, dwie proste AB, CD spotykają się w punkcie O (fig. 17), wtedy figury AOC, COB, BOD, DOA nazywają się *kątami*. Dwa kąty są równe wtedy, kiedy można je doprowadzić do przystania. Naprzykład, są równe kąty AOC i BOD, jako też COB i DOA.

Jeżeli dwie proste (fig. 18) przecinają się w ten sposób, że kąty DOA i AOC są równe, wtedy są równe wszystkie kąty naokoło punktu O i nazywają się *kątami prostymi*; figura zaś, utworzona przez dwie takie proste, ma postać krzyża. Na papierze kratkowanym widzimy kąty proste w każdym punkcie spotkania się dwóch linii. Mówimy o dwóch prostych, tworzących kąty proste, że są wzajemnie *prostopadłe*.

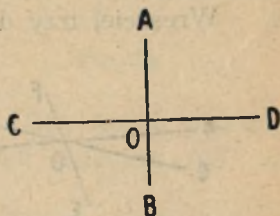


Fig. 18.

Kąt mniejszy od prostego, jak n.p. AOC na fig. 17, nazywa się *ostrym*, kąt zaś większy od prostego, jak COB, zowiemy *rozwartym*.

Nitka z ciężarkiem na końcu (pion) jest obrazem prostej *pionowej*, prosta zaś do niej prostopadła nazywa się *poziomą*. Wszystkie proste, które wyobrażamy sobie n.p. na powierzchni wody spokojnej, są poziome, sama zaś powierzchnia zowie się płaszczyzną *poziomą*. Patrząc na kartkę papieru kratkowanego, leżącą na stole, mówimy, że proste, poprowadzone na niej z lewej ku prawej, są poziome, inne zaś, prostopadłe do nich — pionowe, ponieważ wyobrażamy sobie przytym, że kartkę zdjęto ze stołu i umieszczono n.p. na ścianie.

Nakreślmy na arkuszu papieru trzy proste i rozpatrzmy różne przypadki, które mogą się przytrafić.

Wszystkie trzy proste mogą być równoległe, jak na fig. 19.

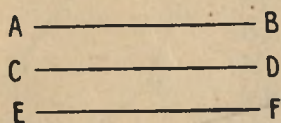


Fig. 19.

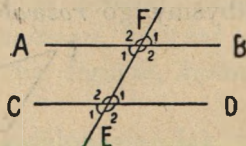


Fig. 20.

Dwie z pomiędzy nich (fig. 20) AB , CD są równoległe, trzecia zaś EF przecina je w punktach E i F i zowie się *poprzeczną*. W tym przypadku wszystkie kąty, oznaczone (1) są równe, jako też kąty, oznaczone (2), każda zaś suma, utworzona z kąta (1) i kąta (2), jest równa dwóm kątom prostym.

Wszystkie trzy proste (fig. 21) przecinają się w jednym punkcie O .

Wreszcie, trzy dane proste (fig. 22) przecinają się po



Fig. 21.

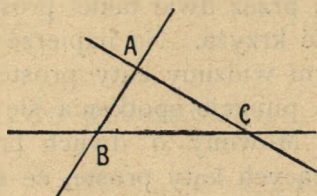


Fig. 22.

dwie w trzech punktach A , B , C i ograniczają w ten sposób część płaszczyzny ABC , którą można rozpatrywać oddzielnie (fig. 23), zowiąc ją *trójkątem*. Punkty A , B , C nazywamy *wierzchołkami*, odcinki zaś AB , BC , CA — *bokami* trójkąta; kąty A , B , C , zaznaczone na figurze, są *kątami* trójkąta.

Jeden z kątów trójkąta, n.p. A (fig. 24), może być prostym; wtedy trójkąt nazywa się *prostokątnym*.

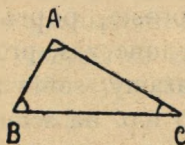


Fig. 23.

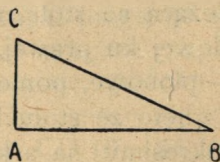


Fig. 24.

Gdyby zaś trójkąt posiadał jeden kąt rozwarty (fig. 25), nazwalibyśmy go *rozwartokątnym*.

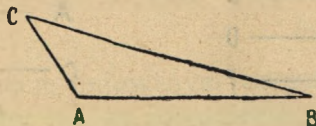


Fig. 25

Trójkąt, posiadający dwa boki AB, AC równe (p. trójkąty na fig. 26), nazywa się *równoramiennym*; w takim trójkącie kąty B, C są równe.

Jeżeli wszystkie trzy boki trójkąta są równe, mamy do czynienia z trójkątem *równobocznym*, w którym wszystkie kąty są też równe (fig. 27).

W trójkącie ABC (fig. 28) możemy którykolwiek bok BC uważać za *podstawę*. Spuściwszy wtedy z wierzchołka A prostopadłą do BC, która przetnie ten bok w punkcie A', będziemy uważali odcinek AA' za *wysokość* trójkąta.

Jakkolwiek prostą figurą jest trójkąt, posiada jednak niezliczone własności. Niektóre z nich będą przedmiotem

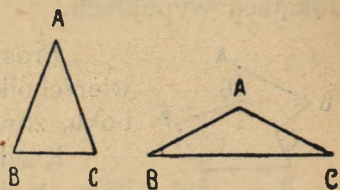


Fig. 26.

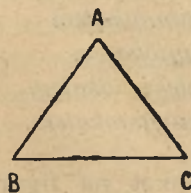


Fig. 27.

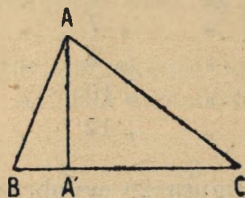


Fig. 28.

późniejszej nauki, obecnie zaś nie uczymy się jeszcze niczego, patrzymy tylko na figury i zapoznajemy się z ich nazwami, gdyż i to się przyda w następstwie.

Część płaszczyzny (fig. 29), ograniczona wieloma prostymi lub, ściślej mówiąc, odcinkami prostych, nazywa się *wielokątem*. Odcinki AB, BC,... HA są *bokami*, punkty A, B,... H *wierzchołkami*, kąty zaś A, B,... H, oznaczone na figurze, *kątami* wielokąta.

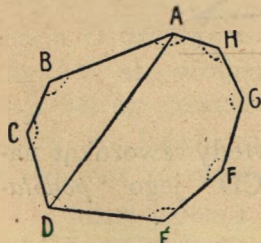


Fig. 29.

O takim wielokącie, jak na fig. 30, mówimy, że posiada kąty *wklęsłe*,

wielokąt zaś, nie mający kątów wklęsłych, nazywa się *wypukłym* (fig. 29).

W następstwie będzie mowa prawie wyłącznie o wielokątach wypukłych.

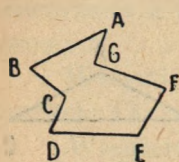


Fig. 30.

Prosta AD (fig. 29), która łączy dwa wierzchołki wielokąta, nie leżące na jednym boku, zowie się *przekątną*.

Każdy wielokąt posiada tyleż wierzchołków, ile boków i kątów, nazwy zaś częściej spotykanych wielokątów zostały utworzone według liczby ich kątów. Więc, jak powiedziano wyżej, wielokąt o trzech bokach nazywa się *trójkątem*, następnie:

wielokąt o 4 bokach nazywa się *czworokątem*

"	"	5	"	"	"	<i>pięciokątem</i>
"	"	6	"	"	"	<i>sześciokątem</i>
"	"	7	"	"	"	<i>siedmiokątem</i>
"	"	8	"	"	"	<i>ośmiokątem</i>
"	"	10	"	"	"	<i>dziesięciokątem</i>
"	"	12	"	"	"	<i>dwunastokątem</i> .

Figura 29 wyobraża wypukły ośmiokąt, na figurze zaś 30 widzimy siedmiokąt z kątami wklęsłymi.

Jeżeli dwa boki (fig. 31) czworokąta AB, CD są równo-

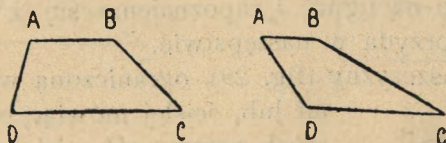


Fig. 31.

ległe, dwa zaś pozostałe nierównoległe, wtedy czworokąt nazywa się *trapezem*, boki zaś AB, CD jego *podstawami*.

Czworokąt (fig. 32), w którym boki AB , CD oraz BC , DA są równoległe, jest *równoległobokiem*. W równoległoboku równe są boki AB i CD oraz BC i AD ; oprócz tego są równe kąty A i C oraz B i D .

Równoległobok, którego wszystkie boki są równe (fig. 33), nazywa się *rombem*.

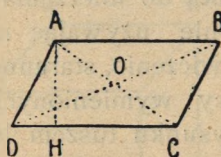


Fig. 32.

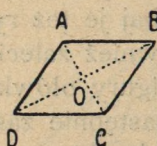


Fig. 33.

Jeżeli jeden kąt równoległoboku jest prosty, pozostałe trzy kąty są również proste; mamy wtedy *prostokąt* (fig. 34).

Wreszcie prostokąt, którego wszystkie boki są równe, nazywa się *kwadratem* (fig. 35).

Czworokąt posiada dwie przekątne; przekątne każdego równoległoboku (fig. 32, 33, 34 i 35) AC , BD w punkcie prze-

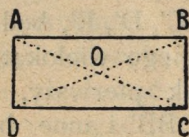


Fig. 34.

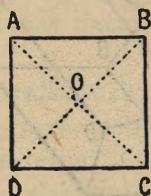


Fig. 35.

cięcia O dzielą się wzajemnie na połowy. Przekątne rombu (fig. 33) są wzajemnie prostopadłe; przekątne prostokąta (fig. 34) są równe; wreszcie, przekątne kwadratu (fig. 35), który, jak łatwo zauważyć, jest jednocześnie prostokątem i rombem, są równe i wzajemnie prostopadłe.

Jeżeli jeden z boków równoległoboku (fig. 32) CD będziemy uważali za jego *podstawę* i nakreślimy prostą AH , prostopadłą do CD (która jednocześnie będzie prostopadłą

i do AB), wtedy odcinek AH tej prostopadłej będzie *wysokością* równoległoboku.

Kreśląc odcinki wzdłuż linii papieru kratkowanego, możemy nakreślić dowolną liczbę prostokątów i kwadratów.

Niech wasi uczniowie wykreślą starannie powyższe figury, oraz inne, które im nasunie wyobraźnia, posilając się ołówkiem, linjałem, ekierem i podziałką do mierzenia długości. Niechaj je też rysują od ręki, nie używając narzędzi. Można również zalecić, jako dobre ćwiczenie, staranne wyrysowanie figury ołówkiem przy pomocy wymienionych przyrządów, następnie zaś obwiedzenie rysunku tuszem lub atramentem od ręki.

Z umysłu nie wzmiankujemy tutaj cyrkla i przenośnika, odkładając na później pobieżny opis ich użycia.

Przypominamy też przy okazji, że nie należy przerywać stopniowej nauki rysunku, odkąd dziecko zaczęło stawiać pierwsze kreski.

Jeżeli z wierzchołków wielokąta ABCDE (fig. 36), który

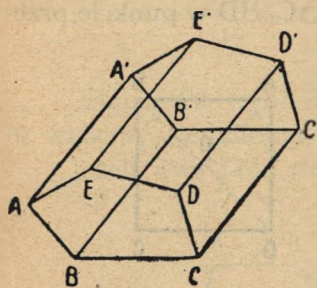


Fig. 36

leży n.p. na płaszczyźnie poziomej, poprowadzimy zewnątrz tej płaszczyzny równoległe i równe proste AA', BB', CC', DD', EE', wtedy końce ich A', B', C', D', E', będą wierzchołkami drugiego wielokąta, takiego samego jak pierwszy, czworokąty zaś AA' BB' i inne będą równoległobokami. Bryła, ograniczona dwoma wielokątami i wszystkimi równoległobokami, nazywa się

graniastosłupem (pryzmą), którego *podstawami* są dwa równe wielokąty, *ścianami*—równoległoboki, *krawędziami* zaś — proste AA', BB'... Odległość pomiędzy płaszczyznami podstaw nazywa się *wysokością* graniastosłupa.

Graniastosłup, którego podstawy są poziome, krawędzie zaś—pionowe, nazywa się *prostym*.

Jeżeli podstawy graniastosłupa są równoległobokami, mamy do czynienia z *równoległoscianem*.

Graniastosłup prosty wreszcie, którego podstawą jest kwadrat i którego wysokość równa się bokowi podstawy, zowie się *sześcianem* i ma kształt kostki do grania (figura 37).

Połączywszy wierzchołki wielokąta ABCDE (fig. 38) z punktem S, leżącym zewnątrz płaszczyzny wielokąta, otrzy-

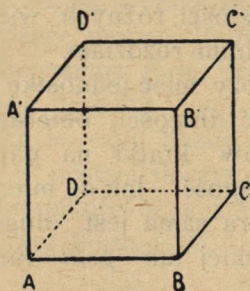


Fig. 37.

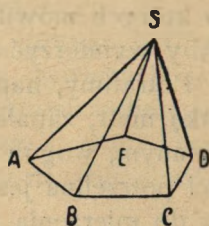


Fig. 38.

mamy bryłę, ograniczoną tym wielokątem i trójkątami SAB, SBC,... SEA i zowiącą się *ostrosłupem* (piramidą). Wielokąt ABCDE jest *podstawą*, trójkąty SAB,... są *ścianami*, proste SA, SB,...—*krawędziami*, wreszcie punkt S jest *wierzchołkiem* ostrosłupa. Odległość wierzchołka od płaszczyzny podstawy (pionowa, jeżeli ta płaszczyzna jest poziomą) nazywa się *wysokością* ostrosłupa.

Mając pod ręką patyczki i kilka kawałków drutu, możemy łatwo zbudować przybliżone modele opisanych brył. Można też wystrugać podobne modele z marchwi lub kartofla.

Zauważymy, że figury 36 i 38 odpowiadają bryłom, których wszystkie krawędzie są widoczne (modele z patyczków), przeciwnie, na figurze 37 wyrysowano linjami kropkowanymi trzy niewidzialne krawędzie AD, DC i DD' sześcianu, wyciętego z jakiegokolwiek materji nieprzezroczystej.

23. Pola wielokątów.

Wyraz „*geometria*“ oznacza pod względem etymologicznym „*mierzenie ziemi*“, co oczywiście nie odpowiada obe-

enemu stanowi tej nauki, lecz wyjaśnia, że i ona, jak wszystkie inne nauki, zawdzięcza swój początek pewnym potrzebom ludzkości. Już w zaraniu swych dziejów ludzkość uczuwała potrzebę pomiaru gruntów. Ponieważ zaś powierzchnię tych gruntów można było uważać w przybliżeniu za płaską, ich zaś granice były najczęściej liniami prostymi, chodziło więc o wyznaczenie, o wymierzenie rozciągłości różnych wielokątów, o których mówiliśmy w poprzednim rozdziale.

Aby wymierzyć cośkolwiek, należy mieć jednostkę mierniczą. Potrafimy, na przykład, mierzyć długości, obierając za jednostkę metr, zapalkę, jeden z boków kratki na papierze kratkowanym, wogóle jakąkolwiek długość. Jak do mierzenia długości potrzebna jest jednostka, która sama jest długością, tak też do mierzenia rozciągłości płaskiej lub *pola* musimy obrać za jednostkę pewne pole.

Umówiono się mianowicie, aby, obrawszy pewną jednostkę długości, uważać za jednostkę pola kwadrat, którego bok równa się obranej jednostce długości.

Wiemy już, że w celu wymierzenia pewnej długości, nakładamy na nią obraną jednostkę i liczymy, ile razy ta czynność dała się skutecznie w kolejnym następstwie. Łatwo jednak zrozumieć, że podobny proces mierzenia nie da się zastosować do pól, których w przeważnej liczbie wypadków nie można pokryć obranym za jednostkę kwadratem.

Istnieją zato dla figur, opisanych w poprzednim rozdziale, proste sposoby, które pozwalają wyznaczyć ich pola drogą pośrednią.

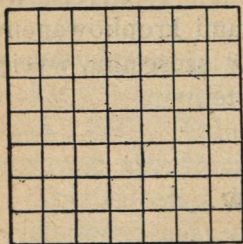


Fig. 39.

Rozpoczynając od kwadratu, umówmy się, aby każda podziałka papieru kratkowanego odpowiadała jednostce długości, wskutek czego pole każdej kratki będzie odpowiadało jednostce pola.

Wyrysujmy następnie na tym papierze kwadrat (fig. 39), którego bok niech ma 7 podziałek, czyli wyraża się liczbą 7 przy obranej jednostce długości.

Ponieważ kratki, mieszczące się

w narysowanym kwadracie, tworzą 7 rzędów po 7 krerek w każdym, całkowita więc ich liczba będzie: 7 razy 7 lub $7 \times 7 = 7^2 = 49$. Gdyby bok kwadratu zawierał jakąkolwiek liczbę podziałek a , zamiast 7, wtedy pole kwadratu wyraziłoby się, jak wyżej, liczbą $a \times a = a^2$. Możemy więc powiedzieć ogólnie, że liczba, wyrażająca pole kwadratu, jest 2-gą potęgą liczby, wyrażającej bok tegoż kwadratu; dlatego też 2-gą potęgę pewnej liczby nazywamy kwadratem.

Narysujmy teraz prostokąt (fig. 40), którego boki wyrażają się liczbami 8 i 3. Liczbę krerek, zawartych w tym prostokącie, czyli liczbę, wyrażającą jego powierzchnię, otrzymamy w postaci iloczynu 8×3 ; gdybyśmy liczby 8 i 3 zastąpili jakimikolwiek a i b , otrzymalibyśmy na wyrażenie pola prostokąta iloczyn ab .

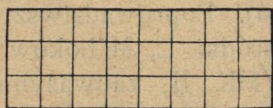


Fig. 40.

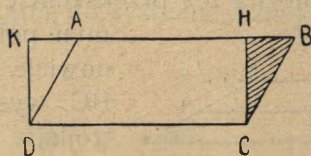


Fig. 41.

Mając równoległobok (fig. 41) ABCD, poprowadźmy w nim wysokość CH i wytnijmy z kartonu model tego równoległoboku. Odcinając od modelu wzdłuż kreski CH zacieniowany trójkąt CHB i umieściwszy go z lewej strony tak, aby bok CB przysłał do DA, otrzymamy prostokąt CDKH, którego pole jest równe polu danego równoległoboku ABCD, gdyż obydwie figury składają się z tych samych części. Ponieważ utworzony w ten sposób prostokąt ma za boki podstawę równoległoboku CD i jego wysokość CH, przeto pole równoległoboku wyraża się liczbą, która jest iloczynem liczb, wyrażających podstawę i wysokość tego równoległoboku.

Jeżeli równoległobok (fig. 42) podzielimy przekątną AC na dwie części, wtedy trójkąty CBA, ADC dadzą się doprowadzić do przystania, czyli pole równoległoboku jest dwa razy większe od pola trójkąta ADC lub, innymi słowy, pole

trójkąta jest połową pola równoległoboku. Połowa więc iloczynu z podstawy DC przez wysokość AH jest liczbą, wyrażającą pole trójkąta ADC.

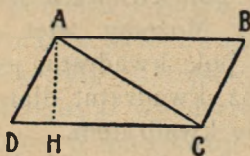


Fig. 42.

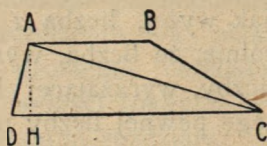


Fig. 43.

Ponieważ trapez (fig. 43) możemy również podzielić przekątną na dwa trójkąty, łatwo wyjaśnimy, że liczba, wyrażająca jego pole, jest iloczynem z wysokości AH przez połowę sumy jego podstaw AB, DC.

Można też przekształcić trapez na prostokąt o tym samym polu (fig. 44). Poprowadziwszy mianowicie przez środki L, M boków AD, BC wysokości HK, IJ, zauważymy, że trójkąty zacieniowane LDH, MCI mogą być usunięte z trapezu i umieszczone na

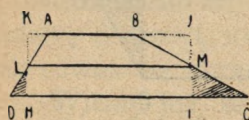


Fig. 44.

równych im trójkątach LAK i MBJ, wskutek czego zostanie utworzony prostokąt HKJI.

Przytoczone wykreślenie wskazuje, że odcinek HI lub LM jest równy połowie sumy podstaw trapezu AB, CD.

Streścimy powyższe wywody w następujących wzorach:

Kwadrat. Bok a .	Pole a^2
Prostokąt. Boki a, b .	Pole ab
Równoległobok. Podstawa a , wysokość h .	Pole ah
Trójkąt. Podstawa a , wysokość h .	Pole $\frac{ah}{2}$
Trapez. Podstawy a, b ; wysokość h .	Pole $\frac{(a+b)h}{2}$

Oprócz tego, umiając zmierzyć pole trójkąta, potrafimy wymierzyć pole jakiegokolwiek wielokąta ABCDEF (fig. 45), podzieliwszy go przekątnymi AC, AD, AE, wychodzącymi z tego samego wierzchołka, na trójkąty ABC, ACD, ADE, AEF.

Zaopatrzymy teraz dzieci w taśmę z podziałką metryczną i zalećmy im pomiary pól różnych figur prawidłowych, jako to: drzwi, okna, stołu, podłogi i sufitu w pokoju, podwórza i t. d., przyczym stosownie do wielkości mierzonych przedmiotów jednostką długości będzie metr, decymetr lub centymetr.

W ten sposób dzieci, nie mając jeszcze żadnych wiadomości teoretycznych o układzie metrycznym, zapoznają się z nim poglądowo, oswoją się z jego najprostszeimi zastosowaniami i nabiorą pojęcia o używaniu różnych jednostek mierniczych. Nie ulega zaś wątpliwości, że te praktyczne wiadomości, pożyteczne same w sobie, staną się cenną pomocą wtedy, kiedy dzieci przystąpią do systematycznej nauki.

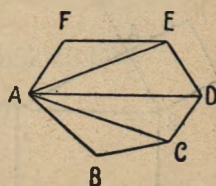


Fig. 45.

24. O ś l i m o s t.

Istnieje w geometrii słynne i ważne twierdzenie, które jednak doprowadzało do rozpaczyci całe pokolenia uczniów, dlatego tylko, że żądano od nich zazwyczaj sztucznego i trudnego do zapamiętania dowodzenia. Nazywają je „kwadratem przeciwprostokątnej“, „twierdzeniem Pytagorasa“ (choćby było znane na kilka wieków przed Pytagorasem) lub, wreszcie, „oślim mostem“ zapewne dlatego, że słabi uczniowie zatrzymują się przy nim i z pewnym wysiłkiem przesadzają tę przeszkodę.

W trójkącie prostokątnym ABC (fig. 46) największy bok BC, przeciwległy kątowi prostemu A, nazywa się *przeciwprostokątną*, dwa zaś pozostałe boki AB, AC—*przykątne*. Jeżeli nakreślimy trzy kwadraty BDEC, CFGA, AHIB, których bokami są odpowiednio przeciwprostokątna i obydwie przykątne, wtedy pole pierwszego kwadratu będzie sumą pól dwóch pozostałych. Przytoczona własność jest przedmiotem słynnego „oślego mostu“.

Na szczęście, już w odległej starożytności wynaleziono w Indjach bardzo prosty sposób sprawdzenia tej własności, na którym można oprzeć zupełnie poprawne dowodzenie, gdy zajdzie tego potrzeba w systematycznej nauce geometrii.

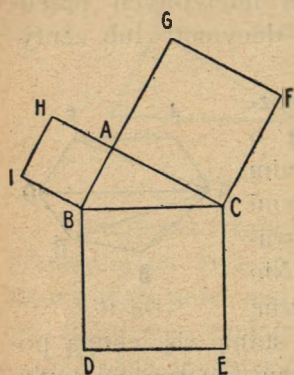


Fig. 46.

Narysowawszy, mianowicie, kwadrat o boku AB (fig. 47 (1)), obierzmy pomiędzy A i B punkt C i wytnijmy z drzewa lub kartonu cztery trójkąty, mające za przykatne odcinki AC, CB. Oznaczywszy następnie te trójkąty kolejnymi liczbami 1, 2, 3, 4, ułożmy je najprzód tak, jak wskazuje figura 47 (1), której zacieniowane części wyobrażają właśnie wycięte trójkąty. Widzimy, że tak ułożone trójkąty utworzyły wewnątrz pierwotnego kwadratu inny, którego bokiem jest przeciwprostokątna każdego z czterech trójkątów, pole zaś jest resztą pola pierwotnego kwadratu, pozostałą po zakryciu jego części czterema trójkątami.

Przesuwając następnie cztery trójkąty, doprowadzmy je do położenia, wskazanego na fig. 47(2), w którym tworzą wewnątrz pierwotnego kwadratu dwa

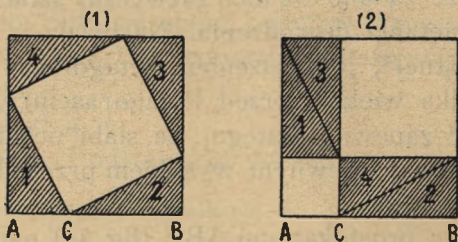


Fig. 47.

inne, mające za boki odpowiednie przykatne każdego z czterech trójkątów. Oczywiście, że dwa ostatnie kwadraty, razem wzięte, mają pole tej samej wielkości, co i kwadrat *przeciwprostokątnej* na figurze 47(1).

Przytoczone objaśnienie jest poprostu zabawką, wymagającą tylko trochę cierpliwości od dziecka, które po wykonaniu

niu opisanych manipulacji nie zapomni już z pewnością twierdzenia i nie przestraszy się, ani zakłopocze, zbliżając się w następstwie do „oślego mostu“. Nierozsądnie postępuje ten, kto komplikuje rzeczy proste i stwarza trudności tam, gdzie ich z natury rzeczy niema.

25. Kilka łamigłówek; mieszanina matematyczna.

Na odcinku ABC (fig. 48) wykreślmy kwadrat $ACIG$ i odmierzwszy $CF = BC$, poprowadźmy prostą FED , równoległą do AC , oraz prostą BEH , równoległą do CI . W ten sposób podzielimy duży kwadrat na 4 kawałki, które można by otrzymać, wykonawszy dwa cięcia nożyczkami wzdłuż FD i BH . Te kawałki są następujące:

- 1) $BCFE$ kwadrat o boku BC ,
- 2) $EHGD$ „ „ „ „ DE równym AB ,
- 3) $EFIH$ prostokąt o bokach, równych odpowiednio AB, BC ,
- 4) $ABED$ prostokąt, równy poprzedniemu.

Sprawdziliśmy więc następujące twierdzenie geometryczne: „Kwadrat, narysowany na sumie dwóch danych odcinków, jest równoważny (posiada to samo pole) kwadratowi pierwszego odcinka, więcej kwadrat drugiego odcinka, więcej dwa razy wzięty prostokąt, którego bokami są dwa dane odcinki“.

Gdybyśmy wykonali poprzedni rysunek na papierze kratkowanym i obliczyli pola otrzymanych figur, t. j. policzyli zawarte w nich kratki, mielibyśmy twierdzenie arytmetyczne:

„Kwadrat sumy dwóch liczb jest równy sumie kwadratów tych liczb więcej ich podwojony iloczyn“.

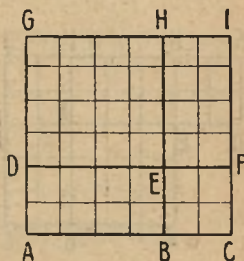


Fig. 48.

Oznaczywszy wreszcie literami a , b odcinki AB, BC, przyjdziemy do wzoru algebraicznego:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Oto pozornie trzy różne twierdzenia, któremi trzykrotnie obarczylibyśmy umysł dziecka, gdybyśmy go nie uprzedzili, że w istocie stanowią one jedną bijącą w oczy prawdę. Zmieniły się pozory i kostjumy, osoba pozostała ta sama. Aby przeto uniknąć straty czasu i niepotrzebnych wysiłków, trzeba o tym wiedzieć i pamiętać, że klasyfikacje naukowe, aczkolwiek niezbędne, muszą być często sztuczne; trzeba też się zawczasu przyzwyczajać do rozpoznawania spotykanych analogji, których parę jeszcze przytoczymy.

Mając odcinek ABC (fig. 49), nakreślmy dwa kwadraty: jeden ABFE na części odcinka AB, drugi ACJH na całym odcinku, poczym, przedłużywszy BF do I, nakreślmy jeszcze kwadrat EHGD.

Aby otrzymać kwadrat ABFE o boku, równym AB czyli różnicy odcinków AC i BC, należy od całkowitej figury, składającej się z dwóch kwadratów ACJH i EHGD, których boki są równe odpowiednio odcinkom AC i BC, odjąć prostokąty BCJI i FIGD, z których każdy ma za boki również odcinki AC i BC. Otrzymaliśmy więc odrazu trzy twierdzenia z dziedziny geometrii, arytmetyki i algebry:

Geometria. Kwadrat, nakreślony na różnicy dwóch odcinków, jest równoważny sumie kwadratów, nakreślonych na tych odcinkach, mniej dwa razy wzięty prostokąt, którego bokami są dane odcinki.

Arytmetyka. Kwadrat różnicy dwóch liczb jest równy sumie kwadratów tych liczb mniej ich podwojony iloczyn.

Algebra. Wzór:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Na figurze 50, na której $BC = FG = FJ = DE$, widzimy kwadrat ABJH o boku AB i kwadrat DEIH, którego bok

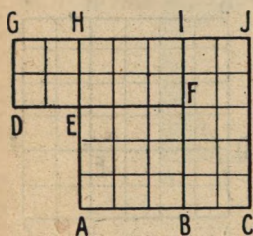


Fig. 49.

$DE = BC$, oraz prostokąt $ACGD$, mający za boki $AC = AB + BC$ i $AD = AB - BC$.

Jeżeli od figury $ACGFJIED$ odejmiemy prostokąt $EFJI$, otrzymamy prostokąt $ACGD$; po odjęciu zaś od tej samej figury prostokąta $BCGF$, znajdziemy figurę $BJIED$, która jest różnicą dwóch kwadratów: $ABJH$ i $DEIH$. Ponieważ zaś prostokąty, odejmowane za pierwszym i drugim razem, są równe, mamy przeto trzy następujące twierdzenia:

Gieometria. Prostokąt, którego boki są odpowiednio sumą i różnicą dwóch danych odcinków, jest równoważny różnicy kwadratów, mających za boki te odcinki.

Arytmetyka. Iloczyn z pomnożenia sumy dwóch liczb przez ich różnicę równa się różnicy kwadratów tych liczb.

Algebra. Wzór:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

Widzimy więc, że staranne wyrysowanie kilku figur i wycięcie kilku kawałków kartonu wystarczyło do sprawdzenia wielu twierdzeń z różnych dziedzin matematyki. Dlatego też niesłusznie nazwano łamigłówkami podobne zabawy, polegające na wycinaniu figur, gdyż, przeciwnie, oszczędzają one dziecku łamania sobie głowy w przyszłości, przedstawiając mu poglądowo różne prawdy matematyczne.

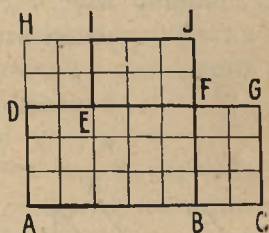


Fig. 50.

26. Podział sześciianu na osiem części.

Wziąwszy sześciian z drzewa (fig. 51), odmierzymy na trzech krawędziach, wychodzących z któregośkolwiek wierzchołka O, trzy równe odcinki OA , OB , OC , następnie zaś przepiłujemy go wzdłuż trzech płaszczyzn AAA , BBB , CCC , przechodzących przez punkty A , B , C i równoległych do

trzech ścian, spotykających się w O. Podzielimy w ten sposób dany sześcián na osiem części.

Aby zdać sobie sprawę, co to są za bryły (mając, oczywiście, model przed oczyma), oznaczymy długości odcinków DA, AO (fig. 51) odpowiednio literami a , b i nakreślmy figurę 52, której obydwie części wyobrażają widok danego sześciánu zgóry po uskutecznieniu cięć AAA i BBB, litery zaś w nawiasach (a) , (b) wskazują grubość odpowiednich brył po uskutecznieniu cięcia CCC. Lewa strona figury 52 wyobraża bryły pod płaszczyzną CCC, prawa zaś—bryły nad tą płaszczyzną. Posiłkując się figurą 52, łatwo spostrzeżemy, że podzieliliśmy dany sześcián na osiem prostopadłościanów, których wymiary są następujące:

lewa strona figury $aaa\ aba\ bba\ baa$

prawa „ „ $aab\ abb\ bbb\ bab$.

Mamy więc:

jeden sześcián o krawędzi a

„ „ „ „ b

3 prostopadłościany o wymiarach a, a, b

„ „ „ „ a, b, b .

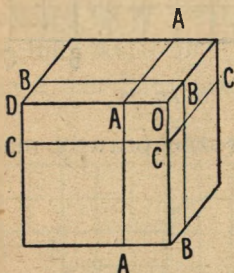


Fig. 51.

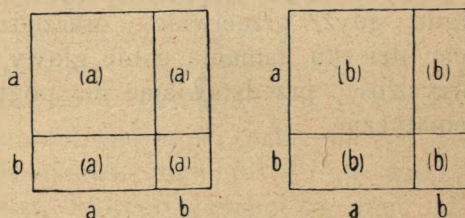


Fig. 52.

Ponieważ długość krawędzi podzielonego sześciánu wynosiła $a + b$, znaleźliśmy przeto, że sześcián, zbudowany na sumie dwóch odcinków a , b , składa się:

1° z sumy sześciánów, zbudowanych na każdym z odcinków a , b ;

2° z trzy razy wziętego prostopadłościanu, którego podstawą jest kwadrat o boku a , wysokością zaś odcinek b ;

3^o z trzy razy wziętego prostopadłościanu, którego podstawą jest kwadrat o boku b , wysokością zaś odcinek a .

Jestto twierdzenie geometryczne.

To samo rozważanie prowadzi do twierdzenia arytmetycznego:

„Sześcian sumy dwóch liczb jest równy sumie sześciannów tych liczb, więcej potrójny iloczyn z kwadratu pierwszej przez drugą, więcej potrójny iloczyn z pierwszej przez kwadrat drugiej“.

W algebrze, wreszcie, mamy odpowiedni wzór:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Analogja z kwadratem sumy, rozważonym w poprzednim rozdziale, jest widoczna.

Mając pod ręką większą liczbę kostek drewnianych, kształtu sześciennego, każde dziecko wykona z łatwością opisaną konstrukcję i wiele innych. Jeżeli zaś nadamy tym zabawom pewien kierunek metodyczny, ułatwimy dziecku orientowanie się w stosunkach przestrzennych i pobudzimy jego ciekawość.

Model sześcianu możnaby łatwo sporządzić z mydła t. zw. zwyczajnego, które sprzedaje się w handlu kawałkami, mającemi kształt prostopadłościanów z podstawą kwadratową; do rozcięcia takiego sześcianu użylibyśmy cienkiego drutu zamiast piłki. Zalecamy jednak, jako praktyczniejsze, sześciany drewniane, o które zresztą łatwo.

27. Liczby trójkątne. Lot żorawi.

Edward Lucas przypisuje pochodzenie liczb, zwanych *trójkątnemi*, obserwacji lotu pewnych ptaków. Na czele szynuje jeden ptak, za nim w drugim szeregu dwa, w trzecim szeregu trzy i t. d., wskutek czego szysk tej lotnej kolumny przypomina nam trójkąt.

Aby wytworzyć sobie pojęcie o liczbach trójkątnych i nauczyć się przedstawiać je graficznie na papierze kratko-

wanym, spójrzmy na figurę 53, której część A zawiera w pierwszym wierszu 1 kratkę, w drugim 2 kratki, w następnych wierszach, do siódmego włącznie, odpowiednio 3, 4, 5, 6, 7 krutek, czyli wyobraża 7-ą liczbę trójkątną

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7;$$

dodawszy, znajdziemy 28.

Lecz taki sposób tworzenia liczb trójkątnych nie daje nam żadnych ogólnych wskazówek do łatwego utworzenia którejkolwiek z nich; gdybyśmy, n. p., chcieli obliczyć 1000-ą, musielibyśmy dodać do siebie 1000 pierwszych liczb, począwszy od 1, co, oczywiście, stanowiłoby długi i nudny rachunek.

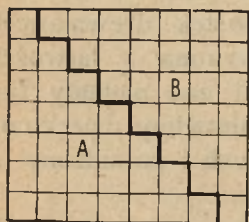


Fig. 53.

Zamiast tego, zauważmy, że druga część B figury 53, rozpatrywana czyto z góry, czy z dołu, wyobraża, ze względu na liczbę zawartych w niej krutek, tę samą liczbę trójkątną, co i część A; całkowita przeto figura jest obrazem dwukrotnej liczby trójkątnej, o którą chodzi. Ponieważ figura 53 składa się z siedmiu wierszy, po osiem krutek w każdym, zawiera więc krutek 7×8 , połowa zaś tego iloczynu, czyli 28, jest 7-ą liczbą trójkątną.

Innemi słowy, mamy:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = \frac{7 \cdot 8}{2} = 28.$$

Podobnie, dla obliczenia 1000-ej liczby trójkątnej wyko-nalibyśmy rachunek:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 1000 = \frac{1000 \cdot 1001}{2} = 500500,$$

nieco krótszy od bezpośredniego dodawania.

Zastępując liczbę 1000 jakąkolwiek inną n , otrzymamy wzór

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

pozwalający nam obliczyć n -ą liczbę trójkątną, którą oznaczmy symbolem T_n .

Liczba kratek, zawartych w figurze 53, jest $2 T_n$. Jeżeli usuniemy w tej figurze ostatnią kolumnę, pozostanie nam kwadrat, złożony z 7 wierszy, po 7 kratek w każdym, który, jak łatwo widzieć, jest połączeniem dwóch liczb trójkątnych T_6 i T_7 . Mamy więc:

$$2 T_7 - 7 = 7^2 = T_7 + T_6.$$

Jeżeli w tej samej figurze 53 dodamy jeszcze jeden wiersz na dole, złożony z 8 kratek, łatwo przekonamy się, że będzie:

$$2 T_7 + 8 = 8^2 = T_8 + T_7.$$

Wziąwszy zaś zamiast 7 jakąkolwiek liczbę n , otrzymamy wzory ogólne:

$$2 T_n - n = n^2 = T_n + T_{n-1}$$

$$2 T_n + n + 1 = (n + 1)^2 = T_{n+1} + T_n.$$

Pomimo wszelkich pozorów uczoności, otrzymaliśmy ostatnie wzory, nie posiłkując się żadnym rachunkiem, lecz poprostu *odczytując* je, *widząc* na figurach lub, wreszcie, budując własnymi rękoma z drewnianych kwadracików, albo jakichkolwiek liczmanów, kładzionych po jednym w każdej kratce.

28. Liczby kwadratowe.

Na figurze 54 widzimy kwadrat, składający się z 7 wierszy, z których każdy zawiera 7 kratek; liczba więc wszystkich kratek, zawartych w tym kwadracie, jest $7 \cdot 7 = 7^2 = 49$. Grubszymi linjami, poprowadzonymi wewnątrz dużego kwadratu, oznaczono mniejsze kwadraty, składające się odpowiednio z 1, 2^2 , 3^2 , 4^2 , 5^2 , 6^2 kratek.

Jedna kratka, u góry z lewej strony, wyobraża pierwszy z wewnętrznych kwadratów; drugi został utworzony z pierwszego przez dodanie 3 kratek, czyli $1 + 3 = 2^2$; trzeci utworzymy z drugiego, dodając dwie kratki z prawej strony, dwie pod spodem i jedną u dołu z prawej, razem 5 kratek. Postępując tak dalej, spostrzeżemy, że:

$$7^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13,$$

t. j. kwadrat 7 jest sumą pierwszych 7 nieparzystych liczb.



Fig. 54.

Gdybyśmy 7 zastąpili jakąkolwiek liczbą n , wtedy z uwagi, że pierwsze liczby nieparzyste do n -ej włącznie są $1, 3, 5, \dots, 2n-1$, otrzymalibyśmy ogólnie:

$$n^2 = 1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1,$$

co, zresztą, możnaby wprost odczytać na odpowiedniej figurze, nakreślonej dla obranej liczby n .

Z przytoczonej własności liczb kwadratowych wypływa inny sposób ich graficznego przedstawienia, jak to widzimy na figurze 55. Nakreślone tutaj

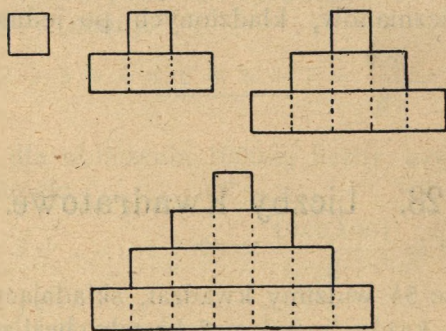


Fig. 55.

kwadraty liczb 1, 2, 3 i 4 łatwo otrzymamy z poprzednich, posilkując się, n.p., drewnianymi kwadracikami.

Przechodząc wreszcie do rozwiązania znacznie trudniejszej kwestji, mianowicie do znalezienia sumy kwadratów następujących po sobie liczb, począwszy od 1, n. p. liczb 1, 2, 3, 4, wyrysujemy przedewszystkim figurę 56, układając ją z kwadratów tych liczb (fig. 54) tak, aby największy kwadrat wypadł u góry, najmniejszy zaś u dołu, poczym, zauważywszy na figurze 55, że w tych kwadratach mamy:

4 wiersze po 1 kratce

3 „ „ 3 kratki

2 „ „ 5 kratek

1 wiersz z 7 kratek,

utworzymy z powyższych wierszy, kładąc jedne pod drugimi, figurę 57.



Fig. 56.

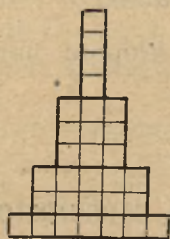


Fig. 57.

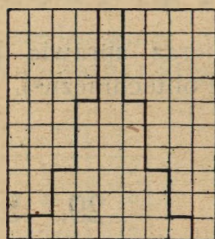


Fig. 58.

Połączywszy następnie figurę 56, tę samą figurę odwróconą, oraz figurę 57, otrzymamy prostokąt (fig. 58), w którym liczba kratek jest równa potrojonej szukanej liczbie.

W tym prostokącie mamy wierszy:

$$1 + 2 + 3 + 4 = \frac{4.5}{2} = 10,$$

w każdym zaś wierszu (jak łatwo spostrzec w pierwszym) kratek:

$$4 + 1 + 4 \text{ lub } 2.4 + 1 = 9;$$

liczba przeto kratek, zawartych w prostokącie, jest $10.9 = 90$, szukana zaś liczba, stanowiąca trzecią część 90, równa się 30. Istotnie, bezpośredni rachunek daje:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30.$$

Gdybyśmy zastąpili 4 jakąkolwiek liczbą n , czyli poszukiwali sumy kwadratów pierwszych n liczb, wtedy, postępując jak wyżej, otrzymalibyśmy prostokąt, odpowiadający figurze 58 i posiadający wierszy:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

oraz kolumn $2n + 1$, który przeto zawierałby kratak

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

Ponieważ zaś szukana liczba jest trzecią częścią poprzedniej, znaleźliśmy wzór:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

który nieraz sprawia dużo kłopotu nawet kandydatom do Szkoły Politechnicznej.

29. Suma sześciianów.

Do uzmysłowania sześciianów liczb $2^3 = 2.2.2$, $3^3 = 3.3.3$ i t. d. przydałyby się w większej ilości kostki drewniane, nieco większe od kostek do grania. Moglibyśmy ich użyć do poprzednio wskazanych konstrukcji oraz do tych, o których będzie mowa w niniejszym rozdziale.

Zobaczymy jednak, że kostki dadzą się zastąpić kwadracikami z drzewa lub kartonu, lub też zwykłymi liczmanami w kształcie płaskich krążków. Obrawszy te ostatnie, pokażemy dzieciom, jak łatwo z nimi manipulować, następnie zachęcimy je do powtórzenia skuteczniejszych już manipulacji przy pomocy kwadracików lub kostek mówiąc, że kto potrafił wykonać rzecz trudniejszą, potrafi z pewnością i łatwiejszą.

Sześciian 1 jest 1³, oznaczmy go przeto jednym krążkiem.

Ponieważ sześcian 2 jest $2 \times 2 \times 2$ czyli 8, przedstawimy go w postaci 2 obok siebie umieszczonych kwadratów (fig. 59), z których każdy składa się z 4 krążków. Następnie, jak wskazuje 2-ga część figury 59, ugrupujemy inaczej te 8

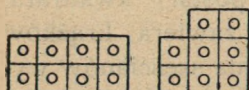


Fig. 59.

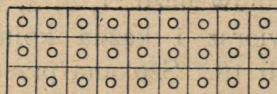
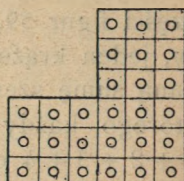


Fig. 60.



krążków, pozostawiając na miejscu pierwsze trzy kolumny i umieszczając czwartą w położeniu poziomym nad nimi.

Sześcian 3 czyli $3 \times 3 \times 3 = 27$ przedstawimy początkowo, jako 3 obok siebie umieszczone kwadraty, z których każ-

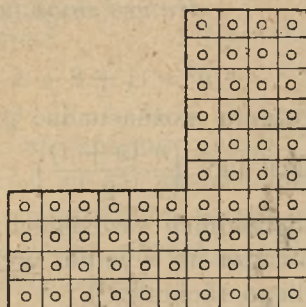
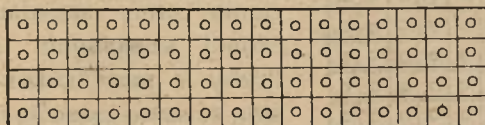


Fig. 61.

dy zawiera po 9 krążków (1-sza część fig. 60), następnie zaś, pozostawiając w tej figurze 6 pierwszych kolumn na swych miejscach, umieścimy nad nimi 3 pozostałe w położeniu poziomym (2-ga część fig. 60).

Postąpimy, wreszcie, tak samo z sześcianiem 4 (fig. 61), pozostawiając na swych miejscach, dla utworzenia 2-ej części figury 61, pierwsze 10 kolumn i umieszczając nad nimi poziomo ostatnie 6.

Jeżeli teraz połączymy, jak wskazuje figura 62, drugie części figur 59, 60, 61, dodając do nich, z lewej strony u góry, jeden krążek, który wyobraża sześciąt 1, otrzymamy szukaną sumę sześciątów liczb 1, 2, 3, 4 w postaci kwadratu, którego każdy wiersz i każda kolumna zawiera krążków $1 + 2 + 3 + 4$ czyli 10. Szukana przeto suma sześciątów wyraża się liczbą 100.

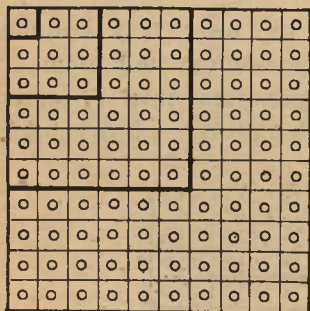


Fig. 62.

Zauważymy przytym, że figura 62 zyskałaby dużo na wyrazistości, gdybyśmy każdy sześciąt oznaczali krążkami innej barwy.

Ponieważ opisana konstrukcja da się zastosować do znalezienia sumy sześciątów, zakończonej sześcianiem jakiegokolwiek liczby n , przychodzimy do wniosku, że *suma sześciątów pierwszych n liczb całkowitych równa się kwadratowi sumy tych liczb*, który wy-

raża się wzorem:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2.$$

Ostatniemu wyrażeniu można nadać prostszą postać

$$(T_n)^2 \text{ lub } \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

I tutaj, jak w poprzednich rozdziałach, łatwa i zajmująca konstrukcja doprowadza do wyniku, wymagającego na innej drodze dość zawiłego rachunku¹⁾.

¹⁾ Rzuciwszy okiem na graficzną tabliczkę mnożenia (fig. 12), łatwo spostrzeżemy, że w obwódkach, oddzielających kwadraty liczb 1, $1 + 2$, $1 + 2 + 3$, ..., znajdują się liczby krątek, wyrażające kolejne sześciatny 2^3 , 3^3 , ...

Możemy więc użyć tej tabliczki do sprawdzenia wyników niniejszego rozdziału.

30. Potęgi liczby 11.

Aby znaleźć kwadrat 11, wykonajmy łatwe mnożenie:

$$\begin{array}{r} 11 \\ 11 \\ \hline 11 \\ 11 \\ \hline 121 \end{array}$$

$$11^2 = 121.$$

Sześcian tej liczby jest iloczynem $121 \cdot 11$:

$$\begin{array}{r} 121 \\ 11 \\ \hline 121 \\ 121 \\ \hline 1331 \end{array}$$

$$11^3 = 1331.$$

Następnie, w celu znalezienia 4-ej potęgi 11 wykonajmy mnożenie:

$$\begin{array}{r} 1331 \\ 11 \\ \hline 1331 \\ 1331 \\ \hline 14641 \end{array}$$

$$11^4 = 14641.$$

Cyfry:

1, 2, 1; 1, 3, 3, 1; 1, 4, 6, 4, 1,

z których składają się kolejne potęgi 11, można otrzymać prościej, nie uciekając się do mnożenia, jeżeli zauważymy, że pierwszą i ostatnią cyfrą każdej potęgi jest 1, pozostałe zaś cyfry którejkolwiek potęgi powstają z dodania dwóch sąsiednich cyfr poprzedniej potęgi.

Jakoż, z 11 otrzymujemy 121, ponieważ $1 + 1 = 2$.

Z 121 otrzymujemy 1331, ponieważ $1 + 2 = 3$, $2 + 1 = 3$.

Z 1331 otrzymujemy 14641, ponieważ $1 + 3 = 4$, $3 + 3 = 6$, $3 + 1 = 4$.

Równie łatwym sposobem otrzymamy w następnym rozdziale i inne, bardzo ważne w algebrze, liczby, z którymi

nasi uczniowie spotkają się później, rozszerzając swą wiedzę matematyczną.

31. Trójkąt i kwadrat arytmetyczne.

Zapełnijmy pierwszą kolumnę z lewej strony (fig. 63) na papierze kratkowanym cyframi 1, pisząc je w dowolnej ilości jedną pod drugą, oraz przypuśćmy, że w pierwszym wierszu od góry obok 1 znajdują się z prawej strony same zera, których jednak nie piszemy. Utworzymy 2-gi wiersz, dodając 1 i 0 i pisząc otrzymaną sumę 1 obok znajdującej się już w tym wierszu 1. Dla utworzenia 3-go wiersza wykonywamy w drugim następujące dodawania: $1 + 1 = 2$, $1 + 0 = 1$, pisząc sumy 2 i 1, w miarę ich otrzymywania, w 3-im wierszu obok siebie, po prawej stronie znajdującej się tam już 1.

Podobnie, z 3-go wiersza otrzymamy 4-ty, wykonawszy w 3-im następujące dodawania: $1 + 2 = 3$, $2 + 1 = 3$, $1 + 0 = 1$.

1									
1	1								
1	2	1							
1	3	3	1						
1	4	6	4	1					
1	5	10	10	5	1				
1	6	15	20	15	6	1			
1	7	21	35	35	21	7	1		

Fig. 63.

1	1	1	1	1	1	1	1		
1	2	3	4	5	6	7	8		
1	3	6	10	15	21	28	36		
1	4	10	20	35	56	84			
1	5	15	35	70					
1	6	21	56						
1	7	28	84						
1	8	36							

Fig. 64.

Widoczna, że w ten sposób otrzymamy tyle następnych wierszy tablicy, ile nam się spodoba; łatwo też zauważyć, że w pierwszych wierszach napotkamy cyfry, z których się składają wyżej obliczone potęgi 11.

Przytoczoną tablicę nazwano, na cześć jej sławnego wynalazcy, *trójkątem arytmetycznym Pascala*¹⁾.

¹⁾ *Błażej Pascal*, uczony i pisarz francuzki, urodził się w Clermont-Ferrand (1623—1662).

Z liczb trójkąta arytmetycznego utworzymy nową figurę (fig. 64), jeżeli, nakreśliwszy kwadrat na papierze kratkowanym, zapełnimy cyframi 1 pierwszy wiersz u góry oraz pierwszą lewą kolumnę tego kwadratu, w każdej zaś z pozostałych krutek napiszemy liczbę, utworzoną przez dodanie do liczby, znajdującej się bezpośrednio nad szukaną, liczby wypisanej bezpośrednio po lewej stronie szukanej.

Liczby: 1, 1; 1, 2, 1; 1, 3, 3, 1; . . . , znajdujące się w poziomych wierszach poprzedniej tablicy, widzimy tutaj uszeregowane pochyło, w kierunku od lewej ręki ku prawej.

Tablica, wyobrażona na figurze 64, nazywa się *kwadratem arytmetycznym Fermata*¹⁾.

Uważając na zwyczajnej szachownicy (fig. 65) pole początkowe O i jakiekolwiek inne X, zapytajmy, iloma różnymi drogami można doprowadzić wieżę z O do X bez cofania jej, czyli posuwając zawsze z lewej ku prawej lub z góry na dół. Odpowiedź na to pytanie znajdziemy w przeniesionym na szachownicę kwadracie arytmetycznym, który wskazuje w danym wypadku (fig. 65), że istnieje 84 różnych dróg, po których wieża może być przesunięta z O do X.

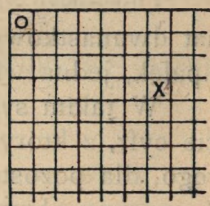


Fig. 65.

Liczby kwadratu arytmetycznego posiadają wiele innych ciekawych własności, o których jednak mówić tu nie będziemy, gdyż na to jeszcze zawcześniej.

32. Różne systematy liczenia.

Przy tworzeniu różnych liczb przy pomocy pojedynczych zapalek, ich pęczków, wiązek i t. d. (rozdz. 3), które doprowadziło nas do powszechnie używanego liczenia piśmien-

¹⁾ *Piotr Fermat*, matematyk francuski, który urodził się w Beaumont de Lomagne (1601 — 1665), może być uważany za największego gienjusza w dziedzinie arytmetyki.

nego, można było przyjąć w pęczku, wiązce i t. d. zamiast dziesięciu jakąkolwiek inną liczbę odpowiednio zapalek, pęczków i t. d.

Gdybyśmy się, n. p., umówili, że z 8 zapalek tworzy się jeden pęczek, z 8 pęczków—jedna wiązka i t. d., wtedy do napisania jakiejkolwiek liczby wystarczyłyby nam cyfry 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, do których, oczywiście, należałoby dołączyć zero.

Różne sposoby piśmiennego przedstawiania liczb nazywają się *systematami liczenia*, liczba zaś, na której opiera się dany systemat, nazywa się jego *zasadą*.

Tak, systemat, z którym spotykaliśmy się dotąd i który jest w powszechnym użyciu, nazywa się dziesiątkowym i ma za zasadę liczbę 10. Przytoczony dla przykładu systemat o zasadzie 8 mógłby być nazwany ósemkowym.

Obrawszy za zasadę liczbę 12, otrzymalibyśmy systemat dwunastkowy, w którym jeden pęczek tworzy się z 12 zapalek, jedna wiązka—z 12 pęczków i t. d.

W takim systemacie należy mieć, oprócz zera, jedenaście cyfr, z których 9 możemy wziąć z systematu dziesiątkowego, dla pozostałych zaś dwóch, oznaczających liczby 10, 11, musimy obmyśleć nowe symbole.

Możemy powiedzieć ogólnie, że w systemacie liczenia, którego zasadą jest liczba B, należy mieć, oprócz zera, B—1 cyfr, liczba zaś B wyraża się znakiem piśmiennym 10.

Dobrze jest umieć napisać w danym systemacie liczenia liczbę, napisaną w innym systemacie, co, w dodatku, jest rzeczą łatwą.

Obierzmy, na przykład, liczbę 374, napisaną w systemacie ósemkowym, i spróbujmy ją napisać w systemacie dziesiątkowym. Uzmysłowiwszy sobie daną liczbę przy pomocy zapalek, znajdziemy, że zawiera ona:

4 zapalki	4
7 pęczków po 8 zapalek	56
3 wiązki po 8×8 zapalek.	192
	252;

lub prościej, jeżeli rozpoczniemy rachunek od lewej ręki, mówiąc: 3 wiązki po 8 pęczków więcej 7 pęczków czyni 31 pęczków; 31 pęczków po 8 zapalek czyni 248, więcej 4 daje w sumie 252.

Gdybyśmy, przeciwnie, zamierzali napisać w systemacie ósemkowym liczbę 598, daną w systemacie dziesiętkowym, należałoby przedewszystkiem odjąć 8 od tej liczby tyle razy, ile można, poczym reszta byłaby pierwszą szukaną cyfrą z prawej strony.

Podzielimy przeto 598 przez 8 i zauważymy resztę 6; następnie otrzymany iloraz 74, który wyobraża liczbę pęczków, podzielimy znowu przez 8 i znajdziemy na resztę 2 pęczki, w ilorazie zaś otrzymamy 9 wiązek; 2 jest drugą szukaną cyfrą. Podzieliwszy wreszcie 9 przez 8, otrzymamy resztę, złożoną z 1 wiązki (1 jest trzecią szukaną cyfrą), w ilorazie zaś znajdziemy 1 pęk (1 jest czwartą i ostatnią szukaną cyfrą).

Piśmiennie wyrazimy te działania w następujący sposób:

$$\begin{array}{r} 598 \mid 8 \\ 38 \quad 74 \mid 8 \\ 6 \quad 2 \quad 9 \mid 8 \\ \quad \quad 1 \quad 1 \end{array}$$

skąd widać wprost, że żadaną liczbę w systemacie ósemkowym należy napisać w postaci 1126.

Gdybyśmy zechcieli wyrazić tę samą liczbę w systemacie dwunastkowym, wtedy, wykonawszy podobny rachunek

$$\begin{array}{r} 598 \mid 12 \\ 118 \quad 49 \mid 12 \\ 10 \quad 1 \quad 4 \end{array}$$

otrzymalibyśmy liczbę 4 1 (10), w której cyfra (10) oznacza liczbę 10 w systemacie dwunastkowym.

Widzieliśmy poprzednio, że liczba 374, dana w systemacie 8-owym, pisze się w systemacie 10-owym jako 252; ta sama zaś liczba w systemacie 12-owym przybiera postać 190. W ten sposób, przy pośrednictwie systematu 10-owego, prze-

chodzimy z łatwością od jednego, jakiegokolwiek, systematu do innego.

Przy pewnej wprawie możemy też łatwo wykonywać działania w jakimkolwiek systemacie; należy tylko pamiętać przy wszelkiej zamianie jedności niższego rzędu na bezpośrednio wyższe lub odwrotnie, że każda jedność zawiera jedności bezpośrednio niższych nie 10, lecz ogólnie B , jeśli liczba B jest zasadą obranego systematu liczenia.

Przytaczamy, dla przykładu, liczbę 1000 systematu dziesiętkowego, napisaną według systematów, których zasadami są odpowiednio 3, 4, 5, . . . 12.

$B = 3$	.	.	.	1101001
4	.	.	.	33220
5	.	.	.	13000
6	.	.	.	4344
7	.	.	.	2626
8	.	.	.	1750
9	.	.	.	1331
10	.	.	.	1000
11	.	.	.	82(10)
12	.	.	.	6(11) ⁴

33. Systemat dwukowy.

Widzieliśmy w poprzednim rozdziale, że w systemacie liczenia, którego zasadą jest liczba B , wystarczy $B - 1$ cyfr, oprócz zera; gdybyśmy, n. p., za zasadę systematu obrali 2, wystarczyłaby nam jedna tylko cyfra znacząca 1.

Zdaje się, że Leibnitz¹⁾ pierwszy powziął myśl stworzenia tego ostatniego systematu, którego użycie wymaga dwóch tylko cyfr 1, 0, chociaż niektórzy twierdzą, że używali go Chińczycy już w bardzo odległych czasach.

¹⁾ Leibnitz, matematyk i filozof niemiecki, urodził się w Lipsku (1646—1716).

Jakkolwiek systemat dwujkowy nie nadaje się do zwykłych rachunków, ponieważ wymaga zbyt wielu cyfr do napisania nieco większej liczby (n. p. liczba 1000 systematu dziesiętkowego staje się w nim liczbą 10-cyfrową 1111101000), znajduje jednak pożyteczne i ciekawe zastosowania w niektórych kwestjach naukowych, oraz stosuje się do wyjaśnienia pewnych gier, jak, n. p., gra w pierścienie (le baguenaudier) i wieża sjamska (la tour d'Hanoi). Obmyślono też zabawkę, opartą na tym systemacie, którą opisał E. Lucas w dziełku p. n. „Zabawy arytmetyczne“ (Arithmétique amusante), nadając jej nazwę „tajemniczego wachlarza“.

Aby wyjaśnić, na czym polega ta zabawka, napiszmy w systemacie dwujkowym 31 pierwszych liczb systematu dziesiętkowego:

1	1				
2	10	12	1100	22	10110
3	11	13	1101	23	10111
4	100	14	1110	24	11000
5	101	15	1111	25	11001
6	110	16	10000	26	11010
7	111	17	10001	27	11011
8	1000	18	10010	28	11100
9	1001	19	10011	29	11101
10	1010	20	10100	30	11110
11	1011	21	10101	31	11111

Następnie, na pasku kartonu A napiszmy w systemacie dziesiętkowym wszystkie te liczby, które są zakończone 1 w systemacie dwujkowym.

Na drugim pasku B napiszmy wszystkie te liczby, których drugą cyfrą z prawej strony jest 1 w systemacie dwujkowym. Podobnie, napiszmy na paskach C, D, E wszystkie te liczby, które w systemacie dwujkowym mają cyfrę 1 odpowiednio na 3-im, 4-ym, 5-ym miejscu z prawej strony.

Jeżeli wręczycie pewnej osobie te 5 pasków i zaproponujecie jej, aby, zamyśliwszy jakąkolwiek liczbę od 1 do 31, zwróciła wam tylko te paski, na których znajduje się pomyślana liczba, będziecie wiedzieli, z jakich cyfr składa się ta

liczba w systemacie dwujkowym, znajdziecie ją przeto jako sumę pierwszych liczb, wypisanych na paskach, które wam zwrócono. Niech będzie, n. p., 25 pomyślaną liczbą, wskutek czego otrzymacie z powrotem paski A, D, E, rozpoczynające się od liczb 1, 8, 16; szukana liczba $= 1 + 8 + 16 = 25$.

A	B	C	D	E
1	2	4	8	16
3	3	5	9	17
5	6	6	10	18
7	7	7	11	19
9	10	12	12	20
11	11	13	13	21
13	14	14	14	22
15	15	15	15	23
17	18	20	24	24
19	19	21	25	25
21	22	22	26	26
23	23	23	27	27
25	26	28	28	28
27	27	29	29	29
29	30	30	30	30
31	31	31	31	31

Możecie powiększyć obszar zgadywanych liczb do 63 lub 127, wzięwszy zamiast 5 odpowiednio 6 lub 7 pasków. Oprócz tego, możecie otoczyć zgadywanie jeszcze większą tajemniczością, zastąpiwszy liczby, napisane na paskach, jakimikolwiek imionami własnymi i ułożywszy przytym tablicę odpowiedniości pomiędzy imionami i liczbami.

Każdy potrafi sobie przygotować podobne paski, a gdyby nawet nie udało mu się przekonać ludzi, że jest czarownikiem, będzie miał w zysku wprawę, nabytą w dodawaniu pamięciowym. Bez takiej wprawy straciłby wkrótce powagę w oczach tych, przed którymi się popisuje.

34. Postępy różnicowe.

Weźmy szereg liczb, na przykład:

4, 7, 10, 13,

takich, aby różnica pomiędzy dwiema kolejnymi była zawsze jednakowa:

$$7 - 4 = 10 - 7 = 13 - 10 = 3.$$

Taki szereg nazywa się *postępem różnicowym*, stała zaś różnica jego wyrazów (3 w obranym przykładzie) zowie się *różnicą* lub *wykładnikiem* postępu.

Liczyby 4, 7, 10, 13 są *wyrazami* postępu; mamy ich tylko cztery w obranym przykładzie, lecz i w tym, i w każdym innym postępie możemy utworzyć dowolną liczbę wyrazów.

Zauważymy, że szereg liczb całkowitych 1, 2, 3, . . . tworzy postęp różnicowy z różnicą 1, szereg zaś liczb nieparzystych 1, 3, 5, . . . — postęp różnicowy z różnicą 2.

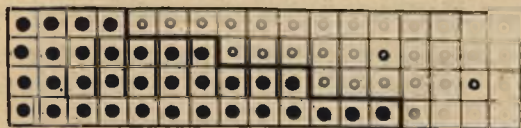


Fig. 66.

Spróbujmy przedstawić graficznie (fig. 66) przytoczony wyżej postęp 4, 7, 10, 13. W tym celu, na papierze kratkowanym odliczymy w pierwszym wierszu 4 kratki (umieszczając w nich czarne krążki), w 2-m — 7 kratek, w 3-im — 10, wreszcie w 4-y — 13. Jeżeli następnie dodamy w 4-y wierszu jeszcze 4 kratki i nakreślimy prostokąt, mający za podstawę 17 i za wysokość 4 kratki, wtedy każdy wyraz postępu, oznaczony naprzemian czarnymi i białymi krążkami, będzie zawarty w tym prostokącie dwa razy.

Z figury 66 wynika wprost, że suma wyrazów skrajnych jest równa sumie dwóch wyrazów, jednakowo oddalonych od skrajnych, suma zaś wszystkich wyrazów postępu jest równa

połowie liczby kratek, zawartych w całym prostokącie, czyli wyraża się liczbą $\frac{17 \times 4}{2}$.

Oznaczywszy, ogólnie, literami a i l skrajne wyrazy postępu, literą zaś n liczbę jego wyrazów, znajdziemy następujące wyrażenie na sumę wyrazów tego postępu

$$\frac{(a + l) n}{2}.$$

Jeżeli $a = 1$ i różnica postępu $= 1$, wtedy $l = n$, suma zaś wyrazów postępu $= \frac{n(n+1)}{2}$. Jeżeli, następnie, $a = 1$ i różnica postępu $= 2$, wtedy $l = 2n - 1$ i suma wyrazów nowego postępu $= n^2$. Doszliśmy przeto na innej drodze do wyników, już wcześniej otrzymanych.

Zauważmy też analogię pomiędzy dopieroco przytoczonym wzorem $\frac{(a + l) n}{2}$ i wzorem na pole trapezu (rozd. 23).

Przytoczymy wreszcie ogólną postać postępu różnicowego, którego pierwszy wyraz $= a$, różnica zaś $= r$:

$$a, \quad a + r, \quad a + 2r, \quad \dots \quad a + (n - 1) r.$$

35. Postępy ilorazowe.

Szereg liczb, na przykład:

$$2 \quad 6 \quad 18 \quad 54 \quad 162,$$

posiadających taką własność, że iloraz z podzielenia którejkolwiek z nich przez poprzednią jest zawsze jednakowy lub, jak się mówi, stały, nazywamy *postępem ilorazowym*, stały zaś iloraz — *wykładnikiem* postępu.

W obranym przykładzie wykładnik $= 3$, pierwszy wyraz $= 2$, liczba zaś wyrazów postępu $= 5$.

Liczby 1, 10, 100, 1000, . . . systematu dziesiętkowego tworzą postęp ilorazowy o wykładniku 10; liczby zaś, wyrażające się temi samemi cyframi w systemacie liczenia o zasadzie B, stanowią postęp ilorazowy, którego wykładnik=B.

Wykładnik postępu ilorazowego może być nie tylko liczbą całkowitą, lecz i ułamkiem. Jeżeli wykładnik jest większy od 1, wyrazy postępu wciąż rosną, mamy przeto postęp *rosnący*; jeżeli, przeciwnie, wykładnik jest mniejszy od jedności, mamy postęp *malejący*, którego wyrazy wciąż maleją.

Aby wyprowadzić wzór na sumę wyrazów postępu ilorazowego, powróćmy do szeregu

$$2 \quad 6 \quad 18 \quad 54 \quad 162$$

i zauważmy, że, pomnożywszy jakikolwiek wyraz tego postępu przez jego wykładnik 3, otrzymamy wyraz następujący w szeregu, pomnożywszy zaś dowolny wyraz przez różnicę $3 - 1$ czyli 2, otrzymamy różnicę dwóch kolejnych wyrazów szeregu:

$$2 (3 - 1) = 6 - 2, \quad 6 (3 - 1) = 18 - 6, \quad 18 (3 - 1) = 54 - 18, \\ 54 (3 - 1) = 162 - 54, \quad 162 (3 - 1) = 486 - 162.$$

Dodawszy te równości stronami odpowiedniami i oznaczwszy szukaną sumę literą s , znajdziemy:

$$s (3 - 1) = 486 - 2; \quad s = \frac{486 - 2}{3 - 1} = 242.$$

Szukajmy teraz sumy s postępu ilorazowego, danego w ogólnej postaci

$$a, b, c \quad . . . \quad . . . \quad k,$$

którego wykładnik = q . Wprowadziwszy jeszcze jeden wyraz $l = kq$, znajdziemy, wzorując się na poprzednim przykładzie:

$$a (q - 1) = b - a, \quad b (q - 1) = c - b, \quad . . .$$

$$k (q - 1) = l - k,$$

poczym

$$s (q - 1) = l - a; \quad s = \frac{l - a}{q - 1}.$$

Ostatni wzór stosuje się do postępu rosnącego, dla postępu zaś malejącego przekształcamy go na następujący:

$$s = \frac{a - l}{1 - q}.$$

Rola postępów ilorazowych w rachunkach jest bardzo wielka, inne zaś ich zastosowania są nader liczne.

W postępach ilorazowych rosnących, których wykładnik nawet niewiele różni się od 1, natrafiamy, w miarę powiększania ilości wyrazów, na liczby, zdumiewające nas na razie swym ogromem, o czym przekonamy się w najbliższych rozdziałach.

Zauważymy w końcu, że postępowi ilorazowemu, składającemu się z n wyrazów, w którym wyraz pierwszy $= a$, wykładnik zaś $= q$, możemy nadać postać:

$$a \quad aq \quad aq^2 \quad . \quad . \quad . \quad aq^{n-1}.$$

36. Ziarna zboża na szachownicy.

Chociaż nie wiemy dokładnie, kto był wynalazcą gry szachowej, istnieje jednak o tym wynalazku starożytna legenda indyjska, którą warto poznać.

Opowiadają, że pewien monarcha, zachwycony nową grą, kazał przywołać wynalazcę i pozwolił mu żądać takiej nagrody, jakiej sam zechce.

„Rozkaz“, odpowiedział zapytany, „aby mi położono 1 ziarno zboża na 1-ym polu szachownicy, 2 ziarna na 2-im polu, 4 na 3-im i t. d. aż do ostatniego 64 go pola, podwajając za każdym razem poprzednią liczbę“.

Monarcha, zdziwiony tak skromnym żądaniem, polecił je spełnić niezwłocznie; lecz jakież było jego zdumienie, gdy mu powiedziano po pewnym czasie, że rozkazowi jego nie

stało się zadość, ponieważ spełnienie skromnego na pozór życzenia wymagałoby ośmiu zbiorów rocznych z całej kuli ziemskiej, w przypuszczeniu, że cała jej powierzchnia jest uprawna.

Istotnie, liczba ziaren zboża, zażądanych przez wynalazcę, jest sumą wyrazów postępu ilorazowego

$$1 \quad 2 \quad 2^2 \quad \dots \quad 2^{63},$$

równa się przeto $2^{64}-1$, czyli wyraża się w systemacie dziesiętkowym następującą 20-cyfrową liczbą:

$$18446744073709551615.$$

Nie probujemy jej nawet odczytywać, gdyż użyte w tym celu wyrazy nie wieleby się przyczyniły do wyjaśnienia jej wielkości.

Jakkolwiek dużą jest przytoczona liczba, spotkamy się w następnych rozdziałach z innemi, znacznie większemi.

37. Tanie kupno.

Jeden z naszych przyjaciół, dajmy na to Paweł, któremu niewątpliwie znana była historia wynalazku gry szachowej, wybudował sobie jednopiętrowy domek z gankiem o 7 schodkach i z 19 schodami wewnątrz, prowadzącemi na pierwsze piętro.

Powziąwszy po kilku latach zamiar sprzedania swej chałupki (zresztą bardzo dobrze utrzymanej), oświadczył pierwszemu nabywcy Gawłowi:

„Chcę sprzedać dom jaknajprędzej, dlatego też ofiaruję bardzo przystępne warunki. Zapłacisz mi 1 kopiejkę za 1-szy stopień mych schodów, 2 kopiejki za 2-gi stopień, 4 kopiejki za 3-ci i t. d.; jednym słowem będziesz podwajał zapłatę co stopień. Ponieważ zaś schodów w mym domu jest tylko 26, sprzedaję ci go, jak widzisz, prawie za bezcen“.

„Zgoda, dobijmy targu!” zawołał Gawęł, zachwycony świetnym interesem, który mu zaproponowano.

Nazajutrz, spożywszy doskonale śniadanie, na które zaprosił Pawła, udał się w stronę jego domku, aby wypłacić umówioną sumę 2²⁶—1 kopiejek.

Z początku wszystko szło gładko i nawet pierwsze stopnie schodów wewnętrznych nie nastroczały trudności; lecz wkrótce woreczek Gawęła zaczął się wypróżniać z przerażającą szybkością. Wtedy Paweł zaproponował mu, aby zaprzestał wchodzenia na piętro i, podając uprzejmie dokładny rachunek należności, rzekł: „Kochany Gawle, jesteś mi dłużny 671088 rb. 63 kop., lecz ponieważ dobrym przyjaciołom zawsze robię ustępstwa, opuszczam ci chętnie 63 kop.”

Biedny Gawęł spuścił nos na kwintę i odtąd, jak mówią, przestrzegał pilnie, aby nauczono jego dzieci, co to jest postęp ilorazowy, którego nieznajomość tak drogo przypłacił.

38. Kopiejka na procencie składanym.

Jedno z najważniejszych zastosowań praktycznych postępów ilorazowych znajdujemy w rachunku *procentów składanych*. Ponieważ 1 rubel, umieszczony na 1 rok przy 5 procentach, przynosi 5 kopiejek, jeżeli przeto, zamiast podnieść, dołączymy te 5 kopiejek do pierwotnego kapitału, otrzymamy sumę 1 rb. 05 kop., którą możemy znowu umieścić na procencie w ciągu 2-go roku, i t. d. Po upływie znacznej liczby lat wzrost kapitału, spowodowany przez procent składany, staje się wprost fantastyczny.

Obliczono, naprzykład, że jedna kopiejka, umieszczona na początku ery chrześcijańskiej na procencie składanym, wynoszącym 5 od sta, zamieniłaby się ku końcowi 19-go stulecia na kapitał, którego wartość przedstawiałaby około trzech miliardów kul złotych, posiadających wielkość kuli ziemskiej. Zauważymy mimochodem, że ten wynik, o którego wielkości

nie możemy sobie wyrobić dokładnego pojęcia, prowadzi do wniosku, iż stosowanie procentu składanego musi być w praktyce ograniczone.

Odpowiedzmy teraz na prostsze pytanie: w ciągu ilu lat należałoby mieć umieszczoną 1 kopiejkę na procencie składanym, wynoszącym 5 od sta, aby utworzony w ten sposób kapitał stanowił milion rubli? Ponieważ odpowiedź wypada: 378 lat, możemy zauważyć, że gdyby ktoś z naszych przodków powziął był w roku 1529, czyli za panowania Zygmunta Starego, szczęśliwą myśl złożenia na nasze dobro jednego złotego na procent składany, 5 od sta, bylibyśmy dzisiaj szczęśliwymi posiadaczami wcale ładnej, gdyż wynoszącej 100 milionów złotych, fortunki.

Gdyby wykonano podobną operację finansową w r. 59 naszej ery, lecz przy stopie procentowej, wynoszącej tylko 1 od sta, otrzymalibyśmy ten sam wynik w roku bieżącym 1907; czyli jeden rubel, umieszczony na takich warunkach, posiadałby obecnie wartość 100 milionów rubli (z wyłączeniem, oczywiście, wszystkich przypadkowych okoliczności, które w tym długim okresie czasu mogłyby wpłynąć na otrzymany wynik).

39. Ceremonjalny obiad.

Pewnego pięknego wieczoru zebrało się dwanaście osób na wspólny obiad, a ponieważ wszyscy przywiązywali dużą wagę do etykiety, miejsc zaś przy stole nie wyznaczono z góry, rozpoczęła się ożywiona dyskusja na ten temat, która jednak nie doprowadziła do żadnego wyniku. Ktoś z obecnych, chcąc znaleźć wyjście z kłopotliwego położenia, zaproponował, aby wypróbowano wszystkie możliwe kombinacje i obrano następnie najodpowiedniejszą z nich. Gdy jednak biesiadnicy, zmieniając miejsca, zaplątali się po kilku minutach w przeróżnych kombinacjach, znajdujący się, na szczęście,

między niemi nauczyciel miejscowego gimnazjum, który miał pewne pojęcie o matematyce, rzekł: „Kochani przyjaciele, ponieważ zupa stygnie, ciągnijmy raczej losy na swe miejsca, gdyż w ten sposób rozstrzygniemy spór prościej i prędszej“. Posłuchano mądrej rady i obiad przeszedł w serdecznym nastroju. Kiedy zaś podano wety, nauczyciel, zabierając głos ponownie, odezwał się w te słowa: „Czy wiecie, ile czasu zużylibyśmy na wyczerpanie wszystkich kombinacji usadowienia się przy tym stole, gdybyśmy na przejście od jednej kombinacji do drugiej zużywali tylko jedną sekundę?“, widząc zaś że wszyscy milczą, ciągnął dalej: „uprawiając tę niewinną zabawę dzień i noc i nie przerywając jej ani na chwilę, ukończylibyśmy ją później, niż po 15 latach i 2 miesiącach, gdybyśmy nawet wzięli w rachubę lata przybyszowe. Jeżeli tedy na początku groziło nam wysuszenie pieczeni, to stosując się ściśle do pierwotnej propozycji, zginęlibyśmy niewątpliwie z głodu, wycieńczenia i bezsenności. Bądźmy więc ceremonjalni, lecz w miarę!“

Nauczyciel nie pomylił się, gdyż dokładna liczba różnych ugrupowań 12 osób przy stole z 12 nakryciami jest równa 479001600, czyli przewyższa 479 milionów, co tymbarziej może nas wprowadzić w podziw, że ugrupowania 2 biesiadników zajęłyby im tylko 2 sekundy czasu, wszystkie zaś możliwe ugrupowania 4 biesiadników dałyby się uskuteczyć w niespełna pół minuty.

Wielkie liczby, o których mówimy, powstają z obliczania t. zw. przestawień, dającego się łatwo przeprowadzić.

Jeżeli mamy pewną liczbę różnych przedmiotów oraz taką samą liczbę różnych miejsc, na których te przedmioty mogą być umieszczone, wtedy każde ugrupowanie danych przedmiotów na danych miejscach nazywamy *przestawieniem* tych przedmiotów.

Mając dwa różne przedmioty a , b i dwa różne miejsca, możemy utworzyć tylko dwa przestawienia ab i ba .

Aby utworzyć przestawienia trzech przedmiotów a , b , c , możemy wziąć przestawienie ab i dołączyć do niego przedmiot c w trzech różnych miejscach: albo po b , albo pomiędzy

a i b , albo też przed a . Ponieważ w podobny sposób z przedstawienia ba otrzymamy trzy nowe, dołączając do niego c , możemy przeto ułożyć następującą tabliczkę wszystkich przedstawień przedmiotów a, b, c :

$a\ b\ c$	$b\ a\ c$
$a\ c\ b$	$b\ c\ a$
$c\ a\ b$	$c\ b\ a$.

Mamy więc tych przestawień 2×3 czyli 6.

Gdybyśmy do któregośkolwiek z ostatnich przestawień, n. p. abc , dołączyli 4-ą literę d , otrzymalibyśmy 4 nowe przestawienia:

$$a\ b\ c\ d \quad a\ b\ d\ c \quad a\ d\ b\ c \quad d\ a\ b\ c;$$

ponieważ zaś z każdego przestawienia 3 liter otrzymamy w ten sposób 4 przestawienia 4 liter, liczba więc wszystkich przestawień 4 liter jest równa 6×4 lub $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Postępując tak dalej, znajdziemy, że liczba przestawień 5 liter $= 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$; wogóle, liczba przestawień n liter $= 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n$, który-to iloczyn oznaczają często symbolem $n!$

Przytoczona niżej tabliczka wykazuje, jak szybko rosną liczby $n!$ z powiększaniem się liczby n .

n	$n!$
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5040
8	40320
9	362880
10	3628800
11	39916800
12	479001600.

Przestawienia nie tylko mają duże znaczenie w matematyce, lecz stosują się także do różnych gier i zabaw, jak, n.p.,

anagramy; ogłoszono też w tej materji liczne prace, nieraz bardzo uczone. Nie mogąc się niemi tutaj zajmować, zaznaczymy wszakże nader pomysłowy sposób wyrażania przesta-

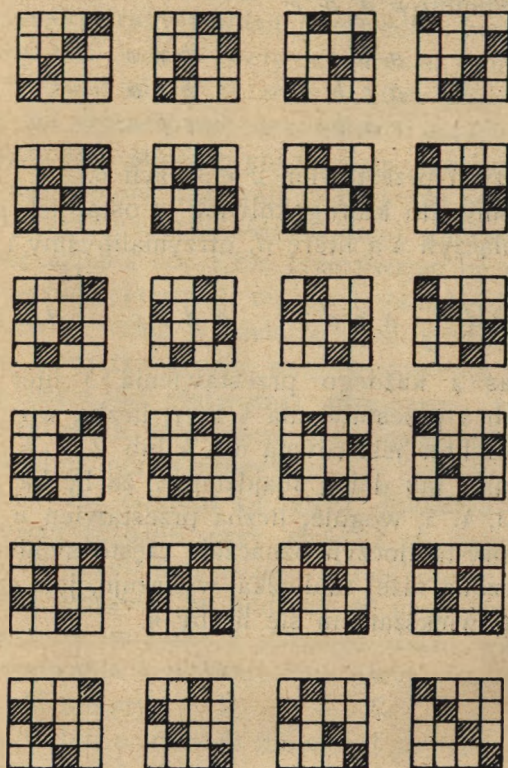


Fig. 67.

<i>abcd</i>	<i>abdc</i>	<i>adbc</i>	<i>dabc</i>
<i>acbd</i>	<i>acdb</i>	<i>adcb</i>	<i>dacb</i>
<i>cabd</i>	<i>cadb</i>	<i>cdab</i>	<i>dcab</i>
<i>bacd</i>	<i>badc</i>	<i>bdac</i>	<i>dbac</i>
<i>bcad</i>	<i>bcda</i>	<i>bdca</i>	<i>dbca</i>
<i>cbad</i>	<i>cbda</i>	<i>cdba</i>	<i>dcba</i>

wień rysunkiem, nazwany przez wynalazcę, Edw. Lucas, *przestawieniami obrazowemi* (permutations figurées). Wyrysujemy, mianowicie, na papierze kratkowym kwadrat, złożony

z n wierszy, po n pól w każdym, i, ograniczając się do przedstawień 4 przedmiotów, uczynimy $n=4$, czyli uważajmy kwadrat, zawierający 16 pól. Jeżeli zastąpimy 4 dane przedmioty a, b, c, d 4 liczbami 1, 2, 3, 4, to dowolne przedstawienie liter $cbda$ może być zastąpione odpowiednim przedstawieniem liczb 3241, według którego zacieniamy w 1-ej kolumnie wyrysowanego kwadratu 3-cie pole, w 2-ej kolumnie 2-ie pole, w 3-ej—4-te pole, wreszcie w 4-ej kolumnie 1-sze pole.

Cztery zacieniowane pola kwadratu są obrazem przedstawienia $cbda$.

Na figurze 67 widzimy obrazy 24 przedstawień 4 przedmiotów, u spodu zaś, dla łatwiejszego zorientowania się, podano tablicę przedstawień, wypisanych w takim porządku, jak ich obrazy.

Gdybyśmy uważali którykolwiek z kwadratów figury 67 za szachownicę, jego zacieniowane pola wyobrażałyby pozycje wież, nie szachujących się wzajemnie; to samo możnaby powiedzieć o innych podobnych kwadratach. Wynika z tego oraz z tabliczki, przytoczonej w niniejszym rozdziale, że na zwykłej szachownicy o 64 polach można ustawić 40320 sposobami osiem wież, nie szachujących się wzajemnie, na szachownicy zaś o 100 polach można ustawić 10 wież w podobnych warunkach 3628800 sposobami. Widzimy z tych przykładów, że pewne kwestje, dość zawile, póki nie stosujemy przedstawień, dadzą się przy ich pomocy bardzo łatwo rozwiązać.

Jako dalsze przykłady przytaczam: liczbę wszystkich ugrupowań kart z talji preferansowej, która jest równa 32!, lub liczbę ugrupowań kart z talji wistowej, równą 52!; nie proponuję jednak pisania otrzymanych liczb w systemie dziesiętkowym. Niech wasi uczniowie zabawiają się obliczaniem czasu, zużytego na wykonanie tych przedstawień, w przypuszczeniu, że na każde przedstawienie zużyto jedną sekundę; lecz i tych liczb nie radziłbym pisać nawet po obraniu wieku za jednostkę czasu, gdyż to się nie przyczyni do umysłowego rozwoju ucznia.

40. Wielka liczba.

Dzięki postępom i przestawieniom wspięliśmy się dość wysoko po drabinie liczb.

Gdybyśmy teraz, chcąc uniknąć zawrotnych wysokości, poprosili kogoś o napisanie największej liczby, utworzonej przy pomocy trzech 9-ek, otrzymalibyśmy najczęściej odpowiedź:

$$999,$$

czyli liczbę istotnie skromną, nie sprawiającą nikomu zawrotu głowy.

Jeżeli jednak zapytany jest, na nasze nieszczęście, sumiennym matematykiem, który lubi dokładnie odpowiadać na zadane mu pytania, napisze z pewnością nieco inną liczbę:

$$\begin{array}{c} 9 \\ 9^9 \\ 9, \end{array}$$

oznaczającą potęgę dziewięciu, której wykładnikiem jest liczba 9^9 . Każdy wasz uczeń z łatwością obliczy, że $9^9 = 387420489$, z czego wynika, że chcąc znaleźć żadaną liczbę, musimy wykonać 387420488 mnożeń przez 9, co, oczywiście, może zrazić do podobnego rachunku, jakkolwiek mały jest stały mnożnik 9. Nie zachęcając też bynajmniej do tego obliczenia, powiem wam tylko (wy zaś powtórzcie to swym uczniom, którzy w następstwie będą mogli sprawdzić słuszność mego oświadczenia, n. p. przy pomocy wielocyfrowych logarytmów), że szukana liczba, gdybyśmy ją napisali w systemacie dziesiątkowym, posiadałaby

369 693 100 cyfr.

Gdybyśmy przeto zechcieli napisać tę liczbę na wstędze papierowej cyframi, których szerokość wynosiłaby 4 milimetry, musielibyśmy nadać tej wstędze długość 1478 kilometrów 772 metrów 40 centymetrów, tylko o 53 kilometrów mniejszą od 5-krotnej odległości z Warszawy do Granicy kolejną żelazną.

Pisząc każdą cyfrę tej liczby w ciągu jednej sekundy i pracując codziennie po 10 godzin, bez wyłączenia niedziel i świąt, zużylibyśmy na tę robotę około 28 lat 48 dni.

Mogę jeszcze nadmienić, że pierwszą cyfrą szukanej liczby jest 4, ostatnią zaś 9, a jakkolwiek ta uwaga niewiele wam uprości rachunek (pozostanie do wyliczenia 369693098 cyfr), musicie mi natomiast przyznać, że zgodnie z nagłówkiem niniejszego rozdziału przytoczyłem wam liczbę istotnie wielką.

Zauważymy jeszcze, że $1^1 = 1$, $2^2 = 16$, lecz 3^3 jest już liczbą 13-cyfrową:

7625597484987.

41. Cyrkiel i przenośnik.

W odbywających się bez przerwy ćwiczeniach rysunkowych dzieci napotkały już zapewne okrąg koła lub jego części, które rysowały w przybliżeniu, od ręki.

Nadszedł obecnie czas zapoznania ich z użyciem cyrkla, aby mogły wykonywać swe rysunki z pewnym stopniem dokładności; niechaj się ćwiczą w kreśleniu łuków koła oraz całych kół, z początku ołówkiem, później tuszem; niechaj kreślą sposobami, podawanymi w każdym podręczniku geometrii, prostopadłe do danych prostych, trójkąty i różne inne figury.

Zapoznajmy je też i z drugim, równie prostym i potrzebnym, jak cyrkiel, przyrządem—*przenośnikiem*, wyrabianym z metalu lub rogu w kształcie półkola lub prostokątnego wycinka kołowego.

Co się tyczy podziałki przenośnika, zalecałbym dziesiętną, t. j. podział kąta prostego na 100 części (zamiast na 90 stopni) i t. d. Chociaż bowiem podział dziesiętny kąta prostego, wprowadzony równocześnie z metrycznym układem

miar, zarzucono wprędce na korzyść dawnych stopni, minut i sekund, obecnie jednak daje się zauważyć usprawiedliwiona dążność do przywrócenia go w praktyce, a nawet w szkole. Zapoznajmy też dzieci zawczasu z dziesiętnym podziałem kąta, pokazując im, n. p., połowę kąta prostego, jako 50 setnych tegoż (zamiast 45 stopni).

Zalecajmy dzieciom najprostsze wykreślenia, pozostawiając im często inicjatywę w wyborze tematów. Ważną jest rzeczą, aby jedną figurę przerysowywały kilkakrotnie w różnych skalach, ponieważ w ten sposób zapoznają się doświadczalnie, bez doktrynerskich określeń, z figurami, mającemi ten sam kształt, lecz różną wielkość, czyli z figurami podobnemi.

Dzięki tym ćwiczeniom rysunkowym, dzieci przekonają się łatwo, że wielkość kątów danej figury nie zmienia się ze zmianą skali, gdy, przeciwnie, w figurach, wyrysowanych według skali dwa lub trzy razy większej, odpowiednie długości są podwojone lub potrojone. Wogóle, nie ucząc się jeszcze geometrii, zdobędą doświadczalnie pewien zasób prawd geometrycznych, który im będzie wielce pomocny przy późniejszej systematycznej nauce.

Trzeba nadto, aby dzieci zawczasu poznały pewne nazwy, częściej spotykane, oraz pewne, użyteczne w praktyce, własności figur, które jednak obecnie musimy podać bez dowodu. Będzie to przedmiotem następnych rozdziałów.

42. Okrąg i koło.

Okrąg jest figurą okrągłą (fig. 68), wykreślaną cyrklem, którego jedno ramię pozostaje przytym nieruchome; punkt, w którym umieszczamy nieruchome ramię cyrkla, nazywa się *środkiem* okręgu. Odległość środka od jakiegokolwiek punktu M na okręgu jest *promieniem*, wszelka zaś prosta MM', przechodząca przez środek, jest *średnicą* okręgu; odcinek MM' średnicy jest równy podwójnemu promieniowi.



Fig. 68.

Każda z dwóch części okręgu, zawartych między dwoma jego punktami A i B, nazywa się *łukiem* tegoż okręgu, odcinek zaś AB prostej jest *cięciwą*, ściągającą każdy z dwóch łuków. Część płaszczyzny, zawarta wewnątrz okręgu, zowie się *kołem* (czasami kołem nazywamy okrąg, jeżeli nie obawiamy się nieporozumienia), część zaś koła, zawarta między cięciwą i odpowiadającym jej łukiem, nazywa się *odcinkiem kołowym*. Połączymyśy środek O okręgu z dwoma punktami A i B tegoż, utworzymy *kąt środkowy* AOB, kąt zaś AMB, którego boki przechodzą również przez punkty A i B, lecz wierzchołek M znajduje się na okręgu, nazywa się *kątem wpisanym* w odcinek AMB i stanowi połowę kąta AOB. Prosta OC, łącząca środek okręgu ze środkiem C łuku AB, jest prostopadła do cięciwy AB i dzieli ją w punkcie D na połowy.

Jeżeli obierzemy na okręgu punkt N, wypadający pod cięciwą AB (fig. 68), wtedy suma dwóch kątów AMB i ANB jest równa dwóm kątom prostym.

Jeżeli weźmiemy dowolnie prostą i okrąg (fig. 69), wtedy: albo prosta leży zewnątrz okręgu (D_1), albo posiada dwa punkty wspólne z okręgiem (D_2) i nazywa się wtedy *sieczną*, albo też dotyka okręgu w jednym tylko punkcie (D_3) i zowie się *styczną* do okręgu. Odległość uważanej prostej od środka okręgu jest: większa od promienia dla prostej zewnętrznej, mniejsza od promienia dla prostej siecznej, równa promieniowi dla prostej stycznej.

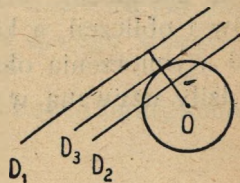


Fig. 69.

Wspólny punkt stycznej i okręgu nazywa się *punktem styczności*, styczna zaś jest prostopadła do promienia, przechodzącego przez punkt styczności. Pewne, acz niedokładne, pojęcie o *długości okręgu* daje nam cienka nitka, otaczająca okrąg i przystająca do niego we wszystkich punktach.

Stosunek długości dwóch jakichkolwiek okręgów O i O' (fig. 70) jest równy stosunkowi ich średnic, czyli, innymi słowy, stosunek długości okręgu do jego średnicy jest jednaki dla każdego z dwóch uważanych okręgów, a więc dla

wszystkich okręgów wogóle. Ten stały stosunek okręgu do jego średnicy, którego nie można wyrazić dokładnie żadnym ułamkiem, jest większy od $3,14$ i mniejszy od $3,1416$; oznaczają go powszechnie grecką literą π .

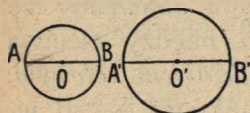


Fig. 70.

Wartość przybliżona $3,14$ nadaje się do wielu zwykłych użytków; gdzie zaś chodzi o większą dokładność, tam prawie zawsze wystarczy przybliżenie $3,1416$.

Jeżeli przeto C jest długością okręgu, R jego promieniem, średnicą zaś

$D=2R$, wtedy litera π oznacza stosunek $\frac{C}{D}$. Z tego wynika, że $C=\pi D=2\pi R$; w praktyce zaś stosujemy wzory: $C=3,14 D=6,28 R$.

Powyższe uwagi pozwalają łatwo obliczyć długość okręgu jakiegokolwiek przedmiotu okrągłego, którego promień lub średnicę poprzednio zmierzono; lub, odwrotnie, obliczyć średnicę, n. p., okrągłej wieży, pnia drzewnego, kolumny, jeżeli przedtem wymierzylśmy obwód tych przedmiotów taśmą, zaopatrzoną w podziałkę, czy też jakimkolwiek innym sposobem. Zachęcajcie dzieci gorąco do takich pomiarów i obliczeń, a kiedy nadarzy się sposobność jednoczesnego wymierzenia okręgu i średnicy, zalecajcie im, aby sprawdziły używaną w tych obliczeniach przybliżoną wartość π .

43. Pole koła.

Jak w poprzednim rozdziale wyrobiliśmy sobie, kierując się intuicją, pewne, chociaż niedokładne, pojęcie o długości okręgu, tak też odczuwamy bezpośrednio, że część płaszczyzny, zawarta wewnątrz okręgu, posiada pewną rozciągłość, że przeto koło jest *połem*, dającym się zmierzyć. Można dowieść, że liczba, wyrażająca pole koła, jest iloczynem długo-

ści okręgu tego koła przez połowę jego promienia; a ponieważ wiemy z poprzedniego rozdziału, że $C = 2\pi R$, przeto pole koła wyraża się następującymi wzorami: $S = \pi R^2 = \frac{\pi}{4} D^2$, z których wynika, że stosunek pól dwóch kół jest równy stosunkowi kwadratów ich promieni lub średnic.

I tutaj najlepszy temat do ćwiczeń rachunkowych stanowią przykłady, zaczerpnięte z najbliższego otoczenia i należycie urozmaicone: okrągłe budowle w ogrodach, zbiorniki wody w ogrodach publicznych, areny, posypywane piaskiem, malowanie okrągłego stołu, obliczanie pól wieńców kolistych, jako różnicy dwóch kół i t. d.

44. Księżyce i rozety.

W podręcznikach rysunku znajdujemy zazwyczaj wzory figur, utworzonych z elementów kołowych, które zatym mogą być wykreślone przy pomocy cyrkla i dlatego stanowią ciekawe ćwiczenia.

Podajemy tu, dla przykładu, kilka podobnych figur, uchodzących za klasyczne.

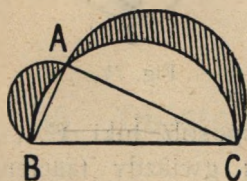


Fig. 71.

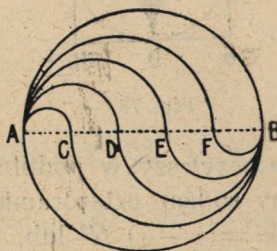


Fig. 72.

Jeżeli nakreślimy półkoło (fig. 71) na średnicy BC i obierzemy na półokręgu punkt A, wtedy trójkąt ABC będzie pro-

stokątny przy A. Nakreśliwszy następnie jeszcze dwa półkola na średnicach AB i AC, otrzymamy dwa sierpy lub dwa *księżycy* (zacięniowane na figurze), ciekawe z tego względu, że suma ich pól jest równa polu trójkąta ABC. Własność ta była znana już starożytnym Grekom, opisane zaś wykreślenie stało się klasycznym, uzyskawszy nazwę *księżyców Hipokratesa* ¹⁾.

Inne ciekawe wykreślenie widzimy na figurze 72, na której średnicę AB koła podzielono w punktach C, D, E, F na pięć równych części, poczym na odcinkach AC, AD, AE, AF, uważanych za średnice, nakreślono półokręgi nad średnicą AB, pod tą zaś średnicą—podobne półokręgi na odcinkach CB, DB, EB, FB, wskutek czego dane koło zostało podzielone na pięć równoważnych (mających jednakowe pola) części. Można by w ten sposób podzielić koło wogóle na n równoważnych części, podzieliwszy na n równych części jego średnicę.

Obierzmy w kole (fig. 73) dwie wzajemnie prostopadłe średnice AB, CD i wykreślimy kwadrat OBEC, w którym zatoczmy z wierzchołka E ćwierć okręgu przez wierzchołki

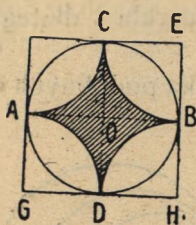


Fig. 73.

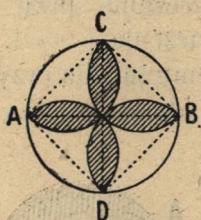


Fig. 74.

B, C. Zatoczywszy w podobny sposób łuki CA, AD, DB, utworzymy rodzaj czteroramiennej gwiazdy (zacięniowanej), której pole $= (4 - \pi) R^2$ lub, w przybliżeniu, $0,86 R^2$.

Wziąwszy znowu w kole (fig. 74) dwie wzajemnie prostopadłe średnice AB, CD i nakreśliwszy 4 półokręgi na śre-

¹⁾ *Hipokrates* z Chios, geometra grecki (V w. przed Chr.).

dnicach BC, CA, AD, DB, otrzymamy czterolistną rozetę, której pole jest równe $(\pi - 2) R^2$ lub, w przybliżeniu, $1,14 R^2$, przyczym R oznacza, po dawnemu, promień danego koła.

Jeżeli, poczynawszy od punktu A (fig. 75), odmierzymy cyrklem na okręgu sześć odcinków, równych promieniowi, powrócimy do pierwotnego punktu A i otrzymamy w ten sposób sześć punktów A, B, C, D, E, F na okręgu. Wykreśliwszy następnie promieniem R z punktów B, D, F, uważanych za środki, łuki AC, CE, EA, które przechodzą przez środek danego koła, utworzymy trójlístną rozetę.

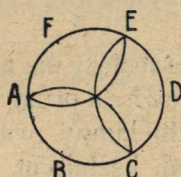


Fig. 75.

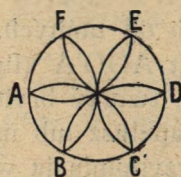


Fig. 76

Utworzylibyśmy sześciolístną rozetę (fig. 76), zatoczywszy podobne łuki z każdego z sześciu punktów A, B, C, D, E, F. Pomnóźcie liczbę podobnych przykładów, urozmaicając je w miarę potrzeby, i zachęcajcie dzieci, aby same obmyślały nowe kształty, a przekonacie się, że po nabyciu pewnej wprawy w używaniu cyrkla i innych narzędzi rysunkowych, zajądą się z upodobaniem do tych wykreśleń i będą je wykonywały starannie i uważnie.

45. Objętość niektórych brył.

W praktyce, oprócz obliczania pól różnych powierzchni, zachodzi często potrzeba wyznaczania objętości pewnych brył. W tym celu należy obrać *jednostkę objętości*, podobnie jak dla długości mamy jednostkę długości, dla pól — jednostkę pola; za jednostkę objętości uważamy objętość sześcianu, którego krawędź jest równa jednostce długości.

Biorąc za podstawę wymienioną jednostkę, znaleziono proste sposoby na wyznaczanie objętości pewnych brył, mających kształty foremne. Zanim przytoczymy te wzory na objętości, niezbędne przy rozwiązywaniu wielu praktycznych zagadnień, przypomnimy bryły, z którymi się już wcześniej zapoznaliśmy, oraz wskażemy trzy inne, często napotykanne w praktyce.

Wiemy już, co to jest *sześcian*, *równoległościan*, *graniastosłup* i *ostrosłup*. W tych bryłach, nazywanych ogólnie *wielościanami*, spostrzegamy tylko linie proste i płaszczyzny, lecz trzy bryły, o których zamierzamy mówić, różnią się pod tym względem od tamtych.

Prostokąt AOO'A' (fig. 77), obracający się naokoło swego boku OO', tworzy bryłę, zwaną *walcem* prostym kołowym; pudełko na kapelusz lub mufkę, szkło lampy, wnętrze blaszanej kwarty przypominają walec swym kształtem. Przy obro-

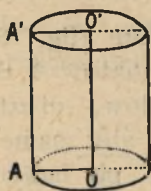


Fig. 77.

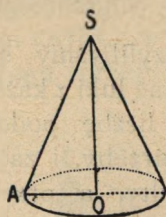


Fig. 78.

cie prostokąta dwa jego boki OA, O'A' opisują dwa jednakowe koła o promieniach $OA = O'A'$, które nazywamy *podstawami* walca, odcinek zaś OO' prostej, nie uczestniczącej w ruchu, jest odległością płaszczyzn dwóch podstaw i nazywa się *wysokością* walca.

Trójkąt AOS (fig. 78), prostokątny w O, tworzy przy obrocie naokoło boku SO bryłę, zowiącą się *stożkiem* prostym kołowym; głowa cukru, lejek, marchew mają w przybliżeniu kształt stożka. Bok OA obracającego się trójkąta opisuje koło—*podstawę* stożka, punkt zaś S, nieruchomy podczas obrotu, jest *wierzchołkiem* stożka; długość SO, która jest

odległością wierzchołka od płaszczyzny podstawy, nazywamy *wysokością* stożka.

Wreszcie koło, obracające się naokoło którejkolwiek ze swych średnic, tworzy *kulę*, której kształt przypomina nam okrągłą gałka; środek i promień obracającego się koła są odpowiednio środkiem i promieniem utworzonej kuli. Każda płaszczyzna, przechodząca przez środek kuli, przecina ją wzdłuż koła, mającego promień równy promieniowi kuli i zwanego *kołem wielkim*; każda prosta, przechodząca przez środek kuli, przecina ją w dwóch punktach, jednakowo oddalonych od środka, przyczym odcinek prostej, zawarty między temi dwoma punktami, zowie się *średnicą* kuli i jest równy podwójnemu jej promieniowi.

Zauważmy, że walec i stożek są wyznaczone, jeśli mamy dane promienie ich podstaw oraz wysokości; kulę zaś wyznacza w zupełności jej promień.

Mając na uwadze przytoczone wyjaśnienia, podajemy następujące prawidła na wyrachowanie objętości różnych brył.

Sześcian. Mnożymy długość krawędzi dwukrotnie przez samą siebie. Jeżeli liczba a oznacza długość krawędzi sześciangu, objętość jego będzie wyrażona iloczynem $a \times a \times a$ lub a^3 . Wzór: $V = a^3$.

Równoległościan. Mnożymy pole podstawy przez wysokość; ponieważ zaś pole podstawy B jest iloczynem boku równoległoboku a przez odpowiednią wysokość b , otrzymujemy wzór: $V = Bh = abh$.

Graniastosłup (równoległościan jest przypadkiem szczególnym graniastosłupa). Mnożymy pole podstawy przez wysokość. Wzór: $V = Bh$.

Ostrosłup. Tworzymy trzecią część iloczynu podstawy przez wysokość; prawidło to zostało po raz pierwszy sformułowane przez Archimedes¹⁾. Wzór: $V = \frac{Bh}{3}$.

¹⁾ *Archimedes*, słynny geometra grecki, urodził się w Syrakuzach (387—212 przed Chr.).

Walec. Mnożymy pole podstawy przez wysokość. Ponieważ podstawą walca jest koło o promieniu r , jeżeli przeto wysokość walca jest równa h , otrzymujemy wzór: $V = \pi r^2 h$.

Stożek. Tworzymy trzecią część iloczynu podstawy przez wysokość. Wzór: $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$.

Kula. Mnożymy sześćcian promienia przez $\frac{4}{3}\pi$.

Wzór: $V = \frac{4}{3} \pi r^3$.

Ponieważ dowiedziono, że powierzchnia kuli jest równa 4-krotnej powierzchni koła wielkiego czyli $4\pi r^2$, można powiedzieć, że objętość kuli jest równa iloczynowi jej powierzchni przez trzecią część promienia.

Oznaczywszy wreszcie średnicę kuli literą d , otrzymamy na jej objętość wyrażenie $\frac{1}{6} \pi d^3$, na powierzchnię zaś πd^2 .

Wszystkie powyższe wzory będą uzasadnione w następstwie, w systematycznym kursie geometrii, obecnie zaś komunikujemy je dzieciom li tylko dlatego, aby im umożliwić pewne ćwiczenia praktyczne.

Nie obciążając więc pamięci swych uczniów temi formułkami, wypisujcie je za każdym razem, kiedy tego zajdzie potrzeba. Jeżeli wskutek częstego użycia tych wzorów utrwala się one w umysłach dziecięcych, będzie to dodatkowy zysk z przerabianych obecnie ćwiczeń.

46. Przedstawienia graficzne. Algiebra bez rachunków.

W wielu tygodnikach i gazetach spotykamy obrazy graficzne (lub, krócej, grafiki), które mogą być bardzo przydatne

do początkowej nauki matematyki. Należy tylko wyjaśnić dzieciom znaczenie tych figur i zachęcić je do kreślenia podobnych.

Grafiki, o których mówimy, przedstawiają najczęściej zmiany elementów meteorologicznych, n. p. zmiany wysokości barometru lub zmiany temperatury; używają też niekiedy tego sposobu do przedstawienia zmian kursu na giełdzie pewnych papierów wartościowych, w ciągu określonego czasu. Szerokie zastosowanie mają grafiki na kolejach żelaznych, gdzie oddawna uznano je za najpraktyczniejszy sposób przedstawiania biegu pociągów.

Przedewszystkim musimy zauważyć, że metoda graficzna może być zastosowana do przedstawienia zmian każdej, dającej się wymierzyć, wielkości, która jest zależna od innej podobnej wielkości, n. p. czasu lub jakiegokolwiek innej.

Kiedy, n. p., na rurce kauczukowej zawieszamy pewien ciężar, rurka wydłuża się; możemy nakreślić grafik, na którym odczytamy długość rurki, odpowiadającą danemu ciężarowi. Objętość gazu zmniejsza się z powiększeniem ciśnienia, wywieranego na gaz; na odpowiednim grafiku znajdziemy objętość, odpowiadającą danemu ciśnieniu. Kiedy ogrzewamy parę wodną, jej ciśnienie powiększa się; i w tym wypadku odpowiedni grafik pozwoli nam wynaleźć ciśnienie, jeżeli znamy temperaturę.

Długość rurki zależy od zawieszonego na niej ciężaru, jest *funkcją* tego ciężaru, jak się mówi; objętość gazu zależy od ciśnienia, jest przeto funkcją ciśnienia; podobnie, ciśnienie pary wodnej jest funkcją temperatury. W poprzednich przykładach wysokość barometru, droga przebieżona przez pociąg, zmieniają się z czasem, zależą od czasu, są więc funkcjami czasu.

Pojęcie funkcji jest tak naturalne i proste, że możemy z nim łatwo oswoić dzieci, przedstawiając je należycie i ilustrując obficie przykładami, opartymi na następującym określeniu: jeżeli pewna wielkość Y jest zależna od innej wielkości X i obydwie mogą być wymierzone, wtedy pierwsza wielkość jest funkcją drugiej.

Ilustrujemy funkcje przy pomocy grafików czyli figur, których wykreślenie stale opiera się na następującej zasadzie.

Obieramy, przedewszystkiem, na papierze kratkowanym (fig. 79) dwie proste OX i OY , wzajemnie prostopadłe i zwa-
ne osiami. Aby przedstawić graficznie pewną wartość x wiel-
kości zmiennej X , odmierzymy na osi OX , przyjąwszy pewną
jednostkę długości, odcinek OP , odpowiadający liczbie, która
wyraża daną wartość x . Ponieważ danej wartości x odpo-
wiada pewna wartość y wielkości Y , przedstawiamy tę osta-

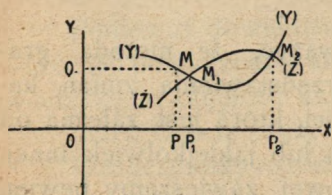


Fig. 79.

tnią w podobny sposób odcinkiem
 OQ , odmierzonem na osi OY sto-
sownie do przyjętej jednostki dłu-
gości, która może być różną od
pierwszej. Potym prowadzimy pro-
ste: PM , równoległą do OY , oraz
 QM , równoległą do OX , przeci-
nające się w punkcie M , który
jest obrazem pary odpowiadają-

cych sobie wartości x, y ; nakreśliwszy zaś dostateczną liczbę
takich punktów i połączwszy je linią ciągłą, otrzymamy
obraz funkcji Y czyli grafik tej funkcji.

Jeżeli wielkość X może przybierać wartości ujemne i je-
żeli x jest jedną z takich wartości, punkt P na osi OX przy-
padnie nie na prawo, lecz na lewo od punktu O ; jeżeli zaś
 y jest jedną z ujemnych wartości Y , punkt Q na osi OY
przypadnie nie nad punktem O , lecz pod tym punktem.

Każdej parze odpowiadających sobie wartości x, y czyli
każdej parze punktów P, Q odpowiada jeden tylko punkt M .

Jeżeli punkty M nie są dość zbliżone do siebie, nie pro-
bujemy ich łączyć linią ciągłą, łączymy natomiast odcinkami
prostych, tworząc w ten sposób linię łamaną, która, pomimo
braku ciągłości, daje nam ogólne pojęcie o przebiegu odpo-
wiedniej funkcji.

Przystąpiwszy do systematycznej nauki algebry, wasi
uczniowie przekonają się, że jej przedmiot stanowi badanie
funkcji, dających się wyznaczyć rachunkiem i nazwanych dla-
tego *funkcjami algebraicznymi*; główne zaś zadanie algebry

polega na wyznaczeniu takich wartości wielkości X , aby jej funkcje Y, Z stały się równymi. Wykreśliwszy (fig. 79) grafiki (Y), (Z) funkcji Y, Z , przecinające się w punktach M_1 i M_2 , poprowadzimy przez te punkty proste M_1P_1 i M_2P_2 , równoległe do osi OY i przecinające oś OX w punktach P_1 i P_2 ; wartości liczebne odcinków OP_1 i OP_2 , obliczone względem przyjętej dla osi OX jednostki długości, będą szukanymi liczbami x_1 i x_2 .

Można więc powiedzieć, że grafiki pozwalają nam rozwiązywać zadania algebryczne bez uciekania się do rachunku; nadto, przy pomocy grafików możemy rozwiązywać zagadnienia, przekraczające ramy algebry, albowiem każda funkcja, nawet nie algebryczna, daje się przedstawić graficznie. Wprawdzie wyniki, otrzymane drogą graficzną, są tylko przybliżone, jednak w bardzo wielu przypadkach te przybliżenia wystarczają w praktyce, jeżeli tylko grafiki zostały wykonane starannie. Wreszcie wykreślenia, o których mówimy, niezależnie od swej wartości praktycznej stanowią cenny środek pedagogiczny, ilustrując bowiem przebieg zjawisk przemawiają do umysłu przy pośrednictwie wzroku.

Aby wyjaśnić sposób kreślenia i zastosowanie grafików, podajemy w następujących rozdziałach kilka przykładów, przeważnie różne odmiany t. zw. *zagadnienia o gońcach*.

47. Dwaj piechurzy.

Zadanie o gońcach w swej najprostszej postaci może być sformułowane w następujący sposób. Z pewnej miejscowości wyrusza w drogę w danej chwili piechur, idący z pewną oznaczoną prędkością, po upływie zaś pewnego czasu udaje się za nim tą samą drogą i w tym samym kierunku drugi piechur, posuwający się z większą niż pierwszy prędkością. Kiedy spotka pierwszego i w jakiej odległości od miejsca, z którego tenże wyszedł?

Aby rozwiązać przytoczone zadanie (i inne podobne) drogą graficzną, pokażemy najprzód, w jaki sposób można wykreślić grafik piechura. Obrawszy na papierze kratkowym (fig. 80) dwie osi, wzajemnie prostopadłe: OT, na której będziemy oznaczali czas, i OY, na której będziemy odmierzali odległości, umówimy się, n.p., że punkt O oznacza południe, dwie podziałki na osi OT odpowiadają jednej godzinie (1^h), połowa zaś podziałki na osi OY odpowiada jednemu kilometrówi (1^k); poczym na OT oznaczmy godziny: 1^h , 2^h , 3^h , ..., na OY zaś odległości w kilometrach: 2^k , 4^k , 6^k , ... Jeżeli piechur, dla którego wykreślamy grafik, wyruszył

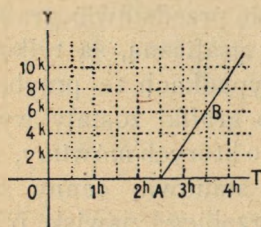


Fig. 80.

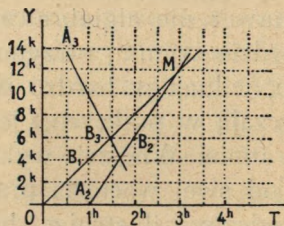


Fig. 81.

w drogę o godzinie $2\frac{1}{2}$ z prędkością 6 kilometrów na godzinę, punkt A osi OT przypadnie na grafiku, na którym łatwo odszukamy i drugi punkt B, zważywszy, że nasz piechur o godzinie $3\frac{1}{2}$ znajdzie się w odległości 6 kilometrów od miejscowości, z której był wyruszył; z uwagi zaś, że piechur posuwa się naprzód ze stałą prędkością 6 kilometrów na godzinę, znajdziemy szukany grafik, wykreśliwszy prostą AB. Na tym grafiku odczytamy, n.p., że o godz. 4 piechur znajduje się w odległości 9 kilometrów od początku swej podróży; wogóle, łatwe, jak widzieliśmy, wykreślenie prostej AB pozwoli nam odpowiedzieć na następujące pytania: 1) w jakiej odległości znajduje się piechur o danej godzinie? 2) w jakim czasie przebywa daną odległość?

Powróćmy teraz do pierwotnego zadania i sformułujmy je dokładniej, przyjmując, że pierwszy piechur idzie z prędkością 4 kilometrów na godzinę, drugi zaś, który wyruszył

w drogę w 1 godzinę po pierwszym, przebywa 6 kilometrów na godzinę. Obrawszy (fig. 81) te same jednostki co i przedtem do oznaczenia czasu i odległości, znajdziemy, że grafikiem pierwszego piechura będzie prosta OB_1 , grafikiem zaś drugiego prosta A_2B_2 . Ponieważ zaś te proste spotykają się w punkcie M, odpowiadającym 3^h i 12^k , przeto dwaj piechurzy spotkają się w odległości 12 kilometrów od miejscowości, z której wyszli, i po upływie 3 godzin od chwili wyruszenia w drogę pierwszego.

Skomplikujmy nieco powyższe zagadnienie, formułując je tak. Z miejscowości, odległej o 14 kilometrów od miejsca, z którego wyruszyli dwaj piechurzy, i w pół godziny po wyruszeniu pierwszego udaje się w drogę powóz, który, jadąc na spotkanie podróżnych, czyli w kierunku przeciwnym, przebywa 8 kilometrów na godzinę. Gdzie spotka każdego z piechurów i o której godzinie? Prosta A_3B_3 , która jest grafikiem powozu, przecina OB_1 w punkcie B_3 , odpowiadającym $1^{h\frac{1}{2}}$ i 6^k : o tej godzinie i w tej odległości nastąpi spotkanie powozu z pierwszym podróżnym. Punkt zaś przecięcia prostej A_3B_3 z prostą A_2B_2 odpowiada w przybliżeniu $1^{h\frac{3}{4}}$ (trochę mniej) i $4^{k\frac{1}{4}}$ (trochę więcej).

Ponieważ, obliczając dokładniej czas i miejsce spotkania powozu z drugim podróżnym, znaleźlibyśmy odpowiednio 1 godz. 43 min. i 4 kilom. 286 metr., widzimy przeto, że figura 81, pomimo małych rozmiarów, daje nam rozwiązania, zupełnie wystarczające w praktyce.

48. Z Warszawy do Granicy.¹⁾

Kierując się zimowym rozkładem jazdy, wprowadzonym na dr. żel. Warszawsko-Wiedeńskiej w dn. 28 października

¹⁾ Zamiast podanego w oryginale grafiku „Paryż-Marsylja“.
(Przyp. tłumacza).

r. 1906, wykreśliliśmy obraz (fig. 82) biegu dwóch pociągów kurjerskich nocnych: № 1 Warszawa-Granica i № 2 Granica-Warszawa, w którym podaliśmy w wiorstach odległości między stacjami, godziny zaś oznaczyliśmy według przyjętej na tutejszych kolejach żel. rachuby czasu, t. j. od 1-ej po pół-

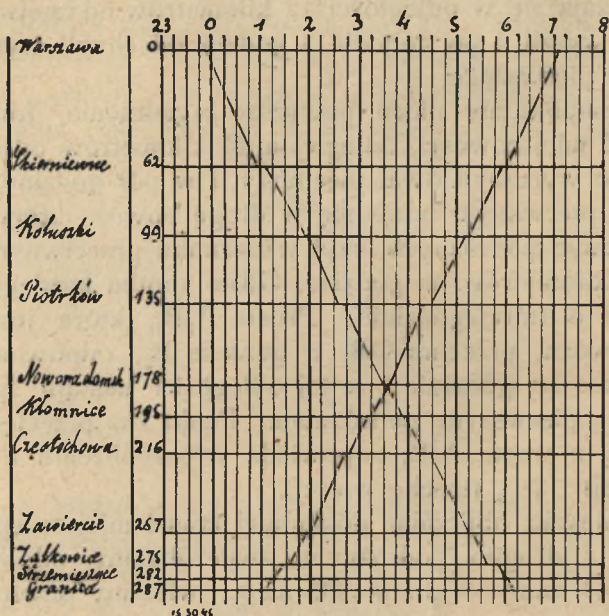


Fig. 82.

nocy do 24-ej czyli do następnej północy. Oprócz tego przytaczamy dokładny czas przyjścia i odejścia pociągów, aby umożliwić w ten sposób należyte odczytanie figury 82, pomimo jej niewielkich rozmiarów.

Kurjerski № 1			Kurjerski № 2		
	Przych.	Odch.		Przych.	Odch.
Warszawa		23 ^h ₅₅	Granica		1 ^h ₀₅
Skierniewice	0 ^h ₅₃	1 ^h ₀₆	Strzemieszyce	1 ^h ₁₄	1 ^h ₁₅
Koluszki	1 ^h ₅₁	1 ^h ₅₅	Ząbkowice	1 ^h ₂₆	1 ^h ₃₅
Piotrków	2 ^h ₃₅	2 ^h ₄₁	Zawiercie	1 ^h ₅₉	2 ^h ₀₀
Noworadomsk	3 ^h ₂₉	3 ^h ₃₁	Częstochowa	2 ^h ₄₃	2 ^h ₅₁
Kłomnice	3 ^h ₅₄	3 ^h ₅₅	Kłomnice	3 ^h ₁₄	3 ^h ₁₅
Częstochowa	4 ^h ₁₉	4 ^h ₂₇	Noworadomsk	3 ^h ₃₆	3 ^h ₃₇
Zawiercie	5 ^h ₁₅	5 ^h ₁₆	Piotrków	4 ^h ₂₂	4 ^h ₃₀
Ząbkowice	5 ^h ₃₆	5 ^h ₅₁	Koluszki	5 ^h ₁₂	5 ^h ₁₅
Strzemieszyce	6 ^h ₀₀	6 ^h ₀₁	Skierniewice	5 ^h ₅₄	6 ^h ₀₀
Granica	6 ^h ₁₀		Warszawa	7 ^h ₀₅	

Kreślenie podobnych grafików od ręki i na papierze kratkowanym stanowi łatwe i doskonale ćwiczenie, które polecamy uwadze wychowawców pod warunkiem atoli, aby wybierali z rozkładów jazdy stacje bliższe i lepiej dzieciom znane.

Na kolejach jednotorowych nastroczają się przytym ciekawe uwagi o skrzyżowaniu się pociągów, biegnących w przeciwnych kierunkach, lub o prześcignięciu jednego pociągu przez drugi, prędzej od niego biegnący, kiedy pierwszy zatrzymuje się w tym celu przez pewien czas na stacji. Trudno zresztą wyliczyć mnóstwo ciekawych szczegółów, wychodzących na jaw przy wykreślanu i odczytywaniu grafików kolejowych.

49. Z Hawru do Nowego Jorku.

Pewnego razu, kiedy podczas kongresu naukowego zebrał się na śniadaniu liczni matematycy różnych narodowości, pomiędzy którymi znaleźli się i słynni, obecny tam Edward Lucas oświadczył nagle, że zamierza im dać do roz-

wiązania bardzo trudne zagadnienie. „Przypuśćmy,—mówił— (niestety, jestto tylko przypuszczenie) że codziennie w południe wypływa parowiec z Hawru do Nowego Jorku, jednocześnie zaś parowiec, należący do tego samego towarzystwa żeglugi, wypływa z Nowego Jorku do Hawru, przyczym parowce, płynące w jednym lub drugim kierunku, zużywają siedem dni na przebycie swej drogi. Ile parowców, płynących w przeciwnym kierunku i należących do tego samego towarzystwa, spotka po drodze parowiec, wypływający z Hawru dzisiaj w południe?”

Niektóre znakomitości odrzekły nierozważnie: siedem, większość, stropiona, milczała i ani jeden z obecnych nie znalazł właściwego rozwiązania, które jednak rzuca się w oczy na figurze 83.

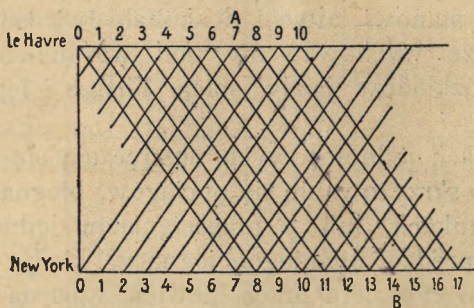


Fig. 83.

Z przytoczonej anegdoty, za której wiarygodność ręczymy, można wyciągnąć podwójną naukę: popierwsze, trzeba być bardzo wyrozumiałym i cierpliwym względem uczniów, którzy nie odrazu pojmują nowe dla siebie rzeczy; powtóre, nie należy zaniedbywać przedstawień graficznych, cenne nie-rzaz oddających przysługi. Istotnie, najskromniejszy matematyk, obeznany z przedstawieniami graficznymi i mający przed oczyma figurę 83, dałby bez wahania dobrą odpowiedź, gdy tymczasem słuchacze Lucasa, rozumując lecz nie widząc, policzyli okręty, które miały dopiero wypłynąć po odpłynięciu pierwszego, zapomnieli zaś o znajdujących się w drodze.

Grafik AB przekonywa nas, że każdy parowiec, odpływający z Hawru, spotka na morzu 13 innych, oprócz jednego, wpływającego do Hawru podczas odpłynięcia pierwszego, oraz jednego, odpływającego z Nowego Jorku podczas przybycia tamże pierwszego, czyli spotka 15 parowców swego towarzystwa, dążących w przeciwnym kierunku, przyczym spotkania będą następowały codziennie, naprzemian w południe i o północy.

Tenże Lucas w książce p. n. „*Arithmétique amusante*” (Zabawy arytmetyczne) podał następujące zadanie, zatytułowane „Ballada o cofającym się ślimaku”.

„Pewien ślimak, obudziwszy się na drzewie w niedzielę o godz. 6 zrana, zaczął pełznąć ku górze w ten sposób, że w ciągu dnia, t. j. do godziny 6-ej wieczorem, podnosił się o 5 metrów, w ciągu zaś nocy spuszczał się o 2 metry. Kiedy posunął się na wysokość 9 metrów?”

Jestto także zadanie o gońcach, lecz o powolnych gońcach, które najczęściej będzie źle rozwiązane przez niezastanawiające się dziecko; usłyszymy zapewne błędną odpowiedź: we środę rano. Proponujemy naszym czytelnikom, a zwłaszcza ich uczniom, aby znaleźli trafne rozwiązanie, wykreśliwszy w tym celu grafik cofającego się ślimaka.

50. O pogodzie.

Jako przykład szczęśliwego zastosowania metody graficznej do przedstawiania funkcji, których wartości możemy otrzymywać tylko drogą obserwacji, podajemy (fig. 84), według zapisów barografu i termografu Centralnej Stacji Meteorologicznej przy Muzeum Przemysłu i Handlu w Warszawie, przybliżone grafiki ciśnienia barometrycznego i temperatury od 27 maja do 2 czerwca r. 1904. ¹⁾

¹⁾ Zamiast podobnych grafików z ostatniego tygodnia r. 1881, podanych w oryginale za czasopismem *La Nature*. (Przyp. tłumacza).

Widzimy nadto, że dwie różne funkcje: ciśnienie barometryczne i temperatura mogą być przedstawione na jednej

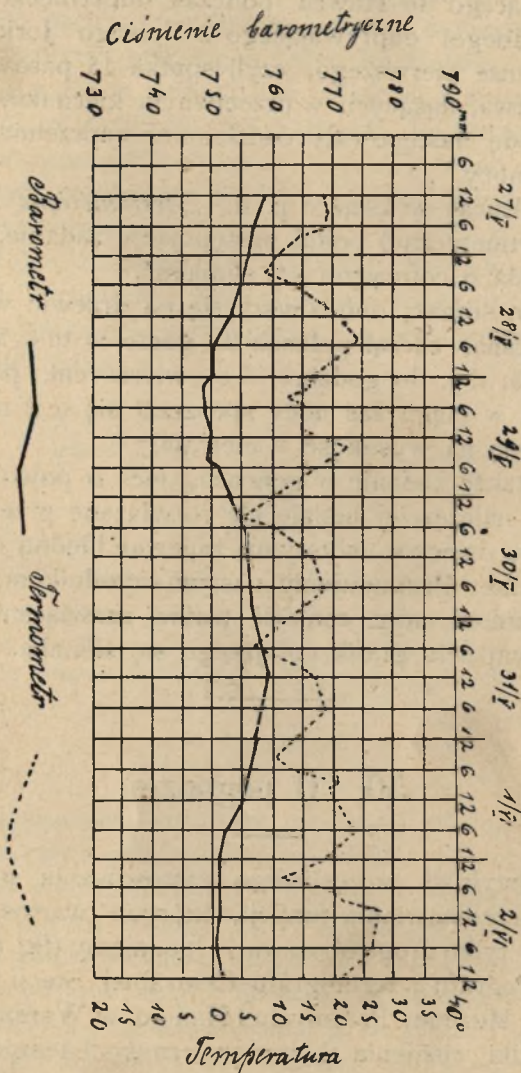


Fig. 84.

figurze bez ujmy dla jasności obrazu. Nie może też być mowy o nieporozumieniu przy odczytywaniu tych grafików, po-

nieważ ciśnienie barometryczne, odczytywane po lewej stronie figury, przedstawiliśmy linią ciągłą, temperaturze zaś, odczytywanej po prawej stronie, odpowiada linia kropkowana.

Grafiki tego rodzaju oddały wielkie przysługi meteorologii i przyczyniły się w znacznej mierze do rozpowszechnienia tej użytecznej choć młodej jeszcze nauki, która atoli z dnia na dzień szybkie robi postępy.

51. Dwaj cykliści i jeden rower.

Dwaj cykliści udali się w podróż na swych stalowych rumakach, lecz wkrótce rower jednego z nich uległ takiemu uszkodzeniu, że naprawa musiała potrwać dłuższy czas. Nie chcąc atoli przerywać zamierzonej podróży, postanowili odbywać ją w dalszym ciągu napoły pieszo, napoły na jednym pozostałym rowerze. Jeden z nich mianowicie miał wyruszyć w dalszą drogę na rowerze, jednocześnie zaś drugi pieszo; w pewnym umówionym miejscu pierwszy miał pozostawić rower w przydrożnym rowie i iść dalej pieszo, drugi zaś, po dojściu do tego miejsca, miał wsiąść na pozostawiony rower i dopędzić swego towarzysza, poczym nastąpiłaby nowa zamiana, i t. d. aż do kresu podróży.

Przypuszczając, że w chwili wypadku z rowerem naszym podróżnym pozostało jeszcze 40^{kil.} do przebycia, i wiedząc, że prędkość jazdy na rowerze wynosiła 15^{kil.} na godzinę, prędkość zaś piechura 5^{kil.}, zapytajmy, w jakim miejscu pierwszy podróżny ma pozostawić swój rower dla drugiego, jeżeli ta zamiana ma być jedyną i jeżeli obydwaj mają jednocześnie przybyć do kresu podróży?

Odpowiedź jest oczywista: ponieważ spełnienie ostatniego warunku wymaga, aby każdy z podróżnych przebył jednakową drogę pieszo i na rowerze, przeto rower winien być

pozostawiony w połowie drogi, czyli o 20^{kil.} od punktu początkowego.

Figura 85, na której drogę pierwszego podróżnego przedstawiono linią ciągłą, drogę zaś drugiego—linią kropkowaną, została wykreślona w założeniu, że obaj w dalszą drogę wyruszyli w południe. Wtedy, jak widać na tej figurze, pierwszy, jadący na rowerze, przebył połowę drogi o g. 1 min. 20, pozostawił rower i podążył dalej pieszo; ponieważ zaś pozostało mu do przebycia 20^{kil.}, znalazł się na miejscu o g. 5 min. 20.

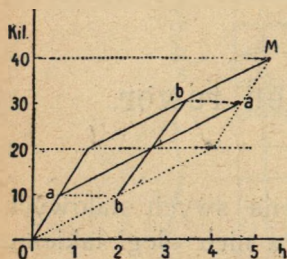


Fig. 85.

Drugi, który wyruszył pieszo, przebył połowę drogi o g. 4, poczym wsiadłszy na rower przybył na miejsce również o g. 5 min. 20. Każdy z podróżnych przebył 40^{kil.} w przeciągu 5 g. 20 min., poruszał się więc w tym czasie ze średnią prędkością 7^{kil.} 5 na godzinę.

Opisany sposób lokomocji daje, jak widzimy, dość znaczną przewyżkę nad prędkością piechura, możnaby go więc zalecić, n. p., dwum młodzieńcom, których oszczędności, razem wzięte, wystarczają na kupno jednego tylko roweru.

Ze względów jednak praktycznych należy przy tym sposobie podróżowania urządzać częste zmiany, aby rower nie pozostawał zbyt długo bez właściciela, chyba że przebywana okolica jest b. pusta lub też zamieszкана przez wyjątkowo uczciwą ludność. Uwzględniliśmy też na figurze 85 odmianę powyższego zadania, przypuszczając, że rower był pozostawiony w dwóch miejscach, odległych od punktu początkowego odpowiednio o 10^{kil.} i 30^{kil.}, wskutek czego grafikiem pierwszego podróżnego będzie linja OaaM, grafikiem zaś drugiego—ObbM; w tym wypadku dwaj podróżni spotykają się w połowie drogi, lecz jadący na rowerze, nie zatrzymując się, wymija drugiego.

I w tym wypadku, kiedy dwaj podróżni odbywają drogę z różnymi prędkościami czyto pieszo, czy też na rowerze, możemy łatwo rozwiązywać przy pomocy grafików zadania,

których rozwiązanie drogą rachunkową, aczkolwiek nietrudne, wymagałoby pewnego zasobu wiadomości matematycznych, niedostępnych jeszcze dla naszych uczniów.

52. Zamały powóz.

Pewnego poranku na stację kolei żelaznej X przybyły dwa małżeństwa A i B z zamiarem udania się na obiad do miasteczka Y, odległego od stacji o 63 ^{kil.}; powiedziano im, że drogę do miasteczka można odbyć prędko i wygodnie wynajętym na stacji samochodem. Istotnie, znalazł się samochód, przebywający 30 ^{kil.} na godzinę, lecz tak mały, że oprócz palacza mógł pomieścić tylko dwie osoby.

Nasi podróżni znaleźli się w niemałym kłopotcie, tymbarzej, że, nie zaliczając się do wybitnych piechurów, mogli przebywać pieszo tylko 4 ^{kil.} na godzinę; po krótkiej naradzie zdecydowano się odbyć podróż do miasteczka w następujących warunkach.

Państwo A wyruszają samochodem, jednocześnie zaś państwo B udają się w drogę pieszo; w pewnym punkcie drogi samochód zatrzymuje się i wysadza A, którzy pozostałą drogę odbywają pieszo, następnie powraca na spotkanie B, których zabiera i przywozi do miasteczka.

Gdzie się ma zatrzymać samochód, aby wszyscy przybyli jednocześnie do miasteczka Y? Jak długo potrwa ta podróż?

Przytoczone zagadnienie, które z niewielkimi zmianami w danych, było tematem wypracowań na kilku egzaminach konkursowych, jest nieco zawilsze od poprzedniego, ponieważ samochód, zatrzymawszy się w pewnym punkcie drogi, musi powracać na spotkanie podróżnych B.

Jeżeli oznaczymy literą P (fig. 86) punkt, w którym zatrzymuje się samochód, aby wysadzić A, literą zaś Q punkt,

w którym powracając spotyka B, cztery punkty $X Q P Y$ na prostej XY będą uszeregowane w wypisanym porządku; podróżni A jadą samochodem od X do P , idą zaś pieszo od P do Y , podczas gdy podróżni B idą pieszo od X do Q , jadą zaś samochodem od Q do Y . Aby wszyscy przybyli jednocześnie do celu podróży, musi być $XP=QY$ i, co z tym idzie, $XQ=PY$, wskutek czego grafiki dróg A i B tworzą razem równoległobok, jak w poprzednim rozdziale. Gdy jednak na figurze 85 przekątna równoległoboku była równoległa do osi, na której odmierzałyśmy czas, ponieważ rower pozostawał w spoczynku w przydrożnym rowie, tutaj niema tego, gdyż przekątna CD jest grafiką powrotnej drogi samochodu, jadącego na spotkanie podróżnych B.

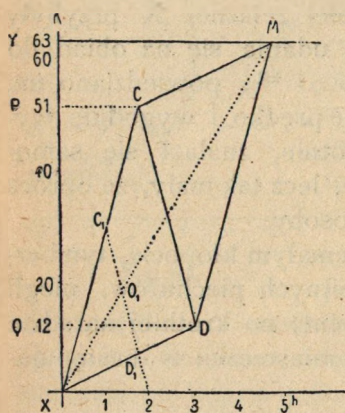


Fig. 86.

Z uwagi, że na figurze 86 XCM jest grafiką drogi A, XDM —grafiką drogi B, czworokąt zaś $XCMD$ jest równoległobokiem, wynika łatwy sposób wykreślenia tej figury. Nakreśliwszy mianowicie proste XC i XD , co łatwo uczynić mając dane prędkości samochodu (30 kil. na godzinę) i piechurów (4 kil. na godzinę),

obierzmy na XC dowolny punkt C_1 , odpowiadający, n. p., 1 godz. i 30 kil., i poprowadźmy C_1D_1 , która jest grafiką powrotnej drogi samochodu z punktu C_1 i przecina prostą XD w punkcie D_1 . Jeżeli następnie połączymy X ze środkiem O_1 odcinka C_1D_1 i przedłużymy otrzymaną prostą do punktu M , odpowiadającego odległości 63 kil., otrzymamy w tym punkcie wspólny koniec grafików XCM i XDM ; wykreśliwszy przeto MC , równoległą do XD , oraz MD , równoległą do XC , znajdziemy żądany równoległobok, w którym linja $XCDM$ będzie grafiką samochodu. Na wykreślonej w ten sposób figurze punkt D odpowiada 3^h i 12 kil., punkt C — $1^h \frac{3}{4}$ (w przybliżeniu) i 51 kil., wreszcie punkt M — $4^h \frac{3}{4}$ i 63 kil.

Z powyższego wynika, że samochód wysadzi podróżnych A w odległości 51^{kil.} od stacji, o godzinie (w przybliżeniu) 1³/₄, poczym powracając spotka podróżnych B o godzinie 3-ej w odległości 12^{kil.} od stacji i przywiezie ich do miasteczka o godz. 4 min. 45, t. j. w tym czasie, kiedy tam przybędą podróżni A. Ponieważ z dokładnego rachunku wypadłoby 4 godz. 42 min. zamiast 4 godz. 45 min., widzimy, że, praktycznie biorąc, różnica jest bardzo niewielka.

Zauważymy jeszcze, że podróżni przebyli 51^{kil.} w samochodzie i 12^{kil.} pieszo, czyli razem 63^{kil.}, w ciągu 4 godz. 42 min., posuwali się więc ze średnią prędkością 13^{kil.}_{,400} na godzinę; innemi słowy, przybyliby o tej samej godzinie do miasteczka, jadąc powozem z prędkością 13^{kil.}_{,400} na godzinę. Zarówno podróżni A, jako też podróżni B, idąc po 3 godziny, przebyli po 12^{kil.} pieszo, resztę zaś drogi w samochodzie; droga zaś samochodu wynosiła 141^{kil.}, t. j. 51^{kil.} naprzód, 39^{kil.} w tył i znowu 51^{kil.} naprzód.

Zmieniając dane w rozważonym przykładzie, znajdziemy tematy do wielu podobnych ćwiczeń.

53. Pies i dwaj podróżni.

Z dwóch piechurów, idących jedną drogą w tym samym kierunku, jeden A wyprzedza w danej chwili drugiego o 8^{kil.} i idzie z prędkością 4^{kil.} na godzinę, drugi zaś B przebywa 6^{kil.} na godzinę. Jeden z podróżnych ma przy sobie psa, który w uważanej chwili biegnie z prędkością 15^{kil.} na godzinę na spotkanie drugiego, dopędziwszy go zaś, powraca do swego pana, poczym znowu rozpoczyna podobną wędrówkę i powtarza ją dotąd, dopóki dwaj podróżni nie spotkają się. Jaką drogę przebył pies do chwili spotkania się podróżnych?

Zdawałoby się, że otrzymamy dwie różne odpowiedzi stosownie do tego, czy pies należał do pierwszego, czy też

do drugiego podróżnego; lecz zobaczymy zaraz, że tak nie jest. Na figurze 87, na której liczymy czas od chwili wypuszczenia psa, grafikami dwóch podróżnych są proste OM i 8M, punkt zaś ich przecięcia M wyobraża spotkanie się podróżnych w odległości 24^{kil.} i po upływie 4 godzin od początku rachuby czasu. Jeżeli pies należy do podróżnego, pozostającego w tyle, grafikiem biegu zwierzęcia będzie linja zygzakowata Oaa..., dotykająca naprzemian prostych 8M i OM; w przeciwnym razie, otrzymamy linję 8bb... tego samego rodzaju, lecz różną od pierwszej.

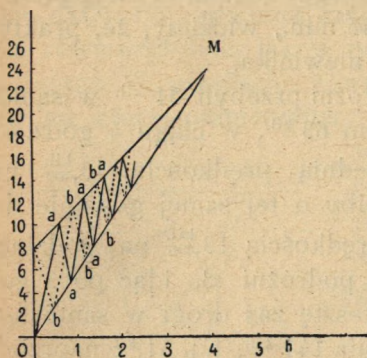


Fig. 87.

W każdym jednak razie bieg psa będzie trwał 4 godziny, ponieważ zaś ten biegnie ze stałą prędkością 15^{kil.} na go-

dzinę, przeto droga przebieżona w jednym i drugim przypadku będzie wynosiła 60^{kil.}

Obraliśmy w przytoczonym zagadnieniu wyjątkowo proste dane, aby sobie ułatwić wyjaśnienie, lecz w dalszych ćwiczeniach na ten temat należałoby zmieniać dane, przyjmując, n. p., że podróżni idą ku sobie czyli posuwają się w przeciwnych kierunkach.

54. Spadający kamień.

W grafikach przebywanych dróg, z którymi się dotąd spotykaliśmy, kiedy chodziło o ruch piechurów, powozów, pociągów kolei żelaznej, psów, droga przebyta w ciągu danego czasu, n. p. w ciągu jednej sekundy, była zawsze jednokowa, wskutek czego każdy grafik miał postać linji prostej.

Można to wyrazić inaczej, mówiąc, że w tych przypadkach prędkość była stała lub ruch był jednostajny.

Innym jednak ruchem spada kamień, spuszczone na dół z pewnej wysokości: wiemy z doświadczenia, jeżeli nie brać na uwagę oporu powietrza, że po upływie jednej sekundy kamień spadnie prawie o 4^m90 ; po upływie 2 sekund przebieży na dół 19^m60 , po upływie zaś 3 sekund— 44^m10 .

Grafikiem przeto ruchu kamienia nie będzie, jak przedtem, linja prosta, lecz pewna krzywa, którą w przybliżeniu przedstawiliśmy na figurze 88; jest-to łuk krzywej, zwanej *parabolą*, o której powiemy kilka słów w dalszym ciągu.

Drogę, którą przebiega kamień podczas swego spadku w czasie t , możemy wyrazić wzorem $y = 4,9 \times t^2$, jeżeli czas mierzymy sekundami; należy pamiętać, że y w tym wzorze oznacza liczbę metrów.

W ciągu, n. p., $\frac{1}{10}$ sekundy kamień spadnie o 49 milimetrów, w ciągu 1 sekundy—o 4^m90 , w ciągu 10 sekund przebieży 490 metrów.

Widzimy więc, że kamień spada coraz to prędzej, dlatego też ruch jego nazywamy ruchem przyspieszonym.

Jeżeli pominiemy opór powietrza, kamień spuszczone z wierzchołka wieży Eiffla, czyli z wysokości 300^m , spadnie na ziemię w ciągu niespełna 8 sekund (w przybliżeniu 7,9 sekund). Zauważymy przytym, że opór powietrza jest nieznaczny przy spadku ciał z niewielkich wysokości, można go przeto w praktyce pominąć; staje się natomiast widocznym w dłużej trwającym spadku, dlatego też w tym razie przytoczony grafik nie odpowiadałby rzeczywistości.

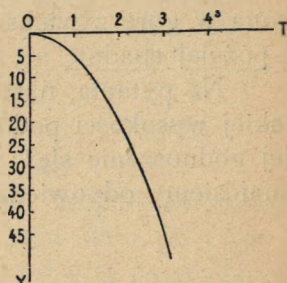


Fig. 88.

55. Kula, wyrzucona w górę.

Kula ołowiana, wyrzucona w górę, podnosi się do pewnej wysokości, następnie spada. Jeżeli przyjrzymy się uważnie temu zjawisku, łatwo spostrzeżemy, że przy podnoszeniu się w górę kula stopniowo zwalnia swój bieg, przy spadaniu zaś — przyśpiesza; w pierwszym okresie zjawiska mamy ruch opóźniony, w drugim — przyśpieszony.

Wystrzeliwszy kulę ze strzelby, skierowanej pionowo, otrzymamy podobne zjawisko z tą tylko różnicą, że wyrzucona w górę z większą prędkością kula podniesie się wyżej i później spadnie na ziemię.

Na pytania, nastrożające się tutaj przedewszystkim: do jakiej wysokości podniesie się kula? jak długo będzie trwało jej podnoszenie się? jak długo będzie trwało jej spadanie? znajdziemy odpowiedzi we wzorze

$$y = at - 4,9 \times t^2,$$

jeżeli będzie dana prędkość a , z jaką wyrzucono kulę, czyli t. zw. prędkość początkowa kuli.

Aby dobrze zrozumieć przytoczony wzór i umieć się nim posługiwać w razie potrzeby, należy pamiętać, że:

- 1) wysokość y wyraża się metrami,
- 2) prędkość początkowa a jest dana w metrach na sekundę, t. j. kula jest wyrzucona w taki sposób, że przebywałaby bez przerwy a metrów na sekundę, gdyby nic nie zwalniało jej biegu;
- 3) czas t jest mierzony sekundami.

Jakkolwiek powyższy wzór prowadzi do łatwych rachunków, jednak dokładniejsze pojęcie o ruchu kuli daje nam grafik (fig. 89), wykreślony w założeniu, że $a=20$, t. j. w założeniu, że wyrzucona kula przebywałaby stale 20 metrów na sekundę, gdyby nic nie przeszkadzało jej biegowi. Przytoczony grafik da się łatwo wykreślić, jeśli uprzednio nakreślimy grafik OA (prostą OA) jednostajnego ruchu kuli z pręd-

kością 20 metrów na sekundę; wystarczy mianowicie odczytać na figurze 88 wysokości, odpowiadające 1 sek., 2 sek., 3 sek. i t. d., i przenieść je na figurę 89, odmierzając w kierunku pionowym pod OA (fig. 89) zamiast pod OT (fig. 88). Można też wykreślić żądany grafik, obliczając wartości y ze wzoru $y=at-4,9 \times t^2$.

Przekonamy się, zakładając $a=20$, że kula podnosi się w ciągu 2,04 sek., osiąga wysokość 20^m,41 i następnie spada w ciągu 2,04 sek.; obrazem drogi kuli jest i tutaj parabola. Można powiedzieć ogólnie, że kula podnosi się i spada w jednakowych odstępach czasu, wysokość zaś, do której się podnosi, wyrażona w metrach jest równa $\frac{a^2}{19,6}$.

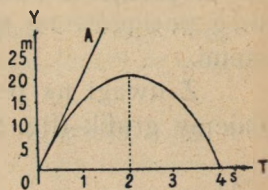


Fig. 89.

Chociaż w tym przykładzie, jak i w poprzednim, nie uwzględnialiśmy oporu powietrza, musimy jednak zaznaczyć, że przy większych prędkościach początkowych działanie jego daje się odczuć zarówno przy podnoszeniu się kuli, jako też przy jej spadaniu.

56. Kolej miejska w Paryżu.

Kolej miejska w Paryżu (chemin de fer métropolitain lub krócej Métro), będąc przeznaczoną do użytku mieszkańców wielkiego miasta, posiada specjalne warunki eksploatacji: niewielkie odległości pomiędzy stacjami, nie przewyższające zazwyczaj kilkuset metrów, oraz często następujące po sobie pociągi, wskutek czego postoje na stacjach muszą być bardzo krótkie.

Te okoliczności sprawiają, że przeważną część czasu, niezbędnego do przebycia odległości pomiędzy dwiema sąsiednimi stacjami, zajmuje przyspieszanie biegu pociągu, wycho-

dzącego ze stacji, i zwalnianie biegu tegoż przy pomocy hamulców przed przybyciem na następną stację.

Wprawdzie na wszystkich kolejach żelaznych pociągi muszą być wprowadzane w bieg przy wyjściu ze stacji i hamowane przed przybyciem na następną, lecz te manipulacje, z uwagi na znaczne odległości pomiędzy stacjami, zajmują tylko drobną część czasu, zużywanego na przebycie odległości między stacjami.

Dlatego też, z wystarczającym w praktyce przybliżeniem, bieg pociągów na tych kolejach przedstawiamy linjami prostymi.

Z uwagi na przytoczone osobliwości kolei miejskiej podajemy grafik (fig. 90) biegu jej pociągów, wykreślony w założeniu, że: 1) odległość między dwiema sąsiednimi stacjami jest równa 400 m; 2) prędkość pociągu podczas jego pełnego biegu wynosi 36 kilometrów na godzinę lub 10^m na sekundę ¹⁾; 3) pociąg osiąga największą prędkość po upływie 20 sekund od chwili wyruszenia ze stacji, hamowanie zaś przed następną stacją trwa

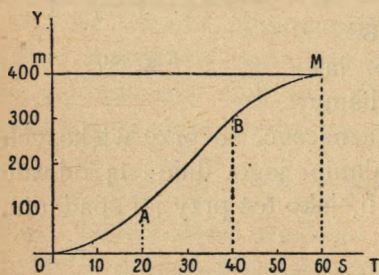


Fig. 90.

również 20 sekund.

Zgodnie z temi danymi, odpowiadającymi rzeczywistości, pociąg kolei miejskiej wychodzi ze stacji ruchem przyspieszo-

¹⁾ Warto zauważyć, że pomnożywszy przez $\frac{5}{18}$ prędkość, wyrażoną w kilometrach na godzinę, otrzymamy odpowiadającą jej prędkość w metrach na sekundę; w danym wypadku mamy: $36 \times \frac{5}{18} = \frac{180}{18} = 10$.

Gdybyśmy, odwrotnie, chcieli zastąpić prędkość w metrach na sekundę odpowiadającą jej prędkością w kilometrach na godzinę, należałoby pierwszą pomnożyć przez $\frac{18}{5}$ lub $\frac{36}{10}$, czyli odjąć $\frac{1}{10}$ i pozostałą resztę pomnożyć przez 4; pociąg, n. p., przebywający 30^m na sekundę, posiada prędkość 108 kil. na godzinę, ponieważ $30 - 3 = 27$ i $27 \times 4 = 108$.

nym, na podobieństwo spadającej kuli, i przebywa 100^m w ciągu pierwszych 20 sekund; w ciągu następnych 20 sekund przebywa w pełnym biegu 200^m , robiąc po 10^m na sekundę; hamując wreszcie bieg od tej chwili, zużywa jeszcze 20 sekund na przebycie ruchem zwolnionym pozostałych 100^m . W ten sposób przebywa odległość między stacjami w ciągu 60 sekund czyli jednej minuty.

Wszystkie te szczegóły widać dokładnie na figurze 90: część grafiku OA przedstawia rozpędzanie się pociągu (100^m w ciągu 20 sekund), AB—jego pełny bieg (200^m w ciągu 20 sekund) wreszcie BM — zwalnianie biegu (100^m w ciągu 20 sekund).

Łatwo też zauważyć na przytoczonym grafiku, jak wiele czasu zabiera rozpędzanie się pociągu i jego hamowanie na tych małych odległościach; gdyby, n. p., odległość pomiędzy dwiema stacjami wynosiła tylko 200^m , zamiast 400^m , pociąg, nie osiągnąwszy wcale pełnego biegu, przebyłby ją w ciągu 40 sekund.

57. Geometria analityczna.

Ogólna zasada wykreślenia grafików, wskazana w rozdziale 46 i zastosowana do różnych przykładów w następnych rozdziałach, polega, jak widzieliśmy, na tym, że mając dwie proste OX, OY, wzajemnie prostopadłe, odmierzymy na OX odcinek $x=OP$, na OY odcinek $y=OQ$ i wyznaczamy punkt M, jako przecięcie się dwóch równoległych odpowiednio do OY i OX, poprowadzonych przez punkty P i Q. Jeżeli przytym y jest wartością pewnej funkcji x , którą zamierzamy przedstawić graficznie, wtedy linja łącząca wszystkie punkty M, otrzymane w powyższy sposób, będzie obrazem przebiegu tej funkcji.

Zobaczymy zaraz, że sformułowana zasada, z dodaniem kilku nowych nazw, jest podstawą *geometrii analitycznej*,

ważnej i pożytecznej nauki, którą zawdzięczamy gienjuszowi Descartes'a ¹⁾; bez znajomości tej nauki nie wynalezionoby zapewne metody przedstawień graficznych.

Dwie proste OX i OY (fig. 91) nazywają się *osiąmi współrzędnymi*: OX jest osią x -ów lub osią *odciętych*, OY — osią y -ów lub osią *rzędnych*. $OP = x$ i $OQ = y$ są *spółrzędnymi* punktu M : OP jest jego *odciętą*, OQ — *rzędną*.

Ponieważ odciętą ujemną odcieramy w kierunku OX' , rzędną zaś ujemną — w kierunku OY' , przeto punkt znajdujący się wewnątrz:

kąta XOY	posiada	spółrz.	x i y	dodatnie,
" YOX'	"	"	x ujemną i y	dodatnią,
" $X'OY'$	"	"	x i y	ujemne,
" $Y'OX$	"	"	x dodatnią i y	ujemną.

Mając dany jakikolwiek punkt na płaszczyźnie figury, możemy wyznaczyć jego współrzędne; mając zaś dane jakiekolwiek współrzędne, możemy znaleźć odpowiadający im punkt

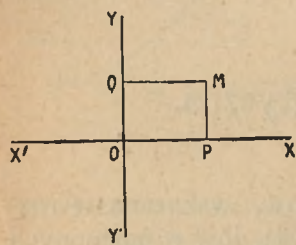


Fig. 91.

Jeżeli współrzędne x , y punktu M nie są jakiegokolwiek, lecz istnieje pomiędzy nimi pewien związek algebryczny, t. j. przy danej wartości jednej ze współrzędnych możemy znaleźć drugą, wykonawszy oznaczone działania rachunkowe, wtedy punkt M opisze pewną linię. Wzmiankowany związek algebryczny nazywamy *równaniem* tej linii.

Przedmiotem geometrii analitycznej są dwa zasadnicze zagadnienia: 1) wykreslić linię i znaleźć jej własności, jeżeli jest dane równanie tej linii; 2) znaleźć równanie linii, ściśle w jakikolwiek sposób określonej.

Nie zamierzając bynajmniej zapoznawać dzieci z geometrią analityczną, chcieliśmy tylko zwrócić uwagę, że już

¹⁾ René Descartes, słynny filozof i uczoney francuski, urodził się w Haye, prow. Touraine (1596—1650).

przy wykreślaniu grafików stosowaliśmy zasady tej nauki, nie wiedząc nawet o tym i nie znając jeszcze jej nazwy; skorzystaliśmy też z okazji, aby oddać hołd pamięci gienjalnego człowieka, którym szczyci się ludzkość.

Jakkolwiek olbrzymi postęp w badaniach nad liniami krzywymi datuje się dopiero od wprowadzenia metod geometrii analitycznej, jednak trzy z pomiędzy tych linii (oprócz kilku innych, rzadziej stosowanych) były już znane starożytnym geometrom greckim, którzy, stosując metody geometrii elementarnej, z podziwu godną przenikliwością wykryli przed dwudziestoma zgórą wiekami wiele własności tych krzywych, z których do dziś dnia korzystamy.

Z uwagi na teoretyczne i praktyczne znaczenie wzmiankowanych krzywych, powiemy o nich kilka słów w następnych rozdziałach, aby zapoznać dzieci przynajmniej z ich kształtem i nazwami oraz rozbudzić ich ciekawość w tym kierunku, kiedy nadejdzie czas systematycznej nauki.

58. P a r a b o l a.

Spotkaliśmy się już z tą krzywą w grafikach spadającego kamienia i wyrzuconej w górę kuli oraz w części grafiku, ilustrującego bieg pociągów kolei miejskiej. Liny lub łańcuchy mostu wiszącego mają kształt paraboli.

Określamy parabolę jako krzywą (fig. 92), której każdy punkt M znajduje się w jednakowej odległości od danego punktu F i danej prostej (D) , czyli $MF = MP$; postać krzywej w tym wypadku jest wskazana na figurze. Prostopadła FY , spuszczone z punktu F , zwane go *ogniskiem*, do prostej (D) , zwanej *kierownicą*, jest *osią* krzywej, która z obydwuch jej stron ma

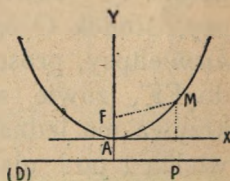


Fig. 92.

kształt jednakowy. Oś przecina krzywą w środku odległości pomiędzy ogniskiem i kierownicą, w punkcie A, który zowie się *wierzchołkiem* paraboli.

Przyjąwszy AY za oś rzędnych, prostopadłą zaś do niej AX zaś oś odciętych, otrzymamy równanie paraboli w postaci $y=kx^2$.

59. E l i p s a.

Łuki mostów mają często postać połowy elipsy; ukośny przekrój marchwi (kształtem zbliżonej do stożka), którą przecięto nożem, ma kształt elipsy; nieprzezroczysty krążek, n. p. moneta, oświetlony z jednej strony lampą lub świecą, rzuca na arkusz białego papieru cień eliptyczny. Wreszcie astronomja nas poucza, że wszystkie planety, a więc i nasza ziemia, krążą naokoło słońca po elipsach.

Za określenie elipsy możemy uważać jej własność, polegającą na tym, że suma odległości każdego jej punktu od dwóch danych punktów F, F', zwanych *ogniskami* elipsy, jest stała. Na tej własności opiera się sposób kreślenia elipsy na piaszczystej ziemi: umieściwszy w punktach F i F' dwa kołki, przywiązujemy do nich końce sznura oznaczonej długości, który napinamy zaostrzonym prętem żelaznym, kreślącym pewną linię na piasku podczas swego ruchu; jeżeli podczas ruchu pręta sznur pozostawał wciąż napiętym, nakreślona krzywa jest elipsą. Elipsa jest krzywą zamkniętą (fig. 93); prosta FF' zowie się *osią wielką* elipsy, środek O odcinka FF' jest *środkiem* elipsy, prosta zaś OY, prostopadła do FF', zowie się *osią małą* elipsy; krzywa ma jednakową postać nad osią wielką i pod nią, z prawej i z lewej strony osi małej.

Oś wielka przecina krzywą w dwóch punktach A, A', oś mała—w punktach

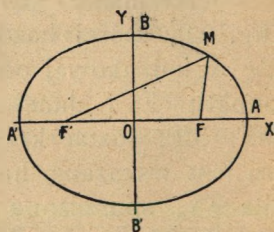


Fig. 93.

B, B'; 4 punkty A, A', B, B' są *wierzchołkami* elipsy. Łatwo się przekonać, że stała długość MF + MF' jest równa A'A lub 2OA; zowią ją długością osi wielkiej, długością zaś osi małej jest odcinek BB' lub 2OB.

Gdyby dwa punkty F, F' złożyły się w jeden O, elipsa stałaby się kołem i mielibyśmy OA = OB. Jeżeli za osi *x*-ów i *y*-ów obierzemy odpowiednio OA i OB i oznaczmy literą *a* długość OA oraz literą *b* długość OB, otrzymamy równanie elipsy w postaci:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Równanie zaś koła, w którym $a=b$, jest następujące:

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

60. H i p e r b o l a.

Chociaż ta krzywa jest równie ważna, jak dwie poprzednie, rzadziej się z nią spotykamy w życiu codziennym. Jeżeli jednak umieścimy na lampie daszek z brzegami kołowymi w ten sposób, aby płomień znalazł się pod spodem, wtedy cień dolnego brzegu daszka na pionowej ścianie będzie częścią hiperboli.

Określamy hiperbolę jako krzywą, posiadającą następującą własność: różnica odległości każdego jej punktu od dwóch punktów stałych F, F', zwanych *ogniskami*, jest stała.

Podobnie jak w elipsie, prosta FF' (fig. 94) oraz prostopadła od niej OY, przechodząca przez środek odcinka FF', są *osiami* hiperboli, która ma kształt jednakowy nad FF' i pod nią, z prawej i z lewej strony OY. Oś FF', przecinającą hiperbolę w dwóch *wierzchołkach* A, A', zowiemy *osią główną*, OY zaś, która nie spotyka krzywej—

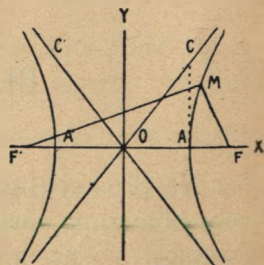


Fig. 94.

osią poboczną. Długość odcinka AA' jest równa stałej różnicy pomiędzy odległościami punktu krzywej od punktów F i F'.

Hiperbola, podobnie jak parabola, może być przedłużana bez końca, osobliwy zaś jej kształt, w porównaniu z dwiema poprzednimi krzywymi, polega na tym, że składa się z dwóch oddzielnych części lub gałęzi.

Istnieją, oprócz tego, proste OC i OC', zwane *asymptotami* hiperboli, które zbliżają się do niej nieograniczenie, w miarę jak je przedłużamy, przedłużając jednocześnie krzywą, lecz nigdy się z nią nie zlewają; łatwo je wykreślimy, wiedząc, że pr. CA jest prostopadła do FF' i OC=OF. Jeżeli OA=a, OC=c, z czego wynika, że $AC^2 = c^2 - a^2$, wtedy, wprowadziwszy jeszcze oznaczenie $AC = b$ i obrawszy OA, OY za osi x-ów i y-ów, otrzymamy następujące równanie hiperboli:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Sądźmy, że przytoczony opis trzech ważnych krzywych, aczkolwiek nader powierzchowny, może być spożytkowany jako materiał do licznych i urozmaiconych ćwiczeń rysunkowych, wykonywanych, po kolei lub naprzemian, już to na papierze kratkowanym, już przy pomocy zwykłych przyrządów rysunkowych, już w postaci szkiców odręcznych. Podobne ćwiczenia przyczynią się niezawodnie do wyrobienia zręczności w ręku, tak niezbędnej przy wykreślaniu krzywych geometrycznych.

61. Podział odcinka.

Na prostej (fig. 95), nieograniczonej w obydwóch kierunkach, obierzmy odcinek AB i wyobraźmy sobie punkt M, poruszający się na tej prostej. Umieszczony, n. p., pomiędzy A i B punkt M podzieli AB na dwa odcinki AM, MB: zba-

damy-stosunek tych odcinków $y = \frac{AM}{MB}$, którego wartość zmienia się zależnie od położenia punktu M. Jeżeli punkt M znajduje się w A, odcinek AM i stosunek y stają się zerem; przy posuwaniu się punktu M od A do B stosunek y rośnie i staje się równym 1, kiedy punkt M znajduje się w środku odcinka AB; w miarę zbliżania się punktu M ku B stosunek y przybiera coraz większe wartości, rośnie nieograniczenie, co wyrazimy krócej, mówiąc, że stosunek stanie się nieskoń-

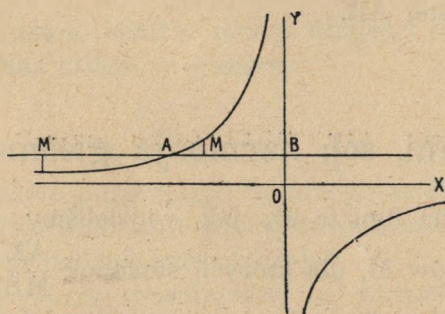


Fig. 95.

czonym, kiedy M znajdzie się w B. Jeżeli punkt M przekroczy B, odcinek AM pozostanie dodatnim, lecz MB stanie się ujemnym, wskutek czego stosunek y będzie ujemny, zachowując w sąsiedztwie B bardzo wielkie wartości bezwzględne; przy dalszym ruchu punktu M w tym samym kierunku, uważany stosunek pozostanie ujemnym, jego zaś wartości bezwzględne, wciąż większe od 1, będą malały, zbliżając się do 1.

Jeżeli wreszcie punkt M, wyszedwszy z A, będzie się posuwał na lewo zamiast, jak przedtem, na prawo, stosunek $\frac{AM}{MB}$ będzie znowu ujemny, jego zaś wartości bezwzględne, pozostając wciąż mniejszemi od 1, będą się zbliżały do 1 w miarę oddalania się punktu M od A.

Odmierzwszy na prostopadłych do prostej AB rzędne, odpowiadające różnym wartościom stosunku y , zmieniającego

się w zależności od położenia punktu M , otrzymamy grafik zmian tego stosunku w postaci krzywej (fig. 95), która jest hiperbolą; asymptotami tej hiperboli są proste: BY , prostopadła do AB , oraz OX , równoległa do AB i nakreślona pod nią (w kierunku ujemnym) w odległości jednostki długości.

Ponieważ, jak widzimy na figurze 95, niema dwóch różnych punktów M , którym odpowiadałaby ta sama wartość stosunku $\frac{AM}{MB}$, mając przeto dany stosunek y co do znaku i wartości bezwzględnej, oznaczmy dokładnie położenie punktu M na prostej AB .

62. Do, mi, sol: harmonja geometryczna.

Chociaż na figurze 95, jak widzieliśmy, niema dwóch różnych punktów M , dla których stosunek $\frac{AM}{MB}$ posiadałby tę samą wartość (co do znaku i wartości bezwzględnej), jednakowoż do każdego punktu M możemy dobrać inny M' (lecz tylko jeden) tak, aby wartości bezwzględne stosunków $\frac{AM}{MB}$, $\frac{AM'}{M'B}$ były równe; ponieważ te stosunki mają znaki różne, będzie przeto $\frac{M'A}{M'B} = \frac{AM}{MB}$.

O czterech punktach M', A, M, B , spełniających powyższy warunek, mówimy, że tworzą *szereg harmoniczny*.

Aby wyjaśnić pochodzenie tej nazwy, przekształcimy najprzód proporcję $\frac{M'A}{M'B} = \frac{AM}{MB}$, wprowadzając oznaczenia: $M'A = a$, $M'M = m$, $M'B = b$. Ponieważ wtedy $AM = m - a$, $MB = b - m$, możemy powyższej proporcji nadać postać:

$$\frac{a}{b} = \frac{m-a}{b-m} \text{ lub } \frac{m-a}{a} = \frac{b-m}{b};$$

$$\frac{m}{a} - 1 = 1 - \frac{m}{b}; \quad m \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = 2; \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{m}.$$

Wiadomo następnie z akustyki, że długości strun drgających, które odpowiadają tonom *do*, *mi*, *sol*, tworzącym doskonały akord majorowy, są proporcjonalne do liczb:

$$1 \quad \frac{4}{5} \quad \frac{2}{3};$$

odwrotne więc długości są proporcjonalne do liczb:

$$1 \quad \frac{5}{4} \quad \frac{3}{2}$$

lub

$$4 \quad 5 \quad 6.$$

Ponieważ zaś $4+6=2\cdot5$, przeto długości a , m , b uważanych strun czynią zadość warunkowi:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{m}.$$

Takie właśnie porównanie faktów geometrycznych z fizycznymi spowodowało zapewne wprowadzenie nazw: szereg harmoniczny lub podział harmoniczny.

Zauważymy przy sposobności, że podzieliwszy 1 przez każdy wyraz jakiegokolwiek postępu różnicowego:

$$a \quad b \quad c \dots,$$

otrzymamy nowy szereg:

$$\frac{1}{a} \quad \frac{1}{b} \quad \frac{1}{c} \dots,$$

zwany *postępem harmonicznym*.

Przytoczmy jeszcze jedną z najważniejszych własności szeregu harmonicznego z uwagi na jej znaczenie w geometrii.

Połączmy 4 punkty szeregu harmonicznego $M'AMB$ (fig. 96) z jakimkolwiek punktem P i przetnijmy 4 otrzymane w ten sposób proste PM' , PA , PM , PB jakąkolwiek prostą: punkty przecięcia utworzą szereg harmoniczny. Mamy więc na figurze szeregi harmoniczne:

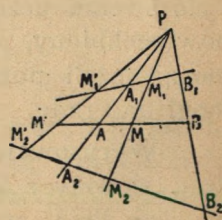


Fig. 96.

$M'_1A_1M_1B_1$, $M'_2A_2M_2B_2$.

Układ 4 prostych PM' , PA , PM , PB nazywa się *pekłem harmonicznym*.

63. Paradoks: 64=65.

W matematyce spotykamy się często z paradoksami, t. j. z widocznie błędnymi wynikami poprawnego napozór rozumowania.

O ile paradoks niewytłumaczony jest niebezpieczny, ponieważ sprawia niepokój i rodzi w umyśle wątpliwości, o tyle wytłumaczony staje się pouczającym, wskazując sidła, czyhające na nasz umysł, i pozory, którym często ulegamy. Pokazuje się bowiem, że źródła bijące w oczy niedorzeczności należy szukać już to w błędnym rozumowaniu, już w nie-
dbale wykonanym rysunku.

Chociaż jednak paradoksy należycie sformułowane i wyjaśnione są na miejscu podczas nauki *systematycznej*, należy zachować pod tym względem wielką ostrożność w nauce *początkowej*, w której nie chodzi o zgłębienie rzeczy, lecz o ich pokazanie, namacalne przedstawienie.

Kierując się powyższymi względami, nie poruszałem dotąd podobnych kwestji. Lecz obecnie, kiedy nauka początkowa zbliża się ku końcowi, nie będzie nic zdrożnego (przeciwnie, upatruję w tym pożytek dla ucznia), jeśli zaproponujecie swemu uczniowi, aby wyjaśnił następujący, dość rozpowszechniony, paradoks. Przyjdźcie mu jednak w porę z pomocą, jeżeli pozostawiony własnym siłom nie będzie sobie mógł dać rady.

Wyrysowawszy na papierze kratkowanym (fig. 97) kwadrat, złożony z 64 kratek, naklejmy go na kartonie i poprowadźmy linje, wskazane na figurze. Te linje podziela najpierw kwadrat na dwa prostokąty, których podstawy skła-

dają się z 8 kratek, wysokości zaś odpowiednio z 5 i 3; następnie większy prostokąt zostanie podzielony na dwa trapezy, mniejszy zaś na dwa trójkąty. Rozciawszy następnie karton wzdłuż 3 nakreślonych linii, otrzymamy 4 części: A, B (trapezy) i C, D (trójkąty). Jeżeli połączymy te 4 części w taki sposób, jak to wskazuje 2-ga część figury, utworzymy prostokąt, składający się z 5 kolumn, z których każda zawiera 13 kratek; liczba więc kratek, zawartych w prostokącie, jest równa $5 \cdot 13 = 65$, gdy kwadrat zawierał ich tylko $8 \cdot 8 = 64$. A jednak obydwie figury zostały utworzone z tych samych części.

Widząc tedy, że $64 = 65$, zaczynamy się obawiać, czyśmy wypadkiem nie stracili głowy, póki po pewnym zastanowieniu nie znajdziemy wyjaśnienia paradoksu, które, jak się pokaże, nie jest zbyt skomplikowane. Spoglądając na przekątną prostokąta w 2-ej części figury, składającą się z przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego C oraz z boku trapezu A, zapytajmy, czy ta linia jest istotnie prostą. Ponieważ wynika z wykreślenia, że nachylenie przeciwprostokątnej względem dłuższego boku prostokąta $= \frac{3}{8}$, nachylenie zaś boku trapezu

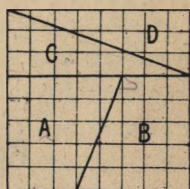


Fig. 97.

względem tego samego boku prostokąta $= \frac{2}{5}$, przeto uważane dwie proste wtedy tylko mogłyby stanowić jedną prostą, gdyby ułamki $\frac{3}{8}$ i $\frac{2}{5}$ były równe. Że zaś z dwóch tych ułamków, przedstawionych w postaci $\frac{15}{40}$, $\frac{16}{40}$, pierwszy jest nieco mniejszy od drugiego, figura, która wydawała się nam linią prostą, jest w rzeczywistości cienkim i wydłużonym czworokątem, którego pole równa się polu jednej kratki, utworzonej

pozornie z niczego. Pokazało się więc, że części prostokąta nie przystają do siebie.

Gdybyśmy poprzedni kwadrat zastąpili większym, złożonym z $21 \cdot 21 = 441$ krutek, oraz podzielili jego bok na dwie części, liczące odpowiednio 13 i 8 krutek, otrzymalibyśmy przy pomocy podobnej konstrukcji paradoksalną równość: $441 = 442$. Dwa ułamki, których równość jest niezbędnym warunkiem przystawiania części prostokąta, byłyby w tym razie następujące: $\frac{8}{21}$ i $\frac{5}{13}$; ponieważ zaś ich różnica $\frac{1}{273}$ jest bardzo drobna, złudzenie, że prostokąt składa się z części dokładnie przystających, byłoby zupełne.

64. Kwadraty magiczne.

Napisawszy w kratkach kwadratu 9 pierwszych liczb 1, 2 ... 9 w następujący sposób:

$$\begin{array}{ccc} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6, \end{array}$$

przekonamy się, że sumy liczb w każdym wierszu, w każdej kolumnie oraz w każdej z dwóch przekątnych są jednakowe; mianowicie: $4 + 9 + 2 = 3 + 5 + 7 = 8 + 1 + 6 = 4 + 3 + 8 = 9 + 5 + 1 = 2 + 7 + 6 = 4 + 5 + 6 = 2 + 5 + 8 = 15$.

Nazywamy podobną figurę *kwadratem magicznym* 3-ech, stałą zaś sumę 15 — stałą sumą magiczną. Otrzymamy również kwadrat magiczny, zmniejszwszy o 1 każdą z poprzednich liczb:

$$\begin{array}{ccc} 3 & 8 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 7 & 0 & 5, \end{array}$$

stała jednak suma w tym razie jest równa 12 zamiast 15.

Gdybyśmy w kwadracie, złożonym z 25 kratek, umieścili 25 liczb 0, 1, 2, . . . 24 tak, aby czyniły zadość powyższym warunkom, otrzymalibyśmy kwadrat magiczny 5-ciu, którego stała suma byłaby równa 60. Oto jeden z takich kwadratów:

0	19	8	22	11
23	12	1	15	9
16	5	24	13	2
14	3	17	6	20
7	21	10	4	18,

który posiada nadto jeszcze następującą własność: jeżeli go podzielimy na dwie części linią pionową, poprowadzoną pomiędzy dwiema jakimikolwiek kolumnami, i przestawimy te części, otrzymamy nowy kwadrat magiczny; jeżeli podzielimy dany kwadrat na dwie części linią poziomą, poprowadzoną pomiędzy dwoma jakimikolwiek wierszami, wtedy, przestawivszy te części, utworzymy znowu kwadrat magiczny. Kwadraty, posiadające opisaną własność, nazywają się „djabelskimi.“

Chociaż kwadraty magiczne wydają się tylko zabawką, jednak badanie ich nastrocza wielce trudne kwestje; poświęcono im też wiele prac, a nie pogardzali tym przedmiotem nawet słynni matematycy, że wymienimy Fermata. Z pomiędzy współczesnych prac na ten temat zasługuje na wyróżnienie książka *G. Arnoux* p. n. „*Arithmétique graphique. Les espaces arithmétiques hypermagiques*“ (Paris, Gauthier-Villars, 1894).

Wzmiankując pobieżnie o kwadratach magicznych, chcemy poprostu zaciekać dzieci i tą dziedziną badań matematycznych, która nie powinna im pozostać zupełnie obcą. ¹⁾

¹⁾ W dziełku *C. G. Bachet de Méziriac* p. n. „*Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres*“ znajdujemy pomiędzy innymi następujący sposób tworzenia kwadratów magicznych z pierwszych



65. Zakończenie.

Gdyby mi przypadło w udziale początkowe nauczanie dzieci w zakresie zasadniczych wiadomości matematycznych, wyłożonych w niniejszym dziełku, przemówiłbym do nich w te słowa, ukończywszy swe zadanie.

9-ciu liczb 1, 2, ... 9 (fig. 98) oraz z pierwszych 25-ciu liczb 1, 2, ... 25 (fig. 99). Dopełniwszy pierwszy kwadrat 4-ma, drugi zaś 16-ma dodatkowymi kratkami (wykreślonemi linijami kropkowanemi), wypisujemy dane liczby po kolei szeregami ukośnemi, które zawierają odpowiednio po 3 i po 5 liczb. Wskutek tego niektóre kratki danych kwadratów zostaną wypełnione liczbami, które znajdują się już na właściwych miejscach, inne zaś puste wypełnimy liczbami z dodatkowych kratek tak, aby liczba z górnej kratki dodatkowej została przeniesiona do najniższej pustej w tej samej ko-

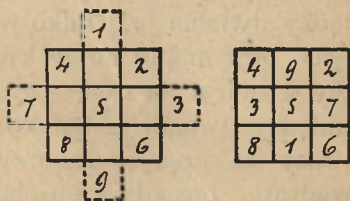


Fig. 98.

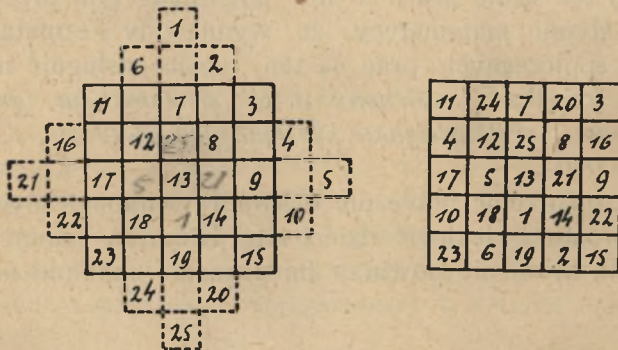


Fig. 99.

lumnie i odwrotnie, oraz aby liczba z prawej kratki dodatkowej została przeniesiona do najdalszej lewej, która jest pusta w tym wierszu, i odwrotnie.

(Przyp. tłumacza).

Przystąpicie niebawem do nauki matematyki, która będzie wam udzielana w większym lub mniejszym zakresie, stosownie do waszego uzdolnienia i zamiarów na przyszłość, lecz której pewien zasób jest niezbędny dla wszystkich.

Chociaż niczego was nie uczono, poznaliście wiele pożytecznych rzeczy, bawiać się; jeżeli zaś zrozumienie pewnej rzeczy, która was zaciękała, wymagało nieraz pewnych wysiłków z waszej strony, wysiłki te były dobrowolne, gdyż niczego od was nie żądano, oszczędzając szczególnie waszą pamięć.

Nie umiejąc jeszcze ani czytać, ani pisać, manipulując tylko z różnemi przedmiotami, zapoznaliście się z liczbami i najprostszymi działaniami; późniejsza zaś znajomość cyfr umożliwiła wam pewną wprawę rachunkową. Przyzwyczajeni do uzmysławiania liczb, które są tylko symbolami, poznaliście liczby ujemne i oswoiście się w zupełności z tym pojęciem. Pewne wiadomości z geometrii, chociaż podane bez dowodu, pozwoliły wam zauważyć ścisły związek, istniejący pomiędzy nauką o liczbach i nauką o rozciągłości.

Nie uczono was wprawdzie ułamków, jak wogóle nie uczono niczego; pomimo to wiecie, co to jest ułamek, oraz umiecie nieźle wykonywać rachunki na tych nowych liczbach.

Postępy, zrazu proste, później nieco uogólnione, wraz z odpowiedniami przykładami dały wam pojęcie o ogromnych liczbach, z którymi spotkaliście się znowu, kiedy wam mówiono o przestawieniach.

Pewien zasób praktycznych wiadomości z geometrii i niejaka znajomość rysunku pozwoliły wam zrozumieć istotę i wykreślanie grafików, które zastosowaliście w kilku przykładach, przeważnie w zagadnieniach o ruchu. Stanąwszy w ten sposób na progu geometrii analitycznej, poznaliście przynajmniej kształt trzech ważnych krzywych, badanych szczegółowo w tej nauce, lecz znanych już starożytnym.

Jeżeli nawet część tych wiadomości ulotniła się z waszej pamięci, pozostała w niej reszta, a w dodatku umysł wasz wdrożył się nieświadomie do porządnego myślenia, stanowiącego cenny nabytek na przyszłość.

Odtąd nie będziecie się już bawili, lecz zaczniecie się uczyć; nie obejdzie się przytym bez wysiłków umysłowych, a nawet pewnych wysiłków pamięci. Przyjdą wam one tym łatwiej, że dotąd oszczędzano wasze siły, a jednak umiecie znacznie więcej, niż umieli dawniej wasi rówieśnicy, których torturowano, każąc im się uczyć na pamięć wyrazów o niezrozumiałej treści.

Ponieważ wiecie już coś o wielu rzeczach, z którymi spotkacie się podczas nauki, unikniecie niepokoju, jaki sprawia każda nowa rzecz. Wprawdzie napotkacie nieraz trudności, lecz do ich przezwyciężenia doda wam odwagi myśl, że one zależą od natury poznawanych rzeczy; że trzeba je koniecznie pokonać, aby otrzymać użyteczne i ciekawe wyniki. Bawiąc się, nabyliście sporo wiadomości, które wam będą pomocne przy rozpoczynającej się obecnie nauce; pracując odtąd, spożytkujecie poprzedni nabytek, wyćwiczycie umysł i rozszerzycie zasób swych wiadomości. Ta praca, w dodatku, nie będzie dla was pańszczyzną: uznawszy ją za pożyteczną, nabierzecie do niej zamiłowania; z czasem stanie się łatwą, niezbędną, jednym słowem potrzebą waszego życia. Jeżeli pewne kwestje sprawią wam istotny kłopot, znajdziecie przewodników w waszych nauczycielach; lecz nie żądajcie od nich niczego więcej, pamiętając, że tylko osobiste i niewymuszone wysiłki prowadzą do dobrych wyników. Że zaś o tej prawdzie przekonaliście się już w czasach zabaw dziecinnych, włożcie więc w sprawę swego wykształcenia cały, niespożytkowany dotąd, zasób cierpliwości, woli i energii.

Nie idzie zatym, aby przytoczone rady i wskazówki były wyrecytowane jednym tchem. Przeciwnie, niechaj wychowawca dziecka, ukończywszy początkową naukę, wyjaśnia mu przy każdej sposobności cele i zadania systematycznej nauki, która się niebawem rozpocznie.

Sądzę, że naturalnym wychowawcą początkowym dziecka powinna być jego rodzina. Jeżeli zaś dla jakichkolwiek powodów, osobistych lub społecznych, ojciec i matka nie mogą spełnić tego zadania, niechże przynajmniej interesują się rozwojem umysłowym swego dziecka i ze wszech miar dopo-

magają sprawie jego wychowania. Kiedy po ukończeniu nauczania początkowego nadchodzi czas nauki systematycznej, odpowiedzialność rodziców staje się tym większa, że wybór szkoły może wywrzeć dodatni lub ujemny wpływ na całe dalsze życie dziecka.

Dla rodziców więc przeznaczam garść następujących, może nieco pobieżnie skreślonych rad, które uważam za pożyteczne. Niechaj wybiorą z nich te, które będą uważali za dobre.

Zgadzamy się wszyscy, że *początkowa* nauka matematyki jest niezbędna dla każdego dziecka bez względu na jego płeć, na zamożność i stanowisko społeczne jego rodziny. Idę jednak dalej, twierdząc, że i *systematyczna* nauka matematyki jest potrzebna wszystkim bez wyjątku: potrzebują jej kobiety, zarówno jak mężczyźni, ponieważ życie codzienne, gospodarstwo domowe oraz przemysł, z którego wytworami ciągle mamy do czynienia, wymagają od nas pewnych wiadomości z dziedziny nauki o wielkościach i o rozciągłości.

Spotykamy się jednak tutaj z rozpowszechnionym zarzutem, który sto razy odpierałem i ustawicznie odpierać będę. Twierdzą mianowicie, że dziecko, nie posiadającego zdolności matematycznych, nie warto uczyć czegoś więcej nad pierwsze początki matematyki, gdyż i tak nie zostanie matematykiem. Dlaczego jednak uczyć to dziecko czytania i pisania, nie zapytywano, czy posiada odpowiednie uzdolnienie w tym kierunku? Czy ludzono się przy nauce rysunku myślą, że dziecko zostanie wielkim malarzem? Nikt przecież nie wątpi, że każdy mężczyzna i każda kobieta powinni umieć wyrażać poprawnie swe myśli w języku ojczystym, a jednak nikomu nie przychodzi do głowy, żeby każdy uczeń miał zostać z czasem Janem Pawłem Courier ¹⁾, Goethem lub Szekspirem.

Nauczanie matematyki, jak każdej innej nauki, nie może *wytworzyć* uczonych, ponieważ jego zadanie polega na wpojeniu w umysły uczących się pewnych wiadomości ogólnych,

¹⁾ Pisarz francuski z zeszłego stulecia, wybitny stylista i hellenista. (Przyp. tłumacza).

pożytecznych i niezbędnych dla każdego człowieka oraz dostępnych dla każdego normalnego umysłu. Dzięki zaś umiejętnej nauce początkowej umysł dziecka może sobie przyswoić ten zasób wiadomości znacznie prędszej, niż to się dzieje przy obecnym systemie nauczania.

Każde dziecko, niezależnie od specjalnego uzdolnienia, może łatwo osiąść niezbędne wiadomości z matematyki (oznaczane mianem „matematyki elementarnej“) tak, jak może się nauczyć czytać i pisać poprawnie lub nawet ładnie; jeżeli posiada upodobanie do matematyki, zostanie matematykiem; talent zaś literacki skłoni je do zostania pisarzem. Nigdy nauczanie nie wytworzyło uczonych ani artystów; jego cel polega na wytwarzaniu ludzi.

Po tym, co powiedziałem, zgodzicie się chyba bez wahania, że wasze dziecko musi osiąść zasadnicze wiadomości z matematyki, niezbędne dla wszystkich.

Pozostanie jeszcze do rozstrzygnięcia kwestja, gdzie i w jaki sposób ma być mu udzielone to wykształcenie matematyczne.

Będę mówił oczywiście tylko o stosunkach francuskich, chociaż kwestja szkolna z małemi odmianami jest prawie wszędzie jednakowa. Mamy we Francji szkoły elementarne, w których przeważnie udzielają lub powinnyby udzielać początkowej nauki matematyki; mamy wyższe szkoły elementarne, dopełniające pierwsze; wreszcie—szkoły średnie z licznymi i różnorodnymi poddziałami. Jak widzicie, wybór jest dość obfity i trzeba wybierać, gdyż ja, niestety, nie mogę wam udzielić pożytecznej rady pod tym względem.

Nauczanie elementarne w naszych szkołach jest znośne; wyższe nauczanie elementarne dawałoby najmniej powodów do krytyki, gdyby wiele rodzin nie ulegało urokowi „zawodów wyzwolonych“ i kariery urzędniczej. Co się tyczy nauczania średniego, poprzestanę na zacytowaniu krótkiego ustępu z pracy p. Ascoli, w którym, bez obawy błędu, możnaby się dopatrzeć eleganckiej ironji: „Rozszerzając program nauk matematyczno - fizycznych w szkole średniej, jego autorowie zamierzeli powiększyć udział tych nauk w rozwoju młodocia-

nych umysłów. Dotąd podobna rola przypadała w udziale naukom filologicznym, gdy tymczasem nauki matematyczno-fizyczne, pozostając przeważnie przedmiotem egzaminacyjnym, były pozbawione wszelkiej wartości wychowawczej.“

Przetłumaczcie powyższy ustęp w następujący sposób: *dotąd* zadaniem naszej szkoły średniej było oglupianie młodzieży, *gdy tymczasem* na przyszłość wszystko pozostanie po dawnemu.

Kiedy zaś uprzytomnimy sobie, że profesorowie szkół średnich są to ludzie z wysokim wykształceniem, oddani z poświęceniem swym obowiązkom i w najwyższym stopniu sumienni, zadrżymy na myśl, ile to spustoszeń może wyrządzić rutyna, idąca ręką w rękę z potworną administracją, posiadającą tylko władzę szkodenia.

Jakąkolwiek zresztą szkołę obraliście, nie zaniedbujcie ustawicznej kontroli nad wychowaniem waszego dziecka. Zanim je tam nawet umieścicie, macie prawo i obowiązek wywiedzenia się (na co nie trzeba być matematykiem), jaki kierunek nauki panuje w szkole, jakie w niej przyjęto metody, jakie są warunki pracy szkolnej. Nie dajcie się przytym zastraszyć ani kierownikowi szkoły, ani jej nauczycielom, gdyby wam zwracali uwagę, że mieszacie się w nieswoje rzeczy.

Dwa następujące spostrzeżenia pozwolą wam wyrobić sobie pewien sąd o szkole.

Istnieją szkoły, w których do wykładu miar metrycznych niema ani jednego egzemplarza metra, litra, kilograma i t. d.

Gieometriję wykładają w szkołach od wieków, nieomal od czasów starożytnych Greków, metodą nudną, nieracjonalną, która odstręcza, zwłaszcza początkujących, od tej nauki. Tymczasem przed trzydziestu z górą laty, w r. 1874, wybitny uczony p. Karol Méray, profesor uniwersytetu w Dijon, napisał godną uwagi książkę p. n. „Nouveaux éléments de Géométrie“, w której na naczelnym miejscu umieścił naukę o płaszczyźnie i przestrzeni, uwidocznivszy prawdy doświadczalne, ukrywane z hipokryzją w metodzie klasycznej. Książka oburzyła administrację uniwersytecką, z czasem jednak wprowadzono nową metodę do wielu szkół, przeważnie wyższych

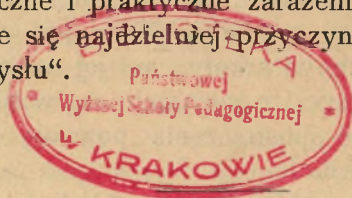
elementarnych, i wszędzie otrzymano doskonałe wyniki. Szkoła średnia pozostaje jednak zamknięta dla nowej metody, jak uszy głuche, pomimo iż zjawilo się drugie wydanie książki p. Méray. ¹⁾

Jeżeli więc przekonacie się, że w muzeum szkolnym nie ma okazów miar i wag metrycznych, brakuje przyrządów mierniczych i t. p.; jeżeli następnie dowiecie się, że w wykładzie geometrii nie stosuje się metoda Méray, unikajcie takiej szkoły!

Gdyby ojcowie i matki, troszcząc się prawdziwie o przyszłość umysłową swych dzieci, przemawiali stanowczo i żądali tego, czego mają prawo żądać, wiele przeżytków, trzymających się dotąd uporczywie, zniknęłoby, jak za dotknięciem różdżki czarodziejskiej.

Sądzę, że z czasem przyjdzie do tego. Zanim to jednak nastąpi, muszą ludzie uznać słuszność następującej maksymy, wypowiedzianej przez Emila Borela w jednym z jego pięknych odczytów:

„Teoretyczne i praktyczne zarazem wykształcenie matematyczne może się ~~najbardziej~~ przyczynić do wyrobienia młodocianego umysłu“.



¹⁾ Pisałem te słowa w maju r. 1905. Dekretem z dn. 27 lipca, dopełnionym instrukcją z dn. 9 września t. r., zmieniono program matematyki w szkole średniej, wprowadzając zasady nowej metody do wykładu geometrii, czego można tylko powinszować ministerjum Oświaty Publicznej. Postąpiono jednak niewdziecznie i niesprawiedliwie względem autora nowej metody, nie wymieniając nawet jego nazwiska.

Skorowidz przedmiotowy.

	<i>Str.</i>		<i>Str.</i>
Algebra	34	Geometria analityczna	131
Algebraiczne funkcje	112	Gońcach (o) zagadnienia	113
„ symbole	35	Grafiki	110
Asymptoty hiperboli	136	„ kolejowe	115
Boki trójkąta	58	„ meteorologiczne	119
„ wielokąta	59	Graniastosłup	62
Cyfry	59	„ prosty	62
Cyrkiel	101	Graniastosłupa krawędzie	62
Czworokąt	60	„ podstawy	62
Czynniki	45	„ ściany	62
		„ wysokość	62
Djabelskie kwadraty	143	Harmoniczny pęk	140
Dodatnia liczba	36	„ podział	138
Dodawanie	18	„ postęp	139
Dodawania tabliczka	16	Hiperbola	135
Dwukowe liczenie	86	Hiperboli asymptoty	136
Dwunastokąt	60	„ ogniska	135
Dzielenie	50	„ oś poboczna	136
Dzielenia reszta	52	„ osi	136
Dzielna	51	„ równanie	136
Dzielnik	51	„ wierzchołki	135
Dziesiątka	13	Iloczyn	43
Dziesięciokąt	60	Iloraz	50
Elipsa	134	Jednostka	40
Elipsy ogniska	134	„ objętości	107
„ osi	134	„ pola	64
„ oś mała	134	Kąt	57
„ oś wielka	134	„ ostry	57
„ równanie	135	„ prosty	57
„ środek	134	„ rozwarty	57
„ wierzchołki	135	„ środkowy	103
Funkcje	111	„ wpisany	103
„ algebraiczne	112		

	<i>Str.</i>		<i>Str.</i>
Kąty wielokąta	59	Mała oś elipsy	134
„ wklęsłe	59	Mianowana liczba	13
Kierownica paraboli	133	Mianownik	54
Kierunek odcinka	37	Mnożenia tabliczka	41
Koło	102	Mnożenie	43
Koła łuk	103	„ muzulmańskie	45
„ odcinek	103	Mnożna	43
„ pole	104	Mnożnik	44
„ promień	102		
„ średnica	102	Niemianowana liczba	13
„ środek	102	Nieparzysta liczba	16
Koniec odcinka	37		
Krawędzie graniastopuła	62	Objętości	107
„ ostrostopuła	63	Obrazowe przedstawienia	98
Księżycy Hippokratesa	106	Odcięta	132
Kula	109	Odcinek koła	103
Kuli koła wielkie	109	„ prostej	32
„ promienie	109	Odcinka koniec	37
„ średnice	109	„ kierunku	37
„ środek	109	„ początek	37
Kwadrat	61	„ podział	136
„ arytmetyczny Fermata	83	Odejmowanie	20
„ djabelski	143	Odjemna	20
„ liczby	46	Odjemnik	20
„ magiczny	142	Ogniska elipsy	134
„ przeciwprostokątnej	67	„ hiperboli	135
„ różnicy	70	Ognisko paraboli	133
„ sumy	69	Okrag	102
Kwadratu pole	65	Oś poboczna hiperboli	136
		„ paraboli	133
Liczba	12	Osi elipsy	134
„ niemianowana	13	„ hiperboli	135
Liczby kwadrat	46	„ spólrzędnych	132
Liczba dodatnia	36	Ośmiokąt	60
„ mianowana	13	Ostrosłup	63
„ nieparzysta	16	Ostrosłupa krawędzie	63
„ parzysta	16	„ podstawa	63
„ pierwsza	48	„ wierzchołek	63
„ trójkątna	73	„ wysokość	63
„ ujemna	36	Ostry kąt	57
„ złożona	48		
Liczenie	15	Pamięciowy rachunek	16
„ dwukowe	86	Parabola	133
„ piśmienne	29	Paraboli kierownica	133
„ symboliczne	15	„ ognisko	133
„ ustne	15	„ oś	133
Liczenia różne systematy	83	„ równanie	134
Licznik	54	„ wierzchołek	134
Linja prosta	31	Paradoksy	140
		Parzysta liczba	16
Łuk koła	103	Pęk harmoniczny	140
		Pięciokąt	60
Magiczne kwadraty	142	Pierwsze liczby	48
Malejący postęp	91	Piśmienne liczenie	29

	<i>Str.</i>		<i>Str.</i>
Płaszczyzna	56	Romb	61
„ pozioma	57	Rosnący postęp	91
Pociągi kolei żelaznych	115	Rozety	106
„ kolei miejskiej	129	Rozwartokątny trójkąt	58
Początek odcinka	37	Rozwarty kąt	57
Podstawa ostrosłupa	63	Równanie elipsy	135
„ równoległoboku	61	„ hiperboli	136
„ stożka	108	„ linji	132
„ trójkąta	59	„ paraboli	134
Podstawy graniastoslupa	62	Równoboczny trójkąt	59
„ trapezu	60	Równoległe proste	56
„ walca	108	Równoległobok	61
Podział harmoniczny	138	Równoległoboku podstawa	61
Pola jednostka	64	„ pole	65
Pole	64	„ wysokość	62
„ koła	104	Równoległoscian	62
„ kwadratu	65	Równoramienny trójkąt	59
„ prostokąta	65	Różnica	20
„ równoległoboku	65	„ postępu	89
„ trapezu	66	Różnicy kwadrat	70
„ trójkąta	66	Ruch kuli w górę	128
Postępy harmoniczne	139	Rzędna	132
„ ilorazowe	90		
„ malejące	91	Setka	14
„ rosnące	91	Setne części kąta prostego	101
„ różnicowe	89	Sieczna dwóch równoległych	58
Potęga	46	„ w kole	103
Pozioma płaszczyzna	57	Siedmiokąt	60
„ prosta	57	Sito Eratostenesa	50
Procent składany	94	Spadek kamienia	126
Promień koła	102	Spotykające się proste	57
„ kuli	109	Spółrzedne	132
Prosta	31	Stosunek	40
„ pionowa	57	„ okręgu do średnicy (π)	104
„ pozioma	57	Stożek	108
Proste prostopadłe	57	Stożka podstawa	108
„ równoległe	56	„ wierzchołek	108
„ spotykające się	57	„ wysokość	109
Prostej odcinek	32	Styczna koła	103
Prostokąt	61	Styczności punkt	103
Prostokąta pole	65	Suma	18
Prostopadłe proste	57	„ kwadratów n pierwszych	
Prosty kąt	57	„ liczb	78
Przeciwprostokątna	67	„ n pierwszych liczb	74
Przeciwprostokątnej kwadrat	67	„ n pierwszych nieparzy-	
Przekątne wielokąta	60	„ stych liczb	76
Przenośnik	101	„ sześciątów n pierwszych	
Przestawienia	96	„ liczb	80
„ obrazowe	98	„ wyrazów postępu	90,91
Punkt styczności	103	Sumy kwadrat	69
		„ sześciąt	73
Rachunek pamięciowy	16	Symbole algebryczne	35
Reszta	20	Symboliczne liczenie	15
„ dzielenia	53	Systematy liczenia	83

	<i>Str.</i>		<i>Str.</i>
Sześcian	63	Walca podstawy	108
Sześcian lirowy	46	„ wysokość	108
„ suł.	73	Walec	108
Sześciokąt	60	Wielka oś elipsy	134
Ściany graniastosłupa	62	Wielkie koło na kuli	109
„ ostrosłupa	63	Wielokąt	59
Średnice koła	102	„ wypukły	60
„ kuli	109	Wielokąta boki	59
Środek elipsy	134	„ kąty	59
„ koła	102	„ przekątne	60
„ kuli	109	„ wierzchołki	59
Środkowy kąt	103	Wierzchołek ostrosłupa	63
Tabliczka dodawania	16	„ parabol	134
„ mnożenia	41	„ stożka	108
Trapez	60	Wierzchołki elipsy	135
Trapezu podstawy	60	„ hiperboli	135
„ pole	66	„ trójkąta	58
Trójkąt	58	„ wielokąta	59
„ arytmetyczny Pascala	82	Wklęsłe kąty	59
„ prostokątny	58	Wpisany kąt	103
„ równoboczny	59	Wykładnik postępu	90
„ równoramienny	59	„ potęgi	46
„ rozwartokątny	58	Wypukły wielokąt	60
Trójkąta boki	58	Wyrazy postępu	89, 90
„ podstawa	59	„ ułamka	54
„ pole	66	Wysokość graniastosłupa	62
„ wierzchołki	58	„ ostrosłupa	63
„ wysokość	59	„ równoległoboku	62
Trójkątne liczby	73	„ stożka	109
Ułamek	54	„ trójkąta	59
Ułamka wyrazy	54	„ walca	108
Ułamki dziesiętne	55	Zagadnienie o gońcach	113
Ujemne liczby	36	Zasada systematu liczenia	84
Ustne liczenie	15	Zero	29
		Złożona liczba	48
		Znaki	34



UP - Kraków BG



1050154626

