

BLIOTEEA

W
S
P

AEUVV

8773

N., 15. 10. I. 53, 20,000

ERNESTO PASCAL

REPERTORIUM

MATEMATYKI WYŻSZEJ

REPERTORIUM MATEMATYKI WYŻSZEJ.

1904

ANALIZA

Biblioteka

Matematyki i Fizyki

WILNO, 1904

Wydawnictwo

WILNO

Wydawnictwo Matematyki i Fizyki

WILNO, 1904

1904

UNIVERSITY OF MICHIGAN LIBRARY

1910

1910

1910

1910

ERNESTO PASCAL.

REPERTORYUM

MATEMATYKI WYŻSZEJ

PRZEŁOŻYŁ

za upoważnieniem Autora

S. DICKSTEIN.

BIBLIOTEKA MATEM. FIZ.

TOM I.

ANALIZA.

Biblioteka

matematyczno-fizyczna

Liczba:

WARSZAWA.

WYDAWNICTWO REDAKCYI „WIADOMOŚCI MATEMATYCZNYCH“.

W drukarni J. Sikorskiego, Warszawa, Warecka 14.

1900.



8773

Дозволено Цензурою
Варшава, 9 Февраля 1900 года.

T R E S C.

	str.
Słowo od tłumacza	XI
Przedmowa autora	XII

ROZDZIAŁ I.

Teorye wstępne.

§	1. Liczby niewymierne	1
§	2. Liczby zespolone	4
§	3. Kwaterniony	8
§	4. Teorya grup punktowych (agregatów, zbiorów)	10
§	5. Pojęcie ogólne funkeyi	12
§	6. Funkeye całkowite i wymierne jednej zmiennej	14
§	7. Teorya granic	17
§	8. Granica wyższa i niższa wartości funkeyi	21
§	9. Teorya funkeyj ciągłych i nieciągłych	22
§	10. Teorya kombinacyj. Spółczynniki dwumianowe	25

ROZDZIAŁ II.

Teorya grup podstawień.

§	1. Wiadomości ogólne	32
§	2. Przechodniość	38

II

3.	Niepierwotność	39
4.	Izomorfizm	40
5.	Funkeye, należące do grup podstawień	41
6.	Przedstawienie analityczne podstawień	43

ROZDZIAŁ III.

Teorya wyznaczników.

1.	Wiadomości ogólne	47
2.	Wyznaczniki symetryczne i skośne. Pfaffiany	52
3.	Wyznaczniki specyalne	54
4.	Wyznaczniki Wrońskiego	60
5.	Jakobiany czyli wyznaczniki funkcyjne	61
6.	Hesyany	64

ROZDZIAŁ IV.

Teorya szeregów, iloczynów nieskończonych i ułamków ciągłych.

1.	Wiadomości ogólne o szeregach	66
2.	Szeregi specyalne. Postępy	73
3.	Iloczyny nieskończone	79
4.	Fakultety analityczne i czynnikowe (faktoryalne)	82
5.	Ułamki ciągłe	84

ROZDZIAŁ V.

Teorya równań algebraicznych.

1.	Wiadomości ogólne	91
2.	Przekształcanie równań	94
3.	Obniżenie stopnia równania. Równania odwrotne	96
4.	Wypadkowe lub rugowniki; wyróżniki	98
5.	Układy równań liniowych	101

III

§ 6.	Rozwiązywanie równań	104
§ 7.	Równania dwumienne	108
§ 8.	Pierwiastki wielokrotne równania	110
§ 9.	Pierwiastki rzeczywiste i zespolone równania	111
§ 10.	Pierwiastki wymierne równania	114
§ 11.	Przybliżone wyznaczanie pierwiastków rzeczywistych równania	115
§ 12.	Teorya Galois'a	117

ROZDZIAŁ VI.

Rachunek różniczkowy.

§ 1.	Nieskończoności i nieskończoności	120
§ 2.	Teorya pochodnych funkcyj rzeczywistych jednej lub wiele zmiennych rzeczywistych	123
§ 3.	Teorya różniczek funkcyj jednej i wielu zmiennych	129
§ 4.	Teorya funkcyj całkowalnych w całym obszarze. Twierdzenie Rollego o wartości średniej i wnioski z niego	130
§ 5.	Teorya wzoru Taylora - MacLaurina. Rozwi- jalność funkcyj na szeregi	132
§ 6.	Teorya wzorów nieoznaczonych	138
§ 7.	Funkcje rosnące i malejące. Maxima i minima funkcyj jednej lub wielu zmiennych	140

ROZDZIAŁ VII.

Rachunek całkowy.

§ 1.	Całkowalność	143
§ 2.	Całki nieokreślone	150
§ 3.	Całki określone i niewłaściwe	157
§ 4.	Całki eliptyczne	163
§ 5.	Całki wielokrotne	169

§ 6.	Całkowanie różniczek zupełnych	170
§ 7.	Warunki całkowności wyrażeń, zawierających pochodne jednej lub wielu funkcji jednej zmiennej	172

ROZDZIAŁ VIII.

Równania różniczkowe.

§ 1.	Wiadomości ogólne	173
§ 2.	Równania różniczkowe zwyczajne rzędu 1-go. Czynnik całkujący. Rozwiązania osobliwe	175
§ 3.	Równania różniczkowe liniowe	183
§ 4.	Równania rzędu wyższego nad pierwszy	188
§ 5.	Całkowanie równań różniczkowych przez szeregi	190
§ 6.	Układy równań różniczkowych jednoczesnych	195
§ 7.	Równania o pochodnych cząstkowych	197

ROZDZIAŁ IX.

Teoria grup przekształceń.

§ 1.	Grupy podstawień punktowych	206
§ 2.	Niezmienniki skończone i różniczkowe grupy jednoparametrowej	209
§ 3.	Przekształcenia stycznościowe	212
§ 4.	Niezmienniki i parametry różniczkowe	214

ROZDZIAŁ X.

Rachunek różnic skończonych.

§ 1.	Wiadomości ogólne	218
§ 2.	Interpolacja. Funkcje interpolacyjne	222
§ 3.	Wzory na kwadratury przybliżone	225
§ 4.	Rachunek odwrotny różnic	230

ROZDZIAŁ XI.

Rachunek waryacyjny.

§ 1.	Wiadomości ogólne. Waryacja pierwsza całki	232
§ 2.	Waryacja druga	238
§ 3.	Różne zagadnienia rachunku waryacyjnego	241

ROZDZIAŁ XII.

Teoria niezmienników.

§ 1.	Formy dwójkowe. Przedstawienia symboliczne	247
§ 2.	Niezmienniki i spółzmienniki	249
§ 3.	Wzór Clebscha-Gordana	255
§ 4.	Zestawienia nazw, używanych w teorii form	257
§ 5.	Układy zupełne form niezmiennicznych	259
§ 6.	Przedstawienie typowe form dwójkowych. Formy stowarzyszone	275
§ 7.	Przedstawienie kanoniczne form	277

ROZDZIAŁ XIII.

Funkcje zmiennych zespolonych.

§ 1.	Wiadomości ogólne	281
§ 2.	Szeregi potęgowe zmiennych zespolonych	284
§ 3.	Jeszcze o definicyi zmiennych zespolonych. Funkcje analityczne Weierstrassa	289
§ 4.	Najprostsze funkcje przestępne	292
§ 5.	Granica, ciągłość, różniczkowanie i całkowanie w obszarze zespolonym	294
§ 6.	Różne twierdzenia o funkcjach monogenicznych, holomorficznych i meromorficznych	295
§ 7.	Punkty osobliwe istotne	300

ROZDZIAŁ XIV.

Teoria funkcji w związku z teorią grup. Peryodyczność. Automorfizm.

§ 1.	Podstawienia liniowe	308
§ 2.	Grupy podstawień liniowych	313
§ 3.	Grupa anharmoniczna. Grupy i funkcje wielościannowe	316
§ 4.	Funkcje peryodyczne	320
§ 5.	Funkcje modułowe	324
§ 6.	Funkcje Fuchsa i Kleina (automorficzne)	328

ROZDZIAŁ XV.

Funkcje algebraiczne i całki abelowe.

§ 1.	Ogólne wiadomości o funkcjach algebraicznych. Rozgałęzienie	330
§ 2.	Konstrukcja powierzchni Riemanna	334
§ 3.	Funkcje na powierzchni Riemannowskiej	338
§ 4.	Całki abelowe	342
§ 5.	Całki abelowe gatunku 1-go	344
§ 6.	Całki abelowe gatunku 2-go	346
§ 7.	Całki abelowe gatunku 3-go	350
§ 8.	Twierdzenie Abela	353

ROZDZIAŁ XVI

Teoria funkcji eliptycznych.

§ 1.	Funkcje $\wp$ Jacobiego	357
§ 2.	Funkcje eliptyczne Jacobiego	364
§ 3.	Cztery funkcje σ Weierstrassa	368
§ 4.	Funkcja p Weierstrassa	375
§ 5.	Funkcje wymierne ilości p i p'	379

VII

§ 6.	Teorya przekształcenia funkcyj eliptycznych	380
§ 7.	O mnożeniu argumentu w funkcyach eliptycznych. Mnożenie zespolone	390

ROZDZIAŁ XVII.

Funkcye hypereliptyczne i abelowe.

§ 1.	Twierdzenie J a c o b i'ego o odwróceniu	396
§ 2.	Własności zasadnicze funkcyj abelowych	399
§ 3.	Szeregi $\wp$ i ich własności	400
§ 4.	Funkcye $\wp$, mające za argumenty całki abelowe gatunku 1-go	404
§ 5.	Funkcye σ K l e i n a w przypadku hypereliptycznym	407

ROZDZIAŁ XVIII.

Funkcye specjalne.

§ 1.	Funkcya wykładnicza, funkcya logarytmowa. Liczba e	413
§ 2.	Funkcye kołowe i hyperboliczne	416
§ 3.	Funkcya B e r n o u l l i'ego. Liczby B e r n o u l l i'ego i E u l e r a	420
§ 4.	Stała E u l e r a. Stała harmoniczna	425
§ 5.	Funkcye E u l e r a	428
§ 6.	Funkcya hypergeometryczna	436
§ 7.	Funkcye kuliste (L e g e n d r e'a) jednej zmiennej	441
§ 8.	Funkcye kuliste dwu zmiennych (L a g r a n g e'a)	446
§ 9.	Funkcye walcowe B e s s e l a	450
§ 10.	Funkcye L a m é g o	454

ROZDZIAŁ XIX.

Przedstawienie analityczne funkcyj.

§ 1.	Rozważania ogólne. Szereg W r o ń s k i e g o. Szereg L a g r a n g e'a	456
------	---	-----

§ 2.	Rozwinięcie na szeregi Fouriera	458
§ 3.	Rozwinięcie na szereg według funkcyj kulistych Legendre'a	452
§ 4.	Rozwinięcie funkcyj punktów na kuli na szereg, według funkcyj kulistych Laplace'a	464
§ 5.	Rozwinięcie funkcyj na szereg funkcyj Bessela	465

ROZDZIAŁ XX.

Teoria liczb całkowitych: wymiernych i zespolonych.

§ 1.	Podzielność liczb wymiernych, całkowitych. Liczby pierwsze	468
§ 2.	O funkcyj liczbowej $E(x)$	474
§ 3.	Wiadomości ogólne o kongruencyach	475
§ 4.	Kongruencye stopnia 1-go	478
§ 5.	Kongruencye stopnia 2-go. Reszty kwadratowe	479
§ 6.	Kongruencye dwumienne. Reszty sześciennie i rzędu wyższego	483
§ 7.	Kongruencye wykładnicze. Pierwiastki pierwotne i skązniki	484
§ 8.	Formy kwadratowe. Przedstawialność liczb za pomocą form	487
§ 9.	Liczby zespolone całkowite Gaussa. Reszty dwukwadratowe	596
§ 10.	Liczby zespolone sześciennie całkowite. Reszty sześciennie	500

ROZDZIAŁ XXI.

Teoria liczb algebraicznych i przestępnych.

§ 1.	Wiadomości ogólne o liczbach algebraicznych	503
§ 2.	Podzielność liczb całkowitych algebraicznych. Liczby idealne Kummera	506
§ 3.	Liczby przestępne	511
§ 4.	Liczba π	512

ROZDZIAŁ XXII.

Rachunek prawdopodobieństwa.

§ 1.	Wiadomości ogólne. Prawdopodobieństwo skutków i prawdopodobieństwo przyczyn	518
§ 2.	Prawdopodobieństwo skutków. Twierdzenie Jakóba Bernoulli'ego. Prawo wielkich liczb	518
§ 3.	Prawdopodobieństwo przyczyn. Teorya błędów	523

ROZDZIAŁ XXIII.

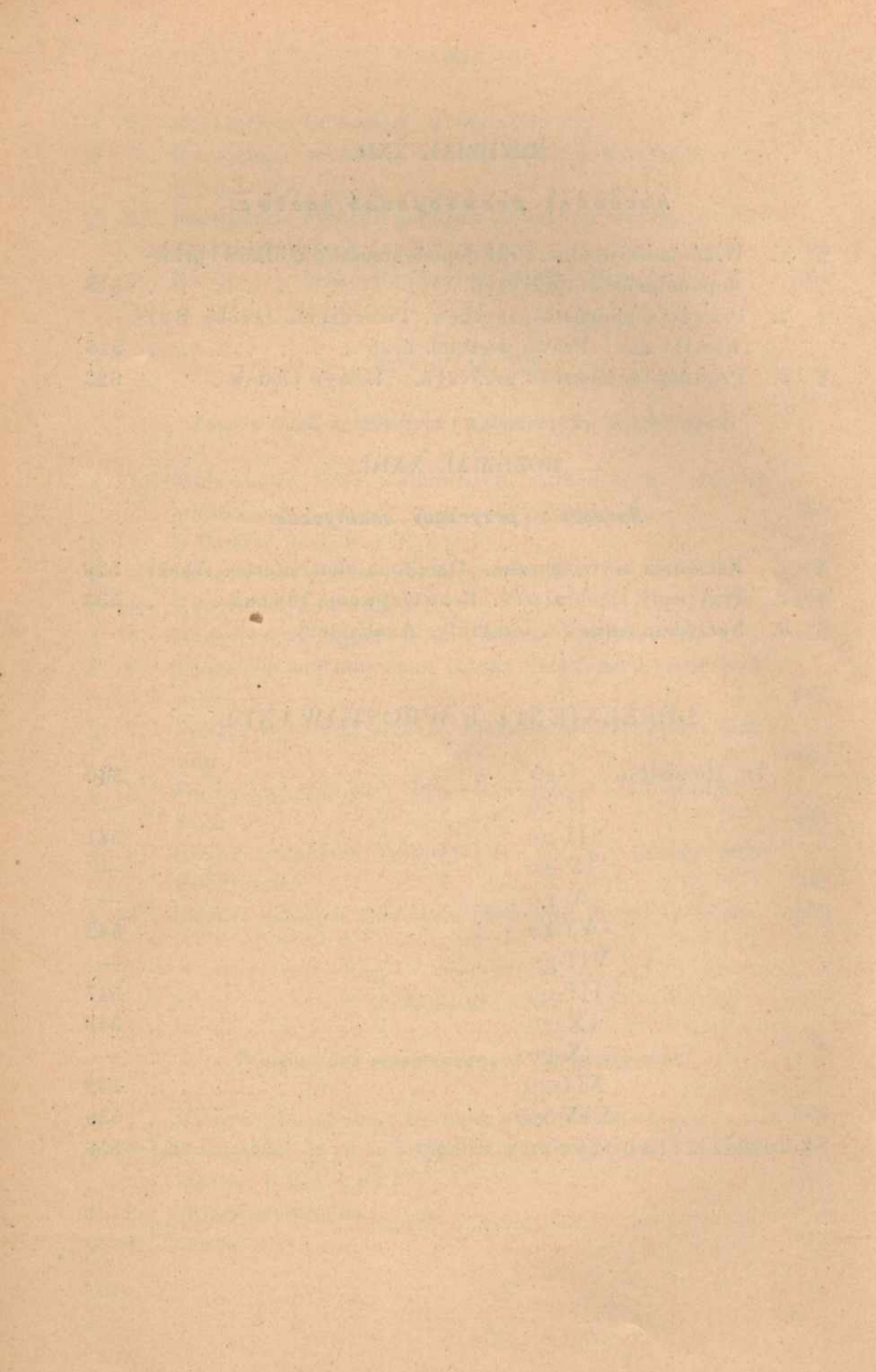
Narzędzia i przyrządy analityczne.

§ 1.	Narzędzia arytmetyczne. Działania elementarne. Abaki	529
§ 2.	Przyrządy algebraiczne. Rozwiązywania równań	533
§ 3.	Narzędzia całkowite. Integrafy. Analizatory	—

DOPEŁNIENIA I SPROSTOWANIA.

Do Rozdziału	I-go	540
"	II-go	—
"	III-go	541
"	IV-go	—
"	V-go	—
"	VI-go	542
"	VII-go	—
"	VIII-go	547
"	IX-go	548
"	X-go	—
"	XII-go	549
"	XIV-go	550

Skorowidz alfabetyczny rzeczy	551—556
---	---------



OD TŁOMACZA.

Profesor E. P a s c a l jest autorem cennych, wydanych nakładem zasłużonej firmy medyolańskiej Ulrico Hoepli podręczników matematyki wyższej, które szybko pozyskały sobie uznanie w literaturze matematycznej. Jego lekcye Rachunków: różniczkowego, całkowego, waryacyjnego i różnicowego wydane zostały przed kilkoma laty w przekładzie polskim; „Rachunek waryacyjny“ wydano świeżo w przekładzie niemieckim, a „Repertorium“ niniejsze, którego tom I oddajemy do użytku czytelników polskich, ma wyjść niezadługo i po niemiecku.

W przedmowie, którą poniżej dajemy, autor wyjaśnia cel i zadanie swej pracy. W uznaniu jej zalet i w przekonaniu, że przynieść ona może pożytek naszej młodzieży, podjęliśmy ten przekład, kierowani nadto przeświadczeniem, że w naszej literaturze, tak niezasobnej dotąd w dzieła, poświęcone wyższym częściom matematyki, książka podobna do niniejszej może być pożądanym nabytkiem.

Stan obecny literatury matematycznej polskiej, zwłaszcza w dziedzinie wykładowej — mimo pewnego ożywienia w ostatniej dobie —, daleki bardzo od stanu tejże literatury w innych krajach, potrzebom naglącym młodzieży naszej bynajmniej nie czyni zadość. W wielu dziedzinach matematyki wyższej nie posiadamy dotąd wcale podręczników, a brak ten odbija się niekorzystnie i na rozwoju języka naukowego polskiego; rozwój ten bowiem —nawet obok żywego słowa wykładowego—trudnym się staje bez

utrwalenia myśli naukowej w postaci wykładu książkowego we wszystkich przedmiotach, nad którymi pracuje matematyka nowoczesna. Otóż w książce tej, obejmującej w treściwym zarysie najważniejsze dobytki nauki, czytelnik znajdzie wyrażone w mowie ojczystej niejedno w tych jej działach, o których w książkach matematycznych polskich dotąd wcale nie pisano. •

W porozumieniu z autorem uzupełniliśmy przekład licznymi dopełnieniami oraz wskazówkami bibliograficznymi, odnoszącymi się do literatury matematycznej polskiej.

Pragniemy, aby ta książka mogła stać się pożytecznym przewodnikiem dla młodzieży naszej w studiach nad nauką. „z której początkową tylko znajomością, jak słusznie mówi Jan Śniadecki, żaden kraj ani do jej pożytków nie trafi, ani do rzędu narodów gruntownie uczonych nigdy należeć nie będzie.“

S. D.

PRZEDMOWA AUTORA.

Celem tej książki jest podanie na możliwie niewielkiej przestrzeni zarysu prawie wszystkich głównych teoryj matematyki nowoczesnej, a mianowicie z każdej teorii tyle tylko, aby czytelnik mógł się w niej zorientować i znaleźć zarazem wskazówki, do jakich dzieł ma się zwrócić, jeżeli pragnie szczegółowiej ją poznać.

Dla studenta książka niniejsza ma być rodzajem *vademecum*, w którym znajdzie on treściwie zestawione wszystkie pojęcia i rezultaty, które w czasie swych studyów przyswoił sobie lub zamierzał przyswoić. W błędzie byłby ten, ktoby mniemał że zadaniem naszym było ułożenie encyklopedyi matematycznej; praca podobna przekraczałaby siły nasze i nie godziłaby się z rozmiarami tej książki. Dajemy w niej tylko skromne repertoryum, które, jak śmiemy mniemać, przynieść może skromny pożytek studującą matematykę.

Porządek, jakiego trzymaliśmy się w układzie różnych części każdej teorii jest wszędzie mniej więcej taki: najprzód podajemy definicje i pojęcia zasadnicze; potem przytaczamy (bez dowodów) twierdzenia i wzory oraz związki, zachodzące pomiędzy utworami i wielkościami, wprowadzonymi przez definicje zasadnicze; wreszcie podajemy krótką bibliografię prac, odnoszących się do danej teorii.

Nie mogąc dać wszystkiego, ograniczamy się wielokrotnie na rzeczach najważniejszych. Trudności wyboru były tu liczne i nie-małe i nie zawsze udało się nam pokonać je szczęśliwie: dla tego też ośmielamy się prosić o pobłażliwość w sądzeniu szczegółów tej pracy.

Z dzieł pokrewnych tego rodzaju istnieją następujące: L á s k a „Sammlung von Formeln der reinen und angewandten Mathematik“ (trzy części, Brunświk, 1888, 1889, 1894), H a g e n „Synopsis der höheren Mathematik“ (2 części, Berlin 1893, 1894), wreszcie wychodzące obecnie pod redakcją H. B u r k h a r d t a i W. F r. M e y e r a dzieło zbiorowe p. t. „Encyclopaedie der mathematischen Wissenschaften“ (Lipsk od r. 1898). Lecz pierwsza z tych książek jest właściwie tylko niezbyt obszernym zbiorem wzorów; druga, jakkolwiek obszerna i pełna cennych wiadomości, nie wydaje się nam ułożoną w ten sposób, aby mogła być przydatną dla tych czytelników, jakich mamy na myśli; trzecia wreszcie mająca być rozległą encyklopedyą matematyczną, podająca wyczerpujące wiadomości o wszystkich teoriach specjalnych, będzie cenną bezwątpienia dla badaczy, ale ze względu na rozmiary niedostępną dla początkujących zwłaszcza matematyków.

Ernesto Pascal.

ROZDZIAŁ I.

TEORYE WSTĘPNE.

§ 1.

Liczby niewymiernne.

Dajmy, że mamy dwie klasy liczb wymiernych: klasę A i klasę B , takie: 1^o że każda liczba klasy A jest mniejsza od każdej z liczb klasy B ; 2^o że dawszy sobie liczbę σ dowolnie małą, możemy zawsze znaleźć dwie liczby: jedną a w klasie A , drugą b w klasie B , aby ich różnica $b - a$ była mniejsza od σ , ale nierówna zeru.

Takie dwie klasy A i B określają liczbę, która może albo należeć do jednej tylko z tych klas, albo nie należeć do żadnej i być wymierną; jeżeli zaś nie zachodzi żaden z tych dwuprzypadków, mówimy, że dwie klasy A i B określają liczbę niewymierną.

Liczba niewymierna przedstawia się tym sposobem jako liczba, oddzielająca klasę A od klasy B , co oznaczać będziemy w ten sposób: $a = (A, B)$.

Liczbą wymierną n nazywamy mniejszą od liczby a , jeżeli w klasie A istnieją liczby większe od n ; większą od a , jeżeli w klasie B istnieją liczby mniejsze od n .

Dwie liczby niewymierne a, a' nazywają się *równymi*, jeżeli każda liczba wymierna mniejsza od a jest także mniejsza od a' , i każda liczba wymierna większa od a jest także większa od a' .

Aby dwie liczby niewymierne $a = (A, B)$, $a' = (A', B')$, były *równymi*, jest koniecznem i dostatecznem, by każda liczba klasy A była mniejsza od jakiejkolwiek liczby klasy B' i aby każda liczba klasy A' była mniejsza od jakiejkolwiek liczby klasy B .

Aby liczba a była większa od liczby a' , jest koniecznem i dostatecznem, by istniała liczba klasy A , przewyższająca wszystkie liczby klasy A' .

Liczba β nazywa się *sumą* dwu liczb $a = (A, B)$, $a' = (A', B')$, jeżeli jest określoną przez dwie klasy liczb, które otrzymać można, dodając wszelkimi możliwymi sposobami wszystkie liczby klasy A i wszystkie liczby klasy A' , a następnie wszystkie liczby klasy B i wszystkie liczby klasy B' . Piszemy to symbolicznie:

$$\beta = a + a' = (A + A', B + B').$$

Jeżeli liczby a i a' są *równe*, to i $a + \gamma$, $a' + \gamma$ będą *równe*; tu γ jest liczbą, określoną przy pomocy klas, $a + \gamma$ i $a' + \gamma$ zaś są określone jak wyżej.

Różnica i iloczyn dwu liczb, określonych za pomocą klas, określamy w sposób podobny do powyższego, wykonywając te działania wszelkimi możliwymi sposobami na liczbach, tworzących klasy. W symbolach będzie:

$$a - a' = (A - A', B - B')$$

$$aa' = (A \cdot A', B \cdot B').$$

W dzieleniu dwu liczb niewymiernych $a = (A, B)$, $a' = (A', B')$ możemy przyjąć, że obie liczby są dodatnie, bo gdy jedna lub obie są ujemne, to dość zmienić znaki, ilorazowi zaś nadać znak według znanego prawidła dla liczb wymiernych. Możemy tedy przyjąć, że wszystkie liczby klas A, B, A', B' są

dodatnie i różne od zera: Dzielenie określamy za pomocą symbolu:

$$\frac{a}{a'} = \left(\frac{A}{B'}, \frac{B}{A'} \right).$$

Podnoszenie do potęgi i wyciąganie pierwiastku można określić sposobem analogicznym, po okazaniu, że nowe określenia nie są w niezgodzie z danem już określeniem iloczynu. W symbolach będzie:

$$a^n = (A^n, B^n); \quad \sqrt[n]{a} = (\sqrt[n]{A}, \sqrt[n]{B}).$$

Przejdźmy do wykładnika niewymiernego. Niechaj n będzie liczbą jakąkolwiek, a zaś liczbą niewymierną: $a = (A, B)$. Liczbę, określoną za pomocą dwu klas, które tworzymy, podnosząc n do potęg, wskazanych przez wszystkie liczby dwu klas A i B , nazywać będziemy potęgą a — tą liczby n w symbolach będzie:

$$n^a = (n^A, n^B), \text{ jeżeli } n > 1.,$$

$$n^a = (n^B, n^A), \text{ jeżeli } n < 1.$$

Własności zasadnicze liczb wymiernych i działań na nich wykonywanych pozostają, na podstawie nowych określeń, niezmiennymi.

Ogół wszystkich liczb wymiernych i niewymiernych tworzy obszar liczb rzeczywistych.

Są trzy główne teorie liczb niewymiernych: Dedekinda (Stetigkeit und irrationale Zahlen, Brunświk 1872, 1892), Weierstrassa (patrz Kossak, Die Elemente der Arithmetik, Berlin 1872, i niżej cytowaną pracę Pincherlego) i G. Cantora (wyłożona np. w dziele Stolza, Vorlesungen über allgemeine Arithmetik I, § VII).

Rozprawy o teorii liczb niewymiernych wymieniamy następujące: G. Cantor (Mathem. Annalen, V; Acta mathem. II), Heine (Journ.

Crelle LXXIV), Pincherle (Giornale di matem. XVIII) Dini, Fondamenti par la teorica delle funzioni di variabili reali, Piza, 1878, przekład niemiecki Lüröth i Schepsa (Lipsk 1892); Pasch Differentialrechnung, 1882, Ricci (Istituto Veneto, 1893, Giorn. di mat. 1897); Betazzi (Periodico di matem. 1888, Teoria delle grandezze, Piza 1890); Dubois-Reymond Functionentheorie, Tyinga 1882, przekład francuski Milhauda, Paryż 1887; Tannery, Introduction à la théorie des fonctions, Paryż 1886; Bachmann, Irrationalzahlen, 1892, Biermann, Elemente der höheren Mathematik 1895). Jasny wykład teorii można też znaleźć w dziele: Capelli-Garbieri, Analysis algebr., Padwa 1886.

Liczby niewymierne dzielą się na dwie kategorie: do pierwszej należą liczby, zwane algebraicznymi, które są pierwiastkami rzeczywistymi równań o współczynnikach całkowitych; do drugiej liczby niealgebraiczne lub przestępne. Liczbami drugiej kategorii są np. liczba π i liczba e . Istnienie liczb przestępnych wykazał po raz pierwszy Liouville, następnie G. Cantor. Patrz niżej rozdział XXI.

§ 2.

Liczby zespolone.

Jeżeli wprowadzimy jednostkę urojoną i , określoną za pomocą wzoru $i^2 = -1$, to liczbą zespoloną będzie liczba postaci $a + ib$, gdzie a i b są liczbami rzeczywistymi; a nazywa się częścią rzeczywistą tej liczby, b — współczynnikiem części urojonej.

Dla zachowania prawideł zasadniczych rachunku należy przyjąć, że:

Dwie liczby zespolone są równe wtedy i tylko wtedy, gdy oddzielnie są równymi ich części rzeczywiste i części urojone. Liczba

zespolona jest zerem wtedy tylko, gdy oddzielnie jest zerem jej część rzeczywista i część urojona.

Liczby zespolone dodajemy i odejmujemy, dodając i odejmując oddzielnie ich części rzeczywiste i urojone.

Liczba $a - ib$ nazywa się sprzężoną względem liczby $a + ib$.

Suma dwu liczb zespolonych sprzężonych jest liczbą rzeczywistą. Iloczyn dwu liczb zespolonych sprzężonych jest liczbą rzeczywistą, którą nazywamy kwadratem modułu lub normą liczby zespolonej.

Liczbę zespoloną można przedstawić w postaci trygonometrycznej $\varrho (\cos a + i \sin a)$, gdzie ϱ jest modułem, który można uważać zawsze za liczbę rzeczywistą dodatnią, a zaś nazywa się argumentem.

Liczby zespolone można przedstawić geometrycznie za pomocą punktów płaszczyzny w ten sposób, że liczbie zespolonej $a + ib$ odpowiada punkt P o odciętej a i rzędnej b w prostokątnym układzie współrzędnych (Gauss, Werke II, str. 171, III, str. 6). Wtedy moduł ϱ wyraża odległość punktu P od początku O współrzędnych, argument zaś a jest kątem, który prosta OP tworzy z osią odciętych.

Moduł sumy dwu liczb zespolonych jest mniejszy od sumy a większy od różnicy ich modułów.

Moduł iloczynu lub ilorazu jest równy iloczynowi lub ilorazowi modułów.

Argument iloczynu lub ilorazu równa się sumie lub odpowiednio różnicy argumentów.

Potęęgę n -tą (n —liczba całkowita) liczby zespolonej, wyrażonej w postaci trygonometrycznej, otrzymujemy, podnosząc do potęgi n -tej moduł i mnożąc argument przez liczbę n (wzór Moivre'a).

Dla liczby n wymiernej ułamkowej, postaci $\frac{p}{q}$, potęga n -ta liczby zespolonej $q (\cos \alpha + i \sin \alpha)$ jest równa:

$$q^{\frac{p}{q}} \left(\cos \frac{p}{q} (\alpha + 2k\pi) + i \sin \frac{p}{q} (\alpha + 2k\pi) \right)$$

gdzie k jest jakąkolwiek liczbą całkowitą dodatnią. Wyrażenie to ma tylko skończoną liczbę różnych wartości, a mianowicie q wartości, które otrzymujemy, kładąc za k liczby $0, 1, 2, \dots, q-1$.

Jeżeli n jest liczbą niewymierną, określoną przez dwie klasy A, B , t. j. gdy $n = (A, B)$, wtedy modulem n -tej potęgi liczby zespolonej będzie $q^n = (A^n, B^n)$ (patrz § 1), jej argumentem zaś będzie liczba określona przez dwie klasy (liczb w ogóle niewymiernych).

$$(A(\alpha + 2k\pi), B(\alpha + 2k\pi)),$$

gdzie jak zwykle k jest liczbą całkowitą dowolną. W tym przypadku rozwiązań jest nieskończenie wiele. Rozwiązanie, odpowiadające takiej wartości liczby k , że $\alpha + 2k\pi$ zawiera się pomiędzy $-\pi$ i $+\pi$, nazywa się rozwiązaniem głównem.

Co do określenia wykładnika i logarytmów zespolonych patrz Rozdział XIII.

Przy pomocy przedstawienia geometrycznego liczb zespolonych można na liczbach tych wykonywać geometrycznie działania zasadnicze. Jeżeli A i A' są punkty płaszczyzny, przedstawiające dwie liczby zespolone, to dla otrzymania ich sumy kreślimy równoległobok o bokach OA i OA' (O jest początkiem współrzędnych); wierzchołek tego równoległoboku, przeciwległy wierzchołkowi O , przedstawia sumę liczb zespolonych.

Różnicę wykreślamy za pomocą podobnej konstrukcyi, zastosowanej nie do punktów A i A' , lecz do

punktu A i do punktu symetrycznego względem punktu A' w odniesieniu do punktu O .

Dla utworzenia iloczynu dwuliczb zespolonych przedstawionych przez punkty A i A' , bierzemy na osi rzeczywistej, t. j. na osi odciętych, punkt 1 i kreślimy trójkąt $OA1$, potem trójkąt do niego podobny $OA'P$ taki, że gdy obrócimy go około punktu O aż do zlania się boku OA' z bokiem OA , to bok PA' stanie się równoległym do boku $A1$. Wtedy punkt P przedstawiać będzie iloczyn liczb zespolonych.

Nakoniec iloraz dwuliczb zespolonych, przedstawionych przez punkty A i A' , tworzymy za pomocą następującej konstrukcyi: Kreślimy trójkąt $OA1$ i na OA bierzemy odcinek równy OA' ; z punktu końcowego K tego odcinka prowadzimy prostą równoległą do $A1$, która spotyka prostą OA w punkcie Q , obracamy trójkąt OKQ około punktu O , póki OK nie zejdzie się z OA' ; położenie, które zajmie wtedy punkt Q będzie punktem żądanym, przedstawiającym iloraz liczb A' przez liczbę A .

Z przedstawieniem geometrycznem liczb zespolonych wiąże się rachunek, zwany rachunkiem ekwipolencji.

Najważniejszymi pracami o tej teorii (prócz cytowanych już prac Gaussa) są: Wessel C., *Essai sur la théorie analytique de la direction* (1799, przedruk w 1897). Argand, *Essai sur la manière de représenter les quantités imaginaires* 1806, (przedruk w Paryżu 1874). Mourey, *Vraie théorie des quantités imaginaires*, 1828, przedruk w 1861. Cauchy, *Mémoires sur les quantités géométriques*, Exercices d'Analyse, IV. Bellavitis, *Sul calcolo delle equipollenze* 1833—1834 (lista tych prac znajduje się w cytowanej niżej książce Laisanta). Hankel, *Theorie der complexen Zahlensysteme*, Lipsk 1867 (porów. Hertz i Dickstein, *Teorya liczb ogólnych*, w *Pamiętniku Towarzystwa Nauk ścisłych w Paryżu*, t. VII, 1875). Hoüel, *Théorie des quantités complexes*, Paryż 1874, Laisant, *Théorie et applications des equipollences*, Paryż 1887. Tannery, *Introduction etc.* (patrz § 1). Stolz, *Vorl.üb. Arithm. t. II* (patrz § 1).

§ 3.

Kwaterniony.

Jedno z uogólnień teorii liczb zespolonych stanowi rachunek tak zwanych kwaternionów, w którym, prócz jednostki zwyczajnej liczb rzeczywistych, wprowadzamy jeszcze trzy jednostki i_1, i_2, i_3 i tworzymy wyrażenie:

$$a_0 + i_1 a_1 + i_2 a_2 + i_3 a_3.$$

Pragnąc zachować własność ogólną, że iloczyn dwu kwaternionów jest kwaternionem, musimy przyjąć, że iloczyn dwu jednostek daje się wyrazić liniowo przez same jednostki. Przyjmujemy tedy, że

$$i_1^2 = -1, i_2^2 = -1, i_3^2 = -1, \\ i_1 i_2 = -i_2 i_1 = i_3, i_2 i_3 = -i_3 i_2 = i_1, i_3 i_1 = -i_1 i_3 = i_2.$$

Stąd widać już, że własność przemienności iloczynu nie utrzymuje się w ogólności dla tych nowych liczb. Gdy $a_1 = a_2 = a_3$, kwaternion nazywa się skalarem, gdy $a_0 = 0$ nazywa się wektorem. Modułem kwaternionu jest liczba dodatnia rzeczywista $\sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$. Liczba

$$i_1 \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} + i_2 \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} + i_3 \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

nazywa się osią kwaternionu

Każdy kwaternion można przedstawić w postaci $\varrho (\cos \alpha + \lambda \sin \alpha)$ gdzie ϱ jest modułem, α —argumentem, λ —osią.

Kwaternion $\varrho (\cos \alpha - \lambda \sin \alpha)$ nazywa się sprzężonym względem kwaternionu $\varrho (\cos \alpha + \lambda \sin \alpha)$.

Kwadrat osi równa się jednostce ujemnej.

Iloczyn dwu kwaternionów sprzężonych równa się kwadratowi modułu.

Iloczyn dwu kwaternionów, mających ós wspólną, otrzymujemy, mnożąc moduły i dodając argumenty. W tym przypadku iloczyn nie zależy od porządku czynników.

Jeżeli kwaterniony dane do mnożenia są równe, otrzymujemy wzór podobny do wzoru Moivre'a.

Kwaternion $z = a_0 + i_1 a_1 + i_2 a_2 + i_3 a_3$ czyni zadość równaniu:

$$z^3 - (3a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2) z + 2a_0 (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) = 0.$$

Można pomyśleć ogólniej liczby zespolone o n jednostkach, t. j. liczby postaci

$$a = i_1 a_1 + i_2 a_2 + \dots + i_{n-1} a_{n-1} + i_n a_n,$$

gdzie $i_1, i_2 \dots i_{n-1}, i_n$ są jednostkami.

Z literatury o liczbach zespolonych ogólniejszych i o kwaternionach wymieniamy dzieła: Grassmann, Ausdehnungslehre (Szczecin 1862), oraz Gesammelte Werke, Lipsk 1894, 1896; Hamilton, Lectures on quaternions Dublin 1853, Elements of quaternions, Londyn 1866, przekład niemiecki Glana, Lipsk 1882; Hankel, Theorie der complexen Zahlensysteme, Lipsk 1867. Tait, Quaternions 1882, wydanie francuskie 1884; Weierstrass (Götting. Nachr. 1884), Schwarz, Dedekind, Hölder (tamże 1884, 1885, 1886); Berloty, Théorie des quantités complexes à n unités principales, 1886; Houël, Théorie des quatern. 1874; Laisant, Introduction à la méthode des quatern., Paryż 1881; Stolz, Vorl. über Arith. II, Lipsk 1886; Hertz, Pierwsze zasady kwaternionów Hamiltona, Warszawa 1887; Dickstein, Pojęcia i metody matematyki, Warszawa 1891, str. 171 i nast.

§ 4.

Teoria grup punktowych (agregatów, zbiorów).

Ustaliwszy jednostkę miary i oznaczwszy na prostej (w ogólności w jakiegokolwiek rozmaitości jednowymiarowej) punkt początkowy (zerowy), możemy do każdej rzeczywistej wartości pewnej ilości zmiennej dobrać punkt prostej, i odwrotnie. Nieskończonej lub skończonej liczbie punktów prostej odpowiadać będzie nieskończona lub skończona liczba wartości zmiennej, i odwrotnie. Ogół ten nieskończonej i skończonej liczby punktów tworzy tak nazwaną grupę nieskończoną lub skończoną punktów, jednowymiarową lub liniową. Jeżeli zamiast jednej zmiennej rozważamy dwie zmienne i obrawszy układ spólrzędnych Descartes'a, jak to się czyni w geometryi analitycznej, do każdej pary wartości obu zmiennych dobierzemy odpowiadający jej punkt płaszczyzny, to nieskończonej lub skończonej liczbie par wartości zmiennych odpowiadać będzie grupa dwuwymiarowa nieskończona lub skończona. W tenże sposób możemy określić grupy o dowolnej liczbie n wymiarów.

Punktem granicznym takiej grupy nazywa się punkt, w którego każdym dowolnie małym otoczeniu istnieją zawsze punkty należące do grupy.

Każda grupa nieskończona punktów ma zawsze przynajmniej jeden punkt graniczny. Grupa skończona nie ma wcale punktów granicznych.

Jeżeli grupa punktów ma więcej niż jeden punkt graniczny, to ogół tych punktów tworzy grupę pochodną. Podobnym sposobem otrzymaćby można z niej i inne grupy pochodne, jeżeli pierwsza grupa pochodna jest nieskończoną.

Przykłady: Grupa $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$ ma jako punkt graniczny punkt zero. Grupa, której punkty są typu $\frac{1}{n} + \frac{1}{m}$

($n, m = 1, 2, 3 \dots$), ma za punkty graniczne punkty typu $\frac{1}{n}$, tworzące znowu grupę nieskończoną.

Grupa punktów wymiernych ma za pierwszą grupę pochodną ogół wszystkich punktów.

Każda grupa pochodna zawiera w sobie wszystkie następne grupy pochodne.

Jeżeli jedna z grup pochodnych jest skończoną, wtedy przerywa się szereg grup pochodnych i grupa pierwotna nazywa się grupą pierwszego gatunku. W przeciwnym razie nazywa się grupą drugiego gatunku.

Grupa nazywa się z gęszczoną lub wszędzie-gęstą w pewnym przedziale, jeżeli w każdym dowolnie małym przedziale, zawartym w poprzednim, znajduje się nieskończenie wiele jej punktów.

Dwie grupy nazywają się grupami równej mocy, jeżeli pomiędzy ich elementami można ustanowić odpowiedniość wzajemną i zupełną. Jeżeli punkty grupy odpowiadają w sposób jedyny i zupełny punktom grupy, utworzonej z szeregu liczb całkowitych $1, 2, 3 \dots$, grupa nazywa się odliczalną.

Jeżeli pierwsza grupa pochodna grupy liniowej punktów jest odliczalną, to wszystkie punkty grupy dają się zawrzeć w odcinkach, których sumę można uczynić dowolnie małą.

Grupa nazywa się doskonałą, jeżeli zlewa się ze swoją pierwszą grupą pochodną, a więc i ze wszystkimi następnymi grupami pochodnymi.

Powyższe pojęcia należą do pierwszych w teoryi grup. Teoryę tę utworzył G. Cantor (Math. Ann. V, str. 123, 1872, Crelle, LXXVII, str. 258, LXXXIV, str. 242, Acta math. II, IV, V). W przedmiocie tym ogłoszono liczne prace, jak to można widzieć z artykułów Vivanti'ego: „Notice historique sur la théorie des ensembles“ (Biblioth. math. VI, 1892, str. 9) i „Teoria degli aggregati“ (Rivista di matematica, III, 1893, str. 189). Borel. Théorie des fonctions, 1898.

§ 5.

Pojęcie ogólne funkcji.

Jeżeli pomyślimy zmienną y , związaną z inną zmienną x w ten sposób, iż nadawszy na x pewną wartość, zawartą w ustalonym przedziale lub, ogólniej, zawartą w oznaczonej grupie nieskończenie wielu wartości, otrzymujemy jedną określoną wartość na y , mówimy, że y jest funkcją zmiennej x w przedziale lub grupie określonej. Zmienna x nazywa się zmienną niezależną. Podobną definicyę utworzyć można dla funkcji y , zależnej od większej liczby zmiennych $x_1, x_2, \dots$.

Funkcja y zmiennej x nadaje się do przedstawienia analitycznego, wtedy, jeżeli można ustanowić układ działań analitycznych, które należy wykonać już to na samej zmiennej x , już to równocześnie na zmiennych x i y , aby wybrawszy pewną wartość na x i wykonawszy wskazane działania, mógł dojść do wartości y .

Funkcja y zmiennej x nadaje się do przedstawienia geometrycznego wtedy, gdy po przyjęciu x i y za współrzędne Descartes'a punktu na płaszczyźnie, miejscem geometrycznem punktu o współrzędnych x i y będzie krzywa w zwykłym znaczeniu tego wyrazu.

Przedstawienia analityczne mogą być dwojakie: wyraźne i niewyraźne lub uwikłane. Przedstawienie analityczne nazywa się wyraźnem wtedy, gdy, wskazane działania analityczne mają być wykonane wprost na zmiennej x , a wykonawszy je, otrzymujemy odrazu wartość zmiennej y . Jeżeli zaś przyjmujemy, że mamy daną analitycznie funkcję dwu zmiennych x i y , t. j. pewien układ działań analitycznych, które należy wykonać równocześnie na obu zmiennych x i y , i że szukamy tym sposobem wszystkich par wartości, dla których ta funkcja obu zmiennych jest zerem, wtedy y można będzie uważać w ogóle za funkcję zmiennej x , lecz daną za pomocą równania, t. j. niewyraźnie.

Jeżeli funkcyja nadaje się do przedstawienia analitycznego wyraźnego, a symbole działań analitycznych, do tego przedstawienia wchodzących, należąc tylko do pierwszych czterech działań rachunku, oraz do potęgowania z wykładnikiem całkowitym, są w liczbie skończonej, wtedy funkcyja nazywa się wymierną.

Najogólniejszą postacią funkcyi wymiernej jednej zmiennej jest:

$$\frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_mx^m}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots + b_nx^n}$$

gdzie $a_0, a_1, \dots, b_0, b_1, \dots$ są stałemi.

Jeżeli w przedstawieniu analitycznem funkcyi znajduje się symbol pierwiastkowania, zastosowany do zmiennej x lub do funkcyi wymiernej tej zmiennej, wtedy funkcyja nazywa się niewymierną.

Funkcyja nazywa się przestępną, jeżeli do jej przedstawienia analitycznego wchodzą symbole i innych działań, prócz wyżej wymienionych np. działanie logarytmowe, działanie wskazane przez funkcyje zwane trygonometrycznemi i t. d.; te działania wykonywają się albo na samej zmiennej x , albo na jej funkcyi.

Jeżeli y jest funkcyą zmiennej z , ta zaś zmienna z jest znowu funkcyą zmiennej x , wtedy y nazywa się funkcyą złożoną zmiennej x za pośrednictwem funkcyi z . Podobną definicyę tworzymy dla przypadku, w którym y jest funkcyą większej liczby zmiennych $z_1, z_2, z_3, \dots$, każda zaś z nich jest znowu funkcyą innych zmiennych.

Jeżeli y jest funkcyą zmiennej x , to zmienną x można uważać za funkcyę ilości y ; funkcyja taka nazywa się odwrotną.

Funkcyja zmiennych $x_1, x_2, \dots$ nazywa się jednorodną, jeżeli po pomnożeniu każdej ze zmiennych przez ilość nieokreśloną t , t. j. po podstawieniu $tx_1, tx_2, \dots$ zamiast $x_1, x_2, \dots$, wartość funkcyi przy nowych argumentach będzie równa wartości funkcyi przy argumentach pierwotnych, pomnożonej przez pewną potęgę ilości t . . . Wyraża tę własność wzór:

$$f(tx_1, tx_2, \dots) = t^r f(x_1, x_2, \dots),$$

zachodzący dla jakiegokolwiek t i dla każdego układu wartości $x_1, x_2, \dots$. Liczba r nazywa się stopniem jednorodności.

Wyrazu funkcyja używali pierwsi: Leibniz (Acta Eruditorum, 1692). Bernoulli (Mémoires de Paris, 1718), Euler (Introductio in analysin infinitorum, 1748).

Pomysł oddzielenia pojęcia funkcyi od pojęcia jej przedstawienia analitycznego zawdzięczamy Lejeune-Dirichletowi.

§ 6.

Funkcye całkowite i wymierne jednej zmiennej.

Niechaj będą dane dwie funkcyje całkowite (wielomiany) jednej zmiennej x , mianowicie $F(x)$ i $f(x)$, pierwsza stopnia m , druga stopnia n ($m > n$); można wyznaczyć jednoznacznie dwa inne wielomiany, mianowicie $Q(x)$ stopnia $m-n$ i $R(x)$ stopnia mniejszego niż n , aby było tożsamościowo:

$$F(x) = f(x) Q(x) + R(x).$$

$Q(x)$ nazywa się ilorazem, $R(x)$ zaś resztą. Jeżeli $R=0$, mówimy, że funkcyja F jest podzielna przez f .

Utworzywszy kolejne równości:

$$f(x) = R(x) Q_1(x) + R_1(x)$$

$$R(x) = R_1(x) Q_2(x) + R_2(x)$$

$$\dots \dots \dots$$

dojdziemy napewno do takiej równości, w której reszta, dajmy na to, R_{i+1} , jest równa stałej. Jeżeli ta stała jest zerem, to reszta R_i jest największym wspólnym dzielnikiem

funkcyj F i f . Jeżeli R_{i+1} nie równa się zeru, wtedy funkcje F i f są względnie pierwszymi.

Jeżeli wielomiany F_m i f_n są względnie pierwszymi, to można zawsze wyznaczyć dwie takie funkcje całkowite G_{m-1} , g_{n-1} , aby było:

$$F_m g_{n-1} + G_{m-1} f_n = 1.$$

Możność wyznaczenia dwu funkcyj całkowitych H_{m-k} , h_{n-k} takich, aby było:

$$F_m h_{n-k} + f_n H_{m-k} = 0$$

stanowi warunek konieczny i dostateczny na to, by dwie funkcje F , f miały dzielnik wspólny stopnia co najmniej k .

Resztą z podzielenia funkcji $f(x)$ przez $x-a$ jest $f(a)$. Jeżeli $f(x)$ znika dla $x=a$, to jest przez $x-a$ podzielne.

Jeżeli $(x-a)^a$ jest czynnikiem funkcji $f(x)$, $(x-a)^{a+1}$ zaś nie, to mówimy, że a jest pierwiastkiem wielokrotnym o wielokrotności a funkcji $f(x)$ lub równania $f(x)=0$.

Ogólna funkcja wymierna zmiennej x ma postać $\frac{F(x)}{f(x)}$, gdzie F i f są symbolami dwu wielomianów ze zmienną x .

Jeżeli a jest pierwiastkiem wielokrotności a równania $f(x)=0$, wtedy funkcja $\frac{R}{f}$, gdzie R jest stopnia niższego niż f , można rozłożyć w ten sposób:

$$\frac{R(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^a} + \frac{R_1(x)}{(x-a)^{a-1} f_1(x)},$$

tu A jest stałą, $R_1(x)$ jest wielomianem całkowitym stopnia o jedność niższego od stopnia wielomianu $R(x)$, $f_1(x)$ zaś jest ilorazem z podzielenia funkcji $f(x)$ przez $(x-a)^a$.

Niechaj $x_1, x_2, \dots, x_r$ będą pierwiastkami równania $f(x)=0$

wielokrotności odpowiednio $i_1, i_2 \dots i_r$; funkcję wymierną $\frac{R}{f}$ gdzie R jest stopnia niższego niż f , można rozłożyć w ten sposób:

$$\begin{aligned} \frac{R(x)}{f(x)} = & \frac{A_1}{(x-x_1)^{i_1}} + \frac{A_2}{(x-x_1)^{i_1-1}} + \dots + \frac{A_{i_1}}{x-x_1} \\ & + \frac{B_1}{(x-x_2)^{i_2}} + \frac{B_2}{(x-x_2)^{i_2-1}} + \dots + \frac{B_{i_2}}{x-x_2} \\ & + \dots \end{aligned}$$

gdzie $A, B, \dots$ są stałemi.

Spółczynniki $A_1, A_2 \dots$ wyznaczają się zapomocą następujących wzorów zwrotnych (gdzie znaczki przy R i f służą do oznaczenia pochodnych, patrz Rozdział VII):

$$R(x_1) - \frac{A_1}{i_1!} f^{(i_1)}(x_1) = 0,$$

$$R'(x_1) - \frac{A_1}{(i_1+1)!} f^{(i_1+1)}(x_1) - \frac{A_2}{i_1!} f^{(i_1)}(x_1) = 0$$

$$R''(x_1) - \frac{A_1}{(i_1+2)!} f^{(i_1+2)}(x_1) - \frac{A_2}{(i_1+1)!} f^{(i_1+1)}(x_1) - \frac{A_3}{i_1!} f^{(i_1)}(x_1) = 0$$

.....

Analogicznie napisać można wzory na $B_1, B_2, \dots$.

Jeżeli $i_1 = i_2 = \dots = 1$, będzie wprost:

$$A_1 = \frac{R(x_1)}{f(x_1)}, B_1 = \frac{R(x_2)}{f(x_2)}, \dots$$

W przypadku, gdy $f(x)$ ma wszystkie pierwiastki różne, (t. j. gdy żaden z nich nie jest wielokrotny), otrzymujemy następujący wzór godny uwagi:

$$\frac{R(x_1)}{f(x_1)} + \frac{R(x_2)}{f(x_2)} + \dots + \frac{R(x_n)}{f(x_n)} = 0.$$

Jeżeli trójmian x^2+px+q jest czynnikiem mianownika $f(x)$, t. j. gdy

$$f(x) = (x^2 + px + q)^r f_1(x),$$

wtedy będzie tożsamościowo:

$$\frac{R(x)}{f(x)} = \frac{P_1 x + Q_1}{(x^2 + px + q)^r} + \frac{R_1(x)}{(x^2 + px + q)^{r-1} f_1(x)},$$

gdzie $R_1(x)$ jest nową funkcją całkowitą stopnia niższego od stopnia funkcji R , zaś P_1, Q_1 są ilościami stałymi.

W temże założeniu będzie:

$$\frac{R(x)}{f(x)} = \frac{P_1 x + Q_1}{(x^2 + px + q)^r} + \frac{P_2 x + Q_2}{(x^2 + px + q)^{r-1}} + \dots + \frac{P_r x + Q_r}{x^2 + px + q} + \frac{R_r(x)}{f_1(x)}$$

gdzie R_r jest stopnia niższego niż f .

Jeżeli równanie $f(x)=0$ ma pierwiastki urojone, to wzór poprzedni służy do przekształcenia funkcji $\frac{R}{f}$ na sumę ułamków elementarnych rzeczywistych.

Rozkład funkcji ułamkowej wymiernej na ułamki proste znajdujemy już u Jana Bernoulli'ego (Dzieła t. I); potem przedmiotem tym zajmowali się Euler, Cauchy i inni.

§ 7.

Teorya granic.

Mówimy, że funkcja y zmiennej x ma dla x równego a granicę A , jeżeli dawszy sobie σ dowolnie małe, możemy

zawsze znaleźć otoczenie punktu a takie, że dla każdej wartości x w niem zawartej, wartość bezwzględna funkcji y różni się od A o ilość mniejszą od σ .

Rozróżniać będziemy granicę z prawej strony i granicę, lewej strony stosownie do tego, czy własność powyższa spełnia się po stronie prawej, czy też po stronie lewej od a ; to rozróżnienie jest zbytecznem, jeżeli spełnia się ona po obu stronach.

Warunkiem koniecznym i dostatecznym istnienia granicy jest, by, dawszy sobie σ dowolnie małe, można było znaleźć otoczenie punktu a takie, że różnica bezwzględna dwu wartości, które przyjmuje funkcja y w dwu jakichkolwiek punktach tego otoczenia, jest mniejsza od σ .

W przypadkach, gdy A lub a są nieskończonościami, należy dać definicje następujące:

Mówimy, że granica funkcji y jest $\pm \infty$ dla x dążącego do a , gdy, dawszy sobie ω dowolnie wielkie, można znaleźć takie otoczenie punktu a , że dla każdej wartości x w niem zawartej, wartość funkcji y jest zawsze stałego znaku, a co do swej wartości bezwzględnej większa od ω .

Mówimy, że funkcja y ma granicę A dla x dążącego do $\pm \infty$, gdy, dawszy sobie σ dowolnie małe, można znaleźć liczbę x' taką, że dla każdej wartości $x > x'$ (lub mniejszej od x') różnica $A - y$ jest co do wartości bezwzględnej mniejsza od σ .

Mówimy, że funkcja y ma granicę $\pm \infty$ dla x dążącego do $\pm \infty$, gdy, dawszy sobie ω dowolnie wielkie, możemy znaleźć takie x' , że dla każdej wartości $x > x'$ (lub $< x'$) funkcja y jest znaku stałego i co do wartości bezwzględnej większa od ω .

Jeżeli trzy funkcje y_1, y_2, y_3 zmiennej x są takie, że, dawszy sobie σ dowolnie małe, można znaleźć otoczenie punktu a takie, iż dla punktów tego otoczenia wartość funkcji y_2 jest zawsze zawarta pomiędzy wartościami funkcji y_1 i y_3 i jeżeli te dwie ostatnie funkcje dążą do jednej i tej samej granicy A dla $x = a$, to i y_2 dążyć będzie do granicy dla $x = a$ i tą granicą będzie A .

Jeżeli funkcyja y , gdy x zbliża się do a , rośnie bez przerwy, a przynajmniej nie maleje, pozostając wciąż mniejszą od liczby A , to wtedy funkcyja ta ma granicę dla $x=a$ i granicą tą jest albo ilość A , albo liczba mniejsza od A .

Granica sumy algebraicznej, iloczynu, ilorazu funkcyj, mających granice dla $x=a$, jest równa sumie, iloczynowi, ilorazowi granic.

$$\lim_{n=\infty} \frac{h^n}{n!} = 0,$$

$$\lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x,$$

$$\lim_{x=0} \frac{\sin x}{x} = 1.,$$

$$\lim_{n=\infty} n (\sqrt[n]{a} - 1) = \log a,$$

$$\lim_{x=0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0,$$

$$\lim_{m \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e,$$

$$\lim_{x=0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1.,$$

$$\lim_{m=0} \frac{\log(1+m)}{m} = 1.,$$

$$\lim_{x=0} x \sin \frac{1}{x} = 0,$$

$$\lim_{m=0} \frac{\log(1+mx)}{m} = x,$$

$$\lim_{y=0} \frac{a^y - 1}{y} = \log a,$$

$$\lim_{y=0} y \log y = 0;$$

$$\lim_{y=0} \frac{(1+y)^\mu - 1}{y} = \mu,$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e,$$

$$\lim_{n=\infty} \left\{ n \left(a^{\frac{1}{n}} - 1 \right) \right\} = \log a,$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}} = 1..$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{f(x)}{x}\right)^x = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)}; \lim_{x \rightarrow \infty} x \left\{ \sqrt[x]{f(x)} - 1 \right\} = \log_e \lim_{x \rightarrow \infty} f(x),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2) \dots 2n} = \frac{4}{e},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(1+nx)}{n} = 0; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n e^{-n x^2} = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^r + 2^r + \dots + n^r}{n^{r+1}} = \frac{1}{r+1}, \text{ jeżeli } r+1 \text{ jest dodatnie}$$

. = ∞ , „ „ nie „ „

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}}{n} = 0$$

Jeżeli $f(x+1) - f(x)$ dąży do granicy oznaczonej A , gdy x dąży do nieskończoności, i jeżeli funkcja $f(x)$ jest skończoną dla każdej skończonej wartości x , stając się nieskończoną tylko dla $x = \infty$, wtedy:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = A.$$

Jeżeli mamy funkcję $f(x)$ różną od zera i od nieskończoności dla każdej skończonej wartości na x , większej od pewnej liczby oznaczonej, i stawającą się zerem lub nieskończonością jedynie dla $x = \infty$, i jeżeli nadto:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = A,$$

to będzie także:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{f(x)} = A.$$

Twierdzenie Gaussa, Niechaj będą dwie ilości a i β , $\beta < a$. Utwórzmy wyrażenia kolejne:

$$a_1 = \frac{1}{2}(a + \beta), \beta_1 = \sqrt{a\beta}$$

$$a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + \beta_1), \beta_2 = \sqrt{a_1\beta_1}$$

$$a_3 = \frac{1}{2}(a_2 + \beta_2), \beta_3 = \sqrt{a_2\beta_2}$$

$$\dots \dots \dots$$

to będzie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n \text{ (średnia arytmetyczno-geometryczna.)}$$

§ 8.

Granica wyższa i niższa wartości funkcji.

Jeżeli $f(x)$ jest funkcją stale skończoną w całym przedziale od a do b , to: albo istnieje jeden lub więcej punktów przedziału, w których funkcja ma wartość największą, albo istnieje wartość A taka, że lubo przy zmienianiu ilości x w przedziale, $f(x)$ nie może ani dojść do tej wartości, ani jej przekroczyć, to jednak dawszy sobie σ dowolnie małe, można zawsze znaleźć taką wartość x w przedziale, że różnica pomiędzy A a wartością funkcji w tym punkcie będzie co do wartości bezwzględnej mniejsza od σ . W tym drugim przypadku mówimy, że A jest granicą wyższą wartości f w punkcie x . Analogiczna definicya określa granicę niższą.

Jeżeli istnieje maximum wartości funkcji, to funkcja może albo czynić zadość warunkowi cechującemu granicę wyższą, albo też może warunkowi tego nie spełniać.

W tym ostatnim przypadku nie istnieje granica wyższa w ścisłym znaczeniu tego wyrazu; w przypadku pierwszym będziemy mieli

granicę wyższą, która jest zarazem maximum funkcji.

Jeżeli funkcja ma w przedziale granicę wyższą A , to istnieje będzie napewno przy najmniej jeden punkt w przedziale taki, że w dowolnie małym odcinku punkt ten otaczającym granica wyższa wartości funkcji jest także A (Twierdzenie Weierstrassa).

Nazywamy oscylacją (wahaniem się) funkcji w przedziale różnicę pomiędzy największymi i najmniejszymi wartościami, jakie przyjmuje ta funkcja w przedziale, lub jeżeli te maxima i minima nie istnieją — różnicę pomiędzy granicą wyższą i granicą niższą.

Bolzano pierwszy miał myśl uważania granicy wyższej i niższej (patrz Stolz, Math. Annalen, XVIII), lecz dopiero później Weierstrass rozwinął szeroko te pojęcia analizy.

§ 9.

Teoria funkcji ciągłych i nieciągłych.

Funkcja $f(x_1, x_2, \dots)$ nazywa się ciągłą w punkcie $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \dots$, gdy jej granica dla $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \dots$ równa się wartości $f(a_1, a_2, \dots)$. Inaczej: jeżeli damy sobie σ dowolnie małe, to można zawsze znaleźć układ wartości $h_1, h_2, \dots$ taki, że dla każdego układu $x_1, x_2, \dots$, czyniącego zadość warunkom:

$$a_1 - h_1 \leq x_1 \leq a_1 + h_1; \quad a_2 - h_2 \leq x_2 \leq a_2 + h_2; \quad \dots$$

różnica pomiędzy wartością, jaką przyjmuje f , a wartością $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ jest bezwzględnie mniejsza od σ .

Funkcja ciągła i skończona jednej zmiennej, czyniąca zadość warunkowi

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

ma postać najogólniejszą:

$$f(x) = ax.$$

Funkcja ciągła jednej zmiennej spełniająca związek

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

ma postać najogólniejszą:

$$f(x) = A^{ax},$$

gdzie A i a są ilościami stałemi.

Najogólniejszą postacią funkcji ciągłej jednej zmiennej, gdy ma spełniać związek:

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

jest

$$f(x) = A \log_a x.$$

Twierdzenia powyższe podał Cauchy.

Jeżeli szereg nieskończony funkcji ciągłych jest szeregiem jednostajnie zbieżnym (patrz Rozdział IV), to przedstawia on funkcję ciągłą tych zmiennych.

Szereg potęgowy wewnątrz obszaru swej zbieżności przedstawia funkcję ciągłą zmiennej.

Jeżeli szereg potęgowy jest zbieżny na kresach obszaru zbieżności, to i na tych kresach przedstawia on funkcję ciągłą (Twierdzenie Abela).

Funkcję zmiennej ciągłej w całym przedziale nazywamy jednostajnie ciągłą lub równociągłą, jeżeli dawszy sobie σ dowolnie małe, możemy znaleźć taką liczbę δ , by dla każdej wartości x w przedziale i dla każdego $\delta_1 < \delta$ było stale:

$$f(x \pm \delta_1) - f(x) < \sigma.$$

Definicja dla funkcji wielu zmiennych jest analogiczna.

Funkcja wprost ciągła jest zarazem i równocześnie ciągła (Twierdzenie Cantora).

Jeżeli funkcja jest ciągła w przedziale, to można podzielić ten przedział na skończoną liczbę takich przedziałów częściowych, aby w każdym z nich oscylacja funkcji była mniejsza od jakiegokolwiek ilości σ , dowolnie danej.

Dla funkcji ciągłej granica wyższa stanowi jej maximum, granica niższa jej minimum.

Jeżeli funkcja ciągła jest oznaczona w nieskończonej liczbie punktów, to jest też oznaczona i w ich punktach granicznych.

Jeżeli funkcja ciągła jest oznaczona we wszystkich punktach wymiernych pewnego odcinka, to jest też oznaczona i w jego punktach niewymiernych.

Jeżeli funkcja ciągła w przedziale ma w dwu jego punktach wartości przeciwnego znaku, to w punkcie pośrednim ma wartość zero.

Jeżeli funkcja ciągła przyjmuje dwie wartości A i B w dwu punktach a i b przedziału, to w punktach pośrednich przyjmuje wszelką wartość, zawartą pomiędzy A i B . (Wiadomo że ta własność nie charakteryzuje funkcji ciągłych; patrz Darboux, Mémoire sur les fonctions discontinues, Annales de l'École normale, IV).

Funkcja jest nieciągłą lub przerywaną w punkcie a , jeżeli granice wyrażeń $f(a-\delta)$ i $f(a+\delta)$ dla $\delta=0$ są: 1) albo nieoznaczone, 2) albo nierówne, 3) albo będąc równymi, nie są równe wartości funkcji f w punkcie a . W ostatnim przypadku można znieść nieciągłość, zmieniając wartość funkcji w punkcie a . W pierwszym przypadku nieciągłość nazywa się nieciągłością gatunku drugiego, a w pozostałych przypadkach—nieciągłością zwykłą lub gatunku pierwszego.

Jeżeli funkcya f jest nieciągłą w punkcie a , to istnieje zawsze liczba dodatnia σ' , różna od zera i taka, że dla każdego $\sigma > \sigma'$ można zawsze znaleźć przedział w otoczeniu punktu a , tak, że $f(x) - f(a) < \sigma$, lecz nie może to być dla każdego $\sigma < \sigma'$. Liczba σ' nazywa się skokiem funkcyi. Jeżeli nieciągłość jest gatunku pierwszego, to skok jest różnicą pomiędzy $f(a)$ i $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Jeżeli funkcya ma nieskończenie wiele punktów przerwy to punkty te mogą albo tworzyć grupę taką, że dają się zawrzeć w przedziałach, których sumę można uczynić tak małą, jak się podoba, albo tego uczynić nie można. W pierwszym razie nazywamy funkcję punktowo nieciągłą (lub punktowo-przerwaną); w drugim zaś liniowo nieciągłą (lub liniowo-przerwaną). Przykładem drugiego gatunku funkcyi jest funkcya, będąca nieciągłą we wszystkich nieskończenie wielu punktach odcinka skończonego.

Czytelnika, pragnącego bardziej szczegółowo poznać ten przedmiot, odsyłamy do cytowanych w § 1 dzieł Dini'ego i Tannery'ego. Porów. też Pascal „Note critiche et esercizi i t. d.“ Medyolan 1895, gdzie podano wiele przykładów i odnośne wskazówki bibliograficzne.

§ 10.

Teorya kombinacyj. Spółczynniki dwumianowe.

Liczba różnych sposobów, jakimi można rozmieścić n przedmiotów na n miejscach ustalonych, nazywa się liczbą przemian n przedmiotów. Wyrażamy ją tak:

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot n.$$

Ustalmy dla n przedmiotów pewną kolej następstwa i uskutecznijmy po tem przemianę; powiemy, że w otrzymanej przemianie dwa przedmioty tworzą odwrócenie (inwersję), jeżeli następują po sobie w porządku odwrotnym, niż w przemianie pierwotnej. Przemiana nazywa się parzystą lub nieparzystą, stosownie do tego, czy zawiera parzystą lub nieparzystą liczbę odwróceń.

Istnieje $\frac{n!}{2}$ przemian parzystych i tyleż nieparzystych.

Liczba sposobów, jakimi k przedmiotów, wybranych z pomiędzy n danych ($k \leq n$), można rozmieścić na k miejscach stałych, nazywa się liczbą rozmieszczeń n przedmiotów po k . Liczba ta wyraża się tak:

$$D_{n,k} = n(n-1) \dots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Jeżeli $k=n$, rozmieszczenia stają się przemianami.

Liczba sposobów, jakimi pomiędzy n przedmiotami danymi można wybrać k przedmiotów, nie uwzględniając porządku, w jakim je wybrano, nazywa się liczbą prostych kombinacji z n przedmiotów po k . Jest ona:

$$\begin{aligned} C_{n,k} &= \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \dots k} = \binom{n}{k} \\ &= \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{P_n}{P_k \cdot P_{n-k}}. \end{aligned}$$

Odrzućmy własność:

$$C_{n,k} = C_{n,n-k}$$

Jeżeli w rozmieszczeniach element może powtarzać się pewną liczbę razy, mamy wtedy rozmieszczenia z powtórzeniem. Liczba ich wynosi:

$$D'_{n,k} = n^k.$$

Jeżeli w kombinacjach każdy element może powtarzać się pewną liczbę razy, mamy kombinacje z powtórzeniem. Ich liczba wynosi:

$$C_{n,k} = \frac{(n+k-1)(n+k-2)\dots(n+1).n}{1.2.3\dots k}$$

$$= C'_{n+k-1,k} = \binom{n+k-1}{k}.$$

Liczby $C_{n,k}$ nazywają się także współczynnikami dwumianowemi (lub binomialnemi), ponieważ są współczynnikami różnych wyrazów rozwinięcia potęgi dwumianu.

Pomiędzy nimi istnieje bardzo wiele związków; wymieniamy następujące:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} ; \quad \binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}$$

$$\binom{-1}{k} = (-1)^k ; \quad \binom{n}{0} = 1,$$

$$\binom{n}{k} = 0, \text{ jeżeli } n < k ; \quad \binom{n}{n} = 1,$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1},$$

$$1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0,$$

$$\binom{n}{k} - \binom{n}{k+1} \binom{k+1}{k} + \binom{n}{k+2} \binom{k+2}{k} - \dots + (-1)^{n-k} \binom{n}{n} \binom{n}{k} = 0,$$

$$1 - \binom{n^2}{1} + \binom{n^2}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n^2}{n} = (-1)^{\frac{1}{2}n} \binom{n}{\frac{1}{2}n}, \text{ jeżeli } n \text{ parzyste,}$$

$$\dots = 0 \quad , \text{ jeżeli } n \text{ nieparzyste;}$$

$$1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n,$$

$$1 + \binom{n^2}{1} + \binom{n^2}{2} + \binom{n^2}{3} + \dots + \binom{n^2}{n} = \binom{2n}{n}$$

Spółczynniki dwumianowe liczby $-\frac{1}{2}$ mają ciekawe wyrażenia:

$$\binom{-1/2}{1} = -\frac{1}{2}, \quad \binom{-1/2}{2} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}, \quad \binom{-1/2}{3} = -\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}$$

$$\binom{-1/2}{4} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}, \text{ i t. d.}$$

Inne związki bardziej złożone pomiędzy spółczynnikami dwumianowymi wyrażają wyznaczniki Zeipela (Patrz E. Pascal, Determinanti, Medyolan, 1897),

Liczbę całkowitą N można zawsze i jednym tylko sposobem wyrazić jako sumę n spółczynników dwumianowych, w których skażniki są ustalonymi i są liczbami naturalnymi od 1 do n , przyczem podstawa mniejsza odpowiada skażnikowi mniejszemu. (W spółczynniku dwumianowym $\binom{n}{k}$ nazywamy n — podstawą, k — skażnikiem). Tym sposobem wzór

$$N = \binom{x_1}{1} + \binom{x_2}{2} + \dots + \binom{x_n}{n}, \quad (x_k < x_{k+1})$$

ma zawsze jedno jedyne rozwiązanie w liczbach całkowitych dodatnich $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Jeżeli przez $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$ oznaczymy liczbę $\binom{n+k-1}{k}$, będziemy mieli twierdzenie:

Jeżeli N jest liczbą całkowitą dodatnią, to

$$N = \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ x_1 \end{smallmatrix} \right] + \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ x_2 \end{smallmatrix} \right] + \dots + \left[\begin{smallmatrix} n+1 \\ x_n \end{smallmatrix} \right]$$

gdzie $x_k < x_{k+1}$, ma zawsze jedno jedyne rozwiązanie w liczbach całkowitych $x_1, x_2, \dots, x_n$. (Patrz E. Pascal, Giorn. di mat. XXV.)

Spółczynniki dwumianowe można otrzymać za pomocą tak zwanego trójkąta arytmetycznego Pascala

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & \\ & & & & 1 & & 1 \\ & & & 1 & 2 & 1 & \\ & & 1 & 3 & 3 & 1 & \\ & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\ . & . & . & . & . & . & . \end{array}$$

w którym liczby każdego wiersza tworzymy, dodając dwie bezpośrednio nad nią stojące liczby wiersza poprzedzającego. Liczby każdego wiersza poziomego są spółczynnikami dwumianowymi, odpowiadającymi liczbom całkowitym dodatnim, liczby znajdujące się na przekątnych odpowiadają (bez uwzględnienia znaku) liczbom całkowitym ujemnym.

Co do innych wzorów, odnoszących się do spółczynników dwumianowych, patrz Hagen, Synopsis der höheren Mathematik, Berlin t. I, 1891, str. 64 i nast.

Liczby figuryczne. Liczby figuryczne są przypadkiem ogólniejszym spółczynników dwumianowych. Aby je otrzymać, uogólniamy konstrukcyę trójkąta arytmetycznego Pascala w sposób następujący: Tworzymy figurę:

$$\begin{array}{ccccccc} \delta, & & & & 1 & & \\ & \delta, & 1+\delta, & 1 & & & \\ & & \delta, & 1+2\delta, & 2+\delta, & 1 & \\ & & & \delta, & 1+3\delta, & 3+3\delta, & 3+\delta, & 1 \\ & \delta, & 1+4\delta, & 4+6\delta, & 6+4\delta, & 4+\delta, & 1 & \\ . & . & . & . & . & . & . & . \end{array}$$

w której każdy element danego wiersza jest sumą dwóch bezpośrednio znajdujących się nad nim elementów wiersza poprzedzającego. Dla $\delta=1$ otrzymujemy trójkąt arytmetyczny Pascala

Elementy, znajdujące się na trzeciej przekątnej (pierwszą jest przekątna, złożona z elementów δ) są liczbami wielokątowymi (poligonalnymi) rzędu 1-go, 2-go, 3-go, stosownie do wartości δ ; elementy, położone w czwartej przekątnej, są liczbami wielościanowymi (poliedralnymi) rzędu 1-go, 2-go, 3-go... dla $\delta=1, 2, 3$ i t. d. Te wszystkie liczby nazywają się liczbami figurycznymi.

Liczby wielokątowe rzędu 2-go są kwadratami.

Liczby wielokątowe wyraża wzór:

$$\frac{1}{2} (1 + n) (2 + n \delta)$$

liczby wielościanowe zaś wzór:

$$\frac{1}{6} (1 + n) (2 + n) (3 + n \delta).$$

Suma n pierwszych liczb wielokątowych wynosi:

$$\Sigma = \frac{1}{6} n (n + 1) \left[(n - 1) \delta + 3 \right],$$

sama zaś n pierwszych liczb wielościanowych:

$$\Sigma = \frac{1}{24} n (n + 1) (n + 2) \left[(n + 1) \delta + 4 \right]$$

Każda liczba całkowita dodatnia jest sumą trzech (albo mniej) liczb wielokątowych rzędu 1-go, czterech (albo mniej) liczb wielokątowych rzędu drugiego i t. d., w ogóle jest su-

mą n (albo mniej) liczb wielokątowych rzędu $n-2$ -go. (Twierdzenie Fermata).

Rozważania nad liczbami figurycznymi zawdzięczamy przeważnie Eulerowi. Powyższe twierdzenie podał był Fermat bez dowodu; dowód ten dla pierwszych przypadków znajduje się u Eulera (Acta Petrop., II, str. 48, 1777), Lagrange'a (Mem. Berl. 1770), Gaussa (Disqu. arithm. art. 293) i u innych.

ROZDZIAŁ II.

TEORIA GRUP PODSTAWIEŃ.

§ 1.

Wiadomości ogólne.

Mamy danych n elementów i tworzymy dwie ich przemiany; działanie, stanowiące przejście od pierwszej przemiany do drugiej, nazywa się podstawieniem pomiędzy n elementami.

Istnieje $n!$ podstawień pomiędzy n elementami.

Jeżeli do n elementów zastosujemy najprzód jedno podstawienie, następnie drugie i t. d., to ostatecznym wynikiem będzie nowe podstawienie elementów. To ostatnie nazywa się iloczynem podstawień danych. Jeżeli dane podstawienia są wszystkie równe, iloczyn ich nazywamy potęgą podstawienia.

Podstawieniem tożsamościowym (identycznym) nazywamy takie, które pozostawia bez zmiany

wszystkie elementy. Podstawienie takie oznaczamy symbolem 1.

Jeżeli iloczyn dwu podstawień jest niezależny od porządku czynników. podstawienia nazywamy wzajemnie przemieniami.

Jeżeli iloczyn dwu podstawień jest jednością, podstawienia nazywamy wzajemnie odwrotnemi: jeżeli jedno z nich jest s , to drugie oznaczamy przez s^{-1} .

Istnieje zawsze potęga podstawienia równa jedności; wykładnik tej potęgi, gdy wszystkie poprzedzające ją potęgi nie dają wyniku równego jedności, nazywamy rzędem podstawienia.

Podstawieniem kołowym lub cyklem nazywamy podstawienie, którego elementy wszystkie lub niektóre przemieniają się w porządku kołowym.

Każde podstawienie daje się zawsze rozłożyć na iloczyn podstawień kołowych.

Podstawienie, które za elementy $a, b, c \dots$ podstawia elementy $a', b', c' \dots$ wyraża się symbolem

$$\begin{pmatrix} a, b, c & . & . & . & . & . \\ a', b', c' & . & . & . & . & . \end{pmatrix}.$$

Tu $a', b', c' \dots$ stanowią przemianę elementów $a, b, c \dots$. Jeżeli podstawienie jest kołowym, wtedy za elementy $a, b, c \dots$ podstawiają się odpowiednio elementy $b, c, d \dots$ — takie podstawienie oznacza się wprost za pomocą symbolu

$$(a, b, c, \dots m),$$

gdzie w nawiasie stoją jeden za drugim elementy w porządku takim, że za każdy poprzedzający podstawia się następny, za ostatni z elementów — pierwszy.

Rząd podstawienia kołowego równa się liczbie jego elementów.

Podstawienie kołowe rzędu drugiego nazywa się przestawieniem.

Każde podstawienie można wyrazić jako iloczyn samych przestawień.

Podstawienie nazywa się parzystem lub nieparzystem, stosownie do tego, czy liczba przedstawień, na które się rozkłada, jest parzystą lub nieparzystą.

Jeżeli podstawienie s jest rzędu m , to jedyna z jego potęg $s^{m'}$ będzie rzędu $\frac{m}{d}$, gdzie d jest największym wspólnym dzielnikiem liczb m i m' .

Mówimy, że ogół podstawień tworzy grupę, gdy iloczyn dwu jakichkolwiek podstawień tworzy jedno z pomiędzy podstawień danych.

Liczba podstawień grupy stanowi rząd grupy.

Rząd grupy jest zawsze dzielnikiem liczby $n!$.

Jeżeli wszystkie podstawienia grupy H zawierają się pomiędzy podstawieniami innej grupy G , wtedy H nazywa się podgrupą grupy G . Rząd podgrupy H jest dzielnikiem rzędu grupy G .

Rząd grupy jest wielokrotnością rzędu każdego z jej podstawień.

Grupa wszystkich $n!$ podstawień nazywa się grupą symetryczną.

Wszystkie podstawienia parzyste tworzą grupę, która nazywa się naprzemienną; jej rzędem jest $\frac{1}{2} n!$

Jeżeli $x_1, x_2, \dots, x_n$ są n elementami grupy, to każda grupa, zawierająca $n-1$ przestawień

$$(x_a x_1), (x_a x_2), \dots, (x_a x_{a-1}), (x_a x_{a+1}) \dots (x_a x_n),$$

jest identyczna z grupą symetryczną.

Te podstawienia jakiejkolwiek grupy, które należą do grupy naprzemiennej, tworzą podgrupę, która albo zlewa się z grupą daną, albo jest rzędu równego połowie rzędu grupy danej.

Jeżeli grupa zawiera $n-2$ podstawień kołowych

$$(x_1 x_2 x_3), (x_1 x_2 x_4), \dots, (x_1 x_2 x_n),$$

to jest albo naprzemienną albo symetryczną.

Potęgi podstawienia tworzą grupę, której rząd jest równy rzędowi podstawienia.

Podstawienia wspólne dwóm grupom tworzą nową grupę.

Jeżeli p jest liczbą pierwszą, p^k zaś najwyższą potęgą liczby p , zawartą w $n!$, to istnieje grupa rzędu p^k . Jeżeli rząd grupy jest podzielny przez liczbę pierwszą p , to grupa zawiera podstawienia rzędu p . (Cauchy).

Dwa podstawienia nazywają się podobnemi, jeżeli różnią się jedynie nazwą elementów, które zawierają.

Dwie grupy nazywają się podobnemi, jeżeli składają się z jednakowej liczby podstawień podobnych i jeżeli do każdego z podstawień grupy pierwszej można dobrać jednoznacznie podstawienie z drugiej grupy w ten sposób, że zmieniając jednakowo dla wszystkich nazwy elementów, od podstawień jednej grupy dochodzimy do podstawień drugiej.

Jeżeli dwa podstawienia lub dwie grupy są podobne, to istnieje zawsze podstawienie s takie, że iloczyn $s^{-1}As$ (w którym A jest jednym z podstawień danych lub podstawieniem jednej z grup danych) będzie równy drugiemu z danych podstawień lub odpowiedniemu podstawieniu drugiej grupy danej.

Iloczyn $s^{-1}As$ nazywa się podstawieniem przekształconem z podstawienia A (lub przekształceniem podstawienia A) przy pomocy podstawienia s .

Każde podstawienie jest podobne do jednego ze swych przekształceń.

Jeżeli s, s' są dwa podstawienia, to iloczyny ss' i $s's$ są dwoma podstawieniami podobnemi.

Jeżeli s i s' są podstawieniami przemieniami, to podstawieniem przekształconem z s przy pomocy s' jest samo podstawienie s .

Przekształcenie iloczynu jest równe iloczynowi przekształceń czynników.

Jeżeli dwa podstawienia są przemienne, to ich przekształcenia przy pomocy tego samego podstawienia będą też przemienne.

Wszystkie podstawienia, przy pomocy których grupa dana przekształca się na siebie samą, tworzą grupę.

Jeżeli przekształcamy grupę przy pomocy jednego podstawienia, to podstawienia przekształcone tworzą grupę podobną do danej.

Jeżeli podstawienie jest takim, że ogół iloczynów sA , gdzie A jest jakimkolwiek podstawieniem grupy G , nie różni się od ogółu iloczynów Bs , gdzie B jest także podstawieniem grupy G , wtedy podstawienie s nazywa się przemienem z grupą G .

Jeżeli wszystkie podstawienia grupy H mają dopiero własność co określoną względem grupy G , wtedy cała grupa H nazywa się przemieną z grupą G . W tym przypadku, jeżeli H jest podgrupą grupy G , to nosi nazwę grupy charakterystycznej lub wyróżnionej.

Wszystkie podstawienia n elementów, przemienne z danem podstawieniem tychże elementów lub z grupą daną, tworzą grupę, do której grupa dana należy jako podgrupa charakterystyczna.

Jeżeli liczba elementów jest większa od 4, to grupa przemien z jakimkolwiek podstawieniem zawiera wszystkie podstawienia parzyste, a więc jest grupą naprziemną.

Dla $n=4$ grupa czterech podstawień

$$[1, (x_1 x_2) (x_3 x_4), (x_1 x_3) (x_2 x_4), (x_1 x_4) (x_2 x_3)]$$

posiada też samą własność.

Grupa G nazywa się złożoną, jeżeli zawiera w sobie podgrupę charakterystyczną H .; ta ostatnia nazywa się największą, jeżeli nie jest zawarta w innych charakterystycznych podgrupach grupy G .

Utwórzmy szereg grup

$$G, G_1, G_2 \dots 1.$$

w ten sposób, aby każda z nich była grupą charakterystyczną największą poprzedzającej, to będziemy mieli to, co się nazywa szeregiem składu (kompozycji) grupy G .

Jeżeli

$$r, r_1 = \frac{r}{e_1}, r_2 = \frac{r_1}{e_2}, \dots$$

są rzędy grup szeregu, to liczby $e_1, e_2 \dots$ nazywają się czynnikami liczbowymi składu grupy G .

Jeżeli mamy dwa szeregi składu jednej grupy złożonej, wtedy liczba wyrazów obu szeregów musi być jednakowa, a czynniki liczbowe składu, jeżeli nie uwzględniamy porządku, są jedne i te same.

Szereg składu grupy symetrycznej składa się z grupy naprzemiennej i z 1, gdy $n > 4$; czynnikami liczbowymi składu są przeto 2 i $\frac{1}{2} n!$. Grupa naprzemienna więcej niż 4 elementów, nie jest złożoną.

Każda grupa, niezawarta w grupie naprzemiennej, jest złożoną; jednym z czynników składu jest 2.

Dla $n = 4$ szereg składu grupy symetrycznej jest następujący: 1) grupa symetryczna; 2) grupa naprzemienna; 3) $G_2 = [1, (x_1x_2)(x_3x_4), (x_1x_3)(x_2x_4), (x_1x_4)(x_2x_3)]$; 4) $G_3 = [1, (x_1x_2)(x_3x_4)]$, 5) $G_4 = 1$.

§ 2.

Przechodność.

Jeżeli podstawienia grupy są takie, że za ich pomocą k elementów dowolnie wybranych może przejść na k innych elementów, również dowolnie wybranych, grupa nazywa się k -krotnie przechodnią. Jeżeli $k=1$, grupa nazywa się pojedynczo-przechodnią. W przeciwnym razie nazywa się nieprzechodnią.

Rząd grupy przechodniej jest wielokrotnością rzędu tej jej podgrupy, której podstawienia nie zmieniają miejsca jednego jakiegokolwiek elementu np. x_1 .

Grupy przechodnie, których rząd jest równy ich stopniowi, mają tylko takie podstawienia, które zmieniają miejsca wszystkich elementów.

Każda grupa przechodnia ma przynajmniej $n-1$ takich podstawień, które zmieniają miejsca wszystkich elementów.

Grupa naprzemienna jest $(n-2)$ -krotnie przechodnia.

Rząd grupy k -krotnie przechodniej jest równy $n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)m$, gdzie m jest rzędem podgrupy, pozostawiającej bez zmiany k elementów.

Podgrupa charakterystyczna grupy przechodniej nie zawiera wszystkich elementów.

Jeżeli grupa dwulub więcejkrotnie przechodnia zawiera podstawienie kołowe 3-go rzędu, to zawiera wszystkie takie podstawienia i zawiera zarazem grupę naprzemienną.

Jeżeli grupa k -krotna przechodnia nie zawiera w sobie grupy naprzemiennej, to każde

podstawienie porusza z miejsca więcej niż k elementów i zawiera więcej niż $2k-4$ elementów.

Rząd grupy k -krotnie przechodniej i nie zawierającej w sobie grupy naprzemiennej, jest dzielnikiem liczby $\frac{n!}{m!}$, gdzie m jest większa z dwuliczb $k, 2k-4$.

Grupa, nie zawierająca w sobie grupy naprzemiennej, nie może być więcej niż q -krotnie przechodnią, gdzie q jest mniejsza z dwuliczb $\frac{n+4}{3}, \frac{n}{2}$.

Grupa przemienna z podstawieniami grupy k -krotnie przechodniej jest co najmniej $(k-1)$ -krotnie przechodnią.

§ 3.

Niepierwotność.

Niechaj G będzie grupą pojedynczo - przechodnią o n elementach. Jeżeli elementy te możemy podzielić na n układów po $\frac{n}{m}$ elementów, że gdy podstawienie grupy przekształca element układu A na inny tegoż układu, to przekształca też i wszystkie elementy w A na inne elementy w A , podstawienie zaś przekształcające element w układzie A na element w układzie B , przekształca wszystkie inne elementy w A na wszystkie inne elementy w B , wtedy grupa nazywa się niepierwotną, a powyższe układy nazywają się układami niepierwotności. W przeciwnym razie grupa nazywa się pierwotną,

Jeżeli w grupie podział elementów na układy jest możliwy dwoma różnymi sposobami, to

będzie możliwy i trzecim sposobem przez zebranie w jeden układ wszystkich elementów wspólnych układowi z pierwszego i drugiego podziału.

Jeżeli grupa niepierwotna posiada m układów niepierwotności, to rząd jej będzie dzielnikiem liczby $m! \left(\frac{n}{m}!\right)^m$.

§ 4.

Izomorfizm.

Jeżeli podstawienia dwu grup mogą odpowiadać sobie w ten sposób, że iloczynowi dwu podstawień jednej odpowiada iloczyn odpowiednich podstawień drugiej, wtedy obie grupy nazywają się izomorficznymi (równopostaciowymi). Jeżeli jednemu podstawieniu jednej odpowiada tylko jedno podstawienie drugiej, izomorfizm jest jednostopniowy; jeżeli jednemu podstawieniu pierwszej odpowiada więcej podstawień drugiej, izomorfizm jest wielostopniowy. Te izomorfizmy można nazwać jeszcze holodrycznymi i meriedrycznymi (Jordan).

Jeżeli grupy G i Γ są izomorficzne w stopniu pierwszym, to ich rzędy są równe.

Jeżeli izomorfizm grupy G i Γ jest wielostopniowy, a podstawieniom 1 grupy G odpowiadają podstawienia $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ grupy Γ , to tworzą one podgrupę grupy Γ .

W przypadku izomorfizmu wielostopniowego grup G i Γ , każdemu podstawieniu grupy G odpowiada jednakowa liczba m podstawień grupy Γ ; rząd grupy Γ jest równy m razy wziętemu rzędowi grupy G ; m nazywa się stopniem izomorfizmu.

Jeżeli L jest podgrupą charakterystyczną grupy G , to grupa odpowiednia Δ grupy Γ izomorficznej z G będzie także grupą charakterystyczną w Γ . Jeżeli L jest grupą największą, to i Δ będzie największą.

§ 5.

Funkcye, należące do grup podstawień.

Wyobraźmy sobie funkcję wymierną φ_1 elementów $x_1, x_2, \dots, x_n$. Jeżeli do tej funkcji zestosujemy wszystkie możliwe podstawienia pomiędzy elementami, to wartość funkcji φ_1 może się zmienić lub nie. Ogół wszystkich podstawień, dla których wartość φ_1 pozostaje bez zmiany, stanowi grupę, którą nazywamy grupą funkcji.

Do każdej funkcji należy grupa, a do każdej grupy należy nieskończenie wiele funkcji.

Funkcye, nie zmieniające się przy wszystkich podstawieniach, są funkcjami symetrycznemi.

Każda funkcya, należąca do grupy naprzemiennej, funkcya naprzemienna, ma postać

$$\varphi = S_1 + S_2 \sqrt{\Delta},$$

gdzie Δ jest wyróżnikiem n elementów, t. j.

$$\Delta = \prod_{i,j}^{1,2,\dots,n} (x_i - x_j)^2,$$

S_1 i S_2 zaś są funkcjami symetrycznemi elementów.

Zastosowawszy do funkcji φ_1 wszystkie możliwe podstawienia, otrzymujemy m różnych jej wartości $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$.

Liczba m jest dzielnikiem liczby $n!$; jeżeli r jest rzędem grupy funkcyi φ_1 , to iloczyn rm równa się $n!$

Grupy, należące do $\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_m$, są wszystkie do siebie podobne.

Jeżeli $n > 4$, $m > 2$, to grupy te mają jedno tylko podstawienie wspólne, które jest jednością.

Jeżeli $n = 4$, to mogą one mieć cztery podstawienia wspólne

$$[1, (x_1x_2)(x_3x_4), (x_1x_3)(x_2x_4), (x_1x_4)(x_2x_3)]$$

Wartości funkcyi m -wartościowej są pierwiastkami równania stopnia m -go, którego współczynniki są funkcjami symetrycznymi elementów $x_1, x_2 \dots x_n$.

Wyróżnik m wartości φ ma jako czynnik wyróżnik elementów x . Stąd i wszystkie funkcyje, mające więcej niż jedną wartość, przyjmują wartości równe, gdy dwie ilości x stają się równymi.

Przy n elementach niezależnych od siebie funkcyjenaprzemiennesą jedynemi funkcjami, których potęgi mogą być symetrycznymi, jakkolwiek same one symetrycznymi nie są.

Jeżeli $n > 4$, wtedy nie istnieje funkcyja o większej liczbie wartości, którejby potęga miała tylko dwie wartości w założeniu, że pomiędzy elementami nie zachodzą związki specjalne.

Jeżeli $n = 4$, to funkcyja

$$(x_1x_2 + x_3x_4) + \varepsilon(x_1x_3 + x_2x_4) + \varepsilon^2(x_1x_4 + x_2x_3),$$

gdzie $\varepsilon^3 = 1$, jest funkcyą, której sześćcian ma dwie wartości.

Jeżeli $n = 3$, to

$$x_1^r + \varepsilon x_2^r + \varepsilon^2 x_3^r$$

jest funkcją, której sześcian ma dwie wartości.

Dwie funkcyje, należące do tej samej grupy, dają się wyrazić wymiennie jedna przez drugą, i odwrotnie. (Twierdzenie Lagrange'a).

Jeżeli jedna funkcya pozostaje niezmienną przez podstawienie grupy innej funkcyi, a nie zachodzi własność odwrotna, to pierwsza funkcya daje się wyrazić wymiennie przez drugą; druga zaś jest pierwiastkiem równania stopnia m (jeżeli m jest liczbą jej wartości), którego współczynniki są funkcjami wymiennymi pierwszej. Każdą funkcyę wymienną n ilości $x_1, x_2, \dots, x_n$ można wyrazić wymiennie przez każdą funkcyę n ilości, posiadającą $n!$ wartości; w szczególności zaś za pomocą funkcyj liniowych typu $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$, gdzie $a_1, a_2, \dots, a_n$ są stałemi dowolnemi.

§ 6.

Przedstawienie analityczne podstawień.

Podstawienia n elementów można przedstawić jeszcze analitycznie następującym sposobem:

Niechaj będzie podstawienie

$$\begin{pmatrix} x_1, x_2, x_3 & . & . & . & . & x_n \\ x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3} & . & . & . & . & x_{i_n} \end{pmatrix}.$$

Utwórzmy funkcyę φ zmiennej z taką, że kiedy z staje się kolejno $1, 2, \dots, n$, to $\varphi(z)$ staje się kongruentnem z $i_1, i_2, \dots, i_n$ według modułu n . Wtedy symbol $|z, \varphi(z)|$ może wyobrażać podstawienie dane; rozumiemy przezeń to, że skutkiem danego

podstawienia każdy skażnik z ilości x przechodzi na skażnik $\varphi(z)$.

Niechaj $n = m^k$, wtedy każdy element może być przedstawiony z k skażnikami, z których każdy przybiera wszystkie wartości od 1 do n :

$$x_{z_1, z_2, \dots, z_k}$$

Podstawienie pomiędzy temi elementami możemy wyobrazić symbolem:

$$| z_1, z_2 \dots z_k; \varphi_1(z_1, z_2 \dots z_k) | \pmod{m};$$

rozumiemy przezeń to, że zamiast istotnej wartości funkcyi należy brać wartości kongruentne z niemi według modułu m i mniejsze od m .

Wszystkie podstawienia postaci

$$| z_1 \dots z_k; z_1 + a_1, \dots, z_k + a_k | \pmod{m}$$

tworzą grupę, która nazywa się arytmetyczną.

Warunkiem koniecznym i dostatecznym, na to by, symbol

$$z_1 \dots z_k; a_1 z_1 + \dots + c_1 z_k, a_2 z_1 + \dots + c_2 z_k, \dots | \pmod{m}$$

wyobrażał grupę, jest to aby wyznacznik

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & . & . & . & . & , & c_1 \\ a_2, & b_2, & . & . & . & . & , & c_2 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_k, & b_k, & . & . & . & . & , & c_k \end{vmatrix}$$

był względnie pierwszy z modułem m . W tym przypadku podstawienia postaci poprzedzającej nazywają się podstawieniami liniowymi lub także podstawieniami geometrycznymi. Tworzą one grupę, która nazywa się grupą liniową.

Podstawienia grupy liniowej są przemieniami z grupą arytmetyczną.

Rząd grupy liniowej o m^k elementach jest:

$$r = [m, k] m^{k-1} [m, k-1] m^{k-2} \dots [m, 2] m [m, 1]$$

gdzie symbol $[m, \varrho]$ oznacza wogóle liczbę rozwiązań zagadnienia o wyznaczeniu ϱ liczb mniejszych od m i względnie pierwszych z m .

Jeżeli w szczególności współczynniki $a, b, \dots, c$ czynią za-
dość warunkom:

$$\left. \begin{aligned} +b_i^2 + \dots + c_i^2 &\equiv 1 \\ +a_2^2 + \dots + a_k^2 &\equiv 1 \\ +b_2^2 + \dots + b_k^2 &\equiv 1 \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \begin{aligned} a_1 a_2 + b_1 b_2 + \dots + c_1 c_2 &\equiv 0 \\ \dots \dots \dots &\dots \dots \dots \\ a_1 b_1 + a_2 b_1 + \dots + a_i b_k &\equiv 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} & \\ & \\ & \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & \\ & \\ & \end{aligned} \pmod{m},$$

wtedy podstawienia liniowe nazywają się ortogonalnymi (prostokątnymi).

Jeżeli $k=2h$, skażniki zaś, których jest $2h$, są rozmieszczone parami

$$z_1 y_1, z_2 y_2 \quad \dots \quad z_h y_h,$$

to podstawienia liniowe tych skażników, mające własność taką, że zastosowane do funkcji

$$\sum_{i=v}^h (z_c \eta_i - y_c \zeta_i)$$

(gdzie ζ, η są symbolami skażników, podległych tym samym warunkom co φ, z) mnożą je tylko przez czynniki stałe, nazywają się podstawieniami abelowymi. Tworzą one grupę, która nazywa się abelową (Hermite).

Teorię grup podstawień utworzyli Abel (Crelle, VI) i Cauchy (Exercices, 1844). Temu ostatniemu zawdzięczamy większość twierdzeń podstawowych tej teorii, której późniejsze badania Galois'a

(Journ. de Liouville, XI, 1846) nadały wielką ważność, zwłaszcza w zastosowaniu do równań algebraicznych.

Do nowszych i zupełnych dzieł o tym przedmiocie należą: Jordana, *Traité des substitutions etc.*, Paryż, 1870; Netto, *Substitutionentheorie*, Lipsk, 1882 (przekład włoski Battaglini'ego, Turyn, 1885); Petersena, *Algebraische Gleichungen*, Kopenhaga, 1878, (przekład francuski, Paryż, 1897). W „*Algèbre supérieure*“ Serreta (przekład niemiecki Wertheima, Lipsk, 1868), teoria ta jest dostatecznie rozwinięta. W rozdziale V-ym przedstawimy teorię Galois'a, t. j. zastosowanie teorii podstawień do równań algebraicznych, w rozdziale zaś IX podamy teorię grup przekształceń, która ma wiele węzłów, wspólnych z teorią podstawień.

Biblioteka
matematyczno-fizyczna
➤ANTONIEGO WILKA.➤
Liczba:

ROZDZIAŁ III.

TEORIA WYZNACZNIKÓW.

§ 1.

Wiadomości ogólne.

Niechaj będzie n^2 ilości ułożonych w kwadrat:

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}, & a_{12}, & . & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & . & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1}, & a_{n2}, & . & . & . & . & a_{nn}, \end{array}$$

Utwórzmy wszystkie iloczyny typu

$$a_{1r_1}, a_{2r_2}, a_{nr_{r_n}},$$

gdzie $r_1, r_2 r_n$ stanowią jakąkolwiek przemianę liczb $1, 2 n$; każdemu z iloczynów nadajmy znak $+$ lub $-$, stosownie do tego, czy przemiana skłótników r jest przemianą parzystą, czy też nieparzystą; weźmy wreszcie sumę algebraiczną $n!$ w ten sposób utworzonych iloczynów. Suma ta nazywa się wyznacznikiem n^2 ilości i przedstawia się za pomocą symbolu:

$$\begin{vmatrix} a_{11}, a_{12} & . & . & . & , a_{1n} \\ a_{21}, a_{22} & . & . & . & , a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1}, a_{n2} & . & . & . & , a_{nn} \end{vmatrix}$$

Zbiór wszystkich n^2 elementów, ułożonych w kwadrat, stanowi macierz (matrycę) kwadratową; przekątna, złożona z elementów $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ nazywa się przekątną główną, same zaś elementy $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ — elementami głównymi.

Jeżeli w wyznaczniku wszystkie elementy jednego wiersza (lub kolumny) są zerami, wyznacznik jest zerem.

Jeżeli w wyznaczniku przemienimy wiersze na kolumny, wyznacznik nie zmieni się.

Jeżeli w wyznaczniku przestawimy dwa wiersze (lub kolumny) równoległe, otrzymamy nowy wyznacznik równy pierwotnemu ze znakiem przeciwnym.

Jeżeli dwa wiersze (lub dwie kolumny) równoległe w wyznaczniku są jednakowe, wyznacznik jest zerem.

Jeżeli elementy jednego wiersza lub kolumny pomnożymy przez k , to i sam wyznacznik zostanie pomnożony przez k .

Wyznacznik nie zmienia się, jeżeli zmienimy znak wszystkich elementów, stojących na miejscach nieparzystych, rozumiejąc przez miejsca nieparzyste te, dla których suma składowników jest nieparzysta.

Wyznacznik nie zmienia się, jeżeli każdy element a_{ik} pomnożymy przez p^{i-k} , gdzie p jest liczbą dowolną.

Wyznacznik jest zerem, jeżeli elementy jednego wiersza (lub kolumny) są jednakowymi wielokrotnościami elementów wiersza równoległego (lub kolumny równoległej).

Wyznacznik, w którym elementy jednego wiersza (lub kolumny) są wyrażeniami wielomianowemi, równa się sumie wyznaczników, których elementy są wyrażeniami jednomianowemi.

Wyznacznik nie zmienia się, jeżeli do elementów jednego wiersza (lub kolumny) dodamy elementy wiersza równoległego (lub kolumny), pomnożone przez jakąkolwiek liczbę.

Wyznacznik jest zerem, jeżeli elementy jednego wiersza (lub kolumny) są kombinacjami liniowymi podobnymi elementów wierszy (lub kolumn) równoległych, i odwrotnie.

Z macierzy kwadratowej rzędu n -tego, po usunięciu m wierszy i m kolumn, pozostaje macierz kwadratowa rzędu $n-m$. Wyznacznik, którą taka macierz przedstawia, nazywa się minorem, podwyznacznikiem, wyznacznikiem cząstkowym lub wyznacznikiem pochodnym wyznacznika danego. Jeżeli jego elementy główne są elementami głównymi danego, nazywamy go minorem głównym.

Istnieje $\left[\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} \right]^2$ minorów rzędu m -tego.

Istnieje $\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$ minorów głównych rzędu m -tego.

Minor jest klasy parzystej lub nieparzystej, stosownie do tego, czy suma liczb porządkowych, odpowiadających wierszom i kolumnom go składającym, jest parzysta lub nieparzysta.

Każdemu minorowi rzędu m odpowiada jeden minor rzędu $n-m$, utworzony przez usunięcie kolumn i wierszy, składających minor dany. Te dwa minory nazywają się wzajemnie dopełniającymi. Dopełnieniem algebraicznym (ilością dołączoną) minoru jest jego minor dopełniający, wzięty ze znakiem $+$ lub $-$, stosownie do tego, czy jest klasy parzystej czy nieparzystej.

Wyznacznik równa się sumie iloczynów minorów, zawartych w m wierszach lub kolu-

mnach przez odpowiednie dopełnienia algebraiczne.

Wyznacznik równa się summie algebraicznej iloczynów elementów wiersza lub kolumny przez odpowiednie dopełnienia algebraiczne.

Suma iloczynów minorów, zawartych w m wierszach, przez dopełnienia algebraiczne odpowiednich minorów, zawartych w innych m wierszach równoległych, jest zerem. Godnem uwagi jest to twierdzenie w przypadku $m=1$.

Jeżeli wyznacznik jest zerem, dopełnienia algebraiczne elementów jakiegokolwiek wiersza są proporcjonalne do elementów jakiegokolwiek innego wiersza równoległego.

Po wprowadzeniu minorów rzędu 2-go, każdy wyznacznik rzędu n -tego można przedstawić w postaci wyznacznika rzędu $(n-1)$ -go.

Jeżeli wszystkie elementy wyznacznika są podzielne przez p , to sam wyznacznik jest podzielny przez p^n .

Jeżeli wszystkie minory rzędu 2-go wyznacznika są podzielne przez p , to sam wyznacznik jest podzielny przez p^{n-1} .

Iloczyn dwu wyznaczników tego samego rzędu o elementach odpowiednio a_{rs} , b_{hk} : otrzymujemy, tworząc wyznacznik o elementach c_{ij} , gdzie c może mieć jedno z czterech wyrażeń:

$$\left. \begin{aligned} c_{ij} &= a_{i1} b_{j1} + a_{i2} b_{j2} + \dots + a_{in} b_{jn} \\ c_{ij} &= a_{1i} b_{j1} + a_{2i} b_{j2} + \dots + a_{ni} b_{jn} \\ c_{ij} &= a_{1i} b_{j1} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj} \\ c_{ij} &= a_{1i} b_{ji} + a_{2j} b_{2i} + \dots + a_{ni} b_{nj} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{(prawidło} \\ \text{Bineta.)} \end{array}$$

Jeżeli wyznaczniki nie są tego samego rzędu, to wyznacznik rzędu niższego można zamienić na wyznacznik rzędu wyższego, dołączając wiersze lub kolumny, których elementy, znajdujące się na miejscach nie głównych, są zerami, elementy zaś, znajdujące się na przekątnej głównej, są równe jedności.

Nazywamy macierzą prostokątną—tablicę, w której nm elementów układa się w prostokąt. Jeżeli mamy dwie macierze prostokątne o m wierszach i n kolumnach, to utworzywszy sumę iloczynów elementów wierszy macierzy pierwszej przez odpowiednie elementy w wierszach drugiej, otrzymamy m^2 elementów ułożonych w kwadrat i mogących utworzyć wyznacznik rzędu m -tego. Ten wyznacznik nazywa się iloczynem według linii macierzy prostokątnych.

Każdy minor wyznacznika, będącego iloczynem dwu danych wyznaczników, jest iloczynem dwu macierzy prostokątnych.

Iloczyn według linii dwu macierzy prostokątnych o n kolumnach i m wierszach równa się zeru, jeżeli $m > n$; jeżeli $m < n$, równa się sumie iloczynów minorów rzędu m , zawartych w pierwszej macierzy, przez odpowiednie minory zawarte w drugiej.

Wyznacznik R , którego elementy A_{rs} są dopełnieniami elementów a_{rs} wyznacznika D , nazywa się wyznacznikiem układu dołączonego lub wzajemnym względem danego.

Jeżeli wyznacznik jest zerem, to jego wyznacznik wzajemny wraz ze wszystkimi minorami (aż do minorów rzędu 2-go), jest zerem.

Wyznacznik układu dołączonego ma wartość równą potędze $(n-1)$ -ej wyznacznika danego.

Jeżeli nazwiemy homologicznymi dwa minory wyznacznika D i R , zamknięte wierszami i kolumnami tych wyznaczników o odpowiednio równych liczbach porządkowych, to:

Jakikolwiek minor M rzędu m -tego, zawarty w wyznaczniku R , równa się minorowi wyznacznika D , homologicznemu z dopełnieniem algebraicznym minoru M w R , pomnożonemu przez potęgę $(m-1)$ -ą wyznacznika danego.

Dopełnienie elementu A_{rs} wyznacznika R równa się elementowi a_{rs} , pomnożonemu przez potęgę $(n-2)$ -ą wyznacznika D .

Jeżeli pomnożymy przez siebie dwa wyznaczniki D, D' , a następnie w sposób analogiczny pomnożymy ich wyznaczniki wzajemne R i R' , to drugiloczyn będzie wzajemnym względem pierwszego.

§ 2.

Wyznaczniki symetryczne i skośne. Pfafiany.

Jeżeli $a_{rs} = a_{sr}$, wyznacznik nazywa się symetrycznym; jeżeli $a_{rs} = -a_{sr}$, nazywa się skośnym; jeżeli wreszcie $a_{rs} = -a_{sr}$, przyczem $a_{rr} = 0$, nazywa się półsymetrycznym.

Kwadrat wyznacznika jest wyznacznikiem symetrycznym.

W wyznaczniku symetrycznym minory dopełniające dwóch elementów sprzężonych są równe.

Wyznacznik układu dołączonego wyznacznika symetrycznego jest symetryczny.

Wyznacznik półsymetryczny rzędu nieparzystego jest zerem.

Wyznacznik półsymetryczny rzędu parzystego jest kwadratem zupełnym wyrażenia wymiernego całkowitego swych elementów.

Wyrażenie takie nazywa się pfafianem n^2 elementów, lub także półwyznacznikiem (Scheibner).

Pfafian rzędu n (parzystego) elementów $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$ oznacza się symbolem $(123 \dots n)$. Symbolem $(12 \dots n)$ oznacza się właściwie ten z dwu pierwiastków wyznacznika półsymetrycznego, który zawiera ze znakiem $+$ wyraz $a_{12}a_{34} \dots a_{n-1, n}$.

Liczba wyrazów pfafianu rzędu n -tego jest: $(n-1)(n-3) \dots 3 \cdot 1$.

Pfafian zmienia znak skutkiem przestawienia dwu elementów.

Pfafian rzędu n -tego rozwija się według wzoru:

$$\begin{aligned} (12 \dots n) &= (12) (34 \dots n-1, n) \\ &+ (13) (45 \dots n2) \\ &+ \dots \dots \dots \\ &+ (1n) (23 \dots n-1). \end{aligned}$$

Każdy minor rzędu $(n-1)$ -go wyznacznika rzędu parzystego równa się iloczynowi pfafianu $(12 \dots n)$ przez pfafian rzędu $(n-2)$ -go, otrzymany z pierwszego przez zniesienie dwu składowych.

Równanie

$$\begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - x & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - x \end{vmatrix} = 0 \quad \text{Laplace!}$$

ma same pierwiastki rzeczywiste, jeżeli wyznacznik ilości a jest symetryczny. (Twierdzenie Sylwestera).

Każdy wyznacznik skośny, którego elementy główne są równe 1, jest sumą kwadratów.

§ 3.

Wyznaczniki specjalne.

Wyznacznik Hankela utworzony jest sposobem następującym:

$$P = \begin{vmatrix} a_0, & a_1 & . & . & . & . & , & a_{n-1} \\ a_1, & a_2 & . & . & . & . & , & a_n \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n-1}, & a_n & . & . & . & . & , & a_{2n-2} \end{vmatrix}$$

Nazywa on się także wyznacznikiem ortosymetrycznym (Hankel) lub persymetrycznym (Sylvester).

Wyznacznik ten ma tę własność, że może być wyrażony przez różnice kolejne ilości a . Położwszy:

$$\Delta_1^{(1)} = a_1 - a_0,$$

$$\Delta_2^{(1)} = a_2 - a_1, \quad \Delta_2^{(2)} = \Delta_2^{(1)} - \Delta_1^{(1)},$$

$$.$$

$$\Delta_k^{(1)} = a_k - a_{k-1}, \quad \Delta_k^{(2)} = \Delta_k^{(1)} - \Delta_{k-1}^{(1)}, \quad \Delta_k^{(3)} = \Delta_k^{(2)} - \Delta_{k-1}^{(2)}. \quad . . . ,$$

znajdujemy:

$$P = \begin{vmatrix} a_0, & \Delta_1^{(1)}, & \Delta_2^{(2)} & . & . & . & . & \Delta_{n-1}^{(n-1)} \\ \Delta_1^{(1)}, & \Delta_2^{(2)}, & \Delta_3^{(3)} & . & . & . & . & \Delta_n^{(n)} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ \Delta_{n-1}^{(n-1)}, & \Delta_n^{(n)}, & \Delta_{n-1}^{(n+2)} & . & . & . & \Delta_{2n-2}^{(2n-2)} \end{vmatrix}$$

Jeżeli w szczególności elementy tworzą postęp arytmetyczny rzędu $(n-1)$ -go, będzie:

$$P = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} [\Delta_{n-1}^{(n-1)}]^n;$$

jeżeli ten postęp jest rzędu niższego niż $n-1$, wtedy $P=0$.

Jeżeli elementy tworzą postęp geometryczny, to $P=0$.

Wyznacznik kołujący (cyrkulant) jest postaci:

$$A = \begin{vmatrix} a_1, & a_2, & . & . & . & . & . & a_n, \\ a_2, & a_3, & . & . & . & . & . & a_1, \\ a_3, & a_n, & . & . & . & . & . & a_2, \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_n & a_1, & . & . & . & . & . & a_{n-1}, \end{vmatrix}$$

Wyznacznik kołujący rzędu n -tego rozpada się na n czynników wymiernych względem swych elementów według wzoru następującego:

$$P = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \varphi(a_1) \varphi(a_2) \dots \varphi(a_n),$$

gdzie

$$\varphi(z) = a_1 + a_2 z + a_3 z^2 + \dots + a_n z^{n-1};$$

$a_1, a_2 \dots a_n$ są n pierwiastkami równania $x^n - 1 = 0$.

Wyznacznik kołujący

$$\begin{vmatrix} 1, & 2, & . & . & . & . & . & n \\ 2, & 3, & . & . & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ n, & 1, & . & . & . & . & . & n-1 \end{vmatrix}$$

równa się:

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{n(n+1)}{2} \cdot n^{n-2}.$$

Wyznacznik Vandermonde'a lub Cauchy'ego jest postaci:

$$D = \begin{vmatrix} 1, & 1, & . & . & . & . & . & 1 \\ a_1, & a_2, & . & . & . & . & . & a_n \\ a_1^2, & a_2^2, & . & . & . & . & . & a_n^2 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_1^{n-1}, & a_2^{n-1}, & . & . & . & . & . & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

i równa się:

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i,j} (a_i - a_j) \quad (i < j).$$

Kwadrat wyznacznika Cauchy'ego jest wyznacznikiem Hankela.

Wyznacznik

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & . & . & . & 1, \\ \binom{m}{1}, & \binom{m+1}{1}, & . & . & . & \binom{m+n}{1} \\ \binom{m+1}{2}, & \binom{m+2}{2}, & . & . & . & \binom{m+n+1}{2} \\ . & . & . & . & . & . \\ \binom{m+n-1}{n}, & \binom{m+n}{n}, & . & . & . & \binom{m+2n-1}{n} \end{vmatrix}$$

równa się jedności

Wyznacznik Zeipela

$$\begin{vmatrix} \binom{m}{p}, & \binom{m}{p+1}, & . & . & . & \binom{m}{p+r} \\ \binom{m+1}{p}, & \binom{m+1}{p+1}, & . & . & . & \binom{m+1}{p+r} \\ . & . & . & . & . & . \\ \binom{m+r}{p}, & \binom{m+r}{p+1}, & . & . & . & \binom{m+r}{p+r} \end{vmatrix}$$

równa się:

$$\frac{\binom{m+r}{r+1}, \binom{m+r-1}{r+1}, \dots, \binom{m+r-p+1}{r+1}}{\binom{p+r}{r+1}, \binom{p+r-1}{r+1}, \dots, \binom{r+1}{r+1}}.$$

Wyznacznik Sterna

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & & 1 \\ \binom{x_1}{1}, & \binom{x_2}{1}, & \dots, & \binom{x_n}{1} \\ \binom{x_1}{2}, & \binom{x_2}{2}, & \dots, & \binom{x_n}{2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{x_1}{n-1}, & \binom{x_2}{n-1}, & \dots, & \binom{x_n}{n-1} \end{vmatrix}$$

równa się:

$$\frac{D}{2^{n-2} \cdot 3^{n-3} \cdot 4^{n-4} \cdot \dots \cdot (n-1)},$$

gdzie D jest wyznacznikiem Cauchy'ego, utworzonym z ilości x .

Wyznacznik

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{1!}, & 1, & 0, & \dots, & 0 \\ \frac{1}{2!}, & \frac{1}{1!}, & 1, & \dots, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{n!}, & \frac{1}{(n-1)!}, & \frac{1}{(n-2)!}, & \dots, & \frac{1}{1!} \end{vmatrix}$$

równa się $\frac{1}{n!}$.

Wyznacznik Smitha

$$\begin{vmatrix} (1, 1), & (1, 2) & . & . & . & . & (1, n) \\ . & . & . & . & . & . & . \\ (n, 1), & (n, 2) & . & . & . & . & (n, n) \end{vmatrix}$$

gdzie (i, j) oznacza największy wspólny dzielnik liczb całkowitych i, j , równa się $\varphi(1)\varphi(2) \dots \varphi(n)$, gdzie $\varphi(k)$ jest liczbą liczb mniejszych od k i pierwszych względem k .

Kontynuanty

$$C_n = \begin{vmatrix} a_1, & 1, & 0, & . & . & . & . & , & 0 \\ -1, & a_2, & 1, & . & . & . & . & , & 0 \\ 0, & -1, & a_3, & . & . & . & . & , & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0, & 0, & 0, & . & . & . & . & , & a_n \end{vmatrix}$$

czynią zadość wzorowi zwrotnemu:

$$C_n = a_n C_{n-1} + C_{n-2}.$$

Kontynuant ma wyrazów

$$\binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \dots + \binom{n-k}{k},$$

gdzie $k = \frac{n}{2}$, gdy n parzyste, $k = \frac{n-1}{2}$, gdy n nieparzyste.

Jeżeli pomiędzy elementami wyznacznika zachodzą związki

$$a_{1i}^2 + a_{2i}^2 + + a_{ni}^2 = 1,$$

$$a_{1i} a_{1j} + a_{2i} a_{2j} + + a_{ni} a_{nj} = 0,$$

wyznacznik nazywa się ortogonalnym.

Kwadrat wyznacznika ortogonalnego jest jednością dodatnią. Dopełnienie algebraiczne elementu w wyznaczniku ortogonalnym równa się samemu elementowi, pomnożonemu przez wyznacznik. Każdy minor wyznacznika ortogonalnego równa się swemu dopełnieniu algebraicznemu, pomnożonemu przez wyznacznik dany.

Iloczyn dwu wyznaczników ortogonalnych jest ortogonalny.

Jeżeli a są elementy wyznacznika ortogonalnego D , to równanie

$$\begin{vmatrix} a_{11} + x, & a_{12}, & . & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22} + x, & . & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1}, & a_{n2} & . & . & . & . & a_{nn} + x \end{vmatrix} = 0$$

jest równaniem odwrotem takim, iż dla n nieparzystego ma ono pierwiastek $x = -D$ i nie ma żadnego innego pierwiastka rzeczywistego; dla n parzystego i $D = -1$ ma pierwiastek $x = \pm 1$ i nie ma żadnego innego pierwiastka rzeczywistego. (Twierdzenie Brioschi'ego.)

Jeżeli a_{ij} , b_{ij} są elementy dwu wyznaczników ortogonalnych o wartości $\varepsilon = +1$ i tego samego rzędu, i jeżeli wyznacznik o wyrazie ogólnym $a_{ij} + b_{ij}$ jest zarazem zerem, to i wszystkie minory rzędu $(n-1)$ -go będą zerami. (Twierdzenie Stieltjesa.)

Co do wskazówek bibliograficznych patrz rozmaite rozdziały E. Pascala, Determinanti (Medyolan, 1896.)

§ 4.

Wyznaczniki Wrońskiego.

Wyznaczniki Wrońskiego albo wrońskiany tworzą się w sposób następujący:

W pierwszym wierszu mamy n funkcji zmiennej x , w wierszach następnych ich pochodne pierwsze, drugie i t. d.

$$W = \begin{vmatrix} u_1(x), & u_2(x) & . & . & . & u_n(x) \\ u'_1(x), & u'_2(x) & . & . & . & u'_n(x) \\ . & . & . & . & . & . \\ u_1^{(n-1)}(x), & u_2^{(n-1)}(x), & . & . & . & u_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Pochodną wrońskianu tworzymy, zastępując elementy ostatniego wiersza pochodnymi n -tymi funkcji.

Jeżeli funkcye u pomnożymy przez jakąkolwiek ilość $v(x)$, to wyznacznik zostanie pomnożony przez v^n .

Znikanie wrońskianu W jest warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by pomiędzy n funkcjami $u_1(x), u_2(x) \dots u_n(x)$ zachodził związek liniowy jednorodny o współczynnikach stałych.

Wyznacznik

$$W_1 = \begin{vmatrix} u_1(x), & . & . & . & . & u_n(x) \\ u_1(x+1), & . & . & . & . & u_n(x+1) \\ u_1(x+2), & . & . & . & . & u_n(x+2) \\ . & . & . & . & . & . \\ u_1(x+n-1), & . & . & . & . & u_n(x+n-1) \end{vmatrix},$$

równy

$$\begin{vmatrix} u_1(x), & \dots & u_n(x) \\ \Delta u_1(x), & \dots & \Delta u_n(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ \Delta^{n-1} u_1(x), & \dots & \Delta^{n-1} u_n(x) \end{vmatrix},$$

gdzie Δ jest symbolem różnicy $u(x+1) - u(x)$, $\Delta^2 u(x) = \Delta u(x+1) - \Delta u(x)$,, nazywa się wyznacznikiem różnicowym Wronskiego (wronskianem różnicowym).

Znikanie wyznacznika W_1 jest warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby pomiędzy n funkcyjami u istniał związek liniowy jednorodny o współczynnikach, które są funkcyjami peryodycznymi zmiennej x , t. j. takimi funkcyjami $F(x)$, dla których $F(x+1) = F(x)$ przy wszelkich wartościach na x . (Twierdzenie Casorati'ego).

Co do literatury o wronskianach patrz: Dickstein, Własności i niektóre zastosowania wronskianów (Prace matem.-fizyczne t. I, 1888); Peano, (Mathesis, IX, str. 75 i str. 110, 1889); Peano, Sul determinante wronskiano (Acc. Lincei, 1897); Vivanti, Sul determinante wronskiano (Acc. Lincei, 1898).

§ 5.

Jakobiany czyli wyznaczniki funkcyjne.

Niechaj będzie n funkcyj $y_1, y_2, \dots, y_n$, zależnych od zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Wyznacznik

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix},$$

który zwykle wyobrażamy za pomocą symbolu

$$\frac{\partial (y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial (x_1, x_2, \dots, x_n)},$$

nazywa się wyznacznikiem funkcyjnym lub jakobianem funkcyj y .

Jeżeli $y_1, y_2, \dots, y_n$ są funkcyami zmiennych $z_1, z_2, \dots, z_n$, te zaś ostatnie—funkcyami zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_n$, wtedy mamy wzór

$$\frac{\partial (y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial (x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{\partial (y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial (z_1, z_2, \dots, z_n)} \frac{\partial (z_1, z_2, \dots, z_n)}{\partial (x_1, x_2, \dots, x_n)}.$$

Jeżeli $y_1, y_2, \dots, y_n$ są funkcyami zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_n$, to odwrotnie te ostatnie są funkcyami pierwszych, i będzie:

$$\frac{\partial (y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial (x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{1}{\frac{\partial (x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial (y_1, y_2, \dots, y_n)}}.$$

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by pomiędzy n funkcyami n zmiennych zachodził związek, jest, aby jakobian ich był tożsamościowo zerem.

Jeżeli

$$y_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{u_i(x_1, x_2, \dots, x_n)}{u_0(x_1, x_2, \dots, x_n)} \\ (i=1, 2, \dots, n)$$

to:

$$\frac{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{1}{u_0^{n+1}} \begin{vmatrix} u_0, & \frac{\partial u_0}{\partial x_1}, & \dots, & \frac{\partial u_0}{\partial x_n} \\ u_1, & \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, & \dots, & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_n, & \frac{\partial u_n}{\partial x_1}, & \dots, & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

Twierdzenia powyższe zawdzięczamy Jacobiemu.

Nazwawszy K wyznacznik po stronie drugiej poprzedniego wzoru, mamy następujące twierdzenie (Casorati'ego):

Jeżeli K jest tożsamościowo zerem, to związek pomiędzy $n+1$ funkcyjami $u_0, u_1, \dots, u_n$ jest związkiem jednorodnym, i odwrotnie.

Jeżeli mamy $n+1$ funkcyj jednorodnych o n zmiennych i kombinując je ze sobą po n , utworzymy $n+1$ jakobianów, z tych znowu utworzymy $n+1$ nowych jakobianów, kombinując je po n ; wtedy te ostatnie, poza czynnikiem wspólnym, przedstawiać będą funkcyjne, z których wyszliśmy. (Twierdzenie Clebscha.)

Niechaj będzie n funkcyj $y_1, y_2, \dots, y_n$ o $n+1$ zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$. Utwórzmy $n+1$ jakobianów funkcyj, uważanych za funkcyjne n zmiennych; nazwijmy te jakobiany: $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n+1}$. Wtedy zachodzić będzie związek:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \psi_1 - \frac{\partial}{\partial x_2} \psi_2 + \dots + (-1)^n \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} \psi_{n+1} = 0.$$

§ 6.

H e s y a n y.

Jakobian n pierwszych pochodnych funkcji n zmiennych nazywa się hesyanem funkcji danej.

Jeżeli funkcja dana $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ jest funkcją jednorodną stopnia m -tego n zmiennych i jeżeli przyjmiemy, że jedna ze zmiennych x_n jest równa jedności, tak że F stanie się $f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$, wtedy oznaczając przez f_{ij} pochodną drugą funkcji f względem x_i i x_j , otrzymamy hesyan (bez uwzględnienia czynnika liczbowego) w postaci:

$$H = \begin{vmatrix} f_{11} & \dots & f_{1, n-1} & f_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f_{n-1, 1} & \dots & f_{n-1, n-1} & f_{n-1} \\ f_1 & \dots & f_{n-1} & \frac{m}{m-1} f \end{vmatrix},$$

Jeżeli funkcja jednorodna n zmiennych może za pomocą przekształcenia liniowego zmiennych przejść na inną funkcję z mniejszą o 1 liczbą zmiennych, wtedy hesyan jest tożsamościowo zerem. (Twierdzenie Hessego.)

Twierdzenie odwrotne jest prawdziwe tylko dla przypadków $n \leq 4$ (patrz Gordan-Noether, Math. Ann. X, str. 547, a co do innych szczegółów: Pasca. Determinanti, str. 327 i nast.).

Zastosowania jacobianów i hesyanów do geometrii krzywych i powierzchni podamy w drugim tomie niniejszego dzieła.

Teoria wyznaczników wypłynęła z zagadnienia o rozwiązywaniu równań liniowych. Za pierwszych jej twórców należy uważać Leibniza, Cramera, Laplace'a, Cauchy'ego, Jacobi'ego, a pierw-

szy traktat zupełny systematyczny teoryi napisał Brioschi. Szczegóły bibliograficzne u E. Pascala, Determinanti.

Oprócz dwu monografij Cayleya (Trans. Cambridge, VIII) i Spottiswoode'a Crelle, t. LI) do ważniejszych dzieł o teoryi wyznaczników należą: Brioschi (Pawia, 1854), Baltzer (Lipsk, 1857—1882), Trudi (Neapol, 1862), Trzaska (W. Kretkowski, 1870 (w dodatku do „Rachunku różniczkowego“ Wł. Folkierskiego); Studnička (Praga, 1871), Houël (Paryż, 1871), Hesse (Lipsk, 1872), Dölp (Darmstadt 1874), Mansion (Gandawa, 1876), Günther (Erlangen, 1877), M. A. Baraniecki „Teorya wyznaczników, kurs uniwersytecki“ (Paryż, 1879), jedno z najobszerniejszych w tym przedmiocie; Gordan (Lipsk, 1886), Porów. S. Dickstein „Pojęcia i metody matematyki“ (Warszawa, 1891, str. 159, 192).

Rozważano także i wyznaczniki rzędu nieskończonego. Co do tych patrz E. Pascal. c., oraz najświeższą monografię Cazzaniga: „Sui determinanti d'ordine infinito“ (Annal. di mat. 1897. ) no ad uno tipo di determ. nulli d'ordine infinit, tamże 1898.)

ROZDZIAŁ IV.

TEORIA SZEREGÓW, ILOCZYNÓW NIESKOŃCZONYCH I UŁAMKÓW, CIĄGŁYCH.

§ 1.

Wiadomości ogólne o szeregach.

Niechaj będzie szereg nieskończenie wielu liczb $u_1, u_2, \dots$. Utwórzmy sumę S_n pierwszych n z tych liczb, t. j.

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n.$$

Granica ilości S_n dla $n = \infty$ nazywa się sumą szeregu, utworzonego z nieskończonej liczby wyrazów u w porządku oznaczonym. Mówimy, że szereg jest zbieżny, rozbieżny lub nieoznaczony, stosownie do tego, czy ta granica istnieje i jest skończoną, czy istnieje i jest nieskończoną, albo wcale nie istnieje.

Suma ilukolwiek wyrazów, poczynwszy od n -tego, nazywa się resztą szeregu; jest ona:

$$R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}.$$

Można wyobrazić sobie, że ilości u zależą od dwu lub więcej skaźników, zamiast od jednego; wtedy przy pomocy podobnej definicyi otrzymujemy szeregi podwójne, potrójne i t. d., w odróżnieniu od których poprzednie nazywają się pojędyńczemi.

Jeżeli wyrazy szeregu są ilościami zespolonemi, otrzymujemy szereg zespolony; oddzieliwszy w nim część rzeczywistą od czysto-urojonej, powiemy, że szereg zespolony jest zbieżny, jeżeli każdy z tych dwu szeregów jest zbieżny.

Szereg może być zbieżny tylko wtedy, gdy uważamy każdy jego wyraz z jego własnym znakiem⁴ może przestać być zbieżnym, gdy bierzemy wartości bezwzględne wyrazów. W takim razie szereg nazywa się wprost lub zwyczajnie zbieżnym.

Szereg może pozostać zbieżnym i wtedy, gdy zmieniamy znaki wszystkich jego wyrazów ujemnych; w tym przypadku szereg jest bezwzględnie zbieżnym.

Jeżeli szereg jest bezwzględnie zbieżny, to jest także i zwyczajnie zbieżny.

Szereg o wyrazach zespolonych nazywa się bezwzględnie zbieżnym, jeżeli jest zbieżnym szereg modułów, t. j. bezwzględnych wartości jego wyrazów.

Jeżeli wszystkie wyrazy szeregu są funkcyami jednej lub więcej zmiennych, otrzymujemy wtedy szereg funkcyj.

Jeżeli dawszy sobie σ dowolnie małe, można znaleźć skaźnik n taki, aby, przy każdej wartości (zawartej w pewnym obszarze) ilości zmiennej lub zmiennych, reszta R_m dla każdego $m \geq n$ była zawsze co do wartości bezwzględnej mniejsza od σ , wtedy mówimy, że szereg jest jednostajnie zbieżny lub równo zbieżny.

Z dwu szeregów jeden nazywa się szybciej zbieżnym niż drugi, jeżeli stosunek ich reszt $\frac{R_n}{R'_n}$ dąży do zera dla n rosnącego nieograniczenie.

Dla zbieżności szeregu jest koniecznem i dostatecznem, by dawszy sobie σ dowolne, można

było znaleźć taki skażnik n' , aby dla każdego $m \geq n$ było $R_m < \sigma$ co do wartości bezwzględnej.

By szereg był zbieżny, jest koniecznem, aby granica wyrazu ogólnego u_n była zerem.

Jeżeli szereg jest bezwzględnie zbieżny, to pozostaje takim, gdy wszystkie wyrazy jego pomnożymy przez ilości mniejsze od liczby danej.

Szereg jest zbieżny, jeżeli wyrazy jego są co do wartości bezwzględnej odpowiednio mniejsze od wyrazów szeregu zbieżnego.

Szereg o wyrazach dodatnich jest rozbieżny, jeżeli wyrazy jego są co do wartości bezwzględnej odpowiednio większe od wyrazów szeregu rozbieżnego.

Jeżeli wyrazy szeregu naprzemian dodatnie i ujemne maleją co do wartości bezwzględnej i dążą do zera, szereg jest zbieżny.

Jeżeli szereg

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

jest zbieżny, szereg zaś

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots$$

o wyrazach dodatnich—rozbieżny, to granica iloczynu $a_n u_n$, jeżeli istnieje dla $n = \infty$, musi być zerem.

W szeregu zbieżnym o wyrazach dodatnich iloczyn $n u_n$ jeżeli ma granicę, to dąży do zera dla $n = \infty$. Olivier (Crelle, II) uważał to kryterium za konieczne i dostateczne, Abel (Crelle, III) wykazał, że jest tylko koniecznem.

W szeregu zbieżnym o wyrazach dodatnich wciąż malejących, iloczyn $n u_n$ dąży do zera. Catalan, Comptes rendus 1886; patrz co do tego Giudice (Riv di mat, IV, str. 165).

Jeżeli dla n rosnącego nieograniczenie wyrażenie

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1},$$

(gdzie $\sum u_n$ jest szeregiem danym o wyrazach dodatnich, $\sum \frac{1}{a_n}$ szeregiem rozbieżnym o wyrazach dodatnich) począwszy od pewnej wartości n , pozostaje wciąż większe od pewnej liczby dodatniej, szereg $\sum u_n$ jest zbieżny; jeżeli przeciwnie, począwszy od pierwszej wartości, n pozostaje wciąż ujemne, to szereg jest rozbieżny. (Twierdzenie Kummera, Crelle, 1835.)

Szereg jest bezwzględnie zbieżny, jeżeli granica stosunku wyrazu do poprzedzającego (o ile istnieje) jest co do wartości bezwzględnej ilością mniejszą od jedności (Cauchy).

Szereg o wyrazach dodatnich jest rozbieżny, jeżeli granica stosunku wyrazu do poprzedzającego (o ile istnieje) jest ilością większą od jedności (Cauchy).

Szereg o wyrazach dodatnich jest zbieżny lub rozbieżny, stosownie do tego, czy wyrażenie $n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right)$ dla $n = \infty$ dąży do granicy wyższej lub niższej od 1. (Twierdzenie Raabego, Crelle, X1).

Szereg o wyrazach dodatnich jest zbieżny lub rozbieżny, stosownie do tego, czy wyrażenie

$$\left[n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] \log n$$

dąży do granicy większej lub mniejszej od jedności.

W szeregu zbieżnym o wyrazach dodatnich liczba

$$\left[n \left(\frac{u_n}{u_{n-1}} - 1 \right) - 1 \right] n$$

rośnie nieograniczenie wraz z n .

Jeżeli w szeregu o wyrazach dodatnich ilość $\sqrt[n]{u_n}$, począwszy od pewnej wartości n , pozostaje wciąż mniejsza od liczby danej, mniejszej od 1, szereg jest zbieżny; gdy pozostaje wciąż większa od 1, — jest rozbieżny.

Jeżeli istnieje granica stosunku $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, to istnieje też granica wyrażenia $\sqrt[n]{u_n}$ i równa się poprzedniej.

Szereg o wyrazach dodatnich może być zbieżny, chociaż nie istnieje granica stosunku $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. W tym przypadku stosunek ten waha się pomiędzy granicami, z których jedna jest największa.

Szereg jest zbieżny lub rozbieżny, stosownie do tego, czy granica wyrażenia

$$\frac{\log \frac{1}{u_n}}{\log n}$$

jest większa lub mniejsza od 1 (kryterium logarytmowe Cauchy'ego).

Szereg

$$u(1) + u(2) + \dots + u(n) + \dots$$

jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, jeżeli

$$\lim_{n=\infty} \int_n^{n+m} u(x) dx = 0$$

(kryterium całkowe Cauchy'ego).

Szereg $\sum u_n$ jest zbieżny, jeżeli można znaleźć liczby dodatnie $a_1, a_2, \dots$ takie, że

$$\lim_{n=\infty} \left\{ \log \frac{1}{a_n u_{n+p}} : \sum_0^{\infty} \frac{1}{a_r} \right\} > 0$$

(kryterium Pringsheima).

Szereg $\sum u_n$ jest zbieżny, jeżeli można znaleźć liczby dodatnie $a_1, a_2, \dots$ takie, że

$$\lim_{n=\infty} \left\{ a_{n+1} \log \frac{a_n u_{n+p}}{a_{n+1} u_{n+p+1}} \right\} > 0$$

(kryterium Pringsheima).

Szereg o wyrazach dodatnich jest zbieżny, jeżeli wyrażenie

$$\left(1 - \overline{u_n}'' \right) \frac{n}{\log n}.$$

począwszy od dostatecznie wielkiej wartości n , pozostaje wciąż większem od 1; jest rozbieżny, jeżeli począwszy od pewnej wartości n , nie przewyższa jedności (kryterium Jameta, Mathesis, 1892, str. 80. Porów. Cesàro, (Analisi Algebrica, str. 489).

Inne kryteria podali: Gauss (Werke, III, str. 139; kryterium Gaussa wypływa z kryterium Raabego), De Morgan, (Differ. Calculus, Londyn 1836), Bertrand (Journ. de Liouville, II, str. 37), Bonnet (tamże, VIII, str. 19—99), Pauker (Crelle, XLII, str. 138), Dini (Annal. delle Univ. Toscane, Pisa 1867), Du Bois-Reymond (Crelle, LXXVI), Pringsheim (Math. Ann. XXXV), Giudice (Rend, Palermo, 1890) it. d.

Aby szereg pozostał zbieżnym przy jakiegokolwiek zmianie porządku jego wyrazów, jest koniecznem i dostatecznem, by był bezwzględnie zbieżnym (twierdzenie Dirichleta, Crelle, IV); w tym przypadku suma szeregu pozostaje też niezmienną dla każdego odwrócenia (inwersyi) wyrazów.

Jeżeli szereg o wyrazach dodatnich i ujemnych jest bezwzględnie zbieżny, to będą też oddzielnie bezwzględnie zbieżnymi: szereg utworzony z samych wyrazów ujemnych i utworzony z samych wyrazów dodatnich.

Niechaj będzie szereg, dla którego $\lim u_n = 0$; niechaj

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots \quad (1)$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + \dots \quad (2)$$

będą sumy wyrazów dodatnich oraz bezwzględnych wartości wyrazów ujemnych, wziętych w tym porządku, w jakim istotnie zachodzą.

Jeżeli dwa szeregi (1), (2) są zbieżne, to szereg dany będzie bezwzględnie zbieżny; jeżeli oba szeregi są rozbieżne, to, można zawsze tak rozmieścić ich wyrazy, aby szereg całkowity był zbieżny, rozbieżny lub nieoznaczony. i w przypadku gdy jest zbieżny, mógł mieć wartość zupełnie dowolną. (Twierdzenie Riemanna, Werke, str. 221).

Jeżeli $\sum u_n$, $\sum v_n$ są dwa szeregi dane, to szeregi

$$\sum (u_n + v_n),$$

$$\sum (u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 + \dots + u_n v_n)$$

nazywamy odpowiednio: sumą albo iloczynem dwu szeregów danych.

Suma i iloczyn dwu lub więcej szeregów bezwzględnie zbieżnych jest szeregiem bezwzględnie zbieżnym (Cauchy).

Aby iloczyn dwuszerogów zbieżnych był zbieżnym, wystarcza, by jeden z nich przynajmniej był bezwzględnie zbieżnym (patrz Mertens, Crelle, LXXIX).

Jeżeli iloczyn dwuszerogów zbieżnych jest zbieżny, to wartością jego jest iloczyn wartości szeregów danych.

§ 2.

Szeregi specjalne. Postępy.

$$1 + \frac{1}{2^{2r}} + \frac{1}{3^{2r}} + \dots = \frac{2^{2r-1}}{(2r)!} \pi^{2r} B_{2r},$$

$$1 + \frac{1}{3^{2r}} + \frac{1}{5^{2r}} + \dots = \frac{2^{2r-1}}{2 \cdot (2r)!} \pi^{2r} B_{2r},$$

$$1 - \frac{1}{2^{2r}} + \frac{1}{3^{2r}} - \dots = \frac{2^{2r-1}}{(2r)!} \pi^{2r} B_{2r},$$

$$1 - \frac{1}{3^{2r+1}} + \frac{1}{5^{2r+1}} - \dots = \frac{\pi^{2r+1}}{(2r)! 2^{2r+2}} E_{2r},$$

gdzie B i E są tak zwanymi liczbami Bernoulli'ego i Eulera (patrz Rozdz. XVIII).

Jeżeli s_p oznacza szereg odwrotności p -tych potęg liczb naturalnych, to:

$$s_2 = \frac{\pi^2}{6}, \quad s_4 = \frac{\pi^4}{90}, \quad s_6 = \frac{\pi^6}{945}, \quad s_8 = \frac{\pi^8}{9450},$$

$$s_3 = \frac{\pi^3}{25,7946\dots} = 1,202\,056\,903\,159\,594\,235\,40\dots,$$

$$s_5 = \frac{\pi^5}{295,1215\dots},$$

$$s_7 = \frac{\pi^7}{2295, 286 \dots},$$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots = \frac{\pi}{4},$$

$$1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \dots = 0, 91596559417721905460357 \dots,$$

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \dots = \frac{\pi^3}{32},$$

$$1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \dots = \frac{\pi^5}{1536}$$

Co do tych szeregów liczbowych patrz: Stieltjes (Acta math. 1887), Brisse (Compt. rend., LXIV, str. 1339), Novi, Algebra etc. str. 118).

$$1 - \log \frac{2}{1} + \frac{1}{2} - \log \frac{3}{2} + \frac{1}{3} - \dots = C$$

Jest to t. zw. stała Eulera = 0, 577215664 ...

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{1}{9 \cdot 10 \cdot 11} + \dots = \frac{1}{4} \log 2 = 0, 17328679.$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots = \log 2 - \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7} - \dots = \frac{1}{2} - \log 2,$$

$$\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7 \cdot 8} + \dots = \frac{3}{4} - \log 2,$$

$$\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7 \cdot 8} + \dots = \frac{\pi - 3}{4},$$

$$1 + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \dots = \frac{\pi}{3},$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1.3}{2.4} - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} + \dots = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1.1}{2.4} + \frac{1.1.3}{2.4.6} - \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8} + \dots = \sqrt{2},$$

$$1 - \frac{1.3}{2.4} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} - \dots = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \sqrt{2}},$$

$$1 + \frac{1.1}{2.4} - \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8} + \frac{1.1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10.12} - \dots = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{2}},$$

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = e = 2,718281828459045 \dots,$$

$$1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots = \frac{1}{e} = 0,3678794312 \dots,$$

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{2 \cdot 3^2} + \dots = \frac{\pi}{4},$$

$$\frac{1}{2^2} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{4^2} - \frac{4}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{12} - \log 2 = 0,129319 \dots$$

Szereg $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots$ jest zwyczajnie zbieżny; ma on sumę zależną od porządku wyrazów. Jeżeli po m wyrazach dodatnich następuje m ujemnych, wtedy suma szeregu wynosi:

$$\log 2 \sqrt{\frac{m}{n}} \quad (\text{Dirichlet, Berl. Abh. 1837}),$$

Szereg

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(a+rb)^n}$$

nazywa się harmonicznym (Euler) rzędu m -tego; dla $n=1$ szereg ten jest rozbieżny, dla n dodatniego i większego od 1 jest on w ogóle zbieżnym.

Kolej wyrazów, w której różnica każdych dwu sąsiednich jest stała, nazywa się postępowaniem arytmetycznym; jeżeli r -ta różnica wyrazów jest stała, otrzymujemy postęp arytmetyczny rzędu r .

Suma n pierwszych wyrazów postępu arytmetycznego 1-go rzędu równa się połowie iloczynu liczby wyrazów przez sumę wyrazów pierwszego i ostatniego.

Jeżeli $\Delta_1^{(m)}$ oznacza różnicę m -tą, odnoszącą się do wyrazu pierwszego (patrz rozdz. X), to suma n pierwszych wyrazów postępu arytmetycznego r -tego rzędu wynosi:

$$S_n = \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n}{m+1} \Delta_1^{(m)}$$

gdzie $\Delta_1^{(m)}$ jest zerem dla $m > r$.

Suma postępu arytmetycznego

$$p + 2(p+1) + 3(p+2) + 4(p+3) + \dots$$

wynosi:

$$S_n = \frac{1}{6} n(n+1)(3p+2n-2)$$

Suma postępu arytmetycznego

$$pq + (p-1)(q-1) + (p-2)(q-2) + \dots$$

wynosi:

$$S_n = \frac{1}{6} n \left[6pq - (n-1)(3p+3q-2n+1) \right]$$

Postępem geometrycznym rzędu r -tego nazywamy kolej wyrazów, które są potęgami jednej zmiennej o wykładnikach, stanowiących postęp arytmetyczny rzędu r -tego.

Suma n pierwszych wyrazów postępu geometrycznego 1-go rzędu wynosi:

$$1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

O sumach postępów geometrycznych rzędów wyższych patrz: Cauchy, Exercices. 1827, Jacobi, Fundamenta nova, Kummer (Crelle, XVII), Glaisher (Quart. Journ. of Math. 1871, XI) etc.

Szereg

$$\frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x^2} + \frac{x^3}{1-x^3} + \dots$$

nazywa się szeregiem Lamberta. Suma tego szeregu wynosi:

$$x \theta(1) + x^2 \theta(2) + x^3 \theta(3) + \dots$$

gdzie $\theta(p)$ oznacza w ogólności liczbę dzielników liczby p , włączając w nie 1 i samą liczbę p (patrz Scherk, Crelle, IX, X, Curtze, Annal. di Mat. I i t. d.).

Jeżeli stosunek $\frac{\omega}{\omega'}$ nie jest rzeczywisty, to szereg podwójny

$$\sum_{m, n} \frac{1}{(2m\omega + 2n\omega')^{2r}} = S_{2r}$$

gdzie suma rozciąga się na wszystkie wartości całkowite, dodatnie i ujemne liczb m i n (prócz kombinacyi $m=0, n=0$) jest bezwzględnie zbieżny przy $r > 1$.

Szereg S_{2r} można wyrazić za pomocą funkcyj przestępnych eliptycznych. Jeżeli g_2, g_3

są niezmiennikami funkcyj eliptycznej p , której półperyodami są ω i ω' (niezmienniki te można wyrazić za pomocą funkcyj ϑ o argumencie zero, patrz Rozdział XVI), otrzymamy wzory:

$$S_4 = \frac{1}{60} g_2,$$

$$S_6 = \frac{1}{5 \cdot 28} g_3,$$

$$S_8 = \frac{g_2^2}{2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7},$$

$$S_{10} = \frac{3 g_2 g_3}{2^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11},$$

$$S_{12} = \frac{1}{2^4 \cdot 11 \cdot 13} \left(\frac{g_2^2}{7} + \frac{g_2^3}{2 \cdot 3 \cdot 5^3} \right),$$

$$\dots \dots \dots$$

W następnych paragrafach podamy wiadomości, odnoszące się do szeregów funkcyj, szeregów potęgowych, różniczkowalności i całkowalności szeregów, rozwijalności funkcyj na szeregi, do szeregów funkcyj zmiennej urojonej i t. d.

Podręczniki algebry i rachunku różniczkowego obejmują najczęściej i wykład o szeregach; istnieją nadto traktaty specjalne: Lacroix (Paryż, 1800), Catalan (Paryż, 1860), Lsurent (Paryż, 1862), Novi (Algebra, Florencyja 1863). Historii szeregów nieskończonych poświęcone jest dzieło Reiffa (Geschichte der unendlichen Reihen, Tybinga 1889). Por. też odpowiednie rozdziały w dziele M. Cantora: „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.“

§ 3.

Iloczyny nieskończone.

Niechaj będzie ciąg nieskończony ilości $u_1, u_2 \dots$; utwórzmy iloczyn Π_n pierwszych n z pomiędzy nich.

Jeżeli dla n rosnącego nieograniczenie Π_n dąży do granicy skończonej, powiadamy, że iloczyn nieskończony ilości danych jest iloczynem nieskończonym zbieżnym.

W iloczynie zbieżnym jest $\lim u_n = 1$, stąd wynika, że począwszy od pewnej wartości n , wszystkie u_n są dodatnie.

Aby iloczyn nieskończony Π_n był zbieżny i nierówny zeru, jest koniecznem i dostatecznem, by szereg $\log u_1 + \log u_2 + \dots$ był zbieżny.

Jeżeli ten szereg dąży do $-\infty$, iloczyn Π dąży do zera,

Aby iloczyn nieskończony, którego czynnikami są wszystkie dodatnie i wszystkie mniejsze lub większe od 1, był zbieżny i nierówny zeru, jest koniecznem i dostatecznem, by szereg

$$(u_1 - 1) + (u_2 - 1) + \dots$$

był zbieżny.

Iloczyn nieskończony $u_1 u_2 \dots$, którego czynniki są jakiegokolwiek, jest zbieżny i nierówny zeru, jeżeli zbieżnemi są dwa szeregi:

$$(u_1 - 1) + (u_2 - 1) + \dots$$

$$(u_1 - 1)^2 + (u_2 - 1)^2 + \dots$$

Gdyby tylko pierwszy szereg był zbieżny, drugi zaś był rozbieżny, szereg byłby zbieżny lecz miałby wartość zero. Gdyby oba

szeregi były rozbieżne, nie można by nie wogóle powiedzieć o zbieżności iloczynu nieskończonego, o ile ilości $u_1, u_2 \dots$ nie byłyby wszystkie większe od 1; w tym bowiem przypadku można twierdzić, że szereg jest rozbieżny.

Jeżeli $u_1, u_2 \dots$ są ilościami zespolonemi, iloczyn nieskończony jest zbieżny, jeżeli tylko zbieżność szeregu

$$(u_1 - 1) + (u_2 - 1) + \dots$$

jest zbieżnością bezwzględną (Weierstrass).

Jeżeli iloczyn nieskończony zachowuje też samą wartość przy zmianie porządku czynników, nazywamy go iloczynem nieskończonym bezwzględnie zbieżnym.

Iloczyn będzie bezwzględnie zbieżny, jeżeli i szereg $\log u_1 + \log u_2 + \dots$ jest bezwzględnie zbieżny.

Jeżeli czynniki $u_1, u_2 \dots$ są wszystkie mniejsze od 1, zaś $u'_1, u'_2 \dots$ wszystkie większe od 1 (przyjmujemy wszystkie za dodatnie, co zawsze założyć wolno), to iloczyn będzie bezwzględnie zbieżnym, jeżeli takimi są oddzielnie iloczyny nieskończone $u_1, u_2, \dots, u'_1, u'_2, \dots$.

W tym przedmiocie patrz prace: Kummer (Crelle, XIII), Arndt (Archiv Grunerta, XXI), Weierstrass (Crelle, XI, Functionenlehre, str. 206), Dirichlet (Berliner Abhand, 1837), NoVI (Algebra).

Podajemy niżej najważniejsze wzory teorii iloczynów nieskończonych.

$$\sin x = x \prod_{r=1}^{\infty} \left[1 - \frac{x^2}{r^2 \pi^2} \right]; \quad \sinh x = x \prod_{r=1}^{\infty} \left[1 + \frac{x^2}{r^2 \pi^2} \right];$$

$$\cos x = \prod_{r=1}^{\infty} \left[1 - \frac{x^2}{\left(r\pi - \frac{1}{2}\pi\right)^2} \right]; \quad \cosh x = \prod_{r=1}^{\infty} \left[1 + \frac{x^2}{\left(r\pi - \frac{1}{2}\pi\right)^2} \right]$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{m}{n} \cdot \frac{\pi}{2} &= \frac{m}{n-m} \cdot \frac{2n-m}{n+m} \cdot \frac{2n+m}{3n-m} \cdot \frac{4n-m}{3n+m} \cdot \dots \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{n}{n-m} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2n-m}{n+m} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2n+m}{2n-m} \cdot \dots \end{aligned}$$

Wzory te podał Euler (Introductio etc.); zachodzące w nich iloczyny nieskończone nie są bezwzględnie zbieżne, wartość ich przeto zmienia się przy zmianie porządku czynników. Dla innego rozmieszczenia czynników wartość iloczynu obliczył Cayley. Tak np. we wzorze na wstawę mamy czynniki

$$\left[1 - \frac{x}{r\pi} \right] \left[1 + \frac{x}{r\pi} \right],$$

uporządkowane w ten sposób, że sąsiadują ze sobą czynniki odpowiadające tej samej bezwzględnej wartości skażnika r ; jeżeli zaś uporządkujemy je w ten sposób, aby po m czynnikach, odpowiadających wartościom dodatnim r , następowało n czynników, odpowiadających skażnikom r ujemnym, to wartością iloczynu będzie:

$$\sqrt[n]{\left(\frac{m}{n}\right)^x} \cdot \sin x.$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \quad (\text{wzór Wallisa}),$$

$$e = \frac{2}{1} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{6 \cdot 8}{5 \cdot 7}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\frac{10 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 16}{9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15}\right)^{\frac{1}{8}} \cdot \dots \quad (\text{Wzór Catalana, Journ. de Liouv. 1875.})$$

Oznaczywszy przez C stałą Eulera (patrz wyżej § 2, oraz niżej Rozdział XVIII) mamy:

$$C = \log \prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{1 + \frac{1}{n}},$$

$$\prod_1^{\infty} \frac{(2n-1)^2}{(2n-1)^2 - x^2} = 1 + \frac{x^2}{1^2 - x^2} + \frac{1^2 \cdot x^2}{(1^2 - x^2)(3^2 - x^2)} + \frac{3^2 x^2}{(1^2 - x^2)(3^2 - x^2)(5^2 - x^2)} + \dots$$

$$\prod_1^{\infty} (1 + x^n z) = \sum_0^{\infty} \frac{x^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1-x)(1-x^2) \dots (1-x^n)} z^n. \quad (\text{Euler}).$$

$$\prod_1^{\infty} \frac{1}{(1 - x^n z)} = \sum_0^{\infty} \frac{x^n}{(1-x)(1-x^2) \dots (1-x^n)} z^n. \quad (\text{Euler}).$$

$$\prod_{r=0}^{\infty} (1 - q^{2r+2}) (1 - 2q^{2r+1} \cos 2x + q^{4r+2}) = \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r q^{r^2} \cos 2rx; \quad |q| < 1. \quad (\text{Jacobi}).$$

Wzory na rozwinięcie funkcji eliptycznych na iloczyny nieskończone podamy w rozdziale XVI.

§ 4.

Fakultety analityczne; czynnikiowe (faktoryalne).

Nazywamy zwykle fakultetami (różnoczynnikowymi) analitycznymi iloczyny których, czynniki kolejne tworzą się według pewnych praw określonych.

Różnoczynnikowe Heinego (Handbuch der Kugelf., I, str. 109) są iloczynami postaci:

$$(1 - q) (1 - q^2) \dots (1 - q^m)$$

Fakultety Krampa (Ann. de Gergonne, III, 1812) są iloczynami typu

$$x(x+d)(x+2d) \dots (x+(m-1)d)$$

W przypadku $d = 1$, lub $d = -1$ otrzymujemy tak zwane czynnikiowe (faktoryalne). Jeżeli jeden z czynników skrajnych jest jednością, otrzymujemy czynnikową liczby całkowitej; oznaczamy ją przez $n!$.

Czynnikowa $n!$ zawiera się pomiędzy dwiema granicami:

$$\left(\sqrt[n]{n}\right)^n < n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

(Cauchy, Exerc. IV, str. 207).

Uogólnienie czynnikowych dla liczb niecałkowitych prowadzi do funkcji „gamma“ Eulera; uogólnienie dla liczb zespolonych rozważał Cayley.

Fakultetami analitycznymi Weierstrassa są iloczyny nieskończone typu (Functionenlehre, str. 200):

$$(z, d)^m = d^m \frac{z}{z + m d} \prod_{r=1}^{\infty} \left(\frac{r+1}{r} \right)^n \frac{z + r d}{z + (m+r)d}$$

dla jakichkolwiek wartości rzeczywistych lub zespolonych ilości z, d, m .

Dla z, m rzeczywistych i d dodatniego otrzymujemy fakultet Bessela.

Czynnikową Weierstrassa jest (tamże str. 193 i d.).

$$z \prod_{r=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r+1} \right)^z \frac{z+r}{r}.$$

Ta czynnikowa jest funkcją analityczną ilości z , skończoną i ciągłą.

Fakultetami i czynnikowemi zajmowali się: Wronski (Réfut. de la Théorie des fonct. anal. de Lagrange, Paryż; 1812); Clausen i Crelle (Crelle, VII), Bessel, (Abhand. II); Ohm (Crelle, XXXIX); Oettinger (tamże XXXIII, XXXV, XXXVIII, XLIV); Schaepli (tamże XLIII, LXVII), Weierstrass (tamże LI). Dawniejsze prace są: Vandermonde'a (Mém. de Paris, 1772) i Krampla, już wy-

żej cytowane. Vandermonde nazywał fakultety ilościami niewymiernymi różnych rzędów. Najnowsze badanie o tym przedmiocie ogłosił Capelli (Giorn. di Baltt. XXXI, XXXIII).

§ 5.

Ułamki ciągłe.

Wyrażenie postaci

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \dots,$$

nazywa się ułamkiem ciągłym zstępującym; wyrażenie zaś

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \dots$$

ułamkiem ciągłym wstępującym.

Poniżej, o ile nie będzie wyraźnego zastrzeżenia, mówić będziemy tylko o pierwszym.

Liczba wyrazów może być skończona lub nieskończona.

Ilości a i b nazywają się licznikami i mianownikami cząstkowymi. Jeżeli zatrzymamy się na wyrazie n -tym, to ułamek cząstkowy, który w ten sposób otrzymujemy, nazywa się n -tym ułamkiem przybliżonym lub n -tem przybliżeniem (reduktem); oznaczamy go przez $\frac{A_n}{B_n}$.

Możemy przyjąć, że wszystkie liczniki są równe 1.

Przybliżenia czynią zadosć następującemu związkowi zwrotnemu:

$$\frac{A_n}{B_n} = \frac{b_n A_{n-1} + a_n A_{n-2}}{b_n B_{n-1} + a_n B_{n-2}}.$$

Licznik A_n i mianownik B_n przybliżenia można wyrazić za pomocą wyznaczników formy specjalnej, t. j. tak zwanych kontynuantów (patrz wyżej str. 58). Jest mianowicie:

$$A_n = \begin{vmatrix} a_1, & 0, & 0, & 0 & \dots & 0, & 0 \\ -1, & b_2, & a_2, & 0 & \dots & 0, & 0 \\ 0, & -1, & b_3, & a_3 & \dots & 0, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & 0 & \dots & \dots & -1, & b_n \end{vmatrix}; \quad B_n = \begin{vmatrix} b_1, & a_2, & 0, & 0, & \dots & 0, & 0 \\ -1, & b_2, & a_3, & 0, & \dots & 0, & 0 \\ 0, & -1, & b_3, & a_4 & \dots & 0, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & 0, & 0 & \dots & -1, & b_n \end{vmatrix}.$$

Różnica dwu przybliżeń kolejnych wyraża się wzorem:

$$\frac{A_{n+1}}{B_{n+1}} - \frac{A_n}{B_n} = (-1)^n \frac{a_1 a_2 \dots a_{n+1}}{B_n B_{n+1}}.$$

Różnica dwu przybliżeń rzędu m -tego i n -tego ($m > n$) jest:

$$\frac{A_m}{B_m} - \frac{A_n}{B_n} = (-1)^n \frac{q a_1 a_2 \dots a_{n+1}}{B_m B_n},$$

gdzie q jest mianownikiem ułamka

$$\frac{p}{q} = a_{n+1} + \frac{a_{n+2}}{b_{n+2}} + \frac{a_{n+3}}{b_{n+3}} + \dots + \frac{a_m}{b_m}.$$

Przybliżenie można zawsze wyrazić wzorem:

$$\frac{A_n}{B_n} = \frac{a_1}{B_1} - \frac{a_1 a_2}{B_1 B_2} + \frac{a_1 a_2 a_3}{B_2 B_3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{B_{n-1} B_n}.$$

Jeżeli wszystkie ilości a i b są dodatnie, to różnice pomiędzy kolejnymi przybliżeniami tworzą szereg o wyrazach malejących i są naprzemian dodatnie i ujemne.

Jeżeli ilości a i b są dodatnie, to przybliżenia o skażnikach parzystych tworzą szereg rosnący, przybliżenia o skażnikach nieparzystych tworzą szereg malejący.

Jeżeli ilości a i b są dodatnie, to każde przybliżenie zawiera się pomiędzy dwoma następującemi po sobie przybliżeniami o skażnikach mniejszych.

Przybliżenia ułamków ciągłych, mających wszystkie liczniki cząstkowe równe 1, a za mianowniki cząstkowe liczby całkowite dodatnie, są ułamkami nieprzywiedlonymi.

Przybliżenia ułamka ciągłego

$$\frac{a_1}{b_1} - \frac{a_2}{b_2} - \frac{a_3}{b_3} - \dots$$

gdzie ilości a i b są wszystkie dodatnie i czynią zadość związkowi $a_r \geq b_r + 1$, są wszystkie dodatnie, mniejsze od 1 i rosnące.

Jeżeli $b_r = a_r + 1$, to

$$\frac{A_n}{B_n} = \frac{a_1 + a_1 a_2 + \dots + a_1 a_2 \dots a_n}{1 + a_1 + a_1 a_2 + \dots + a_1 a_2 \dots a_n}.$$

Jakiegokolwiek przybliżenie ułamka ciągłego, którego wyrazy są liczbami całkowitemi, zbliża się do wartości ułamka ciągłego więcej niż jakiegokolwiek inny ułamek o wyrazach prostszych (Euler, Introductio § 382).

Jeżeli dla $n = \infty$ istnieje granica ułamka $\frac{A_n}{B_n}$, to mówimy, że ułamek ciągły jest zbieżny.

Jeżeli liczniki cząstkowe a są wszystkie dodatnie, mianowniki zaś b są jednego znaku, to ułamek ciągły jest zbieżny wtedy, i tylko wtedy, gdy przynajmniej jeden z dwu szeregów

$$b_2 \frac{a_1}{a_2} + b_4 \frac{a_1 a_3}{a_2 a_4} + b_5 \frac{a_1 a_3 a_5}{a_2 a_4 a_6} + \dots$$

$$b_3 \frac{a_2}{a_3} + b_5 \frac{a_2 a_4}{a_3 a_5} + b_7 \frac{a_2 a_4 a_6}{a_3 a_5 a_7} + \dots$$

jest rozbieżny (kryterium Seidela, Habilitationsschrift, Monachium, 1846 i Sterna, Crelle, XXXVII); tenże ułamek jest nieoznaczony, jeżeli oba te szeregi są zbieżne.

Ułamek ciągły o elementach dodatnich jest zbieżny, jeżeli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1} b_n}{a_{n+1}} > 0,$$

lub — gdy kładąc

$$\alpha_{n+1} = \frac{b_{n+1} b_n}{a_{n+1}}$$

— otrzymujemy szereg

$$\frac{\alpha_{n+1}}{1 + \alpha_{n+1}} + \frac{\alpha_{n+2}}{1 + \alpha_{n+2}} + \dots$$

rozbieżny (Novi, Algebra,).

Ułamek ciągly nieograniczony, którego elementy są liczbami całkowitemi i dodatnimi, czyniącemi zadość warunkowi $b_n \geq a_n$, ma wartość niewymierną mniejszą od 1.

Ułamek ciągly

$$\frac{a_1}{b_1} - \frac{a_2}{b_2} - \dots$$

gdzie ilości a i b są dodatnie, jest zbieżny, jeżeli $b_r \geq a_r + 1$.

Ułamek ciągly

$$\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2} - \dots,$$

gdzie ilości h są dodatnie, jest zbieżny, jeżeli, począwszy od pewnej wartości skażnika n , jest zawsze $h_n \geq 2$.

Ułamek ciągly nazywa się peryodycznym, jeżeli ułamki cząstkowe powtarzają się w nim w tym samym porządku.

Każdy ułamek ciągly peryodyczny, mający liczniki cząstkowe równe 1, za mianowniki zaś cząstkowe, liczby całkowite, jest pierwiastkiem równania stopnia 2-go, którego drugi pierwiastek jest ułamkiem ciąglym peryodycznym o tym samym peryodzie, napisanym w porządku odwrotnym (Euler, Lagrange).

Dla prostoty oznaczać będziemy ułamek ciągly, którego uławkami cząstkowymi są $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots$, za pomocą sym-

bolu: $\left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots \right)$.

Mamy wtedy wzory:

$$\sqrt{a^2 + b} = a + \left(\frac{b}{2a}, \frac{b}{2a}, \dots \right),$$

$$\left(\frac{1}{1}, \frac{1^2}{1}, \frac{2^2}{1}, \frac{3^2}{1}, \dots \right) = \log 2,$$

$$\left(\frac{1}{1}, -\frac{x}{1}, \frac{x}{2}, -\frac{x}{3}, \frac{x}{2}, -\frac{x}{5}, \frac{x}{2}, \dots \right) = e^x,$$

$$\left(\frac{x}{1}, \frac{\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} x}{1}, \frac{\frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 3} x}{1}, \frac{\frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 4} x}{1}, \frac{\frac{2 \cdot 2}{4 \cdot 5} x}{1}, \dots \right) = \log (1 + x),$$

$$\left(\frac{x}{1}, -\frac{x^2}{3}, -\frac{x^2}{5}, -\frac{x^2}{7}, \dots \right) = \operatorname{tg} x$$

$$\left(\frac{x}{1}, \frac{x^2}{3}, \frac{x^3}{5}, \frac{x^2}{7}, \dots \right) = \operatorname{tg} h x,$$

$$\left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \frac{1}{3}, -\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \frac{1}{5}, -\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \frac{1}{7}, \dots \right) = 1$$

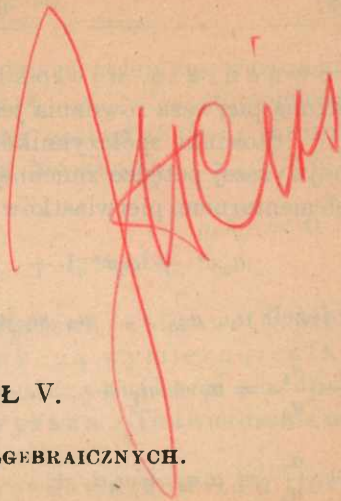
Pierwiastkami równania $x^2 + ax = b$ są:

$$x_1 = \left(\frac{b}{a}, \frac{b}{a}, \dots \right); x_2 = -a + \left(\frac{b}{a}, \frac{b}{a}, \dots \right).$$

Za twórcę teorii ułamków ciągłych można uważać Eulera (Comm. Petrop. IX, XI, Novi Comm. Petr. IX, XI, Introductio etc.). Potem zajmowali się nimi: Lagrange (Mém. de Berl. 1769—1770); Legendre, Théorie des nombres; Moebius (Crelle VI), Gauss (Werke, III); Wroński (Introd. à la phil. des math. 1811), Stern (Crelle X, XI, XXXVII), Heine (Kugelfunctionen). Większe szczegóły i wiadomości historyczne znaleźć można u Günthera (Grunert's Archiv. LIV, Math. Ann. VII; Beiträge zur Geschichte der Kettenbrüche, Weissenburg 1872); Darstellung der Näherungswerthe von Ket-

tenbr., Erlangen 1873). Przedstawienie geometryczne ułamków ciągłych podał Sylvester (p. Novi, Algebra, gdzie teoria ta traktowana jest szczegółowo i jasno). Uogólnienie ułamków ciągłych podali: Jacobi (Crelle LXIX), Fürstenau (Progr. Wiesbaden 1872), Günther (Grunerts Archiv, LVII), Pincherle (Acc. Bolog).

O ułamkach wstępnych patrz pracę Günthera w „Zeitschrift“ Schlömilcha, XXI.



ROZDZIAŁ V.

TEORIA RÓWNAŃ ALGEBRAICZNYCH.

§ 1.

Wiadomości ogólne.

Jeżeli przyrównamy do zera wielomian ze zmienną x , t. j. funkcję wymierną całkowitą zmiennej x , będziemy mieli równanie algebraiczne $f(x)=0$. Stopień wielomianu nazywa się stopniem równania.

Nazywamy pierwiastkiem równania liczbę, która podstawiona zamiast x , zamienia równanie na tożsamość.

Każde równanie o współczynnikach rzeczywistych lub zespolonych ma zawsze pierwiastek (twierdzenie d'Alemberta) i ma tyle pierwiastków rzeczywistych lub zespolonych, ile wynosi jego stopień.

Wskazówki historyczne co do tego twierdzenia znaleźć można w studyum G. Loria, Il teorema fondamentale della teoria delle equ. alg. (Rivista di matem. I).

Jeżeli równanie ma współczynniki rzeczywiste i jeżeli $\alpha + i\beta$ jest jego pierwiastkiem, to będzie nim także $\alpha - i\beta$.

Jeżeli równanie ma r pierwiastków równych sobie i równych a , liczba a nazywa się pierwiastkiem wielokrotnym

równania o wielokrotności r . W tym przypadku strona pierwsza równania jest podzielna przez $(x - a)^r$.

Stosunki współczynników równania do współczynnika przy najwyższej potędze zmiennej x , są funkcjami symetrycznymi elementarnymi pierwiastków równania; t. j. jeżeli mamy równanie

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

i jeżeli $a_1, a_2, \dots, a_n$ są jego pierwiastkami, będzie:

$$-\frac{a_1}{a_0} = a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

$$+\frac{a_2}{a_0} = a_1 a_2 + a_1 a_3 + \dots + a_1 a_n + a_2 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n,$$

$$\dots$$

$$(-1)^n \frac{a_n}{a_0} = a_1 a_2 \dots a_n.$$

Jeżeli przez $s_1, s_2, \dots$ oznaczymy sumy pierwszych, drugich i t. d. potęg pierwiastków, to funkcje symetryczne s można wyrazić przez współczynniki równania (wzory Newtona lub Girarda), a mianowicie:

$$a_0 s_1 + a_1 = 0,$$

$$a_0 s_2 + a_1 s_1 + 2a_2 = 0,$$

$$a_0 s_3 + a_1 s_2 + a_2 s_1 + 3a_3 = 0,$$

$$\dots$$

$$a_0 s_n + a_1 s_{n-1} + \dots + n a_n = 0,$$

$$a_0 s_{n+k} + a_1 s_{n+k-1} + \dots + a_n s_k = 0; \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Funkcje symetryczne zupełne lub funkcje alef Wronskiego są to funkcje, które otrzymać można, podnosząc do potęgi 1-ej, 2-giej, 3-ej $\dots$ i t. d. sumę pierwiastków $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ (według wzoru na potęgę wielomianu) i zastępując w rozwinięciu wszystkie współczynniki jednościami.

Jeżeli funkcyje alef, odpowiadające kolejnym wartościom $n=1, n=2 \dots$ oznaczymy przez $A_1, A_2, \dots$, to pomiędzy temi ilościami A a współczynnikami zachodzić będą związki następujące, analogiczne do wzorów Newtona:

$$a_i A_i + a_1 A_{i-1} + a_2 A_{i-2} + \dots + a_i A_0 = 0. \\ (i = 1, 2 \dots, A_0 = 1)$$

Każda funkcyja symetryczna całkowita pierwiastków równania jest funkcyą wymierną całkowitą stosunków pomiędzy współczynnikami a a współczynnikiem a_0 pierwszego wyrazu. To twierdzenie odpowiada następującemu:

Każda funkcyja symetryczna całkowita n ilości jest funkcyą wymierną całkowitą funkcyj symetrycznych elementarnych tych n ilości.

Co do sposobów przedstawienia funkcyj symetrycznych przez funkcyje elementarne, patrz Salmon, Algèbre supérieure, wyd. francuskie, str. 50), por. Dickstein, Pojęcia i metody matematyki, str. 210 i dalsze.

Rozwiązawszy powyższe wzory względem ilości a lub względem ilości s otrzymujemy wzór Waringa:

$$= \sum (-1)^{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n - 1)!}{\lambda_1! \lambda_2! \dots \lambda_n!} \left(\frac{a_1}{a_i} \right)^{\lambda_1} \left(\frac{a_2}{a_i} \right)^{\lambda_2} \dots \left(\frac{a_n}{a_i} \right)^{\lambda_n}$$

gdzie Σ rozciąga się na wszystkie wartości całkowite dodatnie wykładników λ , czyniące zadość warunkowi:

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots + n\lambda_n = i.$$

Nadto:

$$\frac{a_i}{a_i} = \sum \frac{(-1)^{\lambda_1 + \dots + \lambda_i}}{1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \dots i^{\lambda_i}} \frac{1}{\lambda_1! \lambda_2! \dots \lambda_i!} s_1^{\lambda_1} s_2^{\lambda_2} \dots s_i^{\lambda_i},$$

gdzie $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots + i\lambda_i = i$.

Analogicznie otrzymać można wzór Wronskiego na wyrażenie funkcyi alef, a mianowicie:

$$= \sum (-1)^{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)!}{\lambda_1! \lambda_2! \dots \lambda_n!} \left(\frac{a_1}{a_i} \right)^{\lambda_1} \left(\frac{a_2}{a_i} \right)^{\lambda_2} \dots \left(\frac{a_n}{a_i} \right)^{\lambda_n}, \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots + n\lambda_n = i.$$

Jeśli we wzorach Newtona zamiast $a_0, a_1 \dots a_n$ weźmiemy odpowiednio $a_n, a_{n-1}, \dots a_0$, a skąźniki przy ilościach s zamienimy na ujemne, otrzymamy sumy jednakowych potęg odwrotności pierwiastków.

§ 2.

Przekształcanie równań.

Położwszy w równaniu $f(x) = 0$, $y + \varepsilon$ zamiast x , otrzymamy równanie $F(y) = 0$, którego pierwiastki są o ε mniejsze od odpowiednich pierwiastków równania $f = 0$.

Spółczynniki funkeyi F są postaci:

$$\frac{1}{r!} f^{(r)}(\varepsilon).$$

Jeżeli położymy $na_0\varepsilon + a_1 = 0$, to ε wyznaczymy w ten sposób, aby równanie ze zmienną y nie miało wyrazu drugiego (t. j. z potęgi y^{n-1}).

Aby otrzymać równanie, którego pierwiastki są odwrotnościami pierwiastków równania danego, trzeba $a_0, a_1 \dots, a_n$ zastąpić odpowiednio przez $a_n, a_{n-1} \dots a_0$.

Przekształcenie Tschirnhausena. Niechaj będzie równanie

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0;$$

położmy:

$$y = p_0 + p_1 x + \dots + p_m x^m \quad (m < n),$$

następnie rozwińmy kolejne potęgi ilości y , a w rozwinięciu ich obniżmy ich stopień względem x poniżej n przy pomocy równania danego. Otrzymamy tym sposobem:

$$y^2 = y'_0 + p'_1 x + \dots$$

$$y^3 = p''_0 + p''_1 x + \dots$$

$$\dots$$

Mamy w ten sposób n równań liniowych względem $x, x^2, \dots, x^{n-1}$. Rugując te ilości, otrzymamy równanie:

$$y^n + q_1 y^{n-1} + \dots + q_n = 0.$$

którego współczynniki q będą funkcjami wymiernymi ilości p i a . Za pomocą tegoż procesu eliminacyi można wyrazić x wymiennie przy pomocy y , mamy zatem rezultat następujący: Pierwiastki równania ze zmienną x i pierwiastki równania (tego samego stopnia) ze zmienną y , wyrażają się wymiennie pierwsze przez drugie, i odwrotnie. Przekształcenie to nazywa się przekształceniem *Tschirnhausena*.

Można, korzystając z dowolności współczynników p , sprawić, by znikwały niektóre ze współczynników q . Gdybyśmy wszakże chcieli, aby równanie ze zmienną y było dwumieniem, to równania, jakie należałoby rozwiązać celem wyznaczenia współczynników p , nie dałyby się w ogóle rozwiązać algebraicznie. Na tem przekształceniu oparte są rozważania *Jerrarda* i *Bringa* (patrz *Klein*, *Icosaeder*, str. 143).

Równanie, którego pierwiastkami są kwadraty różnic pierwiastków równania danego, t. j. $(a_i - a_j)^2$, nazywa się równaniem kwadratów różnic pierwiastków; jest ono stopnia $\frac{n(n-1)}{2}$. Współczynniki jego są funkcjami symetrycznymi pierwiastków równania danego, a więc dają się wyrazić wymiennie przez współczynniki tegoż. Przy pomocy metody *Lagrange'a* znajdujemy te współczynniki sposobem następującym: Niechaj s_i oznacza sumę i -tych potęg pierwiastków równania danego, s'_i — sumę takichże potęg pierwiastków równania przekształconego; będzie wtedy:

$$2 s'_i = \sum_r (-1)^r \binom{2i}{r} s_r s_{2i-r}.$$

$$(r = 0, 1, 2 \dots 2i)$$

Znalazłszy s'_i , wyznaczymy przy pomocy wzorów *Newtona* współczynniki szukane.

§ 3.

Obniżenie stopnia równania. Równanie odwrotne.

Za pomocą podstawienia, wykonanego na zmiennej x , można rozwiązanie równania danego sprowadzić niekiedy do rozwiązania równania stopnia niższego; nazywa się to obniżeniem stopnia równania.

Równanie nazywa się odwrotnem, jeżeli jego pierwiastki dają się uporządkować w pary typu $a, \frac{1}{a}$.

Spółczynniki równania odwrotnego, równo oddalone od wyrazów skrajnych, są równe (i jednego znaku).

Jeżeli równanie odwrotne jest stopnia nieparzystego, to jednym z jego pierwiastków jest $x = -1$.

Podzieliwszy pierwszą stronę takiego równania przez $x+1$, sprowadzamy je do równania odwrotnego stopnia parzystego.

W równaniu odwrotnem stopnia $2n$ dzielimy stronę pierwszą przez x^n , potem kładziemy $x + \frac{1}{x} = y$, i dochodzimy tym sposobem do równania stopnia n -tego ze zmienną y . W tem przekształceniu wyrażamy przez y ilości

$$x^r + \frac{1}{x^r} = X_r,$$

obliczamy je za pomocą wzorów zwrotnych

$$X_{r+1} = y X_r - X_{r-1}.$$

Historia teorii równań jest w swych początkach historią samej algebry. Pierwsze próby rozwiązania równań stopnia 3-go znajdujemy u Fibonacciego (Leonardo Pisano, Liber Abaci, 1202, 1227); po tem rozwiązanie ich istotne znalazł Scipione del Fer-

ro w r. 1545 (jak o tem mówi Cardano, De arte magna, 1545, Rozdz. I), Równaniem stopnia 3-go zajmowali się następnie Cardano (l. c.) i Tartaglia (Wenecya 1546). Ludwik Ferrari znalazł rozwiązanie algebraiczne równań stopnia 4-go (wspomina o tem Cardano (l. c. Rozdz. XXXIX).

Listę zupełną wszystkich dzieł dawniejszych i nowszych o teorii równań znajdujemy na końcu cennej książki Matthiessena (Grundzüge der Algebra der litt. Gleichungen, Lipsk, 1896); tu wymienimy tylko najważniejsze w porządku chronologicznym: Vieta (Lugd. Batav. 1646), Cartesius (Leyden, 1637, Lugd. Bat. z komentarzem Schootena), Delahire (Paryż 1679), Tschirnhausen (Acta Erud. Lipsk II, 1683), Halley (Phil. Trans. 1687). Roberval (Mém. de Paris VI, 1693), Rolle (Algebra, Paryż 1690), Mém. de Paris 1708, 1709, 1711), Nicole (tamże, 1738, 1741, 1743), Euler (Comm. Petr. 1739, Novi Comm. Petr. IX, XIV, Mém. de Berl. 1764 etc.), Bezout (Mém. de Paris 1762, 1764, 1765, 1768, Théorie des équât. Paryż 1779), Waring (Miscell. analyt. Meditat. alg., Cantabrigiae 1762—1770), Lagrange (Traité de la résolut. des équ., Paryż 1798, Mém. de Berlin od 1768—1773), Vandermonde (Mém. de Paris, 1773—1774), Ruffini (Teoria generale delle equaz, Bologna 1798, Mem. Soc. Ital 1803—1805, Mem. Ist. Nazionale 1806 i t. d.), Budan (Paryż 1807), Wronski (1827, 1847), Fourier (Paryż 1831), Gauss, (Auflösung der binom. Gleichung. Gött. Abh. 1849), Abel (Oeuvres, II), Galois (Journ. de Liouville, XI, 1846), Cauchy (Sur la résol. des équ. numériques etc., Paryż 1829. Comptes rendus 1836—1840 i t. d.), Sturm (Sur la résolution des équ. numer, Paryż 1835). Do tego trzeba dołączyć wszystkie prace z teorii niezmienników, o której mówimy w rozdziale XII.

Specyalne dzieła, odnoszące się do teorii równań, są: cytowane wyżej dzieło Matthiessena, dalej Petersena (Kopenhaga, 1878, przekłady włoski i francuski), Todhuntera; zaliczyć tu należy ogólne dzieła, obejmujące algebrę wyższą, a mianowicie: Serret, Bertrand, Cesàro, Capelli, Weber. Netto, W języku polskm mamy Algebrę wyższą Wł. Zajączkowskiego (Lwów 1884), oraz „Rozwiązywanie równań liczebnych“ J. Sokołowskiego (Warszawa, 1884).

§ 3.

Wypadkowe lub rugowniki; wyróżniki.

Niechaj będą dwa równania:

$$\varphi = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m = 0,$$

$$\psi = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n = 0.$$

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby one miały przynajmniej jeden pierwiastek wspólny, jest znikanie funkcji wymiernej całkowitej spółczynników, którą nazywamy wypadkową lub rugownikiem dwu równań danych.

Wypadkowa jest stopnia n -tego względem spółczynników funkcji φ , stopnia zaś m -tego względem spółczynników funkcji ψ .

Wypadkowej można dać postać wyznacznika rzędu $n + m$:

$$R = \begin{vmatrix} a_0, & a_1, & a_2 & . & . & . & . & . \\ 0, & a_0, & a_1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ b_0, & b_1, & b_2 & . & . & . & . & . \\ 0, & b_0, & b_1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \end{vmatrix}.$$

Do takiej postaci dochodzimy metodą Eulera lub metodą dialityczną Sylwestera.

Za pomocą metody Bezouta dochodzi się do wypadkowej w postaci wyznacznika rzędu n -tego, gdzie n jest wyższy ze stopni dwu równań danych.

Jeżeli położymy dla krótkości

$$(i, j) = a_i b_j - a_j b_i,$$

to w przypadku $m = n$, otrzymujemy:

$$B = \begin{vmatrix} (10), (20), & (30), & \dots, & (n0) \\ (20), (30) + (21), (40) + (31), & \dots, & (n1) \\ (30), (40 + 31), (50) + (41) + (32), \dots, & (n2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (n0), & (n1), & (n2), & \dots, & (n, n-1) \end{vmatrix}$$

Jeżeli $m < n$, to pierwsze m wierszy pozostają bez zmiany, pozostałe zaś $n - m$ tworzymy przy pomocy współczynników równania stopnia niższego sposobem następującym:

$$\begin{array}{ccccccc} a_0, & a_1, & a_2, & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & a_0, & a_1, & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & a_0, & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Gdy „charakterystyką” wyznacznika R jest $m + n - k$, t. j. gdy wszystkie minory rzędu wyższego niż $m + n - k$ są zerami, minory zaś rzędu $m + n - k$ nie są wszystkie zerami, wtedy równania mają k pierwiastków wspólnych.

Jeżeli $R = 0$, to dopełnienia algebraiczne elementów któregośkolwiek wiersza, o ile nie są zerami, są proporcjonalne do potęg kolejnych tej samej zmiennej.

Warunki konieczne i dostateczne na to, by równania miały p pierwiastków wspólnych wyrażamy w ten sposób: macierz wyznacznika B ma charakterystykę $n - p$. (Twierdzenie Darboux’a).

Nazywamy wyróżnikiem równania danego funkcję wymierną i całkowitą jego współczynników, która przyrównana

do zera, wyraża warunek konieczny i dostateczny na to, aby równanie miało przynajmniej dwa pierwiastki równe.

Kładąc

$$s_p = \sigma_1^p + \sigma_2^p + \dots + \sigma_n^p,$$

gdzie σ są pierwiastki równania, otrzymujemy wyrażnik w postaci

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n-1} \end{vmatrix},$$

gdzie ilości s , jak wiadomo, wyrazić można za pomocą współczynników równania. W funkcyi pierwiastków wyróżnik przedstawia się tak:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_n \\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_1^{n-1} & \sigma_2^{n-1} & \dots & \sigma_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Wyróżnik jest funkcją wymierną całkowitą stopnia $2n-2$ współczynników równania stopnia n -tego.

W funkcyi współczynników wyróżnik wyraża się tak:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_n \\ 0 & 0 & \dots & a_0 & a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & (n-1)a_0 & (n-2)a_1 & \dots & a_n \\ 0 & na_0 & (n-1)a_1 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Iloczyn wszystkich sum $a_i + a_j$ zwykle nazywa się *geminantem* równania. Geminant wyraża się wymiernie przez współczynniki równania. Przyrównany do zera wyraża on warunek na to, aby równanie miało dwa pierwiastki równe i znaku przeciwnego.

Inne własności wypadkowych lub rugowników i wyróżników podajemy w rozdziale XII-ym o niezmiennikach.

Wypadkową otrzymali po raz pierwszy Euler, Bezout i Lagrange. Jacobi zastosował w tym celu wyznaczniki. Listę prac, odnoszących się do tego przedmiotu, podaje E. Pascal, „Determinanti“. Pracą klasyczną o rugownikach jest rozprawa Gordana (Math. Ann. III).

Rugowniki i wyróżniki po za równaniami, które spełniają na zasadzie własności niezmienniczej, czynią zadość pewnym równaniom różniczkowym. Równania te znalazł Brioschi (Crelle, LIII). Patrz Faà di Bruno, Crelle XIV i Binäre Formen, Lipsk 1881).

§ 4.

Układy równań liniowych.

Niechaj będzie układ m równań pomiędzy n niewiadomymi:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= y_1, \\ \dots &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= y_n. \end{aligned}$$

Macierz wszystkich współczynników a nazywa się *macierzą układu*. Załóżmy, że wszystkie wyznaczniki rzędu $p+1$, zawarte w tej macierzy są zerami (są zerami tedy i wszystkie wyznaczniki rzędu wyższego), nie są zaś zerami wszystkie wyznaczniki rzędu p . Liczba p nazywa się *charakterystyką macierzy*.

Aby macierz miała charakterystykę p , jest koniecznem i dostatecznem, by miała przynajmniej jeden nierówny zeru wyznacznik A rzędu p -tego i aby były zerami wszystkie wy-

znaczniki rzędu $p+1$, które tworzą się z A przez dopisanie nowego wiersza i nowej kolumny.

Niechaj charakterystyką macierzy układu danego będzie p , i niechaj nierówny zeru wyznacznik A rzędu p -tego, w niej zawarty, będzie:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & . & . & . & . & . & a_{1p} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{p1} & . & . & . & . & . & a_{pp} \end{vmatrix}.$$

Aby równania dane nie były ze sobą sprzecznymi, jest koniecznem i dostatecznem, by były zerami wszystkie wyznaczniki Δ_r .

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} a_{11} & . & . & . & . & . & a_{1p} & y_1 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{p1} & . & . & . & . & . & a_{pp} & y_p \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{r1} & . & . & . & . & . & a_{rp} & y_r \end{vmatrix}.$$

W tym przypadku układ m równań danych sprowadza się do układu p pierwszych z pomiędzy tych równań.

W innej postaci można to twierdzenie wypowiedzieć tak:

Aby równania dane były zgodnemi ze sobą, t. j. aby miały jedno lub więcej rozwiązań wspólnych, jest koniecznem i dostatecznem, by macierz spółczynników i macierz

$$\begin{vmatrix} a_{11} & . & . & . & . & . & a_{1n} & y_1 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & . & . & . & . & . & a_{mn} & y_m \end{vmatrix}$$

miały jedną i tę samą charakterystykę (Capelli).

Dla spółistnienia $n+1$ równań pomiędzy n niewiadomymi potrzeba, by wyznacznik spółczynników i wyrazów znanych był zerem.

Jeżeli mamy $n-1$ równań liniowych pomiędzy n niewiadomymi o macierzy, której charakterystyką jest $n-1$, to wartości niewiadomych są proporcjonalne do minorów rzędu $n-1$, w tej macierzy zawartych.

Nie może być więcej nad n równań liniowych jednorodnych i niezależnych pomiędzy n niewiadomymi.

§ 6.

Rozwiązywanie równań.

Równanie stopnia trzeciego. Równanie

$$x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0,$$

po podstawieniu

$$x = y - \frac{1}{3} a_1,$$

zamienia się na równanie:

$$y^3 + p y + q = 0.$$

Jeżeli:

$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$, to dwa pierwiastki będą urojone sprzężone, jeden zaś rzeczywisty;

$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$, wszystkie pierwiastki są rzeczywiste;

$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$, dwa pierwiastki są równe.

Pierwiastki wyrażają się za pomocą wzoru (który podał Tartaglia):

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Należy tu zauważyć, że każdy z pierwiastków sześciennych ma trzy wartości i że należy tak kombinować wartości jednego pierwiastka z wartościami drugiego, aby ich iloczyn był rzeczywisty i równy $-\frac{p}{3}$.

Wzór powyższy jest niedogodny z tego względu, że daje pierwiastki rzeczywiste równania (w przypadku, gdy wszystkie są rzeczywiste) pod postacią urojoną (t. zw. przypadek nieprzywiedlny). Jest on jeszcze niedogodny i dla tego, że daje często pod postacią niewymierną pierwiastki wymierne, które zresztą, jak to zobaczymy niżej, możemy otrzymać i na innej drodze.

Położmy:

$$-\frac{q}{2} = \varrho \cos \theta, \quad \varrho = \sqrt[3]{-\frac{p^3}{27}}.$$

$$\frac{q^2}{2} = \frac{p^3}{27} = -\varrho^2 \sin^2 \theta,$$

wtedy pierwiastki równania wyrażą się sposobem następującym:

$$y_1 = 2 \varrho^{\frac{1}{3}} \cos \frac{\theta}{3},$$

$$y_2 = 2 \varrho^{\frac{1}{3}} \cos \left(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3} \right),$$

$$y_3 = 2 \varrho^{\frac{1}{3}} \cos \left(\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3} \right),$$

Inne metody rozwiązania równania stopnia trzeciego podali: Lagrange (Oeuvres, VIII), Eisenstein (Crelle, XXVII), Ei-

senlohr (tamże XLII), Clausen (Astron. Nachrichten N. 446), Grunert (Archiv, II str. 446), Reidt (Zeitschrift Schlömilcha. XVII), Cayley (patrz prace Gordana i Clebscha o niezmiennikach), Weichold (Americ. Journal, I) i t. d.

Równanie stopnia 4-go. Jeżeli w równaniu

$$x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0.$$

położymy $x = y - \frac{1}{4} a_1$, otrzymamy:

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0.$$

Rozwiążmy za pomocą wzorów poprzedzających równanie stopnia 3-go (rozwiązujące):

$$z^3 + \frac{p}{2} z^2 + \frac{p^3 - 4r}{16} z - \frac{q^2}{64} = 0$$

i niechaj z_1, z_2, z_3 będą trzy pierwiastki tego równania. Rozpatrzmy wartości $\pm \sqrt{z_1}, \pm \sqrt{z_2}, \pm \sqrt{z_3}$ i nadajmy każdemu z tych pierwiastników znak $+$ lub $-$, tak, aby iloczyn wszystkich trzech pierwiastników był równy $-\frac{q}{8}$. Można skutecznie to czterema różnemi sposobami; jeżeli mianowicie Z_1, Z_2, Z_3 są wartościami pierwiastników, to warunkowi

$$Z_1 Z_2 Z_3 = -\frac{q}{8},$$

możemy oczywiście zadość uczynić, dobierając, prócz powyższej, kombinacye:

$$Z_1, -Z_2, -Z_3; -Z_1, Z_2, -Z_3; -Z_1, -Z_2, Z_3.$$

Czterema pierwiastkami równania danego będą:

$$a_1 = Z_1 + Z_1, Z_3; \quad a_2 = Z_1 - Z_2 - Z_3;$$

$$a_3 = -Z_1 + Z_2 - Z_3; \quad a_4 = -Z_1 - Z_2 + Z_3.$$

Inne metody podali Lagrange (Oeuvres, VIII), Euler (Comm. Petrop. VI), Ampère (Archiv Grunerta, II), Aronhold (Crelle, LII), Eisenstein (tamże XXVII), Hermite (Équations modulaires, Paryż 1859), Matthiessen (Zeitschrift Schlämilcha, VIII), Faà di Bruno (Amer. Journ. III). Rozwiązanie, oparte na teorii niezmienników, znaleźć można w pracach Clebscha i Gordana o niezmiennikach.

Równania stopnia 5-go i 6-go. Równanie stopnia 5-go (ogólne) nie daje się rozwiązać algebraicznie; rozwiązujemy je przy pomocy funkcji eliptycznych. Rozwiązanie to po raz pierwszy podał Hermite.

Równaniem stopnia 5-go zajmowali się: Wronski (Canon de logarithmes 1827. Wydanie polskie, Warszawa 1890); Jacobi (Crelle, III, XIII); Cayley (Phil. Trans. CLI), Galois (Journ. de Liouv. XI, str. 412), Betti (Ann. di Tortolini 1853), Hermite (Compt. rend. 1858, t. XLVI), Brioschi (Annali di Tortolini 1858), Kronecker (Compt. rendus 1858, t. XLVI, Berlin. Monatsb. 1861, Crelle LIX), Joubert (Compt. rend. 1859, t. XLVIII), Hermite (tamże, 1866), Roberts (Annali di mat. (2), I), Brioschi (Comp. rend 1866, Ann. di mat. (2), I, 1867, w dodatku do przekładu dzieła Cayleya o funkcjach eliptycznych, Medyolan 1880, Comptes rendus LXIII, LXXIII, LXXX, Acc. Napol. 1866), Klein (Ikosaeder, Lipsk 1884). W ostatniem dziele znajduje się rys historyczny zagadnienia o rozwiązaniu równania stopnia 5-go.

Równanie stopnia 6-go nie daje się rozwiązać i za pomocą funkcji eliptycznych. Potrzebne są tu funkcje hypereliptyczne.

Do tego przedmiotu odnoszą się prace: Maschke-Brioschi (Acc. Lincei, 1888), Brioschi (Acta math. XII, 1888). Dawniejsze rozważania są: Brilla (Math. Ann. XX), Cole'go (Amer. Journ. VIII, 1866).

O równaniach stopnia 7-go i 8-go istnieją badania Kleina, Nöthera i Gordana (Math. Ann. XV, XX).

§ 3.

Równania dwumienne.

Każde równanie typu

$$x^m - A = 0,$$

t. j. równanie dwumienne można za pomocą łatwego przekształcenia sprowadzić do postaci

$$y^n - 1 = 0.$$

Jeżeli a jest pierwiastkiem równania dwumennego tego typu, to i a^m (gdzie m jest liczbą całkowitą jakąkolwiek), będzie pierwiastkiem tego równania.

Jeżeli n jest liczbą pierwszą, a zaś różnym od jedności pierwiastkiem równania $y^n - 1 = 0$, to $a, a^2, a^3 \dots a^n$ są n pierwiastkami tego równania; jeżeli n nie jest liczbą pierwszą, to pierwiastek a , mający tę własność, nazywa się pierwiastkiem pierwotnym. Istnieje $\varphi(n)$ pierwiastków pierwotnych; $\varphi(n)$ jest liczbą liczb pierwszych mniejszych od n i względem n pierwszych.

Rozwiązanie równania $x^n - 1 = 0$, gdzie n jest iloczynem różnych liczb pierwszych zależy od rozwiązania tejże postaci równań, w których wykładniki ilości x są właśnie temi liczbami pierwszymi.

Jeżeli n jest liczbą pierwszą, to pierwiastki równania dają się przedstawić za pomocą wzoru trygonometrycznego:

$$x = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n},$$

gdzie k przyjmuje wartości $0, 1, 2 \dots n-1$.

Pierwiastki równania dwumienne, przedstawione geometrycznie, odpowiadają punktom podziału podziału okręgu na n części równych i dlatego to równanie dwumienne $x^n - 1 = 0$ nazywamy też równaniem podziału koła. Wykreśliwszy geometrycznie pierwiastki, uskuteczniamy podział okręgu koła.

Równanie

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1 = 0,$$

gdzie n jest liczbą pierwszą, jest równaniem nieprzywiedlnem, t. j. nie posiada czynników wymiernych.

Jeżeli n jest liczbą pierwszą, to dla rozwiązania równania $x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1 = 0$ rozkładamy liczbę $n-1$ na czynniki pierwsze $p_1, p_2, \dots$ i rozwiązujemy równania

$$z^{p_1} - 1 = 0, \quad z^{p_2} - 1 = 0, \dots$$

Równanie dwumienne daje się rozwiązać algebraicznie.

Jeżeli $n-1$ jest potęgą liczby 2, to równanie dwumienne daje się rozwiązać za pomocą samych równań stopnia drugiego. W tym przypadku podział okręgu można uskuteczyć za pomocą linijki i cyrkla.

Równanie $x^3 - 1 = 0$ ma pierwiastki:

$$1, \quad -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, \quad -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

Równanie $x^4 - 1 = 0$ ma pierwiastki:

$$1, \quad -1, \quad i, \quad -i.$$

Równanie $x^5 - 1 = 0$ ma pierwiastki:

$$1, \quad \frac{1}{4} \left(-1 - \sqrt{5} + i \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \right),$$

$$\frac{1}{4} \left(-1 + \sqrt{5} - i \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \right),$$

$$\frac{1}{4} \left(-1 + \sqrt{5} + i \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \right),$$

$$\frac{1}{4} \left(-1 - \sqrt{5} - i \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \right).$$

Wartości pierwiastków w przypadku $n=17$ i $n=19$ podał Gauss (Werke I). Więcej szczegółów o tym przedmiocie znaleźć można w dziele Bachmanna „Die Lehre von der Kreistheilung“ Lipsk 1872; w tym dziele znajdujemy też konstrukcje geometryczne, Konstrukcje dla $n=17$ podali: v. Staudt (Crelle XXIV) i Schröter (tamże LXXV). Dla $n=257$ część analityczną rozwinął Richelot (Crelle IX), geometryczną E. Pascal (Acc. Napol. 1887). Inne przypadki patrz: E. Pascal (Giorn. di Batt. XXV), Amaldi (tamże XXX).

§ 8.

Pierwiastki wielokrotne równania.

Aby liczba a była pierwiastkiem r -krotnym równania $f(x)=0$, jest koniecznem i dostatecznem, by a było pierwiastkiem samego równania oraz $r-1$ pierwszych jego równań pochodnych (patrz Rozdz. VI).

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby równanie nie miało pierwiastków wielokrotnych, jest, aby największy wspólny

dzielnik funkcyi $f(x)$ i jej pierwszej pochodnej był ilością stałą.

Jeżeli podzielimy funkcję $f(x)$ przez największy wspólny dzielnik funkcyi danej f i jej pochodnej f' , otrzymamy funkcję, której pierwiastki są równo co do wartości pierwiastkom funkcyi f , lecz są wszystkie pojedyncze.

Oznaczmy przez D_1 największy wspólny dzielnik funkcyi f i jej pochodnej f' , przez D_2 -- największy wspólny dzielnik funkcyi D_1 i jej pochodnej D_1' ; będzie:

$D_2 = \text{stała}$ jest warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby funkcyja f nie miała pierwiastków trójkrotnych, i t. d.

Jeżeli utworzymy ilorazy

$$\frac{f}{D_1} = \varphi_1, \quad \frac{D_1}{D_2} = \varphi_2, \quad \frac{D_2}{D_3} = \varphi_3, \dots$$

to równania

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = 0, \quad \frac{\varphi_2}{\varphi_3} = 0, \dots$$

będą miały odpowiednio jako pierwiastki pojedyncze: wszystkie pierwiastki pojedyncze danego, wszystkie pierwiastki podwójne, wszystkie pierwiastki potrójne i t. d.

§ 9.

Pierwiastki rzeczywiste i zespolone równania.

Pomiędzy kolejnymi pierwiastkami rzeczywistymi równania $f=0$ zawiera się nieparzysta liczba pierwiastków równania pochodnego $f'=0$. (Twierdzenie Rollego.)

Pomiędzy dwoma kolejnymi pierwiastkami równania $f'=0$ nie może się zawierać więcej nad jeden pierwiastek równania $f=0$.

Jeżeli wszystkie pierwiastki równania $f=0$ są rzeczywiste, to toż samo zachodzi i dla $f'=0$.

Jeżeli wyrazy równania są uporządkowane według ich stopnia, to mówimy, że dwa wyrazy następujące po sobie dają zmianę lub następstwo znaków, stosownie] do tego, czy są znaku tego samego czy przeciwnego.

W każdym równaniu $f(x)=0$ liczba pierwiastków rzeczywistych dodatnich nie przewyższa liczby zmian znaków funkcji $f(x)$, liczba zaś pierwiastków ujemnych nie przewyższa liczby zmian znaku funkcji $f(-x)$. (Twierdzenie Descartes'a.)

Nadmiar liczby zmian znaków po nad liczbę pierwiastków dodatnich równania $f(x)=0$ jest zawsze parzysty.

Jeżeli $f(x)$ ma tylko jedną zmianę, to $f(x)=0$ ma tylko jeden pierwiastek dodatni.

Równanie, mające wszystkie pierwiastki rzeczywiste, ma tyle pierwiastków dodatnich, ile ma zmian znaków.

Równanie posiada przynajmniej $2k$ pierwiastków zespolonych, jeżeli brak w nim $2k$ wyrazów kolejnych, lub jeżeli brak ich $2k-1$ pomiędzy wyrazami jednego znaku.

Liczba pierwiastków rzeczywistych równania $f(x)=0$, większych od liczby dodatniej a nie przewyższa liczby zmian, jaki daje dla $x=a$ szeregu wielkości

$$f_1 = a_0 x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \dots + a_{n-1},$$

$$f_2 = a_0 x^{n-2} + a_1 x^{n-3} + \dots + a_{n-2},$$

$$\dots$$

$$f_{n-1} = a_0 x + a_1,$$

$$f_n = a_0,$$

i w każdym przypadku różnica pomiędzy temi dwiema liczbami jest parzysta. (Twierdzenie Laguerre'a.)

Liczba pierwiastków rzeczywistych równania $f(x)=0$ pomiędzy $x=a$ i $x=b$ ($a < b$) nie przewyższa liczby zmian, straconych w szeregu $f, f', f'', f''', \dots$ (kolejnych pochodnych) w przejściu od $x=a$ do $x=b$; w każdym przypadku różnica pomiędzy temi dwiema liczbami jest parzysta. (Twierdzenie Budana.)

Jeżeli podzielimy funkcję f przez jej pierwszą pochodną f' i resztę otrzymaną, po zmianieniu jej znaku, oznaczmy przez f_2 ; następnie podzielimy f' przez f_2 i resztę, po zmianieniu jej znaku, oznaczmy przez f_3 i t. d.; wtedy szereg

$$f, f', f_2, f_3, \dots$$

nazywa się krótko szeregiem Sturma.

Liczba pierwiastków rzeczywistych równania $f(x)=0$ pomiędzy $x=a$ i $x=b$ jest dokładnie równa liczbie zmian znaku, straconych w szeregu Sturma w przejściu od $x=a$ do $x=b$. (Twierdzenie Sturma.)

Jeżeli położymy $a=-\infty$, $b=+\infty$, będziemy mieli liczbę wszystkich pierwiastków rzeczywistych.

Jeżeli $s_0, s_1, s_2, \dots$ oznaczają sumy jednakowych potęg pierwiastków i położymy:

$$\sigma_1 = s_0, \quad \sigma_2 = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix}, \dots$$

to będziemy mieli twierdzenie:

Liczba par pierwiastków urojonych równania $f(x)=0$, pozbawionego pierwiastków wie-

lokrotnych, równa się liczbie zmian znaku w szeregu $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots$.

Warunki konieczne i dostateczne rzeczywistości wszystkich pierwiastków równania algebraicznego o współczynnikach rzeczywistych są:

$$\sigma_2 > 0, \quad \sigma_3 > 0 \quad . \quad . \quad . \quad \sigma_n > 0.$$

§ 10.

Pierwiastki wymierne równania.

Aby liczba całkowita a mogła być pierwiastkiem równania o współczynnikach całkowitych, jest koniecznem i dostatecznem, by ta liczba była dzielnikiem ostatniego współczynnika a_n ; dalej aby, jeżeli p_1 jest ilorazem tego dzielenia, liczbą a dzieliła współczynnik a_{n-2} powiększony o p_2 , gdzie p_2 jest ilorazem poprzedniego dzielenia i t. p.

Każde równanie, w którem współczynnik przy najwyższej potędze x nie jest jednością, nie ma pierwiastków ułamkowych wymiernych.

Jeżeli równanie o współczynnikach wymiernych ma tylko jeden pierwiastek k -krotny, to pierwiastek ten nie może być wymierny.

§ 11.

Przybliżone wyznaczanie pierwiastków rzeczywistych równania.

Granica wyższą pierwiastków rzeczywistych równania nazywamy liczbę większą od każdego z pierwiastków. Analogicznie określamy granicę niższą.

Jeżeli przy $x=a$ wszystkie funkcje $f, f', f'' \dots$ są dodatniemi, to liczba ta jest granicą wyższą pierwiastków równania $f=0$ (Newton).

Celem wyznaczenia granicy wyższej wyznaczamy liczbę całkowitą, bezpośrednio wyższą od pierwiastka równania $f^{(n-1)}=0$; tę wartość podstawiamy w funkcji $f^{(n-2)}$ i, jeżeli rezultat jest ujemny, dodajemy do niego tyle jedności, aby otrzymać liczbę dodatnią. Dalej tak postępując, dochodzimy do liczby całkowitej, przy której wszystkie pochodne są dodatnie.

Inne granice wyższe otrzymujemy za pomocą twierdzeń następujących:

Jeżeli a_t jest wartość bezwzględna spółczynnika ujemnego, mającego największą wartość liczebną, wtedy granica wyższa wyraża się tak:

$$L = 1 - \frac{a_t}{a_0} \quad (\text{Maclaurin}).$$

Jeżeli a_s jest pierwszy spółczynnik ujemny, to granicą wyższą jest:

$$L = 1 + \sqrt[s]{-\frac{a_t}{a_0}} \quad (\text{Lagrange})$$

Jeżeli a_r jest największy z pomiędzy spółczynników, poprzedzających pierwszy spółczynnik ujemny, to granica wyższa jest:

$$L = 1 + \sqrt[s-r]{+\frac{a_t}{a_r}} \quad (\text{Tillot}).$$

Przy pomocy twierdzenia Sturma można rozdzielić pierwiastki, t. j. znaleźć przedziały, wewnątrz których zawiera się jeden tylko pierwiastek rzeczywisty równania.

Niechaj a i b będą dwa krańce, pomiędzy którymi zawiera się jeden pierwiastek rzeczywisty równania; niechaj a będzie wartością, przy której $f(a)$ i $f'(a)$ są jednego znaku.

Jeżeli utworzymy kolejno ilości:

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)},$$

$$a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)}{f'(a_1)},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)},$$

to liczby a_{n+1} będą szybko dążyły do wartości pierwiastka funkcji f , zawartego pomiędzy a i b (Twierdzenie Newtona).

Jeżeli utworzymy kolejno ilości

$$b_{n+1} = \frac{b_n f(a_n) - a_n f(b_n)}{f(a_n) - f(b_n)}, \quad (a_0 = a, \quad b_0 = b),$$

to liczby b_{n+1} będą również dążyły do wartości pierwiastka, zawartego pomiędzy a i b . Jeżeli się zatrzymamy na danym skazniku n , to błąd popełniony będzie mniejszy od $a_n - b_n$.

Co do metod przybliżonego obliczania, opartych na rozważaniach geometrycznych, patrz Catalan, *Mélanges math.* I, str. 79. Metoda Lagrange'a (*Mem. Berl.* 1769, *Oeuvres*, II, III) daje rozwinięcie pierwiastka na ułamek ciągły. Istnieją metody Eulera (*Calcul. diff.* II, 1755. § 234) Wronskiego 1827, 1847 (patrz S. Dickstein, „O metodzie teleologicznej rozwiązywania równań“, *Rozprawy Akad. Krak.* XVIII, XIX), W. Krauze, (*Prace mat.-fiz.* III). Cauchy'ego

(Oeuvres, IV, p. 41—99), Jacobi'ego (Crelle VI, str. 257), Heisa (Sammlung v. Beisp. und Aufgaben aus. der allgem. Arithmetik und Algebra, Kolonia 1882, § 102).

§ 12.

Teorya Galois'a.

Zalóžmy, że istnieje związek pomiędzy pierwiastkami równania $x_1, x_2, \dots, x_n$, lub inaczej, że można utworzyć funkcję wymierną całkowitą pierwiastków, której wartość jest zerem lub ilością znaną. W takim przypadku równanie nazywa się *specyjalnem*; grupa zaś, należąca do funkcji pierwiastków, nazywa się *grupą równania* (patrz wyżej Rozdział II).

Grupa równania ogólnego jest grupą symetryczną.

Równanie nazywa się *nieprzywiedlnem*, jeżeli nie posiada czynników, których spółczynniki wyrażają się wymiernie przez spółczynniki samego równania.

Grupa równania nieprzywiedlnego jest przechodnią, i odwrotnie.

Rząd grupy równania nieprzywiedlnego stopnia n , którego pierwiastki są funkcjami wymiernymi jednego z nich, równa się n , i odwrotnie.

Utwórzmy funkcję

$$\zeta = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$$

o n spółczynnikach nieoznaczonych $a_1, a_2, \dots, a_n$, w której $x_1, x_2, \dots, x_n$ są pierwiastkami równania. Jeżeli zastosujemy do tej funkcji wszystkie r podstawień grupy, otrzymamy r wartości

$$\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_r;$$

równanie $F(\zeta) = (\zeta - \zeta_1)(\zeta - \zeta_2) \dots (\zeta - \zeta_r) = 0$

nazywa się równaniem rozwiązującym Galois'a dla równania danego.

Wszelkie pierwiastki równania $F=0$ są funkcyami wymiernemi jednego z nich; za ich pomocą można wyrazić wszystkie pierwiastki równania danego $f(x)=0$.

W ogólności rozwiązującym nazywamy każde równania, za pomocą pierwiastków którego wyrazić można pierwiastki danego.

Równanie ogólne stopnia n ($n > 4$) można rozwiązać przez rozwiązanie równania rozwiązującego stopnia wyższego niż 2, lecz nie istnieje równanie rozwiązujące stopnia niższego od n i większego od 2. Jeżeli n jest różne od 6, to nie ma równania rozwiązującego stopnia n , różnego od równania danego $f(x)=0$. Jeżeli $n=6$ istnieje równanie rozwiązujące stopnia 6-go. Równanie stopnia 5-go posiada rozwiązujące stopnia 6-go; równania stopnia $n \leq 4$ mają rozwiązujące stopni niższych.

Niechaj G będzie grupą równania; utworzymy szeregi składające G , t. j. zbudujmy szereg podgrup $G, I, I' \dots$, z których każda następująca jest podgrupą charakterystyczną największą poprzedzającej; jeżeli rzędami tych podgrup są $r, \frac{r}{r_1}, \frac{r}{r_1 r_2}, \dots$, to rozwiązanie równania $f=0$ zależeć będzie od równań, których grupy są pojedynczemi i odpowiednio rzędów $r_1, r_2, \dots$.

Równanie ogólne stopnia $n > 4$ nie daje się rozwiązać algebraicznie. (Twierdzenie Ruffini'ego i Abela).

Historję tego twierdzenia czytamy w pracy Burkhardta (Zeitsch. f. Math. und Physik XXXVII, 1892 lub Annali di matem. 1894, przekład Pascala).

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby równanie stopnia $n > 4$ dało się rozwiązać za pomocą pierwiastników (algebraicznie) jest, by czynniki składu grupy były wszystkie liczbami pierwszymi.

Równaniami abelowemi nazywamy takie równania nieprzywiedlne, których każdy pierwiastek daje się wyrazić wymiennie za pomocą innego, a symbole tych funkcyj wymiennych są przemieniami, t. j. jeżeli

$$x_i = R_i(x_1) \quad , \quad x_j = R_j(x_1) ,$$

to będzie:

$$R_i(R_j(x_1)) = R_j(R_i(x_1)) .$$

Równania takie dają się rozwiązać algebraicznie.

Równania typu $\frac{x^n - 1}{x - 1} = 0$, (t. j. równania pochodzą z koła) są równaniami abelowemi

Podstawienia grupy równania abelowego są wzajem przemieniami.

Rozwiązanie równania abelowego nieprzywiedlnego stopnia $n = p^a q^b \dots$, gdzie $p, q \dots$ są liczby pierwsze, sprowadza się do rozwiązania równań abelowych stopni $p^a, q^b, \dots$.

Rozwiązanie równania abelowego nieprzywiedlnego stopnia p^a , gdzie p jest liczbą pierwszą, sprowadza się do rozwiązania równań abelowych, których grupy zawierają tylko podstawienia rzędu p (nie licząc podstawienia 1).

Rozwiązanie równania abelowego nieprzywiedlnego stopnia p^a , którego grupa zawiera tylko podstawienia rzędu p , sprowadza się do rozwiązania a równań abelowych nieprzywiedlnych rzędu p .

Większe szczegóły o niniejszej teorii znaleźć można w Rozdziale II i w traktatach Jordana i Netto.

Biblioteka
matematyczno-fizyczna
⇒ ANTONIEGO WILKA. ⇐

Liczba:

ROZDZIAŁ IV.

RACHUNEK RÓŻNICZKOWY.

§ 1.

Nieskończoności i nieskończoności.

Zmienna, której granicą jest zero, nazywa się nieskończonością lub ilością nieskończenie małą; zmienna, której granicą — nieskończoność — nazywa się nieskończonością lub ilością nieskończenie wielką.

Niechaj α i β będą dwiema nieskończonościami;

jeżeli $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 0$, mówimy, że α jest rzędu wyższego niż β ;

jeżeli $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \infty$, mówimy, że α jest rzędu niższego niż β ;

jeżeli $\lim \frac{\alpha}{\beta} = A$ (skończone), mówimy, że α i β są tego samego rzędu.

Dla nieskończoności utrzymuje się przypadek trzeci, a dwa pierwsze przypadki zmieniają się jeden na drugi.

Jeżeli α jest rzędu wyższego niż β , zaś $\lim \frac{\alpha}{\beta^n}$ jest ilością skończoną, wtedy mówimy, że α jest rzędu n -tego względem β ; n może być liczbą dodatnią jakąkolwiek, całkowitą lub niecałkowitą.

Jeżeli a jest nieskończonością lub nieskończonością, to pozostanie nią, nie zmieniając swego rzędu, i po pomnożeniu lub podzieleniu przez jakąkolwiek ilość skończoną różną od zera.

Suma algebraiczna skończonej liczby nieskończoności jest nieskończonością, której rząd jest równy rządowi nieskończoności rzędu najniższego.

Jeżeli nieskończoność a jest sumą algebraiczną skończonej liczby nieskończoności, t. j. jeżeli

$$a = a_1 + a_2 + \dots + a_m,$$

gdzie a_1 niechaj będzie rzędu najniższego, to można zawsze znaleźć takie otoczenie wartości granicznych tych zmiennych, od których zależą te nieskończoności, że dla każdego punktu tego otoczenia znak ilości a będzie taki sam, jak znak ilości a_1 .

Granica stosunku dwóch nieskończoności nie zmienia się, jeżeli dodamy do nich nieskończoności rzędów odpowiednio wyższych.

Analogiczne twierdzenia istnieją dla nieskończoności, potrzeba tylko wyraz: niższy zastąpić wyrazem wyższy, wyraz najwyższy — wyrazem najniższy.

Jeżeli różnica dwóch nieskończoności dąży do granicy skończonej, to obie są tego samego rzędu i granicą ich stosunku jest jedność.

Mówimy, że szereg nieskończony nieskończoności

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_m, \dots$$

dążą jednostajnie do zera, jeżeli dawszy sobie σ dowolnie małe, możemy znaleźć takie otoczenie wartości zmiennych,

od których te nieskończoności zależą, że dla wszystkich punktów otoczenia wszystkie ilości α są mniejsze od σ .

Jeżeli mamy dwa nieskończone szeregi nieskończoności:

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \dots; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m, \dots$$

gdzie każde β_i jest rzędu wyższego niż α_i , mówimy, że ilości β są jednostajnie rzędu wyższego niż ilości α , jeżeli stosunki

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1}, \frac{\beta_2}{\alpha_2}, \dots, \frac{\beta_m}{\alpha_m}, \dots$$

zbiegają jednostajnie do zera.

Jeżeli suma nieskończoności

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m + \dots$$

dąży do granicy skończonej i jeżeli nieskończoności

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$$

są jednostajnie rzędu wyższego niż ilości α , wtedy suma ilości β dąży do zera i będzie:

$$\lim \sum_1^{\infty} \alpha_i = \lim \sum_1^{\infty} (\alpha_i + \beta_i),$$

t. j. suma ilości α nie zmienia się, jeżeli do każdej nieskończoności α_i dodamy nieskończoność rzędu wyższego β_i .

§ 2.

Teorya pochodnych funkcyj rzeczywistych jednej lub wielu zmiennych rzeczywistych.

Jeżeli y jest funkcją zmiennej x i jeżeli tej zmiennej nadamy przyrost dowolny Δx , wtedy y dozna w ogóle przyrostu, który oznaczmy przez Δy . Granica stosunku $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, w założeniu że istnieje, że jest skończona i niezależna od znaku przyrostu Δx , nazywa się pochodną funkcyi w punkcie x . Jeżeli ta granica istnieje tylko dla Δx dodatniego, nie istnieje zaś dla Δx ujemnego lub odwrotnie, albo też istniejąc w obu przypadkach, nie ma w nich tej samej wartości, wtedy mamy odpowiednio pochodną po prawej stronie i pochodną po lewej stronie punktu x .

Warunki konieczne istnienia pochodnej są: 1) funkcya powinna być ciągła w punkcie; 2) funkcya powinna być skończona w otoczeniu punktu i w samym punkcie.

Jeżeli przyrost Δy zmienia nieskończenie wiele razy znak w jakimkolwiek otoczeniu punktu, wtedy pochodna w tym punkcie albo nie istnieje albo jest zerem.

Przykładem jest funkcya $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$; $f(0) = 0$; funkcya ta w punkcie $x = 0$ nie ma pochodnej; funkcya zaś $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$, $f(0) = 0$, w punkcie $x = 0$ ma pochodną równą zeru.

Co do funkcyj o nie mających pochodnej patrz dzieło E. Pascala „Note critiche di calcolo etc.“ Medyolan 1895, od str. 85 — 128.

Dla funkcyi, nadającej się do przedstawienia geometrycznego, pochodna w punkcie przedstawia styczną trygometryczną kąta,

jaki styczna geometryczna do krzywej tworzy z osią x .

Jeżeli dla $x = \infty$ istnieje granica stosunku $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ i jest stałą dla wszelkiej wartości Δx , to wtedy równa się ona wartości

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{x} \quad (\text{Twierdzenie Cauchy'ego}).$$

Co do tego przedmiotu patrz: Dubois-Reymond, Ann. di mat. IV, Math. Ann. XVI; Stolz Math. Ann. XV; Rouquet, Nouv. Ann. XVI, str. 67; E. Pascal, Notr. critique, etc.

Jeżeli pochodna funkcyi ma granicę dla $x = a$, to funkcyja jest ciągłą dla $x = a$.

Pochodna ilości stałej jest zerem.

Pochodna sumy algebraicznej funkcyj równa się sumie algebraicznej pochodnych funkcyj.

Pochodna iloczynu pewnej liczby czynników jest równa sumie iloczynów pochodnej każdego czynnika przez wszystkie czynniki pozostałe.

Pochodna ilorazu dwu funkcyj równa się ułamkowi, mającemu za licznik różnicę pomiędzy iloczynem pochodnej licznika przez mianownik a iloczynem pochodnej mianownika przez licznik, a za mianownik kwadrat mianownika danego ułamka.

Jeżeli y jest funkcyą zmiennej z , ta zaś jest funkcyą zmiennej x , to pochodna funkcyi y względem x równa się iloczynowi pochodnej funkcyi y względem z , pomnożonej przez pochodną funkcyi z względem x .

Pochodna funkcyi odwrotnej równa się odwrotnej arytmetycznej pochodnej funkcyi prostej.

Jeżeli szereg pochodnych wyrazów szeregu funkcyj jest szeregiem równozbieżnym, wtedy wartość jego jest pochodną szeregu danego.

Pochodną szeregu potęgowego otrzymujemy tworząc szereg pochodnych wyrazów szeregu danego.

Pochodną funkcyj y względem x oznaczamy symbolem $\frac{dy}{dx}$. Zasadniczymi wzorami różniczkowymi są następujące:

$$y = x^m, \quad \frac{dy}{dx} = m x^{m-1},$$

$$y = \sqrt{x}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

$$y = \sin x, \quad \frac{dy}{dx} = \cos x; \quad y = \cos x, \quad \frac{dy}{dx} = -\sin x,$$

$$y = \operatorname{tg} x, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad y = \sec x, \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} x \cdot \sec x,$$

$$y = \operatorname{cotg} x, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}; \quad y = \operatorname{cosec} x, \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{cosec} x,$$

$$y = e^x, \quad \frac{dy}{dx} = e^x,$$

$$y = a^x, \quad \frac{dy}{dx} = a^x \log_e a,$$

$$y = \log_e x, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x},$$

$$y = \log_a x, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \log_a e,$$

$$y = \arcsin x, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = \arccos x, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

y zawarte pomię-

dzy 0 i $\frac{\pi}{2}$.

$$y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2} \quad \left| \begin{array}{l} y \text{ zawarte pomię-} \\ \text{dzy } 0 \text{ i } \frac{\pi}{2}. \end{array} \right.$$

$$y = \operatorname{arct} \operatorname{cotg} x, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1+x^2} \quad \left| \begin{array}{l} \text{dzy } 0 \text{ i } \frac{\pi}{2}. \end{array} \right.$$

$$y = \operatorname{arc} \sec x, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \quad \left| \begin{array}{l} y \text{ zawarte pomię-} \\ \text{dzy } 0 \text{ i } \frac{\pi}{2}. \end{array} \right.$$

$$y = \operatorname{arc} \operatorname{cosec} x, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \quad \left| \begin{array}{l} \text{dzy } 0 \text{ i } \frac{\pi}{2}. \end{array} \right.$$

$$y = x^x, \quad \frac{dy}{dx} = x^x (\log x + 1).$$

Pochodna wyznacznika, którego elementy są funkcjami zmiennej x , równa się sumie wyznaczników tegoż samego rzędu, które tworzymy, podstawiając, zamiast elementów danego szeregu, pochodne tych elementów.

Niechaj będzie funkcya $f(x_1, x_2, \dots)$ pewnej liczby zmiennych; zamiast $x_2, x_3, \dots$ podstawmy pewien układ wartości $a_2, a_3, \dots$; pochodna funkcji f względem x_1 nazywa się pochodną cząstkową pierwszego rzędu lub pochodną cząstkową pierwszą. Analogicznie określamy pochodne cząstkowe względem innych zmiennych. Pochodne cząstkowe oznaczamy za pomocą notacyi (Jacobi'ego):

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad \dots$$

Funkcya n zmiennych ma n pochodnych cząstkowych 1-go rzędu.

Powtarzając na pochodnych rzędu 1-go działanie tworzenia pochodnych, otrzymujemy pochodne rzędu 2-go, 3-go i t. d., lub pochodne drugie, trzecie i t. d. Te pochodne wyrażają się symbolami:

$$\frac{d^2 y}{dx^2}, \frac{d^3 y}{dx^3}, \dots, \text{gdy } y \text{ jest funkcyą samego } x,$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_i}, \frac{\partial^3 y}{\partial x_1^2 \partial x_2}, \dots, \text{gdy } y \text{ jest funkcyą wielu zmiennych.}$$

Jeżeli dwie pochodne rzędu 1-go $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}$ funkeyi dwu zmiennych są skończone w całym otoczeniu punktu o współrzędnych a_1, a_2 i gdy jedna z dwu pochodnych drugich $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$ jest ciągłą w tym punkcie i istnieje w całym otoczeniu punktu, wtedy te dwie drugie pochodne są równe; porządek tworzenia pochodnych lub różniczkowania jest, jak się mówi, dowolny. (Twierdzenie o zmianie porządku brania pochodnych.)

Podajemy kilka najważniejszych wzorów, odnoszących się do pochodnych rzędu wyższego.

$$\frac{d^n}{dx^n} x^m = m(m-1) \dots (m-n+1) x^{m-n},$$

$$\frac{d^n}{dx^n} \sin x = \sin \left(\frac{n\pi}{2} + x \right),$$

$$\frac{d^n}{dx^n} \cos x = \cos \left(\frac{n\pi}{2} + x \right),$$

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left\{ (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} \right\} = (-1)^{n-1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1) \frac{\sin(n \arccos x)}{n},$$

(Jacobi, Crelle, XV, str. 3, Hermite, Math. Ann. X).

$$\frac{d^n}{dx^n} (e^x \sin x) = \frac{e^x}{\sin^n \frac{\pi}{4}} \sin \left(x + \frac{n\pi}{4} \right)$$

$$\frac{d^n}{dx^n} (e^x \cos x) = \frac{e^x}{\sin^n \frac{\pi}{4}} \cos \left(x + \frac{n\pi}{4} \right).$$

W tym przedmiocie patrz E. Pascal, „Note critiche di calcolo“ (str. 148).

Jeżeli y jest funkcją złożoną, t. j. gdy y jest funkcją zmiennych $x_1, x_2, \dots$, które są funkcjami zmiennej x , wtedy pochodna funkcji y względem x wyraża się wzorem:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dx} + \frac{\partial y}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dx} + \dots$$

Jeżeli y jest funkcją uwikłaną zmiennej x , daną przez równanie $f(x, y) = 0$; wtedy pochodna funkcji y względem x wyraża się wzorem:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

Jeżeli y jest funkcją uwikłaną dwu zmiennych x_1, x_2 , daną przez równanie $f(y, x_1, x_2) = 0$, wtedy pochodne cząstkowe funkcji y wyrażają się wzorami:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\frac{\partial f}{\partial y}}; \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

Pochodne cząstkowe funkcji jednorodnej są funkcjami jednorodnymi, których stopień jednorodności jest o 1 zmniejszony.

Suma iloczynów pochodnych cząstkowych funkcji jednorodnej przez same zmienne równa się funkcji, pomnożonej przez stopień jednorodności (Twierdzenie Eulera).

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} x_2 + \dots = r f$$

gdzie r jest stopniem jednorodności. Ta własność przedstawia warunek konieczny i dostateczny, aby funkcja była jednorodną.

§ 3.

Teorya różniczek funkcyj jednej i wielu zmiennych.

Nazywamy różniczką zmiennej niezależnej x przyrost jakikolwiek nadany tej zmiennej; oznaczamy tę różniczkę przez dx .

Nazywamy różniczką funkcyj y zmiennej x iloczyn pochodnej funkcyj y przez różniczkę zmiennej niezależnej. Oznaczamy ją przez dy ; jest tedy:

$$dy = f'(x) dx.$$

Różniczka funkcyj różni się o nieskończoności rzędu wyższego od przyrostu, jakiego doznaje funkcyj, jeżeli zmiennej niezależnej nadajemy przyrost dx .

Jeżeli przyjmujemy, że różniczka pierwsza zmiennej niezależnej jest stała dla każdej wartości x , to różniczka n -ta funkcyj równa się iloczynowi pochodnej n -tej przez n -tą potęgę różniczki zmiennej niezależnej.

Nazywamy różniczką zupełną funkcyj wielu zmiennych sumę iloczynów jej pochodnych cząstkowych przez różniczki zmiennych niezależnych:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots$$

Jeżeli pochodne cząstkowe rzędu 1-go funkcyj są ciągle, to różniczka zupełna różni się od przyrostu funkcyj o nieskończoności rzędów wyższych. (Twierdzenie o różniczce zupełnej).

Można uważać za stałe różniczki zmiennych, od których zależy wprost funkcyj f (ma to miejsce, gdy zmienne te są niezależne, lub też gdy są funkcyjami liniowymi jednej lub wielu zmiennych niezależnych); wtedy różniczka n -ta funkcyj wyraża się wzorem:

$$d^x f = \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots \right) \right)^{(n)},$$

gdzie symbol po stronie drugiej wyobraża potęgę symboliczną, co znaczy, że po rozwinięciu zwykłym sposobem tej potęgi należy wykładniki potęg uważać za składowiki rzędu pochodnych $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots$.

W innych przypadkach różniczka rzędu wyższego funkcji f tworzy się według tego samego prawa, według którego tworzymy różniczkę pierwszą, t. j. uważając $dx_1, dx_2, \dots$ za funkcje określone wszystkich zmiennych.

§ 4

Teoria funkcji różniczkowalnych w całym obszarze. Twierdzenia Rollego o wartości średniej i wnioski z niego.

Jeżeli funkcja zmiennej x jest skończoną i różniczkowalną w całkowitym obszarze od a do b i ma tę samą wartość w punktach krańcowych, wtedy w przedziale istnieje przynajmniej jeden punkt, w którym pochodna funkcji jest zerem (Twierdzenie Rollego).

Jeżeli funkcja f jest stale skończona i różniczkowalna we wszystkich punktach przedziału od a do b , a na krańcach jego ma wartość zero, to dawszy sobie jakąkolwiek wartość k , znajdziemy zawsze punkt wewnątrz przedziału, w którym

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = k. \quad (\text{Twierdzenie Waringa.})$$

Przy tych samych założeniach o funkcyj $f(x)$ w całym przedziale od x_0 do $x_0 + h$ zachodzi wzór:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = hf'(x_0 + \theta h) \\ 0 \leq \theta \leq 1. \quad (\text{Twierdz. o wartości średniej}).$$

Jeżeli funkcyja w całym przedziale ma wartość zero, to jest ilością stałą.

Jeżeli funkcyja w całym przedziale ma pochodną stałą, to jest funkcyją liniową zmiennej x .

Jeżeli funkcyje $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\chi(x)$ są skończone i mają pochodne w całym przedziale (a, b) , wtedy istnieje przynajmniej jeden punkt x' w którym

$$\begin{vmatrix} \varphi'(x'), & \psi'(x'), & \chi'(x') \\ \varphi(a), & \psi(a), & \chi(a) \\ \varphi(b), & \psi(b), & \chi(b) \end{vmatrix} = 0.$$

Jeżeli $f(x_1, x_2, x_3, \dots)$ jest funkcyją skończoną i mającą pochodną w całym przedziale i jeżeli

$$(a_1, a_2, \dots), \quad (a_1 + h_1, a_2 + h_2, \dots)$$

są spółrzednemi dwu punktów, zawartych w obszarze i takich, że prosta je łącząca znajduje się cała w obszarze (w ogóle i analitycznie), tak, że położywszy

$$x_1 = a_1 + xh_1, \quad x_2 = a_2 + xh_2, \quad x_3 = a_3 + xh_3 \dots$$

otrzymamy punkty, odpowiadające wartościom $0 < x < 1$ wszystkie zawarte w obszarze, to będzie:

$$\begin{aligned}
 f(a_1 + h_1, a_2 + h_2, \dots) - f(a_1, a_2, \dots) \\
 = \left(h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots \right)_{\substack{x_1 = a_1 + \theta h_1 \\ x_2 = a_2 + \theta h_2 \\ \dots \dots \dots}} \\
 0 \leq \theta \leq 1.
 \end{aligned}$$

Jeżeli funkcyja $f(x_1, x_2, \dots)$, czyniąca za-
dość warunkom twierdzenia poprzedzającego,
ma w całym obszarze pochodną równą zeru,
to funkcyja ta jest w całym obszarze ilością
stałą.

§ 5.

Teorya wzoru Taylora-Maclaurina. Rozwijalność funkcyj na szeregi.

Jeżeli funkcyja $f(x)$ jest skończoną i róż-
niczkowalną wraz ze swemi $n-1$ pierwszemi
pochodnemi w przedziale od x_0 do $x_0 + h$, wte-
dy ma miejsce wzór:

$$\begin{aligned}
 f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \dots \\
 + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0) + \frac{h^n (1-\theta)^{n-p}}{p (n-1)!} f^{(n)}(x_0 + \theta h),
 \end{aligned}$$

gdzie p jest dowolną liczbą całkowitą doda-
tnią, $0 \leq \theta \leq 1$.

Jeżeli $p = n$ lub $p = 1$, to ostatni wyraz przyjmuje po-
staci specyalne:

$$R_n = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0 + \theta h), \quad (\text{Lagrange}),$$

$$R_p = \frac{h^n (1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x_0 + \theta h), \quad (\text{Cauchy}).$$

tegi n -tej wielomianu należy zamiast potęg i -tych lub iloczynów pochodnych $\frac{\partial f}{\partial a_1}, \frac{\partial f}{\partial a_2}, \dots$ podstawić odpowiednie pochodne rzędu i -tego funkcji f , gdzie wreszcie R_n ma jedną z dwu następujących postaci:

$$R_n = \frac{1}{n!} \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} h_2 + \dots \right) \right)_{x_1 = a_1 + \theta h_1, x_2 = a_2 + \theta h_2, \dots}^{(n)} (0 \leq \theta \leq 1),$$

$$R_n = \frac{(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} h_2 + \dots \right) \right)_{x_1 = a_1 + \theta h_1, x_2 = a_2 + \theta h_2, \dots}^{(n)}.$$

Wzór powyższy nazywa się wzorem Taylora dla funkcji wielu zmiennych.

Jeżeli wskazane wyżej warunki dla wzoru Taylora zachodzą dla każdej wartości n i jeżeli granica reszty R_n jest zerem dla $n = \infty$, wtedy $f(x_0 + h)$ i $f(a_1 + h_1, a_2 + h_2, \dots)$ rozwinąć można na szereg według rosnących potęg ilości h w przypadku pierwszym, ilości $h_1, h_2, \dots$ w przypadku drugim, i otrzymujemy wtedy tak nazwany szereg Taylora.

Aby funkcja dała się rozwinąć na szereg Taylora, jest koniecznem, by ona sama i jej pochodne jakiegokolwiek rzędu skończonego były zawsze skończone w każdym punkcie przedziału, t. j. we wszystkich punktach $x_0 + \theta h$, lub $(a_1 + \theta h_1, a_2 + \theta h_2, \dots)$, gdzie, jak zwykle, $0 \leq \theta \leq 1$.

Jeżeli $f^{(n)}(x_0 + \theta h)$ lub $f^{(n)}(a_1 + \theta h_1, a_2 + \theta h_2, \dots)$ dla jakiegokolwiek θ , czyniącego zadość warunkowi $0 \leq \theta \leq 1$ i jakiegokolwiek n , pozostaje co do wartości mniejsze od liczby skończonej, t. j. jeżeli $f^{(n)}$ nie dąży do ∞ wraz z n , wtedy funkcja daje się rozwinąć na szereg Taylora.

Warunkiem koniecznym i dostatecznym rozwijalności na szereg Taylora funkcji jednej zmiennej jest, by reszta

$$R_n = \frac{h^n (1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x_0 + \theta h)$$

dążyła równomiernie do zera, gdy n rośnie do nieskończoności (Pringsheim).

Patrz co do tego Pringsheim (Math. Ann. XLIV), oraz E. Pascal, Note critique, str. 176—214.

Jeżeli funkcya jednej zmiennej daje się rozwinąć na szereg według potęg rosnących całkowitych zmiennej, to szereg ten może być tylko szeregiem Taylora.

Szereg dwumianowy (binomialny)

$$(1+x)^m = 1 + (m)_1 x + (m)_2 x^2 + \dots$$

ma znaczenie dla m dowolnego i $|x| < 1$,

" " " m dodatniego i $x = -1$,

" " " $m+1$ " i $x = +1$.

Szereg geometryczny

$$\frac{1}{x-1} = 1 + x + x^2 + \dots, \text{ ma znaczenie dla } |x| < 1.$$

Jest to przypadek szczególny poprzedniego.

Szeregi wykładnicze:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$a^x = 1 + \frac{x \log a}{1!} + \frac{x^2 (\log a)^2}{2!} + \frac{x^3 (\log a)^3}{3!} + \dots$$

mają znaczenie dla każdego x i każdego a .

Szeregi goniometryczne!

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \dots \dots \left| \begin{array}{l} \text{mają znaczenie dla} \\ \text{wszystkich wartości } x. \end{array} \right. \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Szeregi logarytmowe:

$$\log (1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \dots \dots$$

(dla $-1 < x \leq +1$).

$$\log x = (x-1) - \frac{1}{2} (x-1)^2 + \frac{1}{3} (x-1)^3 - \dots \dots \dots,$$

($0 < x \leq 2$).

Szereg cyklometryczny:

$$\operatorname{arctg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots \dots \dots$$

($-1 \leq x \leq +1$).

Inne szeregi Taylora:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x &= x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + \frac{7}{315} x^7 + \frac{6x}{2835} x^9 + \frac{1382}{155925} x^{11} + \dots \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}, \\ &\quad (-\pi < x < +\pi), \end{aligned}$$

gdzie $\beta_{2m} = \frac{2^{2m} (2^{2m} - 1)}{2m} B_{2m}$; tu liczby B_{2m} są liczbami Bernoulli'ego (patrz Rozdział XVIII),

$$\begin{aligned} \cotg x - \frac{1}{x} &= -\frac{1}{3}x - \frac{1}{45}x^3 - \frac{2}{945}x^5 - \frac{1}{4725}x^7 - \frac{2}{93555}x^9 - \dots \\ &= -\sum_1 \frac{2^{2m}}{(2m)!} B_{2m} x^{2m-1} \\ &\quad (-\pi < x < +\pi). \end{aligned}$$

$$\sec x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{5x^4}{4!} + \frac{61x^6}{6!} + \dots + \frac{E_{2m}}{(2m)!} x^{2m} + \dots$$

gdzie E_{2m} są liczbami Eulera (patrz Rozdział XVIII).

$$\begin{aligned} \operatorname{cosec} x - \frac{1}{x} &= \frac{x}{3!} + \frac{7x^3}{3 \cdot 5!} + \frac{29x^5}{3 \cdot 7!} + \dots \\ &\quad + \frac{2(2^{2m+1}-1)}{(2m+2)!} B_{2m+2} x^{2m+1} + \dots \\ &\quad (0 < x < \pi). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \arcsin x &= x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \dots \\ &= \sum_0^\infty \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \\ &\quad (x^2 < 1.) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \sin x &= \log x - \sum_1^\infty \frac{2^{2m-1}}{m} \cdot \frac{B_{2m}}{(2m)!} x^{2m} \\ &\quad (-\pi < x < \pi). \end{aligned}$$

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} - \frac{3x^4}{4!} - \frac{8x^5}{5!} - \frac{3x^6}{6!} + \dots$$

$$\frac{xe^x}{e^x - 1} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{B_2 x^2}{2!} - \frac{B_4 x^4}{4!} + \dots$$

(Szereg tworzący liczb Bernoulli'ego B_2, B_4)

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{B_2 x^2}{2!} - \frac{B_4 x^4}{4!} + \dots,$$

$$\log(x + \sqrt{1+x^2}) = x - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} - \dots$$

$$(|x| \geq 1).$$

$$\cos^2 x = 1 - \frac{2x^2}{2!} + \frac{2^3 x^4}{4!} - \frac{2^5 x^6}{6!} + \dots$$

$$. \quad (\text{dla każdego } x).$$

$$\begin{aligned} \cos(m \arcsin x) &= 1 - \frac{m^2}{2!} x^2 + \frac{m^2(m^2-2^2)}{4!} x^4 \\ &\quad - \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{6!} x^6 + \dots \end{aligned}$$

$$(|x| \leq 1).$$

$$e^{ax} \cos bx = 1 + r \cos \varphi, x + \frac{r^2 \cos^2 \varphi}{2!} x^2 + \dots,$$

$$\text{gdzie } a = r \cos \varphi, b = r \sin \varphi.$$

§ 6.

Teoria wzorów nieoznaczonych.

Jeżeli stosując zwykłe twierdzenia o granicach i szukając granicy funkcji, znajdziemy, że ona przedstawia się pod postaciami:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty^0, \quad 1^\infty, \quad 0^0, \quad \infty - \infty,$$

wtedy mamy zagadnienie o wzorach nieoznaczonych; rozwiązać to zagadnienie jest to znaleźć w jakikolwiek sposób, czy za pomocą odpowiedniego sztucznego środka granicę funkcji danej (o ile istnieje).

Rozwiązanie wszystkich powyższych nieoznaczoności sprowadza się do wyznaczania pierwszej z nich.

O rozwiązaniu wzoru nieoznaczonego $\frac{0}{0}$ możemy wypowiedzieć twierdzenia następujące:

Jeżeli funkcye $\varphi(x)$, $\psi(x)$ określone w punkcie a i w jego otoczeniu, są zerami w a i w tym punkcie mają pochodne, i jeżeli nadto pochodne $\varphi'(a)$ i $\psi'(a)$ nie są obie zerami lub obie nieskończonościami, a gdy $\psi'(a)=0$, stosunek $\frac{\varphi(a+h)}{h}$ nie zmienia znaku wraz ze zmianą ilości h , wtedy:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)} \left(\text{przy przyjęciu, że } \frac{1}{\pm 0} = \pm \infty, \frac{1}{\pm \infty} = 0 \right).$$

Jeżeli granice funkcji φ i ψ są przy $x=a$ zerami, jeżeli istnieje w tym punkcie granica stosunku ich pochodnych i jeżeli w całkowitem otoczeniu punktu a pochodna funkcji ψ jest różna od zera, wtedy istnieje granica stosunku $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ i równa się granicy stosunku pochodnych.

O nieoznaczoności $\frac{\infty}{\infty}$ możemy wypowiedzieć twierdzenie:

Jeżeli granice funkcji φ i ψ dla $x=a$ są równe ∞ , jeżeli istnieje granica stosunku pochodnych i jeżeli wreszcie $\psi'(x)$ nie tylko nie jest zerem, lecz ma nadto znak stały w całkowitem otoczeniu punktu a , wtedy istnieje granica stosunku funkcji i równa się stosunkowi pochodnych.

Oto jest rozwiązanie niektórych nieoznaczoności:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \cos x} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x e^{\frac{1}{x}} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\log(1+x)} = 0 \quad ;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{tg} ax - ax}{\operatorname{tg} bx - bx} = \frac{a^3}{b^3},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \log a - \log b$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x} = 1 ;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^p \log \frac{1}{x} = 0 ; (p > 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^x = 1 \quad ;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log x}{x^m} = 0, \quad (m > 0).$$

Porówn. E. Pascal „Rachunek różniczkowy“ przekład polski str. 163 176, Note critiehe etc. str. 238. Stolz, Grundzüge etc. I, str. 72—83.

§ 7.

Funkcye rosnące i malejące. Maxima i minimo funkcyi jednej lub wielu zmiennych

Funkcya $f(x)$ jednej zmiennej nazywa się w punkcie x_0 rosnącą, jeżeli istnieje zawsze wartość k taka, że dla każdej wartości $h < k$ istnieją równocześnie dwie nierówności:

$$f(x_0 - h) - f(x_0) < 0, \quad f(x_0 + h) - f(x_0) > 0.$$

Funkcya nazywa się malejącą, jeżeli zachodzą równocześnie dwie nierówności przeciwne:

$$f(x_0 - h) - f(x_0) > 0, \quad f(x_0 + h) - f(x_0) < 0.$$

Jeżeli w punkcie x_0 pochodne pierwsza, druga,, $(n-1)$ -a są zerami, pochodna zaś n -ta zerem nie jest, w takim razie, jeżeli n jest liczbą parzystą, funkcya nie jest ani rosnącą, ani malejącą w tym punkcie; jeżeli zaś n jest liczbą nieparzystą, wtedy funkcya jest rosnącą, gdy pochodna n -ta jest dodatnia w punkcie x_0 , malejącą, gdy ta pochodna jest ujemna.

Funkcya jednej zmiennej (lub wielu zmiennych $x_1, x_2, \dots$) ma maximum w punkcie x_0 (lub w punkcie o współrzędnych $a_1, a_2, \dots$), jeżeli można znaleźć takie h (lub układ wartości $h_1, h_2, \dots$), że dla każdego $h < k$ (lub dla każdego układu $h_1 < k_1, h_2 < k_2, \dots$) jest zawsze:

$$f(x_0 \pm h) - f(x_0) < 0$$

$$(\text{lub } f(a_1 + h_1, a_2 + h_2, \dots) - f(a_1, a_2, \dots) < 0)$$

Przeciwnie funkcya ma w tym punkcie minimum, jeżeli spełniają się powyższe nierówności ze znakiem $>$ (zamiast $<$)

Aby funkcya miała maximum lub minimum w punkcie, trzeba, aby pochodna rzędu 1-go lub wszystkie pochodne cząstkowe rzędu 1-go były w tym punkcie równe zeru.

Aby funkcya była maximum lub minimum w punkcie, jest koniecznem, by rząd n pierwszej z pochodnych, której wartość w tym punkcie jest różna od zera (lub rząd pierwszych z pomiędzy pochodnych cząstkowych, które nie znikają wszystkie w tym punkcie), był liczbą parzystą.

W przypadku funkcyi jednej zmiennej, jeżeli n jest rzędem pierwszej z nieznikających w tym punkcie pochodnych, otrzymujemy maximum, gdy $f^{(n)}(x_0)$ jest ujemne, minimum zaś, gdy $f^{(n)}(x)$ jest dodatnie.

W przypadku funkcyi wielu zmiennych, jeżeli liczba (parzysta) n jest rzędem pochodnych cząstkowych, które nie znikają wszystkie w uważanym punkcie, należy rozważać wyrażenie:

$$\left(\left(\frac{\partial f}{\partial a_1} h_1 + \frac{\partial f}{\partial a_2} h_2 + \dots \right) \right)^{(n)}. \quad (\text{patrz § 4})$$

Rozwinąwszy to wyrażenie, otrzymamy formę stopnia n -tego ilości $h_1, h_2, \dots$; jeżeli forma ta jest znaku stałego dla każdego układu wartości $h_1, h_2, \dots$ i staje się zerem jedynie dla $h_1 = h_2 = \dots = 0$ (forma określona), wtedy w tym punkcie mamy istotnie maximum, gdy forma ta jest stale ujemną, minimum zaś, gdy jest stale dodatnią.

Jeżeli forma powyższa może się stawać zerem i dla innych wartości prócz $h_1 = h_2 = \dots = 0$ (forma półokreślona), wtedy potrzebnem jest specjalne badanie w celu rozstrzygnięcia pytania o maximum i minimum. Jeżeli ta forma nie jest stałego znaku (forma nieokreślona), wtedy w tym punkcie nie istnieje ani maximum, ani minimum.

W przypadku specjalnym, w którym $n=2$ i liczba zmiennych jest także 2, otrzymujemy:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a_1^2} h_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial a_1 \partial a_2} h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial a_2^2} h_2^2;$$

aby ta forma była określona, potrzeba, aby wyrażenie

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a_1^2} \frac{\partial^2 f}{\partial a_2^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial a_1 \partial a_2} \right)^2$$

było dodatnie i różne od zera; będziemy wtedy mieli maximum lub minimum, stosownie do tego, czy $\frac{\partial^2 f}{\partial a_1^2}$ jest ujemne lub dodatnie.

Teoria maxlmów i minimów funkcj wielu zmiennych pobudziła do wielu ważnych badań. Porównaj: Scheeffeffer, Math. Ann. XXXV; Dantscher, tamże, XLII, LI; Stolz, Wiener Berichte 1868—1890—1891—1893. Wskazówki co do tego w książce Pascala, „Note critiche di calcolo“ str. 226.

ROZDZIAŁ VII.

RACHUNEK CAŁKOWY.

§ 1.

Całkowalność.

Niechaj $f(x)$ będzie funkcją skończoną od $x=a$ do $x=b$. Podzielmy przedział (a, b) na n przedziałów $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ i niechaj f_r będzie wartością, którą przybiera funkcja f w pewnym punkcie przedziału δ_r lub granicą wyższą albo niższą wartości funkcji f w tym przedziale. Utwórzmy sumę

$$\sum_{r=1}^n f_r \delta_r$$

i zmniejszajmy nieograniczenie wielkość przedziałów cząstkowych, zwiększając nieograniczenie ich liczbę.

Jeżeli dla $n = \infty$ powyższa suma ma granicę i zawsze tę samą, niezależnie od prawa, według którego przedziały dążą do zera, oraz niezależnie od prawa, według którego wybieramy wartość f_r w przedziale δ_r , mówimy wtedy, że funkcja f jest całkowalną w przedziale a, b , i że wartością tej granicy jest

całka określona funkcji od a do b . Taką całkę wyrażamy symbolem

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Wartości a i b nazywają się granicami wyższą i niższą całki.

Określenie to wymaga zmiany w dwu przypadkach:

1-o, kiedy funkcja staje się nieskończoną w jednym lub wielu punktach przedziału;

2-o, kiedy jedna z granic całkowania jest nieskończoną.

Jeżeli funkcja $f(x)$ staje się nieskończoną dla $x=c$, ($a < c < b$); wtedy całką określoną funkcji $f(x)$ od a do b nazywamy wyrażenie

$$\lim_{\epsilon' \rightarrow 0} \int_a^{c-\epsilon'} f(x) dx + \lim_{\epsilon'' \rightarrow 0} \int_{c+\epsilon''}^b f(x) dx,$$

w założeniu oczywiście, że granice tu zachodzące istnieją i są zawsze te same, bez względu na sposób, w jaki ilości ϵ' , ϵ'' zdążają do zera, niezależnie jedna od drugiej.

Taka całka określona nazywa się niewłaściwą.

Jeżeli zdarzy się, że granica sumy powyższych dwóch całek istnieje tylko wtedy, gdy ilości ϵ' , ϵ'' są związane pewnym prawem, wtedy otrzymujemy całki niewłaściwe osobliwe (Cauchy).

Jeżeli jedna lub obie granice są nieskończone, wtedy całką określoną niewłaściwą funkcji $f(x)$ będzie:

$$\lim_{x' \rightarrow \infty} \int_a^{x'} f(x) dx \text{ lub } \lim_{\substack{x' \rightarrow -\infty \\ x'' \rightarrow +\infty}} \left\{ \int_{x'}^a f(x) dx + \int_a^{x''} f(x) dx \right\}$$

w założeniu oczywiście, że te granice istnieją, niezależnie od sposobu, w jaki x' , x'' dążą do ∞ .

Jeżeli w tym drugim przypadku granica istnieje tylko wtedy, jeżeli x' i x'' są związane pewnym warunkiem, otrzymujemy całkę niewłaściwą, osobliwą.

Całka niewłaściwa nazywa się bezwzględnie zbieżną, gdy granica, o której mowa w określeniu, istnieje i wtedy, jeżeli funkcję $f(x)$ zastąpimy wszędzie jej wartością bezwzględną; nazywa się zwyczajnie zbieżną, jeżeli ta własność miejsca nie ma.

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby funkcya skończona była całkowalna w całym przedziale jest, by granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^n D_r \delta_r,$$

gdzie D_r przedstawia oscylację funkcyi w przedziale δ_r , była zerem.

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby funkcya skończona była całkowalna, jest by $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau = 0$, gdzie τ oznacza sumę przedziałów δ_r , w których oscylacja funkcyi jest większa od jakiegokolwiek liczby ustalonej.

Każda funkcya ciągła jest całkowalna.

Każda funkcya punktowo-nieciągła (patrz wyżej str. 24) jest całkowalna. (Twierdzenie Riemanna).

Wartość całki określonej funkcyi całkowalnej nie zmienia się, jeżeli zmienimy wartość funkcyi w jednym lub więcej punktach a nawet w nieskończenie wielu punktach, byleby one tylko były tak rozmieszczone, że w każdym dowolnie małym przedziale znajduje się zawsze punkt, w którym wartość funkcyi nie uległa zmianie.

Jeżeli funkcya skończona jest stale rosnącą lub stale malejącą w całym przedziale całkowania, wtedy jest funkcją całkowalną.

Funkcya ciągła innych funkcyj całkowalnych (w szczególności suma i iloczyn) jest

sama funkcją całkowalną. (Twierdzenie Du Bois Reymonda)

Całka określona posiada następujące własności:

$$\int_a^b f(x) dz = - \int_b^a f(x) dx,$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx,$$

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_1^n f_r}{n}.$$

Całka określona iloczynu dwu funkcyj daje się przedstawić w postaciach następujących:

$$1. \quad \int_a^b f(x) f_1(x) dx = f(a + \vartheta(b-a)) \int_a^b f_1(x) dx.$$

gdzie ϑ zawiera się pomiędzy 0 a 1, f i f_0 są funkcjami ciągłymi, f_1 zaś nie zmienia znaku pomiędzy granicami całkowania;

$$2. \quad \int_a^b f(x) f_1(x) dx = f(a) \int_a^{a + \vartheta(b-a)} f_1(x) dx,$$

przy tych samych warunkach;

$$\int_a^b f(x) f_1(x) dx$$

3.

$$= f(x) \int_a^{a + \vartheta(b-a)} f_1(x) dx + f(b) \int_{a + \vartheta(b-a)}^b f_1(x) dx,$$

w założeniu, że funkcyje f, f_1 są ciągłemi i że druga nie zmienia znaku w granicach całkowania.

Zauważyć należy, że wartość θ jest wogóle odmienna w każdym z trzech powyższych wzorów.

Twierdzenia, odnoszące się do przypadków zbieżności całek niewłaściwych, są następujące:

Niechaj funkcyja $f(x)$ staje się nieskończoną w punkcie b i będzie całkowną w całym przedziale od a do $b-\varepsilon$; jeżeli można znaleźć liczbę dodatnią $\nu < 1$, taką, że $(x-b)^\nu f(x)$ dąży do granicy skończonej dla $x = b$ lub waha się pomiędzy granicami skończonemi, to wtedy wniesć można, że całka określona od a do b jest bezwzględnie zbieżna.

Jeżeli funkcyja $f(x)$ twierdzenia poprzedzającego jest funkcją stałego znaku, to warunkiem koniecznym zbieżności całki od a do b jest, by:

$$\lim_{x=b} (x-b)^\nu f(x)$$

było zerem lub wahało się pomiędzy dwiema granicami, z których jedna jest zerem (granice te, na zasadzie założeń, nie mogą być przeciwnego znaku).

Jeżeli dana funkcyja jest całkowna w pewnym przedziale (aż do ∞), i jeżeli można znaleźć takie $\nu > 1$, aby

$$\lim_{x=\infty} x^\nu f(x)$$

było skończone (lub zerem), lub, w razie nieistnienia granicy, byłoczynten wahał się pomiędzy granicami skończonemi, wtedy całka

funkcyi $f(x)$ od a do ∞ jest bezwzględnie zbieżna.

Przy założeniach poprzednich i przy dołączeniu założenia, że funkcyja $f(x)$ nie zmienia znaku od pewnego punktu aż do ∞ , warunkiem koniecznym, aby granica całki była skończona, jest, by iloczyn $xf(x)$ dla $x = \infty$ miał granicę skończoną lub wahał się pomiędzy dwiema granicami, z których jedna jest zerem.

O całkach niewłaściwych patrz: Riemann, Werke str. 229; Du Bois-Reymond, Crelle LXXVI, Math. Ann. XIII; Pringsheim, Math. Ann. XXXVII it. d., por. Pascal, Note critiche etc.

Jeżeli w całce określonej granicą wyższą jest x , to całka przedstawia funkcję zmiennej x , zwaną funkcją całkową.

Jeżeli do funkcyi całkowej dodamy jakąkolwiek stałą, dostaniemy funkcję, którą możemy też przedstawić przez całkę określoną o granicy wyższej równej x i o granicy niższej, różnej od poprzedniej.

Niechaj $\varphi(x)$ oznacza funkcję całkową; funkcyja nieokreślona, objęta wzorem

$$F(x) = \varphi(x) + c,$$

(gdzie c jest stałą nieoznaczoną), nazywa się całką nieokreśloną funkcyi i oznacza się symbolem

$$F(x) = \int f(x) dx.$$

Jeżeli znamy całkę nieokreśloną, to całkę określoną obliczymy za pomocą wzoru

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Funkcyja całkową jest zawsze funkcją ciągłą

Jeżeli funkcyja $f(x)$ pod znakiem całkowym jest funkcją ciągłą, wtedy funkcyja cał-

kowa jest funkcją różniczkowalną a jej pochodna jest równa funkcji danej $f(x)$.

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągłą, to

$$\frac{d}{db} \int_a^b f(x) dx = f(b); \quad -\frac{d}{da} \int_a^b f(x) dx = -f(a).$$

Przekształcenia całki pojedynczej. Jeżeli

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

i położymy $x = \psi(y)$, gdzie ψ jest także funkcją różniczkowalną zmiennej y , i jeżeli w przedziale od a do b można uważać y za funkcję samej zmiennej x , wtedy

$$I = \int_{a'}^{b'} f(\psi(y)) \frac{dx}{dy} dy,$$

gdzie a' i b' są wartościami zmiennej y , otrzymanymi z równań $a = \psi(y)$, $b = \psi(x)$.

Niechaj będzie

$$\varphi(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx,$$

gdzie $a(y)$, $b(y)$ oznaczają dane funkcje zmiennej y . Jeżeli założymy, że $f(x, y)$ jest funkcją ciągłą dwu zmiennych, że $f(x, y)$, $a(y)$, $b(y)$ mają pochodne względem y , i że pochodna f'_y jest ciągłą względem obu zmiennych, wtedy:

$$\frac{d\varphi}{dy} = \int_{a(y)}^{b(y)} f'_y(x, y) dx = f(a, y) \frac{da(y)}{dy} + f(b, y) \frac{db(y)}{dy},$$

Jeżeli a i b są ilościami stałymi, to znak różniczkowania względem y jest przemienny ze znakiem całkowania, t. j. pochodna całki równa się całce pochodnej. (Twierdzenie o różniczkowaniu pod znakiem.)

Twierdzenie to zachodzi zawsze, gdy

$$F(x, y) = \int f(x, y) dx,$$

jest taką funkcją zmiennych x, y , że dla niej utrzymuje się twierdzenie o przemianie porządku dwu różniczkowań względem x i y .

Jeżeli granice a i b są stałymi, jeżeli stałymi są ilości c i d , funkcja zaś $f(x, y)$ jest ciągłą, wtedy:

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$$

(Twierdzenie o całkowaniu pod znakiem.)

§ 2.

Całki nieokreślone.

Całki nieokreślone podstawowe.

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \quad (m \neq -1),$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \log x; \quad \int e^x dx = e^x,$$

$$\int \sin x dx = -\cos x; \quad \int \cos x dx = \sin x,$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x; \quad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arc} \sin x = -\operatorname{arc} \cos x + \operatorname{const},$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = -\operatorname{arc} \operatorname{cotg} x + \operatorname{const},$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \log \operatorname{tg} \frac{x}{2}; \quad \int \frac{dx}{1-x^2} = \log \frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x}$$

$$\int \log x dx = x \log x - x; \quad \int \operatorname{tg} x dx = -\log \cos x,$$

$$\int \sec x dx = \frac{1}{2} \log \frac{1+\sin x}{1-\sin x},$$

$$\int \operatorname{arc} \sin x dx = x \operatorname{arc} \sin x + \sqrt{1-x^2}$$

$$\int \operatorname{arc} \operatorname{tg} x dx = \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \log (1+x^2),$$

$$\int \operatorname{arc} \sec x dx = x \operatorname{arc} \sec x - \log (x + \sqrt{x^2+1}),$$

Całki nieokreślone funkcji wymiernych.

$$\int \frac{dx}{a+bx^2} = \sqrt{\frac{1}{ab}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\sqrt{\frac{b}{a}} x \right),$$

jeżeli a i b są jednego znaku,

$$\text{lub} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{-ab}} \cdot \log \frac{x \sqrt{-b} + \sqrt{a}}{x \sqrt{-b} - \sqrt{a}},$$

jeżeli a i b są znaków przeciwnych.

$$\int \frac{dx}{x(a+bx^2)} = \frac{1}{2a} \log \frac{x^2}{a+bx^2},$$

$$\int \frac{dx}{a+bx+cx^2} = \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}} \log \frac{b+2cx-\sqrt{b^2-4ac}}{b+2cx+\sqrt{b^2-4ac}}, \text{ jeżeli } b^2-4ac > 0.$$

$$= \frac{2}{b+2cx}, \text{ jeżeli } b^2-4ac = 0,$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{b+2cx}{\sqrt{4ac-b^2}}, \text{ jeżeli } b^2-4ac < 0.$$

$$\int \frac{x^2 dx}{a^3-x^3} = \frac{1}{6a^3} \log \frac{a^3+x^3}{a^3-x^3}.$$

Dla obliczenia całki funkcji wymiernej rozkładamy tę funkcję na funkcje elementarne (patrz Rozdział I, § 6), a potem wykonywamy całkowanie.

Całki funkcji niewymiernych.

$$\int \frac{dx}{(a+bx)\sqrt{x}} = \pm \frac{2}{\sqrt{ab}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{bx}{a}}, \text{ jeżeli } a \text{ i } b \text{ są jednego znaku,}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-ab}} \log \frac{a-bx+2\sqrt{x} \cdot \sqrt{-ab}}{a+bx}, \text{ jeżeli } a \text{ i } b \text{ są znaków przeciwnych,}$$

$$\int \frac{\sqrt{x} dx}{a+bx} = \frac{2\sqrt{x}}{b} - \frac{a}{b} \int \frac{dx}{\sqrt{x}(a+bx)},$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \log \frac{\sqrt{a+bx} - \sqrt{a}}{\sqrt{a+bx} + \sqrt{a}}, \text{ jeżeli } a > 0,$$

$$= \frac{2}{\sqrt{-a}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a+bx}}{\sqrt{-a}}, \text{ jeżeli } a < 0.$$

$$\int dx \sqrt{1-x^2} = \frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x.$$

$$\int dx \sqrt{1+x^2} = \frac{x}{2} \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2} \log (x + \sqrt{1+x^2}),$$

$$\int \frac{dx}{x} \sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+x^2} - \log \frac{1 + \sqrt{1+x^2}}{x},$$

$$\int \frac{dx}{x} \sqrt{x^2-1} = \sqrt{x^2-1} - \arccos \frac{1}{x}.$$

$$\int \frac{dx}{x} \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-x^2} + \log \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x}.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}} &= \frac{1}{\sqrt{b}} \log (x \sqrt{b} + \sqrt{a+bx^2}), \text{ jeżeli } b > 0, \\ &= \frac{1}{\sqrt{-b}} \arcsin \left(\sqrt{-\frac{b}{a}} \cdot x \right), \text{ jeżeli } b < 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{ax+bx^2}} &= \frac{1}{\sqrt{b}} \log (a + 2bx + 2\sqrt{b}\sqrt{ax+bx^2}), \text{ jeżeli } b > 0 \\ &= \frac{1}{\sqrt{-b}} \arcsin \frac{a + 2bx}{-a}, \text{ jeżeli } b < 0. \end{aligned}$$

Całki funkcji trygonometrycznych

$$\int \frac{dx}{1+\cos x} = \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

$$\int \frac{dx}{\sin x + \cos x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \log \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8} \right).$$

$$\int \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} dx = x \operatorname{tg} \frac{x}{2},$$

$$\int \sin^2 x \, dx = -\frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{2} x,$$

$$\int \sin ax \cos bx \, dx = \frac{1}{b^2 - a^2} \{ b \sin bx \sin ax + a \cos bx \cos ax \}$$

$$\int \frac{dx}{a + b \cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{a-b} \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{a+b}}, \text{ jeżeli } a > b,$$

$$= \frac{1}{a} \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad \text{,, } a = b.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \log \frac{\sqrt{b-a} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \sqrt{b+a}}{\sqrt{b-a} \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \sqrt{b+a}}, \quad \text{,, } a < b.$$

$$\int \frac{dx}{1 - k^2 \sin^2 x} = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\sqrt{1 - k^2} \cdot \operatorname{tg} x).$$

Całki funkcij zawierających logarytmy.

$$\int x^n \log x \, dx = x^{n+1} \left\{ \frac{\log x}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \right\}; \quad n \leq 1,$$

$$\int \frac{\log x \, dx}{(a + bx)^m} = -\frac{\log x}{(m-1)b(a+bx)^{m-1}}$$

$$+ \frac{1}{(m-1)ab} \left\{ \frac{1}{(m-2)(a+bx)^{m-2}} + \frac{1}{(m-3)a(a+bx)^{m-3}} + \dots \right. \\ \left. + \frac{1}{1 \cdot a^{m-3}(a+bx)} \right\} + \frac{1}{(m-1)a^{m-1}b} \log \frac{x}{a+bx}.$$

$$\int \sin(\log x) \, dx = \frac{x}{2} \left\{ \sin(\log x) - \cos(\log x) \right\},$$

$$\int \cos (\log x) dx = \frac{x}{2} \left\{ \sin (\log x) + \cos (\log x) \right\},$$

$$\int \frac{\log (\log x)}{x} dx = \log x \log (\log x) - \log x,$$

$$\int \log (a + \cos x) dx = \frac{1 + a \cos x}{a + \cos x}.$$

Całki funkcyj, zawierających funkcyje wykładnicze.

$$\begin{aligned} \int x^n a^x dx &= \frac{a^x x^n}{\log a} - \frac{n a^x x^{n-1}}{\log^2 a} + \frac{n(n-1) a^x x^{n-2}}{\log^3 a} - \dots \\ &\pm \frac{n(n-1) \dots 2 \cdot 1}{\log^{n-1} a} a^x. \end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{1+e^x} = \log \frac{e^x}{1+e^x},$$

$$\int \frac{dx}{ae^{mx} + be^{-mx}} = \frac{1}{m\sqrt{ab}} \arctg \left(e^{mx} \sqrt{\frac{a}{b}} \right),$$

$$\int \frac{dx}{a+be^{mx}} = \frac{1}{am} \left\{ mx - \log (a + be^{mx}) \right\},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+be^{mx}}} = \frac{1}{m\sqrt{a}} \log \frac{\sqrt{a+be^{mx}} - \sqrt{a}}{\sqrt{a+be^{mx}} + \sqrt{a}},$$

$$\int \frac{x e^x dx}{(1+x)^2} = \frac{e^x}{1+x},$$

$$\int x e^x dx = e^x (x - 1),$$

$$\int e^{ax} \sin x dx = \frac{e^{ax} (a \sin x - \cos x)}{1 + a^2},$$

$$\int \sqrt{1+e^{ax}} = \frac{2\sqrt{1+e^{ax}}}{a} + \frac{1}{a} \log \frac{\sqrt{1+e^{ax}} + 1}{\sqrt{1+e^{ax}} - 1}.$$

Całki funkcyj, zawierających funkcje kołowe odwrotne.

$$\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x - \sqrt{1-x^2} \arcsin x,$$

$$\int \frac{\arcsin x}{(\sqrt{1-x^2})^3} dx = \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \log(1-x^2),$$

$$\int \frac{x \arcsin x}{(\sqrt{1-x^2})^3} dx = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \log \frac{1-x}{1+x},$$

$$\int \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) - \frac{1}{2} (\operatorname{arctg} x)^2,$$

$$\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\sqrt{1-x^2} \operatorname{arctg} x + \sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\operatorname{arctg} x}{(\sqrt{a+bx^2})^3} dx &= \frac{x \operatorname{arctg} x}{a\sqrt{a+bx^2}} - \frac{1}{a\sqrt{b-a}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a+bx^2}{b-a}}, \text{ jeżeli } a < b \\ &= \frac{x \operatorname{arctg} x}{a\sqrt{a+bx^2}} - \frac{1}{a\sqrt{a-b}} \log \frac{\sqrt{a+bx^2} - \sqrt{a-b}}{\sqrt{a+bx^2} + \sqrt{a-b}}, \text{ „ } a > b. \end{aligned}$$

Całkowanie przez szeregi. Szereg, którego wyrazy są funkcjami zmiennej x , równozbieżny w całym przedziale, przedstawia funkcję całkowaną zmiennej x ; całkę zaś tego szeregu przedstawia szereg całek pojedynczych jego wyrazów.

W szczególności:

Szereg potęgowy jest całkowany wyraz po wyrazie w przedziale, zawartym w obszarze całkowania całego szeregu

$$\int \frac{\sin x}{x} dx = x - \frac{x^3}{3!3} + \frac{x^5}{5!5} - \dots$$

Funkcja zmiennej x , określona za pomocą poprzedniego szeregu, jest nową funkcją przestępną, które nazywają „wstawą całkową“ (Integralsinus).

$$\int \frac{e^x}{x} dx = \log x + x + \frac{x^2}{2!2} + \frac{x^3}{3!3} + \dots$$

Ten szereg przedstawia również nową funkcję przestępną, którą nazywamy „logarytmem całkowym“ (Integrallogarithmus).

$$\int \log (1-2 \varrho \cos x + \varrho^2) dx = -2 \sum \frac{\varrho^n}{n^2} \sin (n x), \quad (\varrho < 1)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\log (a+b x)}{x} dx &= \log a \log x + \frac{b}{a} x - \frac{1}{2^2} \left(\frac{b}{a}\right)^2 x^2 \\ &\quad + \frac{1}{3^2} \left(\frac{b}{a}\right)^3 x^3 - \dots \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} (\log b x)^2 - \left(\frac{a}{b}\right) \frac{1}{x} + \frac{1}{2^2} \left(\frac{a}{b}\right)^2 \frac{1}{x^2} - \frac{1}{3^2} \left(\frac{a}{b}\right)^3 \frac{1}{x^3} + \dots$$

$$\int \frac{dx}{\log x} = \log (\log x) + \frac{\log x}{1} + \frac{1}{2} \frac{\log^2 x}{2!} + \frac{1}{3} \frac{\log^3 x}{3!} + \dots$$

I ten ostatni szereg jest, jak łatwo widzieć, logarytmem całkowym o argumencie $\log x$ zamiast x .

§ 3.

Całki określone i niewłaściwe.

Całki określone pomiędzy granicami 0 i 1.

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x+x^2} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{1-x+x^2} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}},$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\log(\log x)} = 0,$$

$$\int_0^1 \sqrt{\log \frac{1}{x}} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\log \frac{1}{x}}} = \sqrt{\pi},$$

$$\int_0^1 \frac{e^{-x} dx}{\sqrt{x}} = \frac{2 + e\sqrt{\pi}}{4e},$$

$$\int_0^1 \frac{\log x}{1+x} dx = -\frac{\pi^2}{12},$$

$$\int_0^1 \frac{\log x}{1-x} dx = -\frac{\pi^2}{6},$$

$$\int_2^1 \frac{\log x}{1-x^2} dx = -\frac{\pi^2}{8},$$

$$\int_2^1 \log(\log x) dx = -A \text{ (stała Eulera, patrz Rozdz. XVIII),}$$

$$\int_2^1 \left(\frac{1}{\log x} + \frac{1}{1+x} \right) dx = A,$$

$$\int_0^1 \frac{\arcsin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \log 2,$$

$$\int_0^1 \frac{\arctg x}{x} dx = \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)^2},$$

$$\int_0^1 x^{a-1} (\log x)^n dx = (-1)^n \frac{n!}{a^{n+1}},$$

Całki określone pomiędzy 0 i $\frac{\pi}{4}$, pomiędzy 0 i $\frac{\pi}{2}$, pomiędzy 0 i π .

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x dx = \frac{1}{2} \log 2,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^m x \, dx = \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{1}{m + 2n + 1}.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 - \sin x \cos \lambda} = (\pi - \lambda) \operatorname{cosec} \lambda.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{p + q \cos x} = \frac{1}{\sqrt{p^2 - q^2}} \arccos \frac{q}{p}, \quad \text{jeżeli } q < p.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{q^2 - p^2}} \log \frac{q + \sqrt{q^2 - p^2}}{q}, \quad \text{,, } q > p.$$

$$= \frac{1}{p}, \quad \text{,, } q = p.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \operatorname{tg} x \, dx = \infty,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx = -\frac{\pi}{2} \log 2,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \operatorname{tg} x \, dx = 0.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \frac{(n-1)(n-3) \dots 4 \cdot 2}{n(n-2) \dots 5 \cdot 3}, \quad \text{jeżeli } n \text{ parzyste.}$$

$$= \frac{(n-1)(n-3) \dots 3 \cdot 1}{n(n-2) \dots 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad \text{,, } n \text{ nieparzyste.}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} = \frac{\pi}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 k^6 + \dots \right]$$

$$\int_0^{\pi} \sin a x \sin b x \, dx = \int_0^{\pi} \cos a x \cos b x \, dx = 0, \quad (a \leq b)$$

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos x} = 0.$$

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{p + q \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{p^2 - q^2}}, \quad \text{jeżeli } p^2 > q^2,$$

$$= 0, \quad \text{,, } p^2 < q^2.$$

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{-p + q \cos x} = \frac{-\pi}{\sqrt{p^2 - q^2}}, \quad \text{jeżeli } p^2 > q^2,$$

$$= 0, \quad \text{,, } p^2 < q^2.$$

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{1 - 2\rho \cos x + \rho^2} = \frac{\pi}{1 - \rho^2}, \quad \text{jeżeli } \rho^2 < 1,$$

$$= \frac{\pi}{\rho^2 - 1}, \quad \text{,, } \rho^2 > 1.$$

$$\int_0^{\pi} \log(1 - 2\rho \cos x + \rho^2) \, dx = 0, \quad \text{jeżeli } \rho \leq 1,$$

$$= 2\pi \log \rho, \quad \text{,, } \rho > 1.$$

Całki niewłaściwe o granicach nieskończonych.

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{a + bx^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{ab}}, \quad (a > 0, b > 0).$$

$$\int_0^{\infty} e^{-e^2 x^2} \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\rho}.$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos(2px) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-p^2}.$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^n dx = n! \quad (n \text{ całkowite}).$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} dx = \Gamma(n); \quad \text{funkcja Eulera 2-go gatunku} \\ (n \text{ jakiegokolwiek}).$$

$$\int_2^{\infty} \frac{e^{-x}}{x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

$$\int_2^{\infty} \sin^2 x dx = \int_0^{\infty} \cos^2 x dx = \infty,$$

$$\int_3^{\infty} \frac{\sin bx}{\sin ax} dx = 0. \quad (b < a).$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{e^x + 1} dx = \frac{\pi^2}{12}; \quad \int_0^{\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^2}{6},$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{2a-1}}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}} dx = \frac{2^{2a} - 1}{4a} B_{2a-1}, \quad (B \text{ są liczby Bernoulli'ego}).$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin qx}{x} dx = \frac{\pi}{2}, \quad \text{jeżeli } q > 0, \\ = 0, \quad \text{,, } q = 0, \\ = -\frac{\pi}{2}, \quad \text{,, } q < 0.$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos qx}{x} dx = \infty; \quad \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{tg} qx}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos q x}{1-x^2} dx = \frac{\pi}{2} \sin q,$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \frac{1 - \cos(px)}{x} dx = \frac{1}{2} \log(1+p^2),$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin ax}{1+2q \cos ax + q^2} \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \frac{\pi}{1+q}, \text{ jeżeli } q < 1.$$

$$= \frac{1}{2q} \frac{\pi}{1+q}, \quad \text{„ } q > 1,$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos qx}{x \sqrt{x}} dx = -\sqrt{2q\pi}$$

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{e^{-x}-1}{x} + \frac{1}{1+x} \right) \frac{dx}{x} = A-1$$

$$\int_0^{\infty} \left(e^{-x} - \frac{1}{1+x^2} \right) \frac{dx}{x} = -A$$

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{1+e^{-x}} - \frac{1}{x} \right) e^{-x} dx = A$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \log x dx = -A$$

A jest stałą

Eulera.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-px^2-bx} dx = e^{\frac{b^2}{4p}} \sqrt{\frac{\pi}{p}},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(px^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{2p}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(px^2) dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = \pi,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin px}{q^2+x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin px}{q^2+x^2} \frac{dx}{x^a} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos px}{q^2+x^2} dx = 0.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos px}{q^2+x^2} dx = \frac{\pi}{q} e^{-pq},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin px}{q^2+x^2} dx = \pi e^{-pq}.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{tg} px}{x} dx = \pi,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x} x e^x dx = -A \text{ (stała Eulera).}$$

Najbogatszy zbiór całek określonych znajduje się w dziele Bierns de Haana „Tables d'intégrales définies“ Leiden 1867.

§ 4.

Całki eliptyczne. ¹⁾

Niechaj będzie związek algebraiczny $f(x, y) = 0$ pomiędzy dwiema zmiennymi i niechaj krzywa, którą to równanie wyobraża, będzie rodzaju $p = 1$. Całka

¹⁾ Dla lepszego zrozumienia tego paragrafu oraz znaczenia użytych tu symbolów, patrz rozdział XVI.

$$\int F(x, y) dx,$$

w której F jest symbolem jakiejkolwiek funkcji wymiernej zmiennych x, y , związanych powyższem równaniem, jest całką eliptyczną ogólną.

Jeżeli funkcja f ma postać specjalną $y^2 = X$, gdzie X jest wielomianem ogólnym stopnia 1-go względem x , wtedy całkę eliptyczną można przedstawić w postaci

$$\int \frac{R dx}{\sqrt{X}},$$

gdzie R jest jakąkolwiek funkcją wymierną zmiennej x .

Całka ta, jeżeli założymy, że funkcja R nie ma pierwiastków wielokrotnych, daje się zawsze przedstawić jako kombinacja liniowa całek trzech typów różnych, mających odpowiednie charakterystyczne własności. Te trzy typy można przedstawić w postaci, nadanej im Legendre'a, lub przez Weierstrassa.

Forma Legendre'a trzech typów jest następująca:

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$ całka 1-go gatunku.
2. $\int \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx,$ „ 2-go „
3. $\frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$ „ 3-go „

Możemy przyjąć, że we wzorach tych k jest liczbą, której wartość bezwzględna jest mniejsza od 1.

Kładąc $x = \sin \varphi$, otrzymujemy powyższe całki w postaci następującej:

$$1. \quad \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{V1-k^2 \sin^2 \varphi} = F(k, \varphi),$$

$$2. \quad \int_0^{\varphi} V1-k^2 \sin^2 \varphi \cdot dy = E(k, \varphi),$$

$$3. \quad \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1+n^2 \sin^2 \varphi) V1-k^2 \sin^2 \varphi} = \Pi(n, k, \varphi).$$

Liczby k i φ nazywają się odpowiednio: modułem i amplitudą.

W formie Weierstrassa typy poprzednie przedstawiają się tak:

$$1. \quad \int_{\infty}^p \frac{dp}{V4p^3 - g_2 p - g_3},$$

$$2. \quad \int_{\infty}^p p \frac{dp}{V4p^3 - g_2 p - g_3},$$

$$3. \quad \frac{1}{2} \int_{\infty}^p \frac{V4p^3 - g_2 p - g_3 + V4q^3 - g_2 q - g_3}{p - q} \frac{dp}{V4p^3 - g_2 p - g_3}.$$

W trzeciej całce q jest stałą dowolną. Zamiast tej całki rozważać można tak zwaną całkę normalną 3-go gatunku (całkę Kleina):

$$Q = \frac{1}{2} \int_{\infty}^p \left[\frac{V4p^3 - g_2 p - g_3 - V4q_1^3 - g_2 q_1 - g_3}{p - q} - \frac{V4p^3 - g_2 p - g_3 - V4q_1^3 - g_2 q_1 - g_3}{p - q_1} \right] \frac{dp}{V4p^3 - g_2 p - g_3},$$

Można tę całkę przedstawić pod postacią całki podwójnej:

$$Q = \int_{u_1'}^{u'} du' \int_0^u du \, p(u' - u),$$

gdzie $q = p(u')$, $q_1 = p(u_1')$.

Przekształcenie Landena służyć może (patrz Rozdział XVI) do przybliżonego obliczania całek eliptycznych 1-go gatunku.. Many:

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{1+k'} \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{1-k'^2}{1+k'}\right) \sin^2 \varphi}},$$

gdzie

$$\begin{aligned} \sin \varphi_1 &= \frac{(1+k') \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \\ \cos \varphi_1 &= \frac{1 - (1+k') \sin^2 \varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \end{aligned}, \quad \varphi_1 > \varphi.$$

Jeżeli $k < 1$, to moduł całki drugiej, t. j. $k_1 = \frac{1-k'}{1+k'}$ jest mniejszy od k , a kolejne stosowanie tego wzoru doprowadza do całki o bardzo małym module i o bardzo wielkiej amplitudzie. Stosując wzór odwrotny, doszlibyśmy do całki eliptycznej o module tak bliskim 1, jak chcemy, i o bardzo małej amplitudzie.

Jeżeli $k_1, k_2, k_3, \dots$ są kolejne moduły, $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ — kolejne amplitudy, K zaś jest całką zupełną Legendre'a, t. j. wartością całki przy $\varphi = \frac{\pi}{2}$ i przy prostoliniowej drodze całkowania, będzie:

$$K = \frac{\pi}{2} (1+k_1) (1+k_2) (1+k_3) \dots$$

$$F(\varphi, k) = \frac{2K}{\pi} \cdot \frac{\varphi_r}{2r},$$

Jest to wzór przybliżony dla wartości r , dostatecznie wielkich.

Do obliczania ilości φ_r służyć mogą wzory zwrotne:

$$\operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi) = \cos \vartheta \operatorname{tg} \varphi; \quad \sin \vartheta = k,$$

$$\operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi) = \cos \vartheta_1 \operatorname{tg} \varphi_1; \quad \sin \vartheta_1 = k_1,$$

$$\operatorname{tg}(\varphi_3 - \varphi_2) = \cos \vartheta_2 \operatorname{tg} \varphi_2; \quad \sin \vartheta_2 = k_2,$$

$$\dots \dots \dots$$

Stosując odwrotne przekształcenie Landena, dochodzimy do wzoru:

$$F(\varphi_1, k) = \int \frac{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_r}{k} \log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi_r}{2} \right),$$

gdzie

$$\lambda_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}, \quad \lambda_2 = \frac{2\sqrt{\lambda_1}}{1+\lambda_1}, \quad \lambda_3 = \frac{2\sqrt{\lambda_2}}{1+\lambda_2}, \dots$$

$$\sin(2\varphi_1 - \varphi) = k \sin \varphi, \quad \sin(2\varphi_2 - \varphi_1) = \lambda_1 \sin \varphi_1,$$

$$\sin(2\varphi_3 - \varphi_2) = \lambda_2 \sin \varphi_2 \dots$$

Stosowanie przekształcenia Gaussa do obliczania całek eliptycznych 1-go gatunku prowadzi do następującego wzoru Jacobi'ego. Nadawszy całce eliptycznej postać

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{m^2 \cos^2 \varphi + n^2 \sin^2 \varphi}} = \Phi.$$

i kładąc:

$$m' = \frac{m+n}{2}, \quad n' = \sqrt{mn},$$

$$m'' = \frac{m' + n'}{2}, \quad n'' = \sqrt{m' n'},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\Delta = \sqrt{m^2 \cos^2 \varphi + n^2 \sin^2 \varphi},$$

$$\Delta' = \sqrt[m m']{\frac{n + \Delta}{m + \Delta}},$$

$$\Delta'' = \sqrt[m' m'']{\frac{n' + \Delta'}{m' + \Delta'}},$$

$$\dots\dots\dots,$$

otrzymujemy:

$$\operatorname{tg} \mu \Phi = \operatorname{tg} \varphi \cdot \frac{\Delta' \Delta'' \Delta''' \dots}{m m' m'' \dots},$$

gdzie μ jest granicą wspólną, do której dążą ilości $m^{(r)}$ i $n^{(s)}$ (t. zw. średnia arytmetyczno - geometryczna Gaussa, patrz rozdz. I, § 7).

Przy pomocy przekształcenia Gaussa rachunek cały prowadzi wprost do całki

$$\int_0^{\psi} \frac{d\varphi}{\sqrt{m^2 \cos^2 \varphi + n^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^{\psi'} \frac{d\varphi}{\sqrt{\mu^2 \cos^2 \varphi + \mu'^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{\varphi'}{\mu},$$

gdzie μ jest średnią arytmetyczno-geometryczną, φ' zaś jest granicą ilości $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \dots$, określonych za pomocą wzorów

$$\sin \varphi = \frac{m \sin \varphi_1}{m' \cos^2 \varphi_1 + m^2 \sin^2 \varphi_1},$$

$$\sin \varphi_1 = \frac{m \sin \varphi_2}{m'' \cos^2 \varphi_2 + m' \sin^2 \varphi_2}, \dots\dots$$

$$\dots\dots\dots$$

Co do tego obliczenia patrz artykuł J. Kowaleczyka w „Wiadomościach matematycznych“ II, 1898, str. 21--31.

Liczne są dzieła o całkach eliptycznych; dzieło „Elliptische Functionen“ Ennepera, zawierawiele szczegółów oraz wskazówek historycznych i bibliograficznych.

§ 5.

Całki wielokrotne.

Niechaj funkcyja z dwu zmiennych x i y będzie określona w pewnem całkowitem polu płaskiem. Podzielmy to pole na pola cząstkowe, dowolnie obrane: $\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_n$, w każdym z nich obierzmy punkt dowolny i obliczmy w nim wartość f_r funkcyi z ; następnie utwórzmy sumę $\sum f_r \sigma_r$ i weźmy granicę tej sumy, zmniejszając nieograniczenie wszystkie pola cząstkowe $\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_n$. Jeżeli ta granica istnieje i posiada wartość, niezależną od wyboru wartości f_r od wyboru pól σ oraz od sposobu, w jaki one zdążają do zera, to nazywamy ją określoną całką podwójną dla pola danego i oznaczamy symbolem

$$\iint f(x, y) dx dy.$$

Podobnie określamy całki potrójne, poczwórne i t. p.

Całkę podwójną można zawsze przedstawić za pomocą dwu kolejnych całek pojedynczych: jednej, odniesionej do jednej zmiennej i wziętej w granicach, które są funkcyami drugiej zmiennej, oraz drugiej całki, odniesionej do drugiej zmiennej i wziętej pomiędzy granicami stałymi.

Jeżeli całkę wielokrotną

$$\int \dots \int f(x_1, x_2, \dots x_n) dx_1 \cdot dx_2 \dots dx_n,$$

gdzie ilości x uważamy za funkcyje n zmiennych $y_1, y_2, \dots y_n$, chcemy przekształcić na inną całkę, zawierającą zmienne y , to przekształcamy najprzód funkcyę f pod znakiem całkowym w ten sposób, aby zawierała te nowe zmienne, potem mnożymy ją przez wyznacznik fun-

keyjny danych zmiennych y . (Twierdzenie o przekształcaniu całek wielokrotnych).

Można zawsze znaleźć funkcję F zmiennych x i y taką, aby wartość całki podwójnej określonej

$$\int f(x, y) dx dy,$$

w polu danem zależała tylko od wartości, jakie funkcya F przybiera na obwodzie pola, nie zaś od wartości funkcyi w punktach wewnętrznych.

§ 6.

Całkowanie różniczek zupełnych.

Niechaj będzie wyrażenie różniczkowe typu:

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \dots + X_n dx_n,$$

gdzie $X_1, X_2, \dots, X_n$ są funkcjami zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_n$; warunki konieczne i dostateczne na to, aby to wyrażenie było różniczką zupełną dokładną pewnej funkcji φ zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_n$, składają się z $\frac{n(n-1)}{2}$ związków:

$$\frac{\partial X_r}{\partial x_s} = \frac{\partial X_s}{\partial x_r}$$

W przypadku, gdy te warunki spełniają się, powyższe wyrażenie nazywamy różniczką zupełną dokładną lub całkowaną.

Aby zcałkować to wyrażenie, t. j. aby znaleźć funkcję φ , której ono jest różniczką zupełną, postępujemy w ten sposób. Obliczamy najprzód całkę

$$\int X_1 dx_1,$$

w której uważamy tylko x_1 za zmienną, pozostałe zaś zmienne $x_2, x_3, \dots, x_n$ za ilości stałe. Znalazłszy po zcałkowaniu funkcję $L_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$, tworzymy różniczkę zupełną i odejmujemy ją od różniczki danej; otrzymamy w ten sposób nowe wyrażenie różniczkowe, mające o jeden mniej wyrazów i o jedną mniej zmienną, t. j. zawierające tylko zmienne $x_2, x_3, \dots, x_n$. Z tem nowem wyrażeniem postępujemy tak samo, jak poprzednio, i dochodzimy do funkcji $L_2(x_2, x_3, \dots, x_n)$. Tak postępując, otrzymujemy n funkcji $L_1, L_2, \dots, L_n$, z których pierwsza zawiera wszystkie zmienne $x_1, x_2, \dots, x_n$, druga zmienne $x_2, x_3, \dots, x_n$, trzecia zmienne $x_3, x_4, \dots, x_n$ i t. d. Suma

$$L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_n + \text{const}$$

jest całką szukaną.

Wyrażenie o dwu zmiennych $X_1 dx_1 + X_2 dx_2$, po pomnożeniu przez odpowiedni czynnik μ , zależny od dwu zmiennych (czynnik całkujący), daje się zawsze zamienić na różniczkę zupełną.

Wyrażenie o trzech zmiennych

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3$$

po pomnożeniu przez pewien czynnik, daje się zamienić na różniczkę dokładną, jeżeli staje się za-
dość warunkowi:

$$X_1 \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_2} \right) + X_2 \left(\frac{\partial X_3}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_3} \right) + X_3 \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_1} \right) = 0$$

Dla $n > 3$ czynnik całkujący istnieje przy spełnieniu się $\frac{n(n-1)}{2}$ warunków, podobnych do poprzedniego, a dających się łatwo z niego otrzymać przez ustalenie jednego skaznika i przemienianie dwu pozostałych wszelkimi możliwymi sposobami.

§ 7.

Warunki całkowalności wyrażeń, zawierających pochodną jednej lub wielu funkcji jednej zmiennej.

Niechaj będzie funkcya

$$F(x, y, y', y'' \dots y^{(r)}),$$

w której zakładamy, że y jest funkcją zmiennej x ; chcemy zbadać, kiedy, bez uprzedniej znajomości tej funkcji, można wyrażenie F zcałkować, t. j. kiedy F jest pochodną dokładną pewnej funkcji zmiennych $x, y, y' \dots y^{(r-1)}$.

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to jest:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial y''} - \dots + (-1)^r \frac{\partial^r}{\partial x^r} \frac{\partial F}{\partial y^{(r)}} = 0.$$

Jeżeli funkcya F zawiera jeszcze inną funkcję z i jej pochodne, to do tego warunku przybiera warunek analogiczny, w którym zamiast y piszemy z i t. d.

Zagadnienie to ma związek z rachunkiem waryacyjnym. Twierdzenie samo wypowiedział Euler (1764), lecz pierwszy jego dowód podał Condorcet (Acad. de Paris, 1765).

Co do szczegółów patrz E. Pascal, „Rachunek waryacyjny“ przekład polski, Warszawa, 1897, str. 150—156.

ROZDZIAŁ VIII.

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE.

§ 1.

Wiadomości ogólne.

Związek pomiędzy funkcją niewiadomą y , jej pochodnemi aż do pochodnej rzędu n -tego względem zmiennej niezależnej x , oraz samą zmienną stanowi to, co nazywamy równaniem różniczkowem zwyczajnem rzędu n -tego

Jeżeli zakładamy m związków pomiędzy x , m funkcjami $y_1, y_2, \dots y_m$ zmiennej x i ich pochodnemi, to mamy układ m równań różniczkowych zwyczajnych.

Zcałkować lub rozwiązać równanie czy też układ równań jest to znaleźć tę funkcję y albo funkcye $y_1, y_2, \dots y_m$.

Jeżeli funkcja niewiadoma lub funkcye niewiadome zależą od wielu zmiennych i jeżeli istnieje jeden lub więcej związków pomiędzy niewiadomą lub niewiadomemi, zmiennemi oraz pochodnemi cząstkowemi funkcyi, wtedy mamy układ równań o pochodnych cząstkowych.

Każde równanie lub układ równań ma zawsze całkę, je-

żeli założymy ciągłość funkcyj, stanowiących pierwsze strony tych równań.

Dowody tego twierdzenia podali: Cauchy (patrz Moigno, Calcul diff. 1844, II; Briot et Bouquet, Journ. de l'Écol. polyt. cah. XXXVI); Lipschitz (Ann. di Mat, II, Bulletin Darboux X); Volterra (Giorn. di Matem. XIX); Peano (Acc. Torino, 1886, Math. Ann. XXXVII), Arzelà (Acc. Bologna 1896) i t. d.

Całka y równania różniczkowego zwyczajnego rzędu n -tego nazywa się ogólną, jeżeli zawiera n stałych $c_1, c_2, \dots, c_n$, tak że jacobian funkcyj $y, y', y'' \dots y^{(n-1)}$ względem ilości $c_1, c_2, \dots, c_n$ jest różny od zera.

Całką szczególną nazywa się całka, którą otrzymujemy z całki ogólnej, nadając stałym wartości szczególne lub zakładając pomiędzy nimi pewne związki.

Całką osobliwą nazywa się całka, której nie można otrzymać z całki ogólnej przy pomocy postępowania, wskazanego w poprzedzającym określeniu; można ją wszakże otrzymać zawsze z całki ogólnej, nadając ilościom stałym wartości, które są funkcyjami zmiennej x .

Jeżeli, mając równanie różniczkowe rzędu n -tego, znajdziemy związek pomiędzy stałą dowolną, zmienną x , funkcyją y i pochodnymi tej funkcyj aż do pochodnej rzędu $(n-1)$ -go włącznie, to związek taki nazywa się całką pierwszą równania danego.

Równanie różniczkowe zwyczajne rzędu n tego ma n różnych całek pierwszych; jeżeli jedną z nich rozwiążemy względem stałej, a następnie weźmiemy pochodną, znajdziemy dane równanie różniczkowe; jeżeli zaś pomiędzy temi całkami wyrugujemy $y', y'' \dots y^{(n-1)}$, znajdziemy całkę ogólną.

Obreślenia analogiczne, odnoszące się do równań różniczkowych cząstkowych, podajemy w § 7 niniejszego rozdziału.

§ 2.

**Równania różniczkowe zwyczajne rzędu 1-go. Czynniki całkujące.
Rozwiązania osobliwe.**

Niechaj będzie równanie rzędu 1-go, sprowadzone do postaci

$$M dx + N dy = 0.$$

Niechaj μ będzie wyrażeniem takim, że

$$\mu M dx + \mu N dy$$

jest różniczką dokładną: wtedy μ nazywa się czynnikiem całkującym (Euler, patrz wyżej § 6 rozdziału poprzedniego). Rozwiązanie danego równania można uczynić zależnem od znajomości czynnika μ .

Istnieje nieskończenie wiele czynników całkujących.

Jeżeli znamy jeden z nich μ , to inne możemy wyrazić przez $\mu f(\varphi)$, gdzie

$$d\varphi = \mu M dx + \mu N dy.$$

Jeżeli znamy dwa czynniki całkujące różne μ, μ' , to stosunek ich, przyrównany do stałej, daje całkę równania.

Czynnik całkujący μ czyni zadość równaniu:

$$M \frac{\partial \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \mu}{\partial x} - \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) = 0,$$

Jeżeli

$$- \frac{1}{N} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right)$$

jest funkcją samej zmiennej x , np. równa się $\varphi(x)$, wtedy istnieje czynnik całkujący, będący funkcją samej zmiennej x , a mianowicie:

$$\mu = e^{\int \varphi(x) dx},$$

Jeżeli wyrażenie

$$\frac{1}{M} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right)$$

jest funkcją samej zmiennej y , np. równa się $\varphi(y)$, wtedy istnieje czynnik całkujący, będący funkcją samej zmiennej y , a mianowicie:

$$\mu = e^{\int \varphi(y) dy},$$

Jeżeli wyrażenie

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$$

można przedstawić w postaci

$$N \varphi(x) - M \varphi(y),$$

wtedy istnieje czynnik całkujący, będący iloczynem funkcji samej zmiennej x przez funkcję samej zmiennej y .

Jeżeli funkcje M, N są postaci

$$M = \varphi_1(x) \varphi_2(y), \quad N = \psi_1(x) \psi_2(y),$$

wtedy czynnikiem całkującym jest $\frac{1}{\varphi_2(y) \psi_1(x)}$, a równanie należy do typu tych, w których zmienne mogą być oddzielone.

Jeżeli M i N są funkcjami jednorodnymi tego samego stopnia, wtedy

$$\frac{1}{Mx + Ny}$$

jest czynnikiem całkującym.

W przypadku tym kładąc $\frac{y}{x} = z$, możemy równanie dane przekształcić na formę bezpośrednio całkowaną:

$$\frac{dx}{x} + \frac{N(1, z)}{M(1, z) + zN(1, z)} dz = 0.$$

Równania liniowe postaci

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q,$$

gdzie P i Q są funkcjami samej zmiennej x , całkujemy przy pomocy wzoru

$$y = e^{-\int P dx} \left[\int Q e^{\int P dx} dx + \text{const} \right].$$

Równanie postaci

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}\right),$$

gdzie $ab' - a'b \neq 0$, sprowadza się do typu równań jednorodnych, jeżeli położymy:

$$ax + by + c = x', \quad a'x + b'y + c' = y'.$$

Jeżeli zaś $ab' - a'b = 0$, wtedy

$$a'x + b'y + c' = m(ax + by + c) + n,$$

a wprowadziwszy zmienną x' zamiast x , dochodzimy do typu równań, w których zmienne są oddzielone.

Równanie Bernoulli'ego

$$\frac{dy}{dx} = Py + Qy^m,$$

gdzie P i Q są funkcjami samej zmiennej x , zamienia się na równanie liniowe, jeżeli położymy $y^{1-m} = z$.

Równanie

$$\frac{dy}{dx} = P + Qy + Ry^2$$

daje się sprowadzić do typu równania Bernoulli'ego, jeżeli znamy jedną jego całkę szczególną u i położymy następnie $y = u + v$.

Równanie

$$Xdx + Ydy + Z(xdy - ydx) = 0.$$

gdzie X, Y, Z są funkcjami jednorodnymi, przytem dwie pierwsze jednego stopnia, przez podstawienie $y = zx$ przekształca się na równanie Bernoulli'ego.

Równanie Riccati'ego jest postaci:

$$\frac{dy}{dx} + by^2 = cx^{m-2},$$

gdzie b, c są stałymi. Położymy najprzód $y = \frac{z}{x}$, a następnie:

$$z = \frac{1}{b} + \frac{x^m}{z_1}, \quad z_1 = \frac{m+1}{c} + \frac{x^m}{z_2}, \quad z_2 = \frac{2m+1}{b} + \frac{x^m}{z_3}, \dots$$

Jeżeli $\frac{m-2}{m}$ jest liczbą całkowitą równą k , to po k takich podstawieniach dojdziemy do równania, w którym po jednym jeszcze podstawieniu

$$z_k = x^{km+1} v$$

zmienne zostaną oddzielone.

Jeżeli zaś skutecznymy podstawienia

$$z = \frac{x^m}{z_1}, \quad z_1 = \frac{m-1}{c} + \frac{x^m}{z_2}, \quad z_2 = \frac{2m-1}{b} + \frac{x^m}{z_3}, \dots$$

to, gdy $\frac{m+2}{m}$ jest liczbą całkowitą równą k , po k podstawieniach i po podstawieniu

$$z_k = x^{km+1} v,$$

dojdziemy do równania, którego zmienne są oddzielone.

Przypadki

$$\frac{m-2}{2m} = \text{całkowitej}, \quad \frac{m+2}{2m} = \text{całkowitej},$$

są dwoma przypadkami, w których równanie Riccati'ego daje się całkować w postaci skończonej. O całkowaniu go przez szeregi patrz niżej.

Poisson dał rozwiązanie równania Riccati'ego przy pomocy całki określonej (Journ. de l'École polyt. Cah. XVI). O równaniu Riccati'ego pisali Cayley (Phil. Magaz. XIXVI, 1868), Schläfli (Annali di mat. I), Catalan (Bull. de Belg. 1871, XXXI), Glaisher (Quart. J. XI—XII), Bach (Ann. de l'Écol. norm., (2) i III).

Literaturę tego przedmiotu znaleźć można w pracy M. Feldbluma „Teorya równania Riccati'ego“ i t. d. (po rosyjsku), Warszawa 1898, (patrz „Wiadomości matematyczne“, II, 1898).

Równanie Jacobi'ego

$$(A + A'x + A''y)(x dy - y dx) - (B + B'x + B''y) dy + (C + C'x + C''y) dx = 0,$$

za pomocą podstawień

$$x = u + \alpha, \quad y = v + \beta,$$

gdzie α i β określają się ze związków

$$A + A'\alpha + A''\beta = \frac{C + C'\alpha + C''\beta}{\beta} = \frac{B + B'\alpha + B''\beta}{\alpha} = k,$$

k zaś jest pierwiastkiem równania

$$\begin{vmatrix} A & k, & A', & A'' \\ B, & & B' - k, & B'' \\ C, & & C', & C'' - k \end{vmatrix} = 0,$$

sprowadza się do równania, w którym współczynniki różniczek są funkcjami jednorodnymi. (Patrz Winkler, Wien. Ber., LXIV.)

Podobnego typu równanie, w którym współczynniki różniczek są w ogóle funkcjami wymiernymi zmiennych x i y , nazywa się równaniem Darboux'a (patrz Darboux, Bull. des sciences math. (2), II).

Równanie Eulera

$$\frac{dx}{Vf(x)} + \frac{dy}{Vf(y)} = 0,$$

gdzie $f(x) = (1 - x^2)(1 - k^2x^2)$ ma całkę

$$y\sqrt{f(x)} - x\sqrt{f(y)} = C(1 - k^2x^2y^2).$$

Równania, nie zawierające ani x ani y a zawierające tylko y' , całkują się, jeżeli w nich zamiast y położymy $y - \frac{c}{x}$, gdzie c jest stała.

Równanie typu

$$x = \varphi \left(\frac{dy}{dx} \right) = \varphi'(p)$$

całkuje się przez wyrugowanie ilości p pomiędzy
niem a równaniem

$$y = \int p \varphi'(y) dp + \text{const.}$$

Równanie typu

$$y = \varphi \left(\frac{dy}{dx} \right) = \varphi(p)$$

całkuje się przez wyrugowanie ilości p pomiędzy
niem a równaniem

$$x = \int \frac{\varphi'(p)}{p} dp + \text{const.}$$

Równanie typu (równ. Monge'a)

$$\begin{aligned} y &= x f \left(\frac{dy}{dx} \right) + \varphi \left(\frac{dy}{dx} \right) \\ &= x f(p) + \varphi(p), \end{aligned}$$

całkuje się, jeżeli wyrugujemy p pomiędzy równa-
niem danem a następującem:

$$x = e^{-\int \frac{f(p) dp}{f(p)-p}} \left\{ - \int \frac{\varphi'(p)}{f(p)-p} e^{\int \frac{f(p) dp}{f(p)-p}} dp + \text{const} \right\}.$$

Równanie Clairauta

$$y = xp + \varphi(p), \quad \left(p = \frac{dy}{dx} \right)$$

całkuje się, jeżeli położymy w równaniu danem zamiast p stałą dowolną.

Całkę osobliwą równania Clairauta otrzymujemy, rugując p pomiędzy [równaniem danem a związkiem $x + \varphi'(p) = 0$.

W ogólności, aby otrzymać całkę osobliwą równania różniczkowego zwyczajnego rzędu 1-go, trzeba wziąć pochodną względem stałej dowolnej strony pierwszej związku, przedstawiającego całkę ogólną, przyrównać tę pochodną do zera, a następnie wyrugować stałą pomiędzy tak otrzymanem równaniem a całką ogólną.

Otrzymane w ten sposób rozwiązanie osobliwe przedstawia geometrycznie obwiednię krzywych, które przedstawia całka ogólna.

Równanie różniczkowe rzędu 1-go i stopnia 1-go względem y' nie ma rozwiązania osobliwego.

Jeżeli strona pierwsza równania różniczkowego jest algebraicznie wymierna i całkowitą względem x, y, y' i jeżeli Δ jest wyróżnikiem tego równania względem zmiennej y' , wtedy rozwiązanie osobliwe spełniać musi warunek $\Delta = 0$.

Rozwiązania osobliwe były przedmiotem licznych badań. Przytaczamy tu prace: Darboux'a (Comptes rendus LXX, 1870), Cayley'a (Messenger 1882), Casorati'ego (Ist. Lomb. 1874—1875), Lincei, 1876—1879 (Ann. di mat. XIX). Listę prac o tym przedmiocie i najważniejsze rezultaty dotąd otrzymane pomieścił Lia Predella w rozprawie, ogłoszonej w Giornale di Matem. XXXIII, 1895). Porów. Zajączkowski „Teorya ogólna rozwiązań osobliwych różniczkowych zwyczajnych“ (Pam. Akad. Um. w Krak. III, 1877), oraz „Wykład nauki o równaniach różniczkowych“, Paryż 1877, str. 171—206.

§ 3.

Równania różniczkowe liniowe.

Równanie typu

$$X_0 y^{(n)} + X_1 y^{(n-1)} + \dots + X_n y = X_{n+1},$$

gdzie ilości X są funkcyami tylko zmiennej x , nazywa się równaniem różniczkowem liniowem; jeżeli $X_{n+1} = 0$, nazywa się jednorodnem, jeżeli $X_{n+1} \neq 0$ — zupełnem.

Równanie liniowe jednorodne za pomocą podstawienia

$$y = e^{fz dx}$$

przekształcić można na innerównanie rzędu $(n-1)$ -go, które już nie jest liniowem.

Jeżeli $y_1, y_2, \dots, y_n$ są n rozwiązaniami szczególnemi równania liniowego jednorodnego, takimi, że ich wronskian jest różny od zera, wtedy rozwiązanie ogólne przedstawia wzór:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n.$$

Rozwiązaniu ogólnemu zawsze tę postać nadać można.

Jeżeli znamy jedno rozwiązanie szczególne $y = y_1$ równania liniowego jednorodnego rzędu n -tego, wtedy za pomocą podstawienia $y = y_1$ całkowanie równania zupełnego sprowadzić można do całkowania innego równania tegoż typu i rzędu $n-1$.

Dla rozwiązania równania jednorodnego o współczynniki stałych $a_0, a_1, \dots, a_n$ należy rozwiązać równanie algebraiczne, zwane charakterystycznym:

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0.$$

Jeżeli α jest pierwiastkiem pojedynczym rzeczywistym tego równania, to $y = e^{\alpha x}$ będzie całką szczególną równania różniczkowego danego.

Jeżeli α jest pierwiastkiem rzeczywistym r -krotnym równania charakterystycznego, to

$$y = e^{\alpha x}, \quad y = x e^{\alpha x}, \quad \dots, \quad y^{(r-1)} = x^{r-1} e^{\alpha x}$$

są całkami szczególnymi danego równania różniczkowego. Wreszcie każdej parze pierwiastków zespolonych sprzężonych $\alpha = m \pm ni$ odpowiadają dwie całki szczególne

$$y = \cos(nx) e^{mx}, \quad y = \sin(nx) e^{mx}.$$

W ten sposób, rozwiązawszy równanie charakterystyczne, możemy znaleźć n całek szczególnych niezależnych; z nich zaś tworzymy całkę ogólną.

Dla zcałkowania równania liniowego zupełnego, całkujemy odpowiadające mu równanie jednorodne, t. j. równanie, otrzymane przez zastąpienie funkei X_{n+1} zerem. Jeżeli całką ogólną tego równania jest

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n,$$

to rozwiązujemy według ilości $\frac{dc_1}{dx}, \dots, \frac{dc_n}{dx}$ równania:

$$\frac{dc_1}{dx} y_1 + \frac{dc_2}{dx} y_2 + \dots + \frac{dc_n}{dx} y_n = 0,$$

$$\frac{dc_1}{dx} y'_1 + \frac{dc_2}{dx} y'_2 + \dots + \frac{dc_n}{dx} y'_n = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\frac{dc_1}{dx} y_1^{(n-2)} + \frac{dc_2}{dx} y_2^{(n-1)} + \dots + \frac{dc_n}{dx} y_n^{(n-2)} = 0,$$

$$\frac{dc_1}{dx} y_1^{(n-1)} + \frac{dc_2}{dx} y_2^{(n-1)} + \dots + \frac{dc_n}{dx} y_n^{(n-1)} = \frac{X_{n+1}}{X_0},$$

Całkując otrzymane związki

$$\frac{dc_1}{dx} = q_1(x), \quad \frac{dc_2}{dx} = q_2(x), \quad \dots \quad \frac{dc_n}{dx} = q_n(x),$$

znajdziemy n funkcji $c_1, c_2, \dots, c_n$ zmiennej x , które podstawwszy w wyrażeniu na y , otrzymamy całkę ogólną.

Jeżeli znamy całkę szczególną równania zupełnego i całkę ogólną odpowiedniego równania jednorodnego, to biorąc ich sumę, znajdujemy całkę ogólną danego równania zupełnego.

Jeżeli równanie różniczkowe zupełne ma współczynniki stałe, a jego strona druga jest postaci $P e^{\lambda x}$, gdzie P jest wielomianem ze zmienną x , wtedy całką szczególną równania zupełnego jest

$$Q x^\mu e^{\lambda x},$$

gdzie μ jest liczbą pierwiastków równania danego, równych λ (lub zeru, jeżeli λ nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego), Q zaś jest wielomianem tego samego stopnia co P , o współczynnikach, które otrzymujemy, podstawiając za y to wyrażenie i wyznaczając warunki, przy których równanie sprawdza się tożsamościowo (Patrz Jordan, Cours d'analyse, III str. 158).

Jeżeli znamy całkę szczególną równania zupełnego, wtedy całkowanie sprowadzić można do całkowania równania liniowego tego samego rzędu, lecz jednorodnego.

Jeżeli znamy całkę szczególną równania jednorodnego, wtedy całkowanie równania zupełnego sprowadzić można do całkowania równania zupełnego rzędu niższego.

Jeżeli $y_1, y_2, \dots, y_n$ są całkami szczególne-

mi liniowo-niezależnemi równania jednorodnego, wtedy ich wronskian wyraża się następującym wzorem Liouville'a:

$$W = C e^{-\int \frac{x_1}{x_0} dx}.$$

Jeżeli mamy równanie zupełne rzędu 2-go:

$$y'' + Py' + Qy = X,$$

i jeżeli y_1 jest całką szczególną równania

$$y'' + Py' + Qy = 0,$$

wtedy kładąc

$$y_1 y' - y y_1' = z,$$

znajdziemy:

$$z = e^{-\int P dx} \left[\int X y_1 e^{\int P dx} + C_1 \right]$$

a całką ogólną równania danego będzie:

$$y = y_1 \int \frac{z}{y_1^2} dx + C_2 y_1.$$

Jeżeli y_1, y_2 są dwie całki szczególne liniowo-niezależne równania liniowego rzędu 2-go, to punkty zerowe funkcji y_1 są przedzielone punktami funkcji y_2 ; mianowicie pomiędzy dwoma punktami zerowymi funkcji y_1 znajduje się zawsze punkt zerowy funkcji y_2 , pomiędzy zaś dwoma punktami zerowymi funkcji y_2 znajduje się zawsze jeden punkt zerowy funkcji y_1 (Twierdzenie Sturm'a).

Równania liniowe postaci

$$a_0 (ax + b)^n y^{(n)} + a_1 (ax + b)^{n-1} y^{(n-2)} + \dots + a_n y = 0$$

sprowadzają się do typu równań o współczynnikach stałych za pomocą podstawienia $ax+b=e^t$.

Równania Laplace'a są postaci

$$(a+bx)y^{(n)} + (a_1+b_1x)y^{(n-1)} + \dots + (a_n+b_nx)y = 0.$$

Położywszy

$$a_0z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_n = \psi(z); \quad bz^n + b_1z^{n-1} + \dots + b_n = \varphi(z),$$

oraz $T = \frac{C}{\varphi(x)} e^{\int \frac{\psi(t)}{\varphi(t)} dt}$, gdzie C jest stałą, otrzymujemy całkę ogólną w postaci:

$$\left\{ C_1 \int_{\beta_0}^{\beta_1} + C_2 \int_{\beta_0}^{\beta_2} + \dots + C_{n+1} \int_{\beta_0}^{\beta_{n+1}} \right\} e^{xt} T dt,$$

gdzie ilości $C_1, C_2, \dots$ są związane jednym warunkiem, ilości zaś β mają dające się wyznaczyć wartości. (Patrz Jordan, l. c. t. III, str. 253; d'Arcis, Calcolo infinit. t. II, str. 565).

Równaniu

$$k(1-k^2) \frac{d^2(ky)}{dk^2} - (1+k^2) \frac{d(ky)}{dk} + y = 0,$$

czynią zadość peryody tak zwanej całki eliptycznej Legendre'a

$$\int \frac{dx}{V(1-x^2)(1-k^2x^2)},$$

uważane za funkcyje ilości k . (Patrz rozdział XVI)

Równanie

$$(x^3-1)y'' - 3ax^2y'' + 3a(a+1)xy - a(a+1)(a+2)y = 0$$

ma całkę ogólną

$$y = C_1(x-1)^{a+2} + C_2(x-\varepsilon)^{a+2} + C_3(x-\varepsilon^2)^{a+2},$$

gdzie ε jest pierwiastkiem sześciennym z jedności.

Równanie $y'' = x^2 y$ ma całkę ogólną

$$y = C_1 \int_{-1}^{+1} \frac{e^{\frac{\lambda}{2} x^2} d\lambda}{(1-\lambda^2)^{\frac{3}{4}}} + C_2 x \int_{-1}^{+1} \frac{e^{\frac{\lambda}{2} x^2} d\lambda}{(1-\lambda^2)^{\frac{1}{4}}},$$

(patrz Spitzer, Archiv Grunerta LII).

Równanie

$$y^{(n)} = Ax^2 y'' + Bxy' + Cy$$

badał Spitzer (Math. Ann. III, Archiv Grunerta LIII) i wyraził rozwiązanie jego za pomocą całki określonej.

Równanie

$$y'' + Py' + Qy = 0,$$

w którym P, Q są funkcjami wymiernymi zmiennej x , badał Euler; całka tego równania wyraża się za pomocą całki określonej. Przypadek, w którym te funkcje są liniowe, badał Winkler (Wiener Berichte, LXVII).

§ 4.

Równania rzędu wyższego nad pierwszy.

Równanie typu

$$f(y^{(n-1)} y^{(n)}) = 0, \text{ lub } y^{(n)} = \varphi(y^{(n-1)})$$

jeżeli w niem położymy $y^{(n-1)} = p$, daje

$$x = \int \frac{dp}{\varphi(p)} + \text{const.}$$

Rugując p z tego i poprzedzającego równania, otrzymujemy wyrażenie funkcji $y^{(n-1)}$ przez x , a za pomocą kolejnych kwadratów możemy znaleźć y .

Równanie typu

$$y^{(n)} = f(y^{(n-2)}),$$

jeżeli położymy:

$$y^{(n-2)} = p, \quad y^{(n-1)} = q,$$

daje:

$$\frac{1}{2} q^2 = \int f(p) dp + \text{const},$$

$$x = \int \frac{dp}{q} + \text{const}.$$

Otrzymujemy tu p w funkcji zmiennej x , stąd zaś znajdziemy $y^{(n-1)}$ w funkcji tejże zmiennej, a przez kolejne kwadratury dojdziemy do funkcji y .

Jeżeli będziemy uważali x i y za funkcye liniowe zmiennej t , $\frac{dy}{dx}$ za funkcją stopnia zero, $\frac{d^2y}{dx^2}$ za funkcję stopnia — 1 i t. d., to wszystkie wyrazy równania będą tego samego stopnia, a rząd równania obniży się, jeżeli położymy

$$x = e^\theta, \quad y = ze^\theta.$$

Rząd równania jednorodnego względem ilości y i jej pochodnych obniża się, jeżeli położymy:

$$y = e^z, \quad \frac{dz}{dx} = u, \quad \text{lub } y' = uy.$$

Rząd równania, nie zawierającego wyraźnie zmiennej x , można obniżyć, kładąc $y' = \frac{dy}{dx} = p$ i uważając y za nową zmienną.

Jeżeli nadamy ilości x wymiar 1, ilości y wymiar n , pochodnej y' wymiar $n-1$ i t. d., wtedy $y^{(n)}$ będzie wymiaru zero; równanie będzie jednorodnem stopnia r , a kładąc $x=e^t$, $y=e^{rt}z$, obniżymy rząd o jedność.

Rząd równania

$$y'' + Py' + Qy^n = 0,$$

w którym P i Q zawierają tylko y i x , można obniżyć o jedność w następujących przypadkach:

1) jeżeli P i Q są funkcjami tylko zmiennej x ; kładąc

$$\frac{dy}{dx} = p, \text{ otrzymujemy równanie Bernoulli'ego;}$$

2) jeżeli P i Q są funkcjami tylko zmiennej y ; kładąc

$$y' = \frac{1}{x'}, \quad y'' = -\frac{x''}{x'^3}, \text{ przychodzimy do przypadku poprzedzającego.}$$

3) jeżeli P jest funkcją tylko zmiennej x , Q zaś funkcją tylko zmiennej y . Całką pierwszą jest wtedy:

$$\log \left(\frac{dy}{dx} \right) + \int P dx + \int Q dy = \text{const},$$

a całką ogólną:

$$\int dy e^{\int Q dy} = c_1 \int e^{-\int P dx} dx + c_2.$$

Jest to przypadek równania, zwanego równaniem Liouville'a.

§ 5.

Całkowanie równań różniczkowych przez szeregi.

Najzwyczajniejszą metodą całkowania różniczkowego zwyczajnego rzędu n -tego przez szeregi jest następująca: Rozwiązujemy równanie względem $y^{(n)}$; biorąc pochodne otrzymanego wyrażenia, otrzymujemy kolejno $y^{(n+1)}$, $y^{(n+2)}$. . . wyrażone przez x , y , y' . . . $y^{(n-1)}$; nadajemy wartości dowolne ilościom y , y' . . . $y^{(n-1)}$ dla $x = x_0$ i tworzymy szereg

$$y = y_0 + (x - x_0) y'_0 + \frac{(x - x_0)^2}{2!} y''_0 + \dots$$

Jeżeli ten szereg jest zbieżny w pewnym obszarze naokoło punktu x_0 , wtedy przedstawia on całkę równania danego.

Jeżeli nadawszy wartości zupełnie dowolne na $y, y'_0 \dots y_0^{(n-1)}$, nie otrzymamy niezgodności pomiędzy wartościami pochodnych $y_0^{(n)}, y_0^{(n+1)} \dots$, szereg zaś jest zawsze zbieżny, wtedy wyobraża on całkę ogólną; jeżeli zaś nie można nadać ilościom $y_0, y'_0 \dots y_0^{(n-1)}$ wartości zupełnie dowolnych, lecz tylko pewne wartości, wtedy szereg (o ile jest zbieżny) przedstawia całkę szczególną.

Równanie Riccati'ego w przypadkach, w których nie daje się całkować w postaci skończonej, może być całkowane przy pomocy szeregów.

Niechaj będzie równanie Riccati'ego

$$y' + y^2 = cx^{m-2}.$$

Położmy $y = \frac{z'}{z}$; będzie:

$$z'' - cx^{m-2} z = 0.$$

Jeżeli z_1, z_2 są dwiema całkami szczególnymi tego równania, to całką ogólną równania danego będzie:

$$y = \frac{z'_1 + Cz'_2}{z_1 + Cz_2}.$$

Położmy:

$$z = e^{\int c^{\frac{1}{2}} x^{\frac{m}{2}-1} dx};$$

będzie

$$u'' + 2c^{\frac{1}{2}} x^{\frac{m}{2}-1} u' + \left(\frac{m}{2} - 1\right) c^{\frac{1}{2}} x^{\frac{m}{2}-2} u = 0.$$

Dwie całki szczególni tego równania, uporządkowanemi według potęg rosnących zmiennej x (przy założeniu $\frac{m}{2} - 1 = n$) są:

$$u_1 = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r e^{\frac{r}{2}} \frac{n(3n+2)(5n+4) \dots [(2r-1)n+2(r-1)]}{r!(n+1)^r \cdot n(2n+1) \cdot (2n+2) \cdot \dots (rn+r-1)} x^{r(n+1)}$$

$$u_2 = x \left\{ 1 + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r e^{\frac{r}{2}} \frac{(n+2)(3n+4) \dots [(2r-1)n+2r]}{r!(n+1)^r \cdot (n+2)(2n+3) \dots (rn+r+1)} x^{r(n+1)} \right\}$$

Te szeregi są zbieżnemi dla wszystkich wartości x .

Całką szczególną równania

$$y'' + \frac{\gamma - (\alpha + \beta + 1)x}{x(1-x)} y' - \frac{\alpha\beta}{x(1-x)} y = 0$$

zwanego równaniem Gaussa, jest tak nazwany szereg hypergeometryczny

$$y_1 = 1 + \frac{\alpha\beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \dots$$

zbieżny dla wartości x , dla których $|x| < 1$. (Patrz Rozdz. XVIII).

Równanie Legendre'a

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0,$$

ma całki szczególne:

$$y_1 = x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} x^{n-4} - \dots$$

$$y_2 = x^{-(n+1)} + \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)} x^{-(n+3)} + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+2)}{2 \cdot 4 \cdot (2n+3)(2n+5)} x^{-(n+5)} + \dots$$

zbieżne dla $|x| < 1$. Jeżeli $2n$ jest liczbą nieparzystą dodatnią lub ujemną, to te dwie całki nie są niezależnemi.

Równanie

$$xy'' + y' + y = 0.$$

ma całkę szczególną (przy każdej wartości x):

$$y_1 = 1 - \frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{1^2 \cdot 2^2} - \frac{x^3}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} + \dots$$

Równanie Bessela

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - n^2) y = 0$$

ma całkę szczególną

$$x^n \left\{ 1 - \frac{x^2}{2^2 (n+1)} + \frac{x^4}{2! 2^4 (n+1)(n+2)} - \dots \right\};$$

drugą całkę szczególną otrzymujemy, zmieniając n na $-n$. Jeżeli n jest liczbą całkowitą, to otrzymujemy w ten sposób jedną tylko całkę szczególną

Jeżeli w równaniu Bessela napiszemy:

$$y = t^\alpha z, \quad x = \gamma t^\beta,$$

to równanie przekształci się na następujące:

$$t^2 z'' + (2\alpha + 1) t z' + (\alpha^2 - \beta^2 n^2 + \beta^2 \gamma^2 t^{2\beta}) z = 0.$$

Do tej postaci można sprowadzić, przy odpowiednim doborze ilości α, β, γ , każde równanie typu

$$t^2 z'' + m t z' + (b + c t^2) z = 0.$$

Tak np. jeżeli

$$\alpha = \frac{m-1}{2}, \quad \beta = \frac{a}{n} = \frac{1}{2}, \quad \beta^2 \gamma^2 = q,$$

otrzymamy równanie:

$$t^2 z'' + m t z' + q t^2 z = 0,$$

którego całką szczególną jest:

$$y = 1 - \frac{1 \cdot q}{2!(m+1)} x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot q^2}{4!(m+1)(m+3)} x^4 + \dots$$

W przypadku szczególnym, gdy

$$2\beta + 1 = 0, \quad \alpha^2 - \beta^2 n^2 = 0,$$

otrzymujemy równanie Riccati'ego przekształcone.

§ 6.

Układy równań różniczkowych jednoczesnych.

Układ m równań różniczkowych, zawierających zmienną x , m funkcji i ich pochodne aż do pewnego rzędu względem x , nazywa się układem równań różniczkowych jednoczesnych. Jeżeli w układzie tym zachodzą pochodne rzędu wyższego nad pierwszy, to kładąc:

$$\frac{dy_1}{dx} = z, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{d^2 y_1}{dx^2} = u, \dots$$

i przyłączając te nowe równania do danych, sprowadzamy układ dany do układu n równań pomiędzy n funkcjami $y_1, y_2, \dots, y_n$, zawierającego pochodne stopnia nie wyższego nad pierwszy.

Taki układ daje się zawsze całkować za pomocą n związków skończonych pomiędzy $y_1, y_2, \dots, y_n$ z n stałymi dowolnymi.

Jeżeli z układu tego wyrugujemy $n-1$ funkcji niewiadomych wraz z ich pochodniami, dojdziemy do równania różniczkowego zwyczajnego rzędu n -tego, którego całka zawiera n stałych dowolnych. Aby to uskutecznić, stosujemy metodę następującą:

Rozwiązujemy równania względem pochodnych

$$y' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n);$$

bierzemy pochodną pierwszego z nich względem x ; podstawiamy po stronie drugiej, zamiast pochodnych funkcji y_i ich wartości, wzięte z powyższych równań; bierzemy w taki sposób pochodną $n-1$ razy i otrzymujemy $y_1', y_1'' \dots y_1^{(n)}$, wyrażone przez $x, y_1, y_2, \dots, y_n$. Rugując $y_2, y_3 \dots y_n$, znajdziemy równanie różniczkowe z funkcją y_1 . Znajac n pierwszych całek tego równania różniczkowego, t. j.

$$w_1(x, y_1, y_1 \dots y_1^{(n-1)}) = c_1; \dots; w_n(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(n-1)}) = c_n$$

i podstawiając w nich wartości poprzednie, otrzymane na $y_1, y_1'' \dots y_1^{(n-1)}$, znajdziemy n związków pomiędzy ilościami $x, y_1, y_2, \dots, y_n, c_1, c_2, \dots, c_n$.

Jeżeli równań danych nie możemy rozwiązać względem pochodnych pierwszych, to każde z nich różniczkujemy $n-1$ razy, i otrzymujemy n^2 równań pomiędzy x a ilościami

$$y_1, y_1', \dots y_1^{(n)}; y_2, y_2', \dots y_2^{(n)}; \dots; y_n, y_n', \dots y_n^{(n)}.$$

Rugując pomiędzy temi równaniami $n(n-1)$ ilości $y_2, y_2', \dots y_2^{(n)}, \dots, y_n, y_n' \dots y_n^{(n)}$, otrzymamy równanie różniczkowe rzędu n -tego względem y_1 . Rugując pomiędzy całkami pierwszymi tego równania i n^2 równaniami poprzedzającymi ilości $y_1' \dots y_1^{(n)}; y_2' \dots y_2^{(n)}; \dots y_n, \dots, y_n^{(n)}$, znajdziemy związek pomiędzy $x, y_1, y_2 \dots y_n$ a stałą.

Układ równań

$$\frac{dy_1}{dx} = \alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma; \quad \frac{dy_2}{dx} = \alpha' y_1 + \beta' y_2 + \gamma,$$

gdzie $\alpha, \beta, \gamma, \beta', \alpha', \gamma'$ są stałe. ma całki następujące:

$$\begin{aligned} y_1 + \lambda_1 y_2 + \mu_1 &= C_1 e^{(\alpha + \alpha' \lambda_1) x} \\ y_1 + \lambda_2 y_2 + \mu_2 &= C_2 e^{(\alpha + \alpha' \lambda_2) x} \end{aligned}$$

gdzie λ_1, λ_2 są pierwiastkami (różnymi) równaniami stopnia drugiego $\beta + \beta' \lambda = \lambda (\alpha + \alpha' \lambda)$, zaś μ_1 i μ_2 są odpowiednimi warto-

ściami ułamka $\mu = \frac{\alpha + \alpha' \lambda}{\gamma + \gamma' \lambda}$. Jeżeli $\lambda_1 = \lambda_2$, a stąd $\mu_1 = \mu_2$,

wtedy jedna z całek jest postaci poprzedzającej, drugą zaś jest:

$$y_2 + \frac{\alpha \gamma' - \alpha' \gamma}{(\alpha + \alpha' \lambda_1)^2} = e^{(\alpha + \alpha' \lambda_1) x} (C_2 + C_1 \alpha' x).$$

W przypadku, gdy po stronie drugiej równań danych występuje jeszcze wyraz, będący funkcją samej zmiennej x , wtedy rozwiązujemy zadanie, zakładając, że w poprzednim rozwiązaniu C_1 i C_2 są funkcjami tej zmiennej, i oznaczamy warunki, przy których czynią zadość danemu równaniu (metoda wariacji stałych).

Niechaj będzie układ równań jednoczesnych

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy_1}{Y_1} = \frac{dy_2}{Y_2} = \dots \dots \dots$$

gdzie

$$X = ax + by_1 + cy_2 + \dots \dots \dots + e,$$

$$Y_1 = a'x + b'y_1 + c'y_2 + \dots \dots \dots + e',$$

$$Y_2 = b''x + b'y + c''y_2 + \dots \dots \dots + e'',$$

$$\dots \dots \dots$$

Niechaj każdy z powyższych stosunków równa się dt ; otrzymujemy przez to $n-1$ wyrażeń typu

$$t = C_i (\lambda_i x + \mu_i y_1 + \nu_i y_i + \dots h_i)^{\frac{1}{k_i}},$$

gdzie k_i są $n+1$ pierwiastkami równania

$$\begin{vmatrix} a-k, & a', & a', & . & . & . & . \\ b, & . & b-k, & b'', & . & . & . \\ c, & . & c', & c''-k, & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \end{vmatrix} = 0,$$

ilości zaś $\lambda, \mu, \nu, \dots h$ są dane przez równania

$$\begin{aligned} \lambda_1 a + \mu_1 a' + \nu_1 a'' + . &= \lambda_1 k_1, \\ \lambda_1 b + \mu_1 b' + \nu_1 b'' + . &= \mu_1 k_1, \\ \lambda_1 c + \mu_1 c' + \nu_1 c'' + . &= \nu_1 k_1, \\ . &= . \\ \lambda_1 e + \mu_1 e' + \nu_1 e'' + . &= h_1 k_1, \end{aligned}$$

Rugując t pomiędzy $n+1$ w ten sposób otrzymanymi wyrażeniami, znajdziemy n całek niejednorodnych z n stałymi ($n+1$ całek jednorodnych).

§ 7.

Równania o pochodnych cząstkowych.

Jeżeli dany jest związek pomiędzy funkcją y , zmiennymi $x_1, x_2, \dots, x_n$ i pochodnymi cząstkowymi pierwszego rzędu $p_1, p_2, \dots, p_n$ funkcji y względem tych zmiennych, to związek $F=0$ pomiędzy $y, x_1, x_2, \dots, x_n$ i n stałymi dowolnymi, takimi, że obliczając z niego n pochodnych funkcji y i rugując

stałe, dochodzimy do równania różniczkowego danego, nazywamy się całką zupełną.

Jeżeli F jest całką zupełną ze stałymi $c_1, c_2, \dots, c_n$, to kładąc:

$$\frac{\partial F}{\partial c_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial c_2} = 0, \dots, \frac{\partial F}{\partial c_n} = 0,$$

wyrugując z tych równań i z równania $F=0$ wszystkie stałe dowolne, otrzymujemy całkę osobliwą.

Jeżeli zaś jedną ze stałych np. a uczynimy równą funkcji dowolnej wszystkich pozostałych i wyrugujemy stałe pomiędzy całką zupełną $F=0$, funkcją Φ i $n-1$ związkami

$$\frac{\partial F}{\partial a_1} + \frac{\partial F}{\partial a_n} \frac{\partial \Phi}{\partial a_1} = 0, \dots, \frac{\partial F}{\partial a_{n-1}} + \frac{\partial F}{\partial a_n} \frac{\partial \Phi}{\partial a_{n-1}} = 0,$$

otrzymamy rozwiązanie, w które wchodzi funkcja dowolna. Rozwiązanie to nazywa się rozwiązaniem ogólnem lub całką ogólną.

Znając całkę zupełną, możemy znać wszystkie inne całki.

Każde rozwiązanie jest zawsze zawarte w jednej z powyższych trzech kategorii.

Równanie o pochodnych cząstkowych 1-go rzędu, liniowe względem pochodnych, jest postaci

$$P_1 p_1 + \dots + P_n p_n = P,$$

gdzie $P_1, \dots, P_n, P$ są funkcjami zależnymi od y i od zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_n$; $p_1, p_2, \dots, p_n$ zaś są pochodnymi cząstkowymi funkcji y odpowiednio względem $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Utwórzmy układ równań różniczkowych liniowych zwyczajnych

$$\frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \dots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{dy}{P}.$$

Całkując ten układ, otrzymamy n całek $u_1 = \text{const}$, $u_2 = \text{const}$, $u_n = \text{const}$, gdzie $u_1, u_2, \dots, u_n$ są funkcjami ilości $y, x_1, x_2, \dots, x_n$. Funkcja dowolna wszystkich ilości u , przyrównana do zera, stanowi całkę ogólną równania danego. (Rozwiązanie Lagrange'a).

W przypadku, gdy równanie nie jest liniowem względem $p_1, p_2, \dots, p_n$, całkowanie sprowadzić można do całkowania równań liniowych. Metody, do tego celu służące, znane są pod nazwą metod Pfaffa i Jacobi'ego.

Niechaj będzie równanie

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, y, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0;$$

postaramy się znaleźć $n - 1$ związków podobnych z $n - 1$ stałemi:

$$F_1(x_1, x_2, \dots, x_n, y, p_1, p_2, \dots, p_n) = a_1,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$F_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n, y, p_1, p_2, \dots, p_n) = a_{n-1},$$

takich, aby $p_1, p_2, \dots, p_n$, otrzymane z powyższych n równań, zamieniały drugą stronę równania

$$dz' = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \dots + p_n dx_n$$

na różniczkę zupełną. Zcałkowawszy to ostatnie równanie, znajdziemy funkcję y , wyrażoną przez ilości x i nową stałą.

Znalezienie funkcji $F_1 \dots F_{n-1}$ zależy od całkowania równania różniczkowego liniowego o pochodnych cząstkowych. Jeżeli położymy

$$\left(\frac{\partial F_m}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F_m}{\partial z} p_i, \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

to P_1 zależęć będzie od równania o pochodnych cząstkowych

$$0 = [FF_1] = \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \right), & \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} \right) \\ \frac{\partial F}{\partial p_1}, & \frac{\partial F_1}{\partial p_1} \end{vmatrix},$$

F_2 od dwu równań analogicznych

$$[FF_2] = 0, \quad [F_1 F_2] = 0,$$

F_3 od trzech równań:

$$[FF_3] = 0, \quad [F_1 F_3] = 0, \quad [F_2 F_3] = 0,$$

i t. d.

Nie potrzeba wyznaczać całek ogólnych tych równań, wystarczy wyznaczenie ich całek szczególnych. Szczegóły musimy tu pominąć.

Metoda Pfaffa sprowadza rozwiązanie danego równania do zagadnienia następującego: „Zcałkować przy pomocy m całek wyrażenie postaci

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \dots + X_{2m} dx_{2m} = 0,$$

gdzie ilości X są funkcyami zmiennych x . J a c o b i pierwszy zajął się metodą Pfaffa (Crelle, II), zmodyfikował ją i wydoskonalił, wreszcie stworzył metodę nową (patrz niżej wskazówki bibliograficzne).

W rozwiązaniu przy pomocy metody Pfaffa napotykamy wyrażenia zwane pfaffianami, które są pierwiastkami kwadratowemi wyznaczników pól symetrycznych rzędu parzystego (patrz wyżej, Rozdział III, § 2).

Równanie Eulera

$$a \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + 2b \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} + c \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = 0$$

ma całkę ogólną

$$y = f(x_1 + \lambda_1 x_2) + \varphi(x_1 + \lambda_2 x_2),$$

gdzie f i φ są symbolami funkcji dowolnych, λ_1 i λ_2 zaś są pierwiastkami równania

$$a + 2b\lambda + c\lambda^2 + 0.$$

Jeżeli $\lambda = \lambda_2$, całka ogólna ma postać:

$$f(x_1 + \lambda x_2) + \varphi(x_1 + \lambda x_2) (\gamma x_1 + \delta x_2),$$

gdzie γ i δ są stałe dowolne.

Jeżeli $b = 0$, otrzymujemy tak zwane równanie strun dźwięczących (równanie Bernoulli'ego, w którym y jest wysunięciem miejsca punktu o odciętej x_1 ; x_2 oznacza czas)

Równanie Laplace'a

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} + M \frac{\partial y}{\partial x_1} + N \frac{\partial y}{\partial x_2} + Py + Q = 0,$$

w którym M, N, P, Q są funkcjami samej zmiennej x , całkuje się w ten sposób:

Jeżeli $P - \frac{dM}{dx_1} - MN - A = 0$, wtedy całkowanie sprowadzić można do całkowania równania

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} + Nu + Q = 0,$$

które, nie zawierając pochodnej względem x_2 , całkuje się jak równanie różniczkowe zwyczajne, pod warunkiem, że stałą dowolną uczynimy równą funkcji dowolnej zmiennej x_2 . Znalazłszy tym sposobem u , podstawiamy tę wartość w równaniu

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} + My = u,$$

całkujemy je podobnie, jak poprzednie, i znajdujemy y z dwiema funkcjami dowolnymi, z których jedna zależy tylko od x_1 , druga tylko od x_2 .

Jeżeli A nie jest zerem, wtedy przy pomocy podstawienia

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} + My = u$$

otrzymujemy równanie ze zmienną u tegoż typu, co dane. Do tego nowego równania stosujemy tożsamo postępowanie, t. j. badamy, czy nowa ilość A nie jest zerem i t. d.

Do równania typu powyższego daje się sprowadzić i takie równanie, w którym zachodzą liniowo i pozostałe pochodne drugie funkcyi y .

Patrz Lacroix (Calcul intégral), Imszenieckij (Archiv Grunerta LIV), oraz notę Boussinesqa (Comptes Rendus LXXIV), który sądził, że pierwszy uskutecznił powyższą redukcję (porów. Serret, Comptes Rendus LXXIV).

Równanie Liouville'a

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} = e^{2\lambda y}$$

ma całkę ogólną:

$$y = \frac{1}{2\lambda} \log \frac{f'(x_2) \varphi'(x_1)}{[\lambda f(x_2) + \varphi(x_1)]^2},$$

gdzie f, φ są dwiema funkcyami dowolnemi; pierwsza zmiennej x_2 , druga zmiennej x_1 .

Darbois (Comptes rendus 1882) rozważał równanie następujące:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{m(1-m)}{(x_1 - x_2)^2} y.$$

Jest to przypadek szczególny równania

$$(x_1 - x_2) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} - \beta' \frac{\partial u}{\partial x_2} + \beta \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0,$$

gdyż, kładąc w pierwszym $y = (x_1 - x_2)^m u$, otrzymujemy przypadek szczególny drugiego (w którym $\beta = \beta' m$).

Całką równania ogólniejszego jest:

$$u = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(a) (x_2 - a)^{-\beta'} (a - x_1)^{-\beta} da \\ + (x_1 - x_2)^{1-\beta-\beta'} \int_{x_1}^{x_2} \psi(a) (x_2 - a)^{\beta-1} (a - x_2)^{\beta'-1} dx,$$

gdzie φ i ψ są funkcjami dowolnemi.

Rezultat ten zawdzięczamy Appelowi (Bull. Darboux 1882. str. 314). Równaniem tem zajmowali się już Euler (Calculus integr. III) i Poisson (Journ. de l'Ecol. polyt XII). Inne wskazówki znaleźć można u Darboux'a (Théorie des surfaces, II str. 54) i Jameta (Bull. Darboux, 1895, str. 208).

Równanie jeszcze ogólniejsze

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{u}{x_1 - x_2} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{m}{(x_1 - x_2)} \frac{\partial u}{\partial x_2} - \frac{p}{(x_1 - x_2)^2} u = 0$$

badał już Laplace (Acad. des sciences 1773); sprowadzić je można do poprzedzającego.

Sposób całkowania równania

$$\frac{\partial^n y}{\partial x_1^n} = x_1^m \frac{\partial^{m+n} y}{\partial x_2^{m+n}} + F_1'(y) + x F_2(y) + \dots + x^{m-1} F_m(y)$$

znaleść można u Spitzera (Archiv Grunerta LI, 1870).

Całkowaniem równania

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}$$

zajmowali się Schläfli (Crelle LXXII) i Le Roux (Bull. Darboux, 1895).

Literatura o równaniach różniczkowych jest bardzo rozległa.

Rys historyczny tej teorii znaleźć można w dziele Schlesi-
ngera: „*Theorie der linearen Differentialgleichungen*“ (Lipsk 1895—97),
gdzie znajduje się także dość zupełna bibliografia.

Pierwszy Euler (1769) zajmował się wyczerpująco równaniami
różniczkowymi; po nim D'Alembert, Legendre, Cauchy i inni.

W ostatnich czasach zajmowano się szczegółowo równaniami róż-
niczkowymi liniowymi, badając ich związek z teorią funkcyj oraz teorią
grup przekształceń (patrz Rozdział IX). W tym nowym kierunku ba-
dań należy wymienić przede wszystkim prace Fuchsa (Crelle, LXVI,
LXVIII, Berl. Akad. 1884 i t. d.). Inne cytaty podajemy w rozdziale
następnym. Celem prac doby najświeższej jest nietyle znajdowanie
całek, ile badanie zachowania się tychże w sąsiedztwie danego punktu.

Z książek, traktujących o równaniach różniczkowych, wymieniamy
dzieła: Boole'a (Londyn 1865—1872) Wł. Zajączkowskiego
(Wykład nauki o równaniach różniczkowych, Paryż 1877), Forsyth'a
(Londyn 1885, Cambridge 1890, przekład niemiecki Masera, 1889).
Schlesingera wyżej cytowane, Craiga (New-York, 1889) i t. d.

Równaniami o pochodnych cząstkowych zajmowali się: d'Alembert,
Euler, Lagrange („*Théorie des fonctions analytiques*” i „*Calcul des fonctions*”);
Cauchy (Comptes rendus XIV, XV, XVI) i inni.

Pierwsze prace o równaniach liniowych 1-go rzędu zawdzięczamy
Lagrange'owi, Cauchy'emu, Jacobie'emu (Crelle II, XXIII,
Werke IV); o równaniach nieliniowych—Lagrange'owi, Charpi-
towi (w pracy przedstawionej Akad. paryskiej w 1784, lecz nieogłoszo-
nej; metodę jej wyłożył Lacroix w swoim „*Rachunku*“ t. II,
str. 548). Następują potem metody Pfaffa (Berl. Abh. 1814—1815),
metoda charakterystyk Cauchy'ego (Exercices II, 1841), Jacobie'ego
(Crelle XVII, Liouville III), nowa metoda tegoż (Crelle LX), prace
Mayera (Math. Ann. III, V, VI, VIII) i Liego (tamże V, IX, XI).
O rozwiązaniach osobliwych pisał Darboux (w *Mém. des Sav. étrang.* XXVII, 1883). Inne ważne prace są Ampère'a (Journ.
de l'Écol. pol. cah. XVII—XVIII), Clebscha (Crelle LXV), Ko-
walewskiej (tamże LXXX).

Zbiór metod całkowania równań o pochodnych cząstkowych po-
dają: Imshenetzky (Sur l'intégration des équ. du 1^{er} ordre, prze-

kład Hoüela, Paryż 1869; tegoż Sur l'intégr. des'equ. du 2 ordre, Greifswald 1872 i Archiv Grunerta 1869, 1872), Graindorge (Mém. de la Soc. scient. de Liège (2), V, 1872), Goursat (Paryż, 1891—1896), Mansion (po po francuku i w przekładzie niemieckim, Berlin 1892, gdzie przedrukowano rozprawy Kowalewskiej, Imszenieckiego i Darboux'a).

Badania, dotyczące istnienia całek równań o pochodnych cząstkowych, ogłosili: Riquier (Ann. de l'Écol. Norm. (3), X, 1893), Königsberger (Math. Ann. XLII), Bendixon (Bull. de la Société math. de France, 1896) i inni.

Biblioteka
matematyczno-fizyczna
➤ANTONIEGO WILKA.➤
Liczba:

ROZDZIAŁ IX.

TEORIA GRUP PRZEKSZTAŁCEŃ.

§ 1.

Grupy przekształceń punktowych.

Niechaj będzie n zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_n$; przekształćmy je na zmienne $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ za pomocą wzorów:

$$(1) \quad x'_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, a_1, a_2, \dots, a_r), \\ (i = 1, 2, \dots, n)$$

gdzie f_i są funkcyami analitycznymi w pewnym obszarze.

Każdemu układowi wartości $a_1, a_2, \dots, a_r$ odpowiada przekształcenie. Przekształcenie $x'_i = x_i$ nazywa się zwykle przekształceniem tożsamościowym.

Przyjmijmy: 1) że te funkcyje są odwracalne, t. j. że z wzorów powyższych możemy wyrazić ilości x_i jako funkcyje ilości x'_i . 2) że ilości a jest istotnie r , t. j. że zmieniając je wszystkimi możliwymi sposobami, otrzymujemy ∞^r przekształceń; 3) że przekształcając za pomocą jednego z powyższych wzorów ilości x' na x' , a następnie za pomocą innego lub tegoż wzoru ilości x' na x'' , otrzymujemy zawsze przekształcenie, zawarte we wzorze (1). Mówimy wtedy, że przekształcenie

powyższe (1) w liczbie ∞' tworzą grupę ciągłą przekształceń. Grupa ta nazywa się ciągłą dla tego, że zmieniając sposobem ciągłym parametry a , możemy przejść od jednego przekształcenia grupy do każdego innego. Przeciwnie, grupy podstawień pomiędzy n elementami można w tem znaczeniu uważać za nieciągłe.

Jeżeli r jest liczbą skończoną, grupa nazywa się skończoną klasy r -tej lub r -parametrową (r -gliedrig).

Jeżeli w szczególności funkcyje f są funkcjami wymiernymi ilości x i a , są, a są także wymiernymi ich odwrócenia, mamy wtedy przekształcenia, zwane przekształceniami Cremony. Tworzą one oczywiście grupę, zwaną grupą Cremony, do której stosuje się następujące twierdzenie:

Grupa Cremony zawiera przekształcenie tożsamościowe 1, a przekształcenia jej można uporządkować parami w ten sposób, że każdemu przekształceniu odpowiada drugie takie, którego iloczyn przez pierwsze daje 1, (to drugie nazywa się przekształceniem odwrotnem względem pierwszego).

Nie wszystkie grupy posiadają własność pierwszą i drugą.

Jeżeli wszystkie przekształcenia f tworzą grupę, to ich odwrócenia tworzą też grupę.

Dwie grupy nazywają się podobnemi, jeżeli od wzorów jednej można przejść do wzorów drugiej, zakładając, że parametry dawne są funkcjami nowych, oraz że dawne zmienne są funkcjami nowych zmiennych.

Jeżeli przekształcenia f tworzą grupę, wtedy ilości x' , uważane za funkcyje parametrów a , czynią zadość pewnym równaniom różniczkowym.

Jeżeli grupa jednoparametrowa zawiera przekształcenie tożsamościowe, to jej przekształcenia są przemienne (t. j. iloczyn ich jest niezależny od porządku czynników) i dają się podzielić na pary przekształceń wz-

jemnie odwrotnych; nadto każda taka grupa jest podobna do grupy przesunięć

$$y_2' = y_1, \dots, y_{n-1}' = y_{n-1}, y_n' = y_n + t.$$

Przekształcenia takiej grupy można wyrazić tak:

$$x_i' = x_i + \frac{t}{1} \xi_i(x_1, \dots, x_n) + \frac{t^2}{2!} X(\xi_i) + \frac{t^3}{3!} X(X(\xi_i)) + \dots$$

gdzie symbol X oznacza $\sum_1^n \xi_k \frac{\partial}{\partial x_k}$.

Jeżeli uczynimy t nieskończenie małym, będziemy mieli przekształcenie zwane nieskończonościowym. Jest ono:

$$x_i' = x_i + \frac{\delta t}{1} \xi_i + \frac{\delta t^2}{2!} X(\xi_i) + \frac{\delta t^3}{3!} X(X(\xi_i)) + \dots$$

Przekształcenie nieskończonościowe jest określone przez funkcję ξ , a więc i przez symbol X .

Możemy powiedzieć:

Każda grupa jednoparametrowa, zawierająca przekształcenie tożsamościowe, określa przekształcenie nieskończonościowe i sama jest przez takie przekształcenie określona.

Przekształcenia nieskończonościowe, wyrażone symbolami

$$X_1, X_2, \dots, X_r$$

nazywają się niezależnymi od siebie, jeżeli związek

$$e_1 X_1(f) + e_2 X_2(f) + \dots + e_r X_r(f) = 0.$$

w którym ilości e nie zależą od zmiennych x , może zachodzi tylko wtedy, gdy wszystkie te ilości e są zerami.

Każdej grupie r -parametrowej odpowiada r niezależnych przekształceń nieskończonościowych $X_1, X_2, \dots, X_r$; jeżeli posiada ona nadto przekształcenie tożsamościowe, to mo-

żna przekształcenia jej wyrazić za pomocą wzoru

$$x'_i = x_i + \sum_{k=1}^r \lambda_k \xi_{ki} + \sum_{k,j}^{1 \dots r} \frac{\lambda_k \lambda_j}{2!} X_k (\xi_{ji}) + \dots$$

gdzie $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_r$ są r parametrami dowolnymi.

Grupa r -parametrowa z podstawieniem tożsamościowym zawiera r przekształceń nieskończonostkowych niezależnych, i nie więcej niż n .

Ważną grupą przekształceń punktowych jest t. z. grupa przekształceń rzutowych (czyli grupa rzutowa); przekształca ona zawsze prostą na prostą, jeżeli ilości x uważamy za współrzędne punktu w przestrzeni n -wymiarowej. Jej wyrażenie jest następujące:

$$x'_i = \frac{a_{1i} x_1 + \dots + a_{ni} x_n + a_{n+1,i}}{a_{1,n+1} x_1 + \dots + a_{n,n+1} x_n + a_{n+1,n+1}}$$

Jej podgrupa, dla której

$$a_{1,n+1} = \dots = a_{n,n+1} = 0,$$

nazywa się grupą liniową.

§ 2.

Niezmienniki skończone i różniczkowe grupy jednoparametrowej.

Nazywamy niezmiennikiem skończonym wzgl. różniczkowym grupy funkcję samych zmiennych, albo też i ich pochodnych, która nie zmienia się przez przekształcenia grupy.

Aby funkcyja $\Omega(x_1, x_2)$ nie zmieniała się przy wszystkich podstawieniach grupy jednoparametrowej, jest koniecznem i dostatecznem, by było $X(\Omega)=0$, gdzie X jest symbolem przekształcenia nieskończonostkowego grupy. Niezmiennik Ω jest przeto rozwiązaniem równania różniczkowego o pochodnych cząstkowych

$$\xi_1 \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial \Omega}{\partial x_2} = 0.$$

Aby ogół wszystkich ∞^1 krzywych, które przedstawia równanie $\omega(x_1, x_2)=\text{const.}$, pozostał niezmienny przy wszystkich podstawieniach grupy jednoparametrowej, jest koniecznem i dostatecznem, by $X(\omega)$ było funkcyą samego ω . Jeżeli w szczególności $X(\omega)=0$, to i każda pojedyncza krzywa pozostaje niezmienną.

Równanie różniczkowe rzędu 1-go

$$M_1 dx_1 - M_2 dx_2 = 0$$

pozostaje niezmiennem co do postaci (prócz ewentualnego czynnika) dla wszystkich przekształceń grupy wtedy i tylko wtedy, jeżeli kładąc symbolicznie

$$Y = M_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + M_2 \frac{\partial}{\partial x_2},$$

mamy tożsamościowo:

$$X(Y) - Y(X) = \lambda \cdot Y,$$

gdzie λ jest funkcyą tylko ilości x_1 i x_2 .

Równanie różniczkowe $M_1 dx_1 - M_2 dx_2 = 0$ należy do grupy jednoparametrowej, i jeżeli

znany niezmiennik grupy $\Omega(x_1, x_2)$, to całkowanie równania różniczkowego sprowadza się do kwadratury.

Równanie różniczkowe 1-gorzędu

$$F\left(x_1, x_2, \frac{dx_2}{dx_1}\right) = 0$$

należy do grupy jednoparametrowej, której przekształceniem nieskończonostkowym jest

$$X = \xi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial x_2},$$

wtedy i tylko wtedy, gdy wyrażenie

$$\begin{aligned} & \xi_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} \\ & + \left[\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \right) \frac{dx_2}{dx_1} - \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \left(\frac{dx_2}{dx_1} \right)^2 \right] \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{dx_2}{dx_1} \right)} \end{aligned}$$

jest zerem przy $F=0$, w założeniu, że równanie dane jest takim, iż trzy pochodne funkcyi F względem $x_1, x_2, \frac{dx_2}{dx_1}$ nie znikają wszystkie wskutek równania $F=0$.

Jeżeli znamy niezmiennik skończony $\Omega(x_1, x_2)$ grupy jednoparametrowej pomiędzy dwiema zmiennymi, to za pomocą kwadratur otrzymać można wszystkie możliwe niezmienniki różniczkowe rzędu 1-go (zawierające tylko pochodną pierwszą ilości x_2 względem x_1); a przyrównawszy do zera te niezmienniki różniczkowe, otrzymamy wszystkie możliwe równania różniczkowe rzędu 1-go, należące do tej grupy.

§ 3.

Przekształcenia stycznościowe.

Przekształcenia, o których mowa w dwu poprzednich paragrafach, nazywają się przekształceniami punktowymi; różnią się one od tak zw. przekształceń stycznościowych, które są w pewnej mierze przekształceniami ogólniejszemi. Dla prostoty przyjmijmy, że mamy dwie tylko zmienne; przekształcenie punktowe określa się za pomocą wzorów

$$x'_1 = f(x_1, x_2), \quad x'_2 = f_2(x_1, x_2).$$

Na podstawie tych wzorów pochodną zmiennej x'_2 względem x'_1 można wyrazić przez pochodną zmiennej x_2 względem x_1 , a mianowicie:

$$\frac{dx'_2}{dx'_1} = \frac{\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dx_1}}{\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dx_1}} = \varphi\left(x_1, x_2, \frac{dx_2}{dx_1}\right),$$

Skutkiem tego forma

$$dx_2 - \frac{dx_2}{dx_1} dx_1 = 0$$

zamienia się (przy pominięciu czynnika) na

$$dx'_2 - \frac{dx'_2}{dx'_1} dx'_1 = 0.$$

Położmy $\frac{dx_2}{dx_1} = p$; wyobraźmy sobie poprzednie przekształcenie, jako przypadek szczególny przekształcenia ogólniejszego pomiędzy trzema zmiennymi, mającego postać

$$x'_1 = \varphi_1(x_1, x_2, p) \quad x'_2 = \varphi_2(x_1, x_2, p), \quad p' = \varphi_3(x_1, x_2, p)$$

i załóżmy, że te trzy związki pozostawiają bez zmiany formę różniczkową

$$dx_2 - p dx_1 = 0,$$

t. j. przekształcają ją (przy pominięciu czynnika) na

$$dx'_2 - p' \cdot dx'_1 = 0.$$

Mówimy wtedy, że uskutecznione przekształcenie jest stycznościowym.

Jeżeli pomiędzy trzema powyższymi związkami można wyrugować p tak, aby otrzymać x'_1, x'_2 , wyrażone jedynie przez x_1, x_2 , wtedy przekształcenie stycznościowe staje się punktowym.

Wykonywając kolejno dwa przekształcenia stycznościowe, otrzymujemy znowu przekształcenie stycznościowe.

Odwrotność przekształcenia stycznościowego jest przekształceniem stycznościowym.

Funkcye φ_1, φ_2 , określające przekształcenie stycznościowe, czynią załość związkowi:

$$[\varphi_1, \varphi_2] = \frac{\partial \varphi_1}{\partial p} \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + p \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial \varphi_2}{\partial p} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + p \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} \right) = 0.$$

I odwrotnie, jeżeli dwie funkcje φ_1, φ_2 sprawdzają związek $[\varphi_1, \varphi_2] = 0$, to za pomocą nich można zawsze, i to sposobem jedynym, określić przekształcenie stycznościowe.

§ 4.

Niezmienne i parametry różniczkowe.

Niechaj będzie $n + m$ zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_n; z_1, z_2, \dots, z_m$, z których zmienne z są funkcyami zmiennych x ; niechaj będzie nadto grupa przekształceń wszystkich zmiennych. Funkcya wszystkich zmiennych i pochodnych ilości z względem x , pozostająca bez zmiany, gdy wykonywamy wszystkie przekształcenia grupy, jest niezmiennikiem różniczkowym grupy. Jeżeli grupa jest grupą całkowitą, mamy niezmiennik różniczkowy bezwzględny. Jeżeli funkcya ta obejmuje nadto funkcyę dowolne i ich pochodne, mamy to, co nazywamy zwykle parametrem różniczkowym; jest to wyrażenie, przejęte z teoryi powierzchni.

Niezmiennikiem różniczkowym grupy rzutowej jest niezmiennik *Schwarza*

$$\frac{z''' z' - \frac{3}{2} z''^2}{z'^3}.$$

Ponieważ niezmiennik ten ma własność, polegającą na tem, że pozostaje on niezmiennionym (prócz czynnika), gdy przemieniamy z i x , Sylwester nazwał go *recyprokantem* (wzajemnikiem) i rozciągnął później tę nazwę na wszystkie niezmienniki różniczkowe rzutowe.

Można pomyśleć niezmiennik różniczkowy w innem znaczeniu, oduosząc go mianowicie do formy różniczkowej zasadniczej; mamy wtedy pojęcie niezmiennika różniczkowego, które zbliża się bardzo do pojęcia niezmiennika w teoryi form algebraicznych. Niechaj będzie dana forma różniczkowa

$$\sum_{i,j,\dots} Z_{ij} \dots dx_i dx_j \dots \dots \dots,$$

t. j. funkcya jednorodna całkowita określonego stopnia względem $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ ze współczynnikami, które są funkcyami wszystkich zmiennych.

Dla wszystkich przekształceń grupy, forma ta różniczkowa przekształca się na inną tego samego stopnia; współczynniki Z przechodzą na inne, lecz w ten sposób, że w ogólności każdy nowy współczynnik $Z_{ij} \dots$ jest w ogóle nie wprost przekształceniem współczynników dawnych, lecz pewną kombinacją przekształceń wszystkich dawnych Z . Funkcja zmiennych x , ilości Z i funkcji dowolnych, która przy wszystkich podstawieniach grupy zachowuje tę samą postać co do ilości x i Z nowych, nazywa się wogóle *parametrem różniczkowym*, należącym do grupy.

Przypadek ten można uważać za szczególny względem poprzedzającego, jeżeli przyjmiemy, że przekształcenia, którym poddajemy ilości z (będące funkcjami zmiennych x) są właśnie takimi, jakie wynikają z przedstawienia nowych współczynników Z formy różniczkowej przez współczynniki dawne i przez zmienne.

Pod tą ostatnią postacią szczególną zadanie o wyznaczeniu parametrów lub niezmienników różniczkowych wiąże się z badaniami, rozpoczętymi przez Gaussa, Lamégo, Jacobiego i rozwiniętymi w najnowszych czasach przez Beltraniego i innych, którzy za punkt wyjścia wzięli teorię powierzchni. Badania te należy uważać za przypadek szczególny zagadnienia wyżej wysłownego i dla tego jeszcze, że w niem nie rozpatrujemy grupy specyalnej przekształceń, lecz grupę całkowitą wszystkich przekształceń. Nazwa „*parametr różniczkowy*” pochodzi od Lamégo.

Według wyłożonych tu pojęć, niezmiennikiem różniczkowym jest tak zw. *krzywizna Gaussa* powierzchni (patrz „*Geometria różniczkowa*“).

Jeżeli mamy formę różniczkową kwadratową

$$\sum_{r,s}^{1,\dots,n} a_{rs} dx_r dx_s,$$

i przez a oznaczymy wyznacznik ilości a_{rs} , przez A — wyznacznik układu dołączonego, przez A_{rs} — jego elementy, wtedy wyrażenie

$$\Delta_1 U = \sum_{r,s} A_{rs} \frac{\partial U}{\partial x_r} \frac{\partial U}{\partial x_s},$$

(gdzie U jest funkcją dowolną zmiennych) jest parametrem różniczkowym rzędu 1-go.

Wyrażenie

$$\Delta_1 U V = \sum_{rs} A_{r,s} \frac{\partial U}{\partial x_r} \frac{\partial V}{\partial x_s}$$

jest parametrem różniczkowym rzędu 1-go, zawierającym dwie funkcje dowolne.

Wyrażenie

$$\Delta_2 U = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_r \frac{\partial \left(\sqrt{a} \frac{\partial U}{\partial x_r} \right)}{\partial x_r}$$

jest parametrem różniczkowym rzędu 2-go.

Głównem dziełem o grupach przekształceń i ich zastosowaniach do równań różniczkowych jest dzieło Liego: „Theorie der Transformationsgruppen“ i t. d., 3 tomy, Lipsk 1891 — 93; dalej tegoż: „Vorlesungen über continuierliche Gruppen mit geometrischen und anderen Anwendungen“ Lipsk 1893, herausg. von G. Scheffers; „Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen, herausgegeben“ von G. Scheffers, Lipsk 1891 (streszczone przez J. Paczowskiego w „Pracach matematyczno-fizycznych“, t. VII, Warszawa 1896); „Geometrie der Berührungstransformationen“, Lipsk 1896 (streszczone przez E. Wierzbickiego w „Pracach matematyczno-fizycznych“ t. IX, Warszawa 1898). Nie cytujemy tu licznych rozpraw Liego w różnych tomach Rozpraw Akademii w Chrystianii i w dzienniku „Mathematische Annalen“. Z polskich autorów w przedmiocie tym ogłosił rozprawy K. Żorawski, („Acta mathematica“ t. 17, 1891 i w „Rozprawach Akademii krakowskiej“ t. XXIII i następne).

O bibliografii tego przedmiotu, zwłaszcza będącej w związku z teorią równań różniczkowych, można znaleźć dane w nowem dziele

Schlesingera „Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen“, Lipsk 1895—97).

W pracach o niezmiennikach i parametrach różniczkowych winniśmy odróżnić dwie kategorie: jedne z nich mają swój punkt wyjścia bezpośrednio w teorii grup, inne zaś wychodzą z badania form różniczkowych, specjalnie kwadratowych.

Do kategorii pierwszej należą rozważania Schwarza nad niezmiennikiem różniczkowym grupy rzutowej (Bestimmung einer speziellen Minimalfläche, Berl. Abh. 1871), Brioschi'ego (Annali di mat. XIII, Acta math. XIV i t. e.), Sylvestera (Am. Journ. VIII, X), Halphen'a nad niezmiennikami różniczkowymi rzutowymi (Journ. de l'École polyt. 1880, Comptes rendus LXXXVI, Journ. de Liouv. 1876, 1880, 1883, Acta math. III), Forsyth'a (Phil. Transact. 1888), ogólne badania Liego (Math. Ann. XXIV, (w związku z niemi cytowana wyżej rozprawa Żorawskiego o przekształceniu powierzchni, Acta math. XVII, 1891, Rozprawy Akad. krak. 1893).

Do kategorii drugiej badań należą rozważania Gaussa nad krzywizną powierzchni, następnie badania Lamégo (Leçons sur les coordonnées curvilignes), Jacobi'ego (Werke II), Casorati'ego (Annali di mat. (1), III, IV; (2), XII) i Beltrami'ego (Acc. Bologna (2), VIII, 1896), który rozciągnął na przypadek n zmiennych badania poprzednie. W dziele Brioschi'ego o wyznacznikach (1854) rozpatruje się już przypadek niezmiennika różniczkowego rzędu 2-go dla n zmiennych, lecz dla specjalnego przypadku do formy kwadratowej zasadniczej. Wreszcie należy tu wspomnieć o nowszych badaniach: Ricci'ego (Annali di mat. XII, XIV, Lincei, 1888, 1889, Ist. Veneto 1893), Padova'y (Lincei 1887), Frobeniusa (Crelle CX), Knoblaucha (tamże CXI) i innych.

ROZDZIAŁ X.

RACHUNEK RÓŻNIC SKOŃCZONYCH.

§ 1.

Wiadomości ogólne.

Wyobraźmy sobie kolej wartości $x_0, x_1, x_2, \dots$ zmiennej x i niechaj $f(x)$ będzie funkcją tej zmiennej; różnice $f(x_1) - f(x_0), f(x_2) - f(x_1), \dots$ nazywają się różnicami pierwszymi funkcji f i oznaczają się za pomocą symbolów $\Delta f(x_0), \Delta f(x_1), \dots$

Wykonywając podobne działania na różnicach pierwszych, otrzymujemy różnice drugie: $\Delta^2 f(x_0), \Delta^2 f(x_1), \dots$ i t. d.

Różnicę n -tą funkcji $f(x)$ przedstawia w z ó r:

$$\Delta^n f(x_0) = f(x_n) - (n)_1 f(x_{n-1}) + (n)_2 f(x_{n-2}) + \dots + (-1)^n f(x_0).$$

Wartość funkcji w punkcie x_n przedstawia w z ó r:

$$f(x_n) = f(x_0) + (n)_1 \Delta f(x_0) + (n)_2 \Delta^2 f(x_0) + \dots + \Delta^n f(x_0).$$

Mamy nadto następujące wzory (S t u d n i ę k i):

$$\Delta^m f(x_{h+n}) = \sum_{i=0}^n (n)_i \Delta^{m+i} f(x_h),$$

$$\Delta^{m+n} f(x_h) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (n)_i \Delta^m f(x_{h+n-i}),$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \Delta^m f(x_{h+i}) = \sum_{i=0}^{n-1} (n)_{i+1} \Delta^{m+i} f(x_h),$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} (n)_{i+1} \Delta^i f(x_0).$$

Przyjmijmy, że

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \dots = h,$$

wtedy różnice m -te wielomianu stopnia m -tego są stałe, t. j. niezależne od x i równe (nie uwzględniamy wyrazu $h^m a_0$, gdzie a_0 jest współczynnikiem pierwszego wyrazu wielomianu) czynnikowej liczby m :

$$\Delta^n e^x = e^x (e^h - 1)^n,$$

$$\Delta^n \frac{1}{x} = (-y)^n n! \frac{h^n}{x(x+h)(x+2h)\dots(x+nh)},$$

$$\Delta^n \sin(ax + b) = \left(2 \sin \frac{ah}{2}\right)^n \sin \left(ax + b + \frac{n(ah + \pi)}{2}\right),$$

$$\Delta^n \cos(ax + b) = \left(2 \sin \frac{ah}{2}\right)^n \cos \left(ax + b + \frac{n(ah + \pi)}{2}\right),$$

Rozważając potęgi n -te liczb naturalnych i ich różnice kolejne odnośnie do pierwszego elementu 0^n , otrzymujemy różnice wyrazu 0^n . Mamy tu wzory:

$$\Delta^m 0^{n+1} = m (\Delta 0^n + \Delta^{m+1} 0^n),$$

$$\Delta^m 0^m = m! = m^m - (m)_1 (m-1)^m + (m)_2 (m-2)^m - \dots + (-1)^{m-1} (m)_{m-1},$$

$$\Delta^m (0h)^n = h^n \Delta^m 0^n,$$

$$\Delta^m f(x_0) = h^m \frac{\Delta^m 0^m}{m!} f^m(x_0) + \dots + h^n \frac{\Delta^n 0^n}{n!} f^n(x_0) + h^{n+1} \frac{\Delta^{n+1} 0^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(\eta),$$

gdzie η jest punktem zawartym pomiędzy x_0 i $x_0 + nh$.

$$\frac{\Delta^m 0^n}{n!} = \sum \frac{1}{r_1! r_2! \dots r_m!},$$

gdzie $r_1, r_2, \dots, r_m$ są liczbami całkowitymi dodatnimi, których suma równa się m , i gdzie suma rozciąga się na wszystkie możliwe kombinacje tych liczb.

Jeżeli B_m oznacza liczbę Bernoulli'ego (patrz Rozdział XVIII), to

$$B_m = (-1)^{\frac{m}{2}-1} \frac{1}{m!} \left[0^m - \frac{1}{2} \Delta 0^m + \frac{1}{3} \Delta^2 0^m - \dots + (-1)^m \frac{1}{m+1} \Delta^m 0^m \right],$$

Oto tablica różnic wyrazu 0^m aż do $\Delta^{10} 0^{10}$:

	Δ^1	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5	Δ^6	Δ^7	Δ^8	Δ^9	Δ^{10}
0^1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0^2	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0
0^3	1	6	6	0	0	0	0	0	0	0
0^4	1	14	36	24	0	0	0	0	0	0
0^5	1	30	150	240	120	0	0	0	0	0
0^6	1	62	540	1560	1800	720	0	0	0	0
0^7	1	126	1806	8400	16800	15120	5040	0	0	0
0^8	1	254	5796	40824	126000	191520	141120	40320	0	0
0^9	1	510	18150	186480	834120	1905120	2328480	1451520	362880	0
0^{10}	1	1022	55980	818520	5103000	16435440	29635200	30240000	16329600	3628800

§ 2.

Interpolacja. Funkcje interpolacyjne.

Wyrażenia

$$f_1(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0},$$

$$f_2(x_0, x_1, x_2) = \frac{f_1(x_0, x_2) - f_1(x_0, x_1)}{x_2 - x_1},$$

.

są funkcjami interpolacyjnymi 1-go, 2-go i t. d. rzędu. Zajmował się nimi pierwszy Ampère (Gergonne, XVI). później Cauchy, Bellavitis, Genocchi i t. d.

Wskazówki bibliograficzne co do tego znaleźć można w tomie III „Rachunku nieskończonościowego“ Pascala, przekład polski, Warszawa 1897, str. 186).

Funkcje interpolacyjne są symetrycznymi względem wszystkich zmiennych, które zawierają. (Twierdzenie Ampère'a.)

Każdą funkcję interpolacyjną można przedstawić w ten sposób:

$$\begin{aligned} f_n(x_0; x_1 \dots, x_n) = & \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)} \\ & + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_n)} \\ & + \dots \\ & + \frac{f(x_n)}{(x_n - x_0)(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1})}, \end{aligned}$$

Pomiędzy trzema funkcyami interpolacyjnymi tego samego rzędu zachodzi związek:

$$f_n(x_1, x_2, x_3, \dots)(x_1 - x_2) + f_n(x_2, x_0, x_3, \dots)(x_2 - x_0) \\ + f_n(x_0, x_1, x_3, \dots)(x_0 - x_1) = 0.$$

Funkcyę interpolacyjną dla elementów równoodległych można wyrazić za pomocą wzoru

$$f_n(x_0, x_0 + h, \dots, x_0 + nh) = \frac{\Delta_n f(x_0)}{h^n n!}$$

lub też za pomocą wzoru

$$f_n(x_0, x_0 + h, \dots, x_0 + nh) = \frac{f_n(\xi)}{n!}$$

gdzie

$$x_0 \leq \xi \leq x_0 + nh.$$

Jeżeli elementy $x_0, x_1, \dots, x_n$ zlewają się, wtedy funkcyja interpolacyjna rzędu n -tego staje się -- jeżeli pominiemy czynnik liczbowy -- pochodną n -tą funkcyi.

Funkcyja interpolacyjna o jakichkolwiek elementach wyraża się za pomocą wzoru Genocchi'ego:

$$f_n(x_0, x_1, \dots, x_n) = \int_0^1 \cdot \int_0^1 \cdot \dots \cdot \int_0^1 t_1^{n-1} t_2^{n-2} \dots t_{n-1} \\ \times f^{(n)}(x_0 + (x_1 - x_0)t_1 + (x_2 - x_1)t_1 t_2 + \dots \\ + (x_n - x_{n-1})t_1 t_2 \dots t_n) dt_1 \cdot dt_2 \dots dt_n.$$

Wartość funkcyi f w jakimkolwiek punkcie zdaje się wyrazić za pomocą wzoru, w którym współczynniki rozmaitych wyrazów są funkcyami interpolacyjnymi, mianowicie:

$$\begin{aligned}
 f(x) = & f(x_0) + (x - x_0) f_1(x_0, x_1) \\
 & + (x - x_0)(x - x_1) f_2(x_0, x_1, x_2) \\
 & + \dots, \dots \\
 & + \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)}{(n+1)!} f_{n+1}(\xi),
 \end{aligned}$$

gdzie ξ jest zawarte pomiędzy najmniejszą a największą z wartości $x_0, x_1, \dots, x_n, x$. Wzór ten można nazwać uogólnionym wzorem Newtona lub Gaussa.

Jeżeli przedziały pomiędzy kolejnemi punktami x są wszystkie równe h , wtedy otrzymujemy wzór:

$$\begin{aligned}
 f(x) = & f(x_0) + \frac{x - x_0}{h} \Delta f(x_0) + \dots \\
 & + \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_0 - (n-1)h)}{n! h^n} \Delta^n f(x_0) \\
 & + \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_0 - nh)}{(n+1)!} f_{n+1}(\xi),
 \end{aligned}$$

gdzie ξ jest zawarte pomiędzy najmniejszą a największą z trzech wartości $x_0, x_0 + nh, x$.

Jeżeli wszystkie punkty $x_0, x_1 \dots x_n$ schodzą się w punkcie x_0 , otrzymujemy wzór Taylora.

Poprzedniemu wzorowi ogólnemu można nadać postać:

$$f(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_1 - x_0) \dots (x_1 - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)} + R,$$

gdzie R oznacza resztę, t. j. wyraz ostatni.

Wzór ten nazywa się wzorem interpolacyjnym Lagrange'a i daje się napisać w ten sposób:

$$f(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{\varphi'(x_i)} \frac{\varphi(x)}{x-x_i} + R,$$

gdzie

$$\varphi(x) = (x - x_0) \cdot \cdot \cdot (x - x_n).$$

Zagadnienie interpolacyjne polega na tem: dajmy, że są dane wartości funkcji w nieokreślonej liczbie punktów; jak wyrazić wartość funkcji w jakimkolwiek punkcie przy pomocy powyższych wartości?

Poprzednie dwa wzory mogą oczywiście służyć do rozwiązania zagadnienia, jeżeli reszta R dla $n = \infty$ dąży do zera.

Jeżeli zamiast wartości funkeyi w nieskończenie wielu punktach mamy dane wartości nieskończenie wielu pochodnych w jednym punkcie (który to przypadek może być pod pewnym względem uważany za przypadek szczególny poprzedzającego, przy przyjęciu, że punkty, w których mamy dane wartości funkeyi, są nieskończenie bliskie), wtedy zagadnienie interpolacyjne staje się zagadnieniem, odnoszącem się do wzoru Taylora. Większe szczegóły i wskazówki bibliograficzne znajdują się we wspomnianym już traktacie „Rachunku różnic“ (§ 17).

३.

Wzory na kwadratury przybliżone.

Wzór Simpsona jest następujący:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{6n} \left\{ f(a) + 4f\left(a + \frac{b-a}{2n}\right) + 2f\left(a + 2\frac{b-a}{2n}\right) \right. \\ + 4f\left(a + 3\frac{b-a}{2n}\right) + 2f\left(a + 4\frac{b-a}{2n}\right) \\ + 4f\left(a + 5\frac{b-a}{2n}\right) + 2f\left(a + 6\frac{b-a}{2n}\right) \\ + \dots \dots \dots + f(b) \left. \right\} + R'$$

gdzie reszta R' (gdy $f^{(IV)}$ jest skończona i ciągła) jest:

$$R' = - \frac{1}{15.8.4!} \frac{(b-a)^5}{n^4} f^{(IV)}(\eta); \quad (a \leq \eta \leq b).$$

Dla wartości n dostatecznie wielkich R' będzie dostatecznie małe i część pierwsza poprzedniego wzoru (bez reszty) daje wartość dostatecznie przybliżoną całki.

Wzór Cotesa jest:

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \sum_{i=0}^n h_n^{(i)} f\left(a+i \frac{b-a}{n}\right) + R',$$

gdzie $h_n^{(i)}$ są współczynniki liczbowe, niezależne od a i b , a mianowicie:

$$h_n^{(i)} = (-1)^{n-i} \frac{1}{n \cdot i! (n-1)!} \int_0^n T dt,$$

$$T = t(t-1) \dots (t-i+1), (t-i-1) \dots (t-n).$$

Liczby h czynią zadość związkowi

$$h_n^{(i)} = h_n^{(a-i)}.$$

Tablica wartości h jest następująca:

	$i = 0$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$
$n = 1$	$\frac{1}{2}$					
$n = 2$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$				
$n = 3$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$				
$n = 4$	$\frac{7}{80}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{2}{15}$			
$n = 5$	$\frac{19}{288}$	$\frac{95}{96}$	$\frac{25}{144}$			
$n = 6$	$\frac{41}{840}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{34}{105}$		
$n = 7$	$\frac{751}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{49}{640}$	$\frac{2089}{17280}$		
$n = 8$	$\frac{989}{28350}$	$\frac{2944}{14175}$	$\frac{464}{14175}$	$\frac{5248}{14175}$	$\frac{454}{2835}$	
$n = 9$	$\frac{2857}{89600}$	$\frac{15741}{89600}$	$\frac{27}{2240}$	$\frac{1209}{5600}$	$\frac{2889}{44800}$	
$n = 10$	$\frac{16067}{598752}$	$\frac{26575}{149688}$	$\frac{16175}{199584}$	$\frac{5675}{12474}$	$\frac{4825}{11088}$	$\frac{17807}{24948}$

Wzór Gaussa na kwadraturę jest:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{\varphi'(x_i)} \int_a^b \frac{\varphi(x)}{x - x_i} dx,$$

gdzie $\varphi(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$; $x_0, x_1, \dots, x_n$ są pierwiastkami funkcji kulistej Legendre'a:

$$\psi(x) = \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \left[(x-a)^{n+1} (x-b)^{n+1} \right]$$

Wzór ten jest w ogóle wzorem przybliżonym; wszakże jeżeli f jest funkcją całkowitą stopnia nawet wyższego od n , lecz niższego od $2n+1$, wtedy wzór jest dokładny, t. j. reszta jego jest w tym przypadku zerem.

Aby móc zastosować wzór Gaussa, trzeba znać pierwiastki funkcji kulistej $\varphi(x)$. Dla większej dogodności rachunku położmy $x = a + (b-a)t$, tak aby całkowanie rozciągało się od $t=0$ do $t=1$. Funkcja $f(x)$ staje się $F(t)$, a całka przyjmuje postać:

$$(b-a) \int_0^1 F(t) dt = (b-a) \sum_{i=0}^n \frac{F(t_i)}{\psi'(t_i)} \int_0^1 \frac{\psi(t)}{t-t_i} dt,$$

gdzie ilości t_i są pierwiastkami funkcji

$$\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \left[t^{n+1} (t-1)^{n+1} \right].$$

Pierwiastki te Gauss obliczył (Werke III, str. 193) z 16-ma znakami dziesiętnymi; podajemy je w poniższych tablicach (z 10-ma cyframi dziesiętnymi):

	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
t_0	0,5	0,2113248654	0,1127016653	0,0694318442
t_1		0,7886751345	0,5	0,3300004782
t_2			0,8872983346	0,6699905217
t_3				0,9305681557

	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$
t_0	0,0469100770	0,0337652428	0,0254460438
t_1	0,2307553449	0,1693953067	0,1292344072
t_2	0,5	0,3806904069	0,2970774243
t_3	0,7692346550	0,6193095930	0,5
t_4	0,9530899229	0,8306046932	0,7029225756
t_5		0,9662347571	0,8707655927
t_6			0,9745539561

§ 4.

Rachunek odwrotny różnic.

Funkcja $F(x)$, której różnica (gdy kolejne wartości zmiennej mają różnicę stałą 1), jest funkcją daną $f(x)$, nazywa się całką różnicową nieokreśloną funkcji danej. Czyli ona zadość związkowi:

$$F(x+1) - F(x) = f(x)$$

dla każdej wartości x i oznacza się symbolem $\sum f(x)$.

Różnica $F(a+n) - F(a)$ równa się $f(a) + f(a+1) + \dots + f(a+n-1)$, oznacza się symbolem $\sum_a^{a+n-1} f(x)$ i nazywa się całką różnicową określoną.

Podajemy wzory następujące:

$$\sum x^m = \frac{1}{m+1} - \frac{1}{2} x^m + \frac{1}{12} m x^{m-1} - \dots$$

$$\sum_{x=1}^n x = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$\sum_{x=1}^n x^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3!},$$

$$\sum_{x=1}^n x^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

$$\sum_{x=1}^n x^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30},$$

$$\sum_{x=1}^n x^5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12},$$

Kładąc $s = \sum_1^n x$, mamy (Seitz und Gander, The Analyst, VI, 1879)

$$\sum_1^n x^9 = \frac{1}{5} (6s^5 - 20s^4 + 12s^3 - 3s^2),$$

Suma sześciątów pierwszych n liczb naturalnych równa się kwadratowi sumy tych liczb.

Całkę różnicową określoną można wyrazić za pomocą całki różniczkowej określonej tejże funkcji; wzór na to nazywa się wzorem Eulera i ma postać następującą:

$$\begin{aligned} h \sum_a^b f(x) &= \int_a^b f(x) dx \\ &= -\frac{1}{2} h [f(x)]_a^b + \frac{B_2}{2!} h^2 [f'(x)]_a^b \dots \dots \\ &\quad - \frac{B_4}{4!} h^4 [f'''(x)]_a^b + \frac{B_6}{6!} h^6 [f^{(5)}(x)]_a^b \dots \dots \end{aligned}$$

gdzie $B_2, B_4, B_6 \dots \dots$ są liczbami Bernoulli'ego, symbole $[f(x)]_a^b, [f'(x)]_a^b, \dots \dots$ oznaczają różnice $f(b) - f(a), f'(b) - f'(a) \dots \dots$

Co do innych rozważań, odnoszących się do rachunku odwrotnych różnic. odsyłamy czytelnika do cytowanego już „Rachunku różnic” Pascala (Warszawa, 1897).

Najważniejszymi traktatami rachunku różnic są następujące: Lacroix, Traité des différences, Paryż 1800; Herschell, Collection of Examples etc., 1820; Schlömilch, Differenzen und Summen, 1848; Boole, Finite diff., 1860, i najnowsze dzieło: Markoff, Differenzenrechnung, Lipsk 1896.

ROZDZIAŁ XI.

RACHUNEK WARYACYJNY.

§ 1.

Wiadomości ogólne. Waryacja pierwsza całkowita.

Niechaj będą dwie krzywe, których równaniami są:
 $y = f(x)$, $y_1 = f_1(x_1)$. Jeżeli pomiędzy punktami (x, y) pierwszej
i punktami (x_1, y_1) drugiej można ustanowić odpowiedniość do-
wolną, lecz taką, że odległość pomiędzy odpowiadającymi sobie
punktami będzie nieskończonością, t. j. dążącą do zera, mó-
wimy wtedy, że przy przejściu od pierwszej krzywej do drugiej.
spółrzędne x, y doznają waryacji. Różnicę pomiędzy odcie-
tami odpowiednich punktów, t. j. $x_1 - x$, oznaczamy za pomocą
symbolu Lagrange'a δx i nazywamy waryacją zmiennej
niezależnej x . Różnica pomiędzy rzędnymi odpo-
wiadających sobie punktów będzie w ogóle sumą nieskończono-
stek różnego rzędu; część rzędu najniższego nazywamy wa-
ryacją ilości y i oznaczamy przez δy .

Jeżeli F jest funkcją ilości $x, y, y', y'', \dots$, to w prze-
jściu od pierwszej krzywej do drugiej, funkcja F doznaje w ogóle

przyrostu nieskończonostkowego, którego część rzędu najniższego nazywa się waryacją funkcyi F i oznacza się przez δF .

Waryacja funkcyi F równa się waryacji, wziętej w przypadku, gdy x pozostaje bez zmiany (t. j. gdy odpowiadające sobie punkty mają tę samą odciętą) i powiększonej o wyraz, będący iloczynem całkowitej pochodnej funkcyi F względem x przez δx .

Waryacja funkcyi F w przypadku, gdy x pozostaje bez zmiany, jest:

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' + \frac{\partial F}{\partial y''} \delta y'' + \dots$$

gdzie $\delta y, \delta y', \delta y'' \dots$ są waryacjami ilości $y, y', y'' \dots$ w przypadku niezmienniającego się x . Gdyby funkcyja F zawierała inne jeszcze funkcyje $z, u \dots$ zmiennej x , wtedy należałoby dodać i odnoszące się do tych funkcyj wyrazy, podobnie do powyższych utworzone.

Waryację całki określonej

$$I = \int_{x''}^{x'} F(x, y, y', y'' \dots y^{(r)}) dx$$

przedstawia wzór

$$\delta I = \int_{x''}^{x'} \delta F dx + [F \delta x]_{x'}^{x''},$$

gdzie przez δF należy rozumieć waryację, obliczoną dla przypadku, w którym x pozostaje bez zmiany.

Jeżeli funkcyja F zawiera nadto granice x', x'' , wtedy do strony drugiej należy dodać jeszcze:

$$\delta x' \int_{x''}^{x'} \frac{\partial F}{\partial x'} dx + \delta x'' \int_{x''}^{x'} \frac{\partial F}{\partial x''} dx.$$

Waryacja całki określonej poprzedniego typu, w założeniu ogólniejszem, iż F zawiera nadto funkcje $z, u \dots$ i ich pochodne, a mianowicie pochodne funkcji y aż do rzędu v właściwie, pochodne funkcji z aż do rzędu r właściwie i t. d., wyraża się w ten sposób:

$$\delta I = \left[F \delta x + K_1 \delta y + K_1' \delta y' + \dots + K_1^{(r-1)} \delta y^{(r-1)} \right. \\ \left. + K_2 \delta z + K_2' \delta z' + \dots + K_2^{(s-1)} \delta z^{(s-1)} \right. \\ \left. + \dots \dots \dots \right]_{x'}^{x''} \\ + \int_{x'}^{x''} (H_1 \delta y + H_2 \delta z + \dots) dx,$$

gdzie:

$$H_1 = M - \frac{dM'}{dx} + \frac{d^2 M''}{dx^2} - \dots; \quad H_2 = N - \frac{dN'}{dx} + \frac{dN''}{dx^2} - \dots,$$

$$K_1 = M' - \frac{dM''}{dx} + \frac{d^2 M'''}{dx^3} - \dots; \quad K_2 = N' - \frac{dN''}{dx} + \frac{d^2 N'''}{dx^3} - \dots,$$

$$K_1' = M'' - \frac{dM'''}{dx} + \frac{d^2 M^{IV}}{dx^4} - \dots; \quad K_2' = N'' - \frac{dN'''}{dx} + \frac{dN^{IV}}{dx^3} - \dots,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$M = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad M' = \frac{\partial F}{\partial y'}, \quad M'' = \frac{\partial F}{\partial y''} \dots \dots \dots$$

$$N = \frac{\partial F}{\partial z}, \quad N' = \frac{\partial F}{\partial z'}, \quad N'' = \frac{\partial F}{\partial z''} \dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

Jeżeli całka

$$\int_{x'}^{x''} (H_1 \delta y + H_2 \delta z + \dots) dx$$

jest tożsamościowo zerem, bez względu na wartości, nadane funkcjom dowolnym $\delta y, \delta z, \dots$, wtedy każda z ilości $H_1, H_2, \dots$, musi być osobno zerem. (Twierdzenie pomocnicze główne.)

Jeżeli chcemy wyznaczyć funkcyę $y, z \dots$ zmiennej x , oraz granice x', x'' tak, aby całka I miała wartość maximum lub minimum, należy położyć $\delta I = 0$, co stanie się, gdy

$$H_1 = 0, \quad H_2 = 0, \dots$$

oraz

$$\begin{aligned} \Gamma = & \left[F \delta x + K_1 \delta y + K_1' \delta y' + \dots + K_1^{(r-1)} \delta y^{(r-1)} \right. \\ & + K_2 \delta z + K_2' \delta z' + \dots + K_2^{(s-1)} \delta z^{(s-1)} \\ & \left. + \dots \right]_{x'}^{x''} = 0. \end{aligned}$$

Równanie $\Gamma = 0$ nazywa się równaniem, odnoszącym się do granic.

Równania $H_1 = 0, H_2 = 0, \dots$, są równaniami różniczkowymi, które po zcałkowaniu dają nam funkcyę $y, z \dots$ z pewną liczbą stałych dowolnych; stałe te wyznaczamy przy pomocy równania, odnoszącego się do granic.

Jeżeli dane są wartości funkcyi y i jej pierwszych $r-1$ pochodnych dla granic x', x'' , wartości funkcyi z i $s-1$ jej pierwszych pochodnych i t. d., jeżeli nadto same granice są z góry dane, wtedy $\delta x' = \delta x'' = 0, \delta y = \delta y' = \dots = 0, \delta z = \delta z' = \dots = 0, \dots$, równanie zaś, odnoszące się do granic, sprawdza się samo przez się tożsamościowo.

Jeżeli powyższe wartości nie są z góry oznaczone, wtedy równanie $\Gamma = 0$ rozpada się na równanie następujące :

$$F_{x'} = 0, \quad F_{x''} = 0,$$

$$K_{1, x'} = 0, \quad K'_{1, x'} = 0, \dots \quad K_{1, x''} = 0, \quad K'_{1, x''} = 0, \dots$$

$$K_{2, x'} = 0, \quad K_{2, x'} = 0, \dots \quad K_{2, x''} = 0, \quad K'_{2, x''} = 0, \dots$$

Zagadnienie ogólne rachunku waryacyjnego, gdy wartości granic, funkcyj i ich pochodnych na granicach nie są z góry oznaczone, można rozłożyć na dwa zagadnienia: jedno, należące właściwie do rachunku waryacyjnego i podobne do zagadnienia danego, lecz w założeniu, że granice, wartości funkcyach i ich pochodnych są na granicach oznaczonemi; drugie zaś należące do ra-

chunku różniczkowego, jest zwykłym zagadnieniem na maximum i minimum funkcji wielu zmiennych.

Jeżeli między funkcjami niewiadomymi $y, z \dots$ zachodzą związki różniczkowe:

$$\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0, \dots \varphi_m = 0, (m < n).$$

wtedy zagadnienie na maximum i minimum całki określonej nazywa się zagadnieniem na maximum i minimum względne; w przypadkach pozostałych mamy zagadnienie na maximum i minimum bezwzględne.

Zagadnienie najogólniejsze rachunku waryacyjnego można zawsze sprowadzić do następującej postaci kanonicznej.

Sprawić, by całka

$$\int_{x'}^{x''} F dx,$$

gdzie F zawiera zmienną x , funkcje $y_1, y_2, \dots, y_n$ tej zmiennej i ich pierwsze pochodne, związane równaniami różniczkowymi rzędu 1-go $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0, \dots \varphi_m = 0$, było maximum lub minimum.

Zagadnienie to rozwiązujemy za pomocą wyżej wskazanej metody, szukając maximum lub minimum bezwzględnego całki

$$\int_{x'}^{x''} \Omega dx,$$

gdzie

$$\Omega = F + \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i;$$

ilości λ są nowymi funkcjami niewiadomymi zmiennej x (Metoda mnożników Lagrange'a).

Zadanie izoperymetryczne, (które można uważać za przypadek szczególny poprzedzającego), jest następujące:

Sprawić, by całka

$$I = \int_{x'}^{x''} F dx$$

była maximum lub minimum i aby jednocześnie całki:

$$I_1 = \int_{x'}^{x''} F_1 dx, \quad I_2 = \int_{x'}^{x''} F_2 dx, \quad \dots \quad I_m = \int_{x'}^{x''} F_m dx$$

przybrały wartości z góry oznaczone $l_1, l_2, \dots, l_m$.

Zagadnienie to rozwiązujemy, szukając maximum lub minimum bezwzględnego całki:

$$J = \int_{x'}^{x''} (F + \sum_{i=1}^n \lambda_i F_i) dx = \int_{x'}^{x''} \Phi dx,$$

gdzie ilości λ można uważać za stałe. (Metoda Eulera).

Jeżeli idzie o maximum i minimum bezwzględne, funkcya zaś podcałkowa F zawiera najwyżej pochodne pierwsze funkcji niewiadomych, to aby zagadnienie było w ogóle rozwiązalnem, jest koniecznem, by hesyan funkcji F , uważanej za funkcję pochodnych pierwszych, był różny od zera.

W szczególności, gdy mamy jedną funkcję niewiadomą, jest koniecznem, by pochodna funkcji F względem y' była różna od zera.

W warunkach twierdzenia poprzedzającego, jeżeli założymy, że funkcya F zawiera pochodne funkcji niewiadomych aż do rzędu r -tego, dla rozwiązalności zagadnienia jest koniecznem, by hesyan funkcji F , uważanej za funkcję pochodnych r -tych, był różny od zera.

W szczególności gdy $n=1$, jest koniecznem by pochodna druga funkcji F względem $y^{(r)}$ była różna od zera.

W zagadnieniu ogólnem na maximum i minimum względne, sprowadzonym do postaci kanonicznej, t. j. gdy w danych zagadnienia występują najwyżej pochodne rzędu pierwszego funkcji niewiadomych, dla rozwiązalności zagadnienia jest koniecznem, by wyznacznik:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_1'^2}, \dots, \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_1' \partial y_n'}, \frac{\partial \varphi}{\partial y_1'}, \dots, \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_1'} \\ \dots \\ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_n' \partial y_1'}, \dots, \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_n'^2}, \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n'}, \dots, \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_n'} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1'}, \dots, \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n'}, 0, \dots, 0, \\ \dots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_1'}, \dots, \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_n'}, 0, \dots, 0 \end{vmatrix}$$

był różny od zera (Ω ma tu znaczenie wyżej wskazane)).

Wreszcie w zagadnieniu izoperymetrycznem (gdy funkcje $F, F_1, \dots, F_n$ zawierają pochodne najwyżej rzędu pierwszego funkcji niewiadomych), warunkiem koniecznym rozwiązalności jest, by hesyan funkcji Φ (patrz wyżej), uważany za funkcję pochodnych pierwszych, był różny od zera.

§ 2.

Waryacja druga.

Warunki, poprzednio podane, są konieczne; celem znalezienia warunków dostatecznych istnienia maximum lub minimum należy zwrócić się do rozważania t. z. waryacji drugiej.

Waryacya druga całki określonej jest wyrażeniem typu

$$\int_{x'}^{x''} Q(\delta y_1, \delta y_2, \dots \delta y_n, \delta_1', \delta y_2' \dots \delta y_n', \delta y''_1 \dots) dx,$$

gdzie Q jest formą kwadratową ilości $\delta y_1, \dots \delta y_n, \delta y'_1, \dots$.

W przypadku jednej tylko funkcji niewiadomej y , waryacya druga daje się sprowadzić do postaci (Twierdzenie Jacobi'ego, Crelle XVII):

$$\int_{x'}^{x''} \left\{ A_0 \delta y - \frac{d(A_1 \delta y')}{dx} + \frac{d^2(A_2 \delta y'')}{dx^2} + \dots \right. \\ \left. + (-1)^r \frac{d^r(A_r \delta y^{(r)})}{dx^r} \right\} \delta y dz,$$

gdzie ilości A są funkcjami zmiennej x .

Jeżeli położywszy:

$$\delta y = t_1 z_1$$

$$t_1 = C'_1 \frac{\partial y}{\partial c_1} + \dots + C'_{2r} \frac{\partial y}{\partial c_{2r}},$$

—gdzie ilości C są nowemi stałemi dowolnemi, ilości zaś c stałemi, otrzymanemi z całkowania równania różniczkowego, wynikającego ze znikania waryacji pierwszej—założymy, że funkcya t_1 nie może znikać wraz ze swemi pierwszemi $r-1$ pochodnemi w dwu jakichkolwiek punktach drogi całkowania (w szczególności na obu granicach) wtedy waryacya druga przybiera postać:

$$\delta^2 I = \int_{x'}^{x''} z'_1 \left\{ b_1 z'_1 - \frac{d(b_2 z''_1)}{dx} + \dots + (-1)^r \frac{d^{r-1}(b_r z_1^{(r)})}{dx^{r-1}} \right\} dx.$$

Przekształcenie to nazywasię przekształceniem Jacobi'ego.

Stosując kolejno to przekształcenie, dojdziemy wreszcie do postaci

$$\delta^2 I = (-1)^{r-1} \int_{x'}^{x''} z'^r{}^2 B_r dx,$$

$$B_r = \frac{\partial^2 F}{\partial y^{(r)2}} t_1^2 \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{t_2}{t_1} \right) \right]^2 \dots \dots$$

gdzie funkcya t_2 jest utworzona podobnie jak t_1 , lecz z innemi stałemi C . Jeżeli możemy wyznaczyć ilości C w ten sposób, aby ilość pod znakiem całkowym nie stawała się nieskończoną dla wartości x , znajdujących się na drodze całkowania; jeżeli nie ma takich wartości C , dla których t_1 lub t_2 i wszystkie ich pierwsze pochodne aż do pochodnych rzędu $r-1$, znikają w dwu punktach drogi cał-

kowania; jeżeli pochodna $\frac{\partial F}{\partial y^{(r)2}}$ jest zawsze jednego znaku i nie staje się nieskończoną dla wartości x na tej drodze, wtedy znalezione rozwiązanie dawać będzie z pewnością maximum lub minimum, stosownie do tego, czy

$$(-1)^{r-1} \frac{\partial F}{\partial y^{(r)2}}$$

jest stale ujemnem lub stale dodatniem.

W przypadku $r=1$ waryacya druga sprowadza się do postaci:

$$\delta^2 I = \int_{x'}^{x''} \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \left[\delta y' - \frac{t'}{t} \delta y \right]^2 dx,$$

a kryterium na maximum i minimum wyprowadza się z łatwością z twierdzenia poprzedzającego.

Dane historyczne i bibliograficzne o różnych twierdzeniach, podanych w tych dwu paragrafach, znaleźć można w tomie III „Rachunku nieskończonościowego” Pascala (przekład polski, Warszawa 1897). Najnowszą pracę o wyprowadzeniu dostatecznych warunków maximum i minimum całek pojedynczych ogłosił A. Kneser (Math. Ann. LI, str. 321—345, 1898).

§ 3.

Różne zagadnienia rachunku waryacyjnego.

Zagadnienie Newtona. Znaleść krzywą płaską o stycznej ciągłej, przechodzącą przez dwa punkty dane i obrotem swym około osi danej wytwarzającą bryłę, która zanurzona w cieczy w kierunku swej osi, napotyka opór najmniejszy. (Ciało okrągłe o najmniejszym oporze.)

Wprowadza się hipotezę, że opór, jaki napotyka ciało przy zanurzeniu, jest proporcjonalny do kwadratu rzutu prędkości na normalną do powierzchni i ma kierunek tej normalnej. Znajdujemy krzywą, której współrzędne x, y , wyrażają się w funkcji ilości y' sposobem następującym (x jest osią obrotu):

$$x = a \left(\frac{3}{4y'^4} + \frac{1}{y'^2} + \log y \right) + b; \quad y = \frac{a(1+y'^2)^2}{y'^3}.$$

Krzywa ta posiada ostrze w punkcie, dla którego $y' = \sqrt{3}$.

Zagadnieniem tem zajmował się Legendre (Mém. de Paris, 1786), patrz August, (Crelle CII, 1888) i § 30 „Rachunku waryacyjnego“ E. Pascala, Warszawa. 1897).

Zagadnienie o brachystochronie. Jaką drogę powinno opisywać ciało, ożywione prędkością początkową v_0 i poddane jedynie sile ciężkości, aby w czasie możliwie najkrótszym przeniosło się z punktu o współrzędnych x_0, y_0, z_0 do punktu o współrzędnych x_1, y_1, z_1 , w założeniu, że ośrodek, w którym się porusza, jest albo próżnią, albo stawia opór, który jest funkcją prędkości ciała?

Krzywa jest cykloidą o podstawie poziomej.

Jeżeli punkt końcowej krzywej ma się znajdować na krzywej z góry danej, wtedy trajektorya przecina ortogonalnie tę ostatnią.

Zagadnieniem tem zajmował się Lagrange (Misc. Taur. II, 1760—61). Co do szczegółów patrz § 31 „Rachunku waryacyjnego” Pascala.

Wyznaczyć krzywą długości danej, przechodzącą przez dwa punkty dane, i taką, że gdy nakreślimy między temiż punktami drugą krzywą, której rzędne są potęgą lub pierwiastkiem odpowiednich rzędnych krzywej pierwszej lub odpowiednich łuków tejże, to pole drugiej będzie maximum. W przypadku szczególnym tego zagadnienia t. j. gdy rzędna drugiej krzywej ma być równa łukowi odpowiedniemu danej, otrzymujemy linię łańcuchową.

Zagadnieniem tem zajmował się Jakób Bernoulli w jednej z pierwszych prac swoich nad rachunkiem waryacyjnym (Acta Eruditorum, 1697).

Pomiędzy wszystkimi wielokątami zamkniętymi, mającemi za boki odcinki dane, znaleźć wielokąt o polu największem. Dowodzi się, że wielokątem tym jest wielokąt wpisany w koło.

Zagadnienie to przy pomocy rachunku waryacyjnego traktował Lagrange w drugim dodatku do swej rozprawy: „Nouvelle méthode etc.” (Misc. Taur., t. II); drogą syntetyczną badał je już Cramer (Akad. Berl. 1752). Analogiczne zagadnienie dla wielościanów o danej powierzchni i największej objętości badał Lindelöf (Math. Ann. II, str. 150).

Jeżeli zamiast wieloboku mamy krzywą o danym obwodzie, wtedy otrzymujemy koło.

Twierdzenie to udowodnił już Zenodor, a przekazał nam Pappus (patrz Cantor, Geschichte der Mathematik, I, str. 208). Legendre w § VIII swej rozprawy (Acad. de Paris, 1786) bada to zagadnienie szczegółowo przy pomocy rachunku waryacyjnego. Znajduje się ono także u Eulera „Methodus inveniendi etc.” Rozdz. V, § 41.

O zagadnieniach tego rodzaju na płaszczyźnie, na kuli, i w przestrzeni, lecz z punktu widzenia czysto geometrycznego, istnieje obszerna rozprawa Steinera (Crelle, XXIV, str. 93 i 189; Liouville, VI).

Pomiędzy dwoma punktami danymi lub dwiema krzywymi poprowadzić taką krzywą, aby ciało po niej spadające osiągało w końcu swego spadku prędkość największą.

Zagadnienie to rozwiązuje Lagrange w ostatniej lekcji swego „Calcul des fonctions“ (Oeuvres, X, str. 448).

Jeżeli punkty skrajne mają się znajdować na dwu krzywych danych, wtedy znajdujemy, iż styczne do tych krzywych w punktach skrajnych powinny być równoległe. Jest to rezultat analogiczny do tego, jaki znajdujemy dla brachystochrony.

Pomiędzy krzywymi o jednakowym obwodzie, mającemi te same dwa punkty skrajne, znaleźć krzywą, dla której środek ciężkości linii jest najbardziej odległy od podstawy.

Zagadnienie to błędnie rozwiązał Galileusz (1638), który mniemał, że krzywą szukaną jest parabola; później zajmowali się tem zagadnieniem bracia Bernoulli'owie Jan i Jakób, Huygens i Leibniz (Acta Eruditorum, 1690—1692).

Znajdujemy, że krzywą szukaną jest łańcuchowa, t. j. krzywa, której promień krzywizny równa się długości linii normalnej, pomiędzy krzywą a osią odciętych lecz jest położony po stronie przeciwległej tej normalnej. Jeżeli a jest stałą nieoznaczoną, to należy sprawić, by całka

$$\int (y + a) ds$$

była maximum, gdyż $\frac{1}{s} \int y ds$, jak wiadomo z mechaniki, równa się rzędnej środka ciężkości linii.

Zagadnieniem tem zajmował się także Legendre (§ 7 rozprawy z r. 1786, Acad. de Paris). Patrz Mayer, Math. Ann. XIII, str. 65.

Wiele z następujących zagadnień podał i rozwiązał Euler w sławnej rozprawie „Methodus inveniendi etc.“ 1744.

Przez dwa punkty przeprowadzić krzywą taką, aby pole, zawarte pomiędzy tą krzywą, jej rozwiniętą i normalnemi w punktach skrajnych, było możliwie najmniejszym.

Znajdujemy, że krzywa jest gałęzią cyklojdy (Euler l. c. Rozdz. II, § 51).

Co do tego zagadnienia patrz Jellet „Variationsrechnung“, (przekład niemiecki, Brunświk 1860, str. 191 i 422) i Todhunter „Researches it. d.“, Londyn 1871, str. 250.

Pomiędzy wszystkimi krzywami, łączącemi dwa punkty i wytwarzającemi przez obrót około osi powierzchnię o polu jednakowem, znaleźć krzywą, dla której ta powierzchnia zamyka objętość największą (Euler, Rozdz. V § 44).

Zagadnienie to dało powód do wielu kontrowersyj. Patrz Lindelöf, Calcul des variations, str. 218 i Greve „Ein Problem aus der Variationsrechnung“, Getynga, 1875.

Pomiędzy wszystkimi krzywami, przechodzącemi przez dwa punkty i zamykającemi pole jednakowe, znaleźć krzywe, które obrotem swym około osi wytwarzają powierzchnię o polu najmniejszym (Euler, Rozdz. V. § 45).

Otrzymujemy krzywą rzędu trzeciego z punktem podwójnym, podaną pod numerem 68 w klasyfikacyi krzywych rzędu 3-go, utworzonej przez Newtona.

Pomiędzy krzywami o jednakowym obwodzie i przechodzącemi przez dwa punkty, znaleźć krzywe, które obrotem swym około osi wytwarzają ciało o największej objętości (Euler, Rozdz. V, § 46).

Otrzymujemy tak nazwaną krzywą sprężystą, mającą tę własność, że jej promień krzywizny jest odwrotnie proporcjonalny do odciętej.

Pomiędzy krzywymi o jednakowym obrocie znaleźć krzywą, która obrotem swym około osi wytwarza powierzchnię o polu największem lub najmniejszym (Euler, l. c. Rozdz. V, § 47).

Znajdujemy linię łańcuchową. Powierzchnia wytworzona jest powierzchnią łańcuchową lub katenoidą (Plateau).

Patrz Goldschmidt (*Determinatio superf. min. etc.*, Getynga, 1831; Lindelöf („Sur les limites entre lesquelles la caténoïde est une surface minima“, *Math. Ann.* Vol. II, st. 60; 1870).

Pomiędzy krzywymi o jednakowym obwodzie i zamykającymi tożsamo pole, znaleźć krzywą, która obrotem swym około osi wytwarza powierzchnię, zamykającą objętość najmniejszą (Euler, Rozdział VII, § 22).

Znajdujemy krzywą sprężystą.

Pomiędzy krzywymi o tych samych odcieciach, zamykającymi pole jednakowe i wytwarzającymi obrotem około osi powierzchnie zamykające jednakową objętość, znaleźć krzywą, której środek ciężkości znajduje się najniżej lub najwyżej (Euler, l. c. IV, § 23).

Znajdujemy linię prostą.

Dane są dwie płaszczyzny równoległe i punkt na jednej z nich; poprowadzić z tego punktu do drugiej płaszczyzny linię długości danej taką, aby pole powierzchni walcowej, którą otrzymujemy, prowadząc z rozmaitych punktów linii prostopadłe do dwu płaszczyzn i pomiędzy temiż płaszczyznami zawarte, było największe.

Znajdujemy helisę.

Prtrż Moigno: „*Calcul des variations*“, (Paryż, 1861, str. 299).

Ustaliwszy dwie rzędne, poprowadzić z punktu jednej do punktu drugiej krzywą ta-

ką, aby figura, określona przez oś, przez dwie rzędne i przez krzywą, miała obwód z góry dany i zarazem pole największe.

Patrz Challis: On the solution of three problems etc. (Phil. Mag. 1872).

Znaleść powierzchnię o polu danem, zamykającą objętość największą.

Patrz: Sarrus (Mém. des Sav. étrang., t X, 1846), Sabinin (Zbiornik mat., Moskwa, XIV, str. 451, 1890).

Znaleść krzywą, mającą krzywiznę pierwszą stałą i punkty skrajne na dwóch danych krzywych lub powierzchniach, a której długość jest największa lub najmniejsza.

Zagadnieniem tem zajmowali się: Dalaunay, Jellet, Todhunter. Nową pracę o tym przedmiocie ogłosił Venske, Getyn-ga, 1891.

Wyznaczyć krzywą, mającą moment bezwładności względem punktu danego, największy lub najmniejszy.

Euler rozwiązał zagadnienie to błędnie. Rozwiązanie dokładne podał Ossian Bonnet (Liouville. IX, str. 97, 1844). Analogiczne zagadnienie w pracy: „Sur le minimum du potentiel de l'arc“, rozwiązał De la Goupilliere (Assoc. Franc. Besançon, t. XXII, str. 164, 1893).

ROZDZIAŁ XII.

TEORIA NIEZMIENNIKÓW.

§ 1.

Formy dwójkowe. Przedstawienie symboliczne.

Funkcja wymierna całkowita jednorodna stopnia n -tego o zmiennych x_1, x_2 nazywa się formą dwójkową stopnia n -tego. Przedstawić ją możemy w ten sposób:

$$f(x_1, x_2) = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} a_r x_1^{n-r} x_2^r,$$

gdzie dla dogodności rachunku nadajemy współczynnikom postać $\binom{n}{r} a_r$, uwidoczniając przez to współczynniki dwumianowe.

Symbolicznie piszemy tę formę tak:

$$f = (a_1 x_1 + a_2 x_2)^n = a_x^n,$$

przyjmując, że

$$a_1^n = a_0, \quad a_1^{n-1} = a_1, \quad \dots, \quad a_2^n = a_n,$$

i rozumiejąc, że strony pierwsze tych równości są tylko symbolami do oznaczenia stron drugich; ilości x_1, x_2 są więc także symbolami, którym można nadawać znaczenie tylko wtedy, gdy są skombinowane ze stopniem n .

Ilości a są współczynnikami istotnymi formy f , ilości σ — współczynnikami symbolicznymi.

Każda funkcyjność ilości a daje się wyrazić jako funkcyjność ilości σ , lecz nie odwrotnie. Jeżeli wprowadzimy symbole równoważne symbolom a , t. j. napiszemy:

$$f = a_x^n = \beta_x^n = \gamma_x^n = \dots, \quad ,$$

wtedy funkcyjność ilości $\alpha, \beta, \gamma \dots$, której każdy wyraz zawiera ilości α aż do stopnia n , ilości β aż do tegoż stopnia i t. d. może być odrazu sprowadzona do funkcyjności współczynników istotnych a . Stopień jej co do współczynników istotnych równa się liczbie symbolów $\alpha, \beta, \gamma \dots$, występujących w danym wyrażeniu.

Przez

$$(\alpha\beta) + - (\beta\alpha)$$

oznaczamy wyznacznik symboliczny

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}$$

Pomiędzy czynnikami liniowymi symbolicznymi a wyznacznikami symbolicznymi zachodzą następujące tożsamości zasadnicze:

$$(\alpha\beta)\gamma_x + (\beta\gamma)\alpha_x + (\gamma\alpha)\beta_x = 0,$$

$$\alpha_x\beta_y - \alpha_y\beta_x = (\alpha\beta)(xy),$$

$$(\alpha\beta)(\gamma\delta) + (\beta\gamma)(\alpha\delta) + (\gamma\alpha)(\beta\delta) = 0.$$

Jeżeli położymy

$$x_1 = A_{11}x'_1 + A_{12}x'_2; \quad x_2 = A_{21}x'_1 + A_{22}x'_2,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} \pmod{1},$$

to forma

$$f = a_0 x_1^n + \binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \dots = a_x^n$$

przejdzie na następującą:

$$f = a'_0 x_1'^n + \binom{n}{1} a'_1 x_1'^{n-1} x'_1 + \dots = a'_x^n.$$

Spółczynniki a' wyrażają się liniowo przez spółczynniki a . Jeżeli wyrazimy spółczynniki a' symbolicznie przez ilości a' , to związki, zachodzące pomiędzy spółczynniki a' i a można, wyrazić w ten sposób:

$$a'_1 = A_{11} a_1 + A_{21} a_2; \quad a'_2 = A_{12} a_1 + A_{22} a_2,$$

skąd:

$$\Delta a_2 = -A_{22} a'_1 + A_{21} a'_2; \quad \Delta a_1 = A_{12} a'_1 - A_{11} a'_2.$$

§ 2.

Niezmienniki i spółzmienniki.

Niechaj będzie układ form stopni $n, n', \dots$. Wyobraźmy sobie funkcję wymierną spółczynników form danych oraz zmiennych x i uskutecznijmy wskazane przekształcenie liniowe, t. j. podstawmy zamiast zmiennych x ich wartości, wyrażone w zmiennych x' , lub zamiast dawnych spółczynników ich wartości, wyrażone w nowych.

Jeżeli funkcya przekształcona daje się wyrazić jako iloczyn potęgi r -tej modułu przez wyrażenie, utworzone ze spółczynników przekształconych i zmiennych, przekształconych w ten sposób, w jaki funkcya dana utworzona została ze spółczynników dawnych i zmiennych dawnych, wtedy mówimy, że funkcya ta ma własność niezmienniczą. Jeżeli zawiera zmienne, to jest spółzmiennikiem; w przeciwnym razie nie-

zmiennikiem. Jej stopień co do zmiennych nazywa się rzędem; liczba r - skażnikiem. Ogół form danych nazywa się układem zasadniczym.

Można rozszerzyć pojęcie spółzmiennika, pomysliwszy taką funkcję niezmienniczą, która, prócz zmiennych x_1, x_2 , zawiera jeszcze inne szeregi zmiennych $y_1, y_2, z_1, z_2, \dots$; przytem wszystkie mają podlegać tym samym podstawieniom (o tych samych spółczynnikach), którym podlegają zmienne x . Mamy wtedy spółzmiennik o wielu szeregach ilości zmiennych.

Jeżeli skażnik r jest parzysty, forma niezmiennicza nazywa się formą o charakterze parzystym; w przeciwnym razie nazywa się formą o charakterze nieparzystym.

Jeżeli $n, n' \dots$ są rzędami form zasadniczych, $k, k' \dots$ stopniami formy niezmienniczej co do spółczynników różnych form, m zaś rzędem tej formy, t. j. stopniem jej co do zmiennych, wtedy zachodzi związek:

$$2r + m = nk + n'k' + \dots$$

Jeżeli wszystkie formy dane są rzędu parzystego, to ich niezmiennik nie może być rzędu nieparzystego.

Każda forma dwójkowa rzędu nieparzystego $n > 3$ posiada co najmniej dwa niezmienniki liniowe, których wypadkowa jest różna od zera (Clebsch).

Każda forma dwójkowa rzędu parzystego $n > 4$ posiada co najmniej dwa spółzmienniki stopnia 2-go, których wypadkowa jest różna od zera (Clebsch).

W każdym wyrazie formy niezmienniczej, wyrażonym przez spółczynniki istotne formy lub form zasadniczych, t. j. przez $a_0, a_1, a_2, \dots, b_0, b_1, b_2, \dots$, utwórzmy sumę iloczynów skażnika każdego ze spółczynników $a, b \dots$ przez odpowiedni wykładnik. Ta suma nazywa się wagą wyrazu.

Własność zasadniczą form niezmienniczych wyrażają twierdzenia:

W każdej formie niezmienniczej waga każdego wyrazu jest stała, co wyrażamy mówiąc, że formy niezmiennicze są funkcjami izobarycznymi współczynników form zasadniczych. Waga niezmiennika lub spółzmiennika zlewa się z wyżej określonym skaznikiem r .

Każda forma niezmiennicza J czyni zadość następującym równaniom różniczkowym:

$$\sum_n \sum_r (n-r) a_r \frac{\partial J}{\partial a_r} - \sum_x x_1 \frac{\partial J}{\partial x_1} = rJ,$$

$$\sum_a \sum_r r a_r \frac{\partial J}{\partial a_r} - \sum_x x_2 \frac{\partial J}{\partial x_2} = rJ,$$

$$\sum_a \sum_r (n-r) a_{r+1} \frac{\partial J}{\partial a_r} - \sum_x x_1 \frac{\partial J}{\partial x_2} = 0,$$

$$\sum_r \sum_r r a_{r-1} \frac{\partial J}{\partial a_r} - \sum_x x_2 \frac{\partial J}{\partial x_1} = 0,$$

gdzie: sumowanie względem r rozciąga się na wszystkie współczynniki formy; wyrazy względem a zmieniają się od jednej formy zasadniczej do drugiej; sumowanie względem x oznacza, że, gdy idzie o spółzmiennik o kilku szeregach zmiennych $x, y \dots$, to należy utworzyć tyleż wyrazów podobnych, jeden względem x , drugi względem y i t. d.

Jeżeli w szczególności idzie o niezmiennik, to odpowiednie równania różniczkowe otrzymujemy z poprzednich, znosząc sumowanie względem x .

Powyższe równania różniczkowe znalazł Cayley (1854), potem badali je Sylvester, Aronhold i inni.

Niezmienniki, uważane jako funkcyje pierwiastków zasadniczej formy dwójkowej, czynią zadość pewnym równaniom różniczkowym, które znalazł Brioschi (Ann di mat. V).

Najważniejszą własność form niezmienniczych streszcza następujące twierdzenie Clebscha.

Forma niezmiennicza, wyrażona za pomocą współczynników symbolicznych, przedstawia się zawsze jako suma wyrazów, z których każdy jest iloczynem symbolicznym wyznaczników typu $(\alpha\beta)$, (aa_1) , ... i czynników symbolicznych typu $a_x a_y$, β_x , ..., a_{1x} , ..., gdzie: a, β ... są symbolami równoważnemi pierwszej formy zasadniczej; a_1, β_1 ..., takimiż symbolami drugiej it. d. i gdzie naturalnie stopień względem każdego ze symbolów a, β ... jest n , względem każdego ze symbolów a_1, β_1 ... jest n' it. d.; n, n' ... są stopniami form danych.

Liczba czynników liniowych symbolicznych przedstawia rząd formy niezmienniczej; liczba wyznaczników symbolicznych jest równa skążnikowi lub wadze r .

Działania niezmieniające własności niezmienniczej. Niechaj, jak zwykle, a_0, a_1, a_2 ... będą współczynniki jednej, b_0, b_1, b_2 ... współczynniki drugiej formy tego samego rzędu.

Jeżeli J jest niezmiennikiem lub spółzmiennikiem układu, do którego należy pierwsza forma, to wyrażenie

$$\sum_i b_i \frac{\partial J}{\partial a_i}$$

będzie miało również wartość niezmienniczą i będzie niezmiennikiem lub spółzmiennikiem układu pierwotnego, rozszerzonego przez dołączenie formy drugiej.

Działanie $\sum b_i \frac{\partial}{\partial a_i}$ nazywa się działaniem lub processem Aronholda.

Jeżeli J jest spółzmiennikiem rzędu m -tego, to wyrażenie

$$\frac{1}{m} \left(y_1 \frac{\partial J}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial J}{\partial x_2} \right)$$

jest również spółzmiennikiem.

Działanie

$$\frac{1}{m} \sum y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

nazywa się działaniem biegunowem o biegunie y ; nie zmienia ono, jak to wynika z poprzedzającego twierdzenia, własności niezmienniczej.

Przez symbol Δ_y^k rozumiemy działanie biegunowe o biegunie y , powtórzone k razy

Jeżeli oznaczymy symbolicznie przez p_x^m spółzmiennik rzędu m -tego, to będzie:

$$\Delta_y^k p_x^m = p_x^{m-k} p_y^k,$$

Jeżeli J jest spółzmiennikiem od dwu szeregił ilości zmiennych x, y , stopnia m -tego względem pierwszych zmiennych stopnia m' -tego względem drugich, to działanie

$$\frac{1}{m m'} \left(\frac{\partial^2 J}{\partial x_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2 J}{\partial x_2 \partial y_1} \right) = \Omega$$

nie zmienia własności niezmienniczej. Działanie

$\frac{1}{m m'} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial y_1} \right)$ nazywamy działaniem lub procesem Ω .

Jeżeli funkcję dwu zmiennych przedstawimy symbolicznie w postaci $f(x, y) = a_x^n b_y^m$, to będzie:

$$\Omega^k (a_x^n b_y^m) = (ab)^k a_x^{n-k} b_y^{m-k}.$$

Istnieją jeszcze dwa działania niezmiennicze symboliczne; jedno z nich zwane fałdowaniem (Faltung, piega), wprowadził Gordan; polega ona na tem, że w iloczynie symbolicznym, złożonym z wyznaczników symbolicznych i czynników linio-

wych symbolicznych, zastępujemy dwa czynniki liniowe a_x, b_x , wyznacznikiem (ab) .

Drugie działanie t. zw. nasunięcie (Ueberschiebung, spinta) wprowadził Clebsch, polega ono na twierdzeniu z dwu form danych a_x^m, b_x^m wyrażenia

$$(ab) a_x^{n-1} b_x^{m-1}.$$

Działanie Clebscha daje się w ten sposób wyrazić przy pomocy działania Ω :

$$(ab) a_x^{n-1} b_x^{m-1} = [\Omega(a_x^n b_y^m)]_{y=x}.$$

Działanie to powtórzone k razy na formach f, φ , wyraża się symbolem $(f, \varphi)_k$.

Tożsamości, odnoszące się do działania Clebscha. Pomiędzy trzema formami f, φ, ψ zachodzi tożsamość:

$$\begin{vmatrix} (f, f)^2, & (f, \varphi)^2, & (f, \psi)^2, & f \\ (\varphi, f)^2, & (\varphi, \varphi)^2, & (\varphi, \psi)^2, & \varphi \\ (\psi, f)^2, & (\psi, \varphi)^2, & (\psi, \psi)^2, & \psi \\ f, & \varphi, & \psi, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Pomiędzy czterema formami f, φ, ψ, χ zachodzi związek:

$$\begin{vmatrix} (f, f)^2, & (f, \varphi)^2, & (f, \psi)^2, & (f, \chi)^2 \\ (\varphi, f)^2, & (\varphi, \varphi)^2, & (\varphi, \psi)^2, & (\varphi, \chi)^2 \\ (\psi, f)^2, & (\psi, \varphi)^2, & (\psi, \psi)^2, & (\psi, \chi)^2 \\ (\chi, f)^2, & (\chi, \varphi)^2, & (\chi, \psi)^2, & (\chi, \chi)^2 \end{vmatrix} = 0.$$

§ 3.

Wzór Clebscha-Gordana.

Jednym z najważniejszych wzorów do symbolicznych przekształceń form niezmienniczych jest wzór Clebscha-Gordana, dający rozwinięcie funkcji o dwu szeregach ilości zmiennych x, y przez biegunowe wyrażenie o jednym tylko szeregu, pomnożone przez potęgi całkowite dodatnie wyznacznika (xy) . Niechaj $f(x, y)$ będzie funkcją o dwu szeregach ilości zmiennych stopnia m względem jednych, stopnia n względem drugich. Jeżeli przez Δ oznaczmy działanie biegunowe o biegunie y i zmiennej x , przez D —działanie biegunowe o biegunie x i o zmiennej y , będzie:

$$f = \Delta^k D^n f + \alpha_1^{(k)}(xy) \Delta^{k-1} D^{n-1} \Omega f \\ + \alpha_2^{(k)}(xy)^2 \Delta^{n-2} D^{k-2} \Omega^2 f + \dots + \alpha_k^{(k)} \Omega^k f.$$

Spółczynniki α są liczbami, czyniącemi zadość wzorom zwrotnym:

$$\alpha_p^{(n+1)} = \alpha_p^{(k)} + \frac{(m-p+1)^2}{(m+k-2p+2)(m+k-2p+3)} \alpha_{p-1}^{(k)}.$$

Dla $k=n$ będzie:

$$\alpha_p^n = \frac{\binom{n}{p} \binom{m}{p}}{\binom{m+n-p+1}{p}}.$$

Dla symetrii co do skaźników m, n można wyrażenie to oznaczać też przez $\alpha_p^{m, n}$.

W przypadku $k=n$ wyrażenia $D^k f, D^{k-1} \Omega f, \dots$ nie zawierają zmiennej y i wtedy otrzymujemy wyrażenie funkcji f za pomocą samych biegunowych Δ funkcji zmiennej x .

Oto tablica wartości liczb $a_p^{m,n}$ dla różnych wartości skazników m, n :

	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$
$m=1, n=1$	$\frac{1}{2}$			
$m=2, n=1$	$\frac{2}{3}$			
$m=3, n=1$	$\frac{3}{4}$			
$m=4, n=1$	$\frac{4}{5}$			
$m=5, n=1$	$\frac{5}{6}$			
$m=6, n=1$	$\frac{6}{7}$			
$m=2, n=2$	1	$\frac{1}{3}$		
$m=3, n=2$	$\frac{6}{5}$	$\frac{1}{2}$		
$m=4, n=2$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$		
$m=5, n=2$	$\frac{10}{7}$	$\frac{2}{3}$		
$m=6, n=2$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{7}$		
$m=3, n=3$	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{1}{4}$	
$m=4, n=3$	$\frac{12}{7}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{2}{5}$	
$m=5, n=3$	$\frac{15}{8}$	$\frac{10}{7}$	$\frac{1}{2}$	
$m=6, n=3$	2	$\frac{45}{28}$	$\frac{4}{7}$	
$m=4, n=4$	2	$\frac{12}{7}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$
$m=5, n=4$	$\frac{20}{9}$	$\frac{15}{7}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{1}{3}$
$m=6, n=4$	$\frac{12}{5}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{10}{7}$	$\frac{3}{7}$

Każda forma (f, x, y) tylko jednym sposobem daje się rozwinąć na szereg uporządkowany według potęgrosnących wyznacznika (xy) ; współczynniki tego szeregu są biegunowemi. Jeżeli forma f jest symetryczna względem x i y , to współczynniki potęg parzystych wyznacznika (xy) są zerami.

§ 4.

Zestawienie nazw, używanych w teorii form.

Do teorii form różni autorowie, zwłaszcza angielscy, wprowadzili wielką liczbę nazw, których znaczenie dobrze jest rozumieć.

Quantics (quantica) — tak Anglicy zwykle nazywają formę.

2. Konkomitanty. Jest to nazwa, nadana przez Sylwestera utworowi niezmienniczemu ogólnemu.

3. Niezmiennik widoczny. Jest to ilość stała.

4. Niezmiennik bezwzględny. Jest to niezmiennik wymierny ułamkowy o skażniku zero.

5. Przeciwniezmiennik (kontrawaryant) jest to utwór, mający własność niezmienniczą, wtedy gdy ilości x w nim zawarte poddajemy przekształceniu liniowemu nie prostemu, lecz odwrotnemu; jest to zatem utwór, który odtwarza się, pomnożony przez potęgę modułu, jeżeli zamiast współczynników dawnych, podstawimy ich wyrażenia w współczynnikach przekształconych, zamiast zaś ilości x_1, x_2 wyrażenia:

$$\Delta x_1 = + A_{22}x_1' - A_{12}x_2'; \quad \Delta x_2 = - A_{21}x_1' + A_{11}x_2'.$$

6. Konkomitanty mieszane. Nazwę tą nadaje Sylvester utworowi o dwu szeregach ilości zmiennych, mającemu własność niezmienniczą wtedy, gdy jedne zmienne podda-

jemy przekształceniu prostemu. drugie zaś odwrotnemu. Utwo-
ry te nazywamy także

7. Formami pośrednimi (Zwischenformen, Aronhold) patrz § 6.

8. Diwarianty (Salmon) patrz § 6.

9. Nadwyznaczniki (Hyperdeterminants). Tak Cayley nazywał pierwotnie niezmienniki.

10. Spółpodstawieniom (cogredienti) nazywają się dwa szeregi zmiennych, które poddajemy tym samym podstawieniom.

11. Przeciwpodstawieniom (contragredienti) nazywają się dwa szeregi zmiennych, z których pierwsze poddajemy podstawieniom liniowym prostym, drugie—odwrotnym.

12. Emananty. Stosując k razy działanie Aronholda do niezmiennika formy f , dochodzimy do niezmiennika formy f i formy, której współczynniki wprowadzają się przy powyższem działaniu. Utwór ten nazywa się emanantem form f i φ (Cayley).

13. Kombinanty. Są to niezmienniki lub spółzmienniki jednoczesne układu form jednego stopnia, do których stosując działanie Aronholda, odniesione do obu form układu, otrzymujemy na rezultat zero (patrz Gordan, Invariantentheorie, II. str. 60).

Kombinant zmienia się o czynnik liczbowy, jeżeli zamiast układu form danych weźmiemy układ, którego formy są kombinacjami liniowymi form przewrotnych.

14. Ewektanty. Jeżeli w procesie Aronholda, zamiast mnożyć każdą pochodną przez współczynnik b_r o tym samym skażniku, jaki ma współczynnik, względem którego wzięto pochodną, mnożymy pochodną przez $(-1)^r x_2^{n-r} x_1^r$, t. j. jeżeli tworzymy

$$\sum (-1)^r x_2^{n-r} x_1^r \frac{\partial J}{\partial a_r},$$

gdzie a_r są współczynnikami istotnemi danej formy rzędu n -tego, której J jest niezmiennikiem, otrzymujemy t. z. ewektant (Cayley).

15. Katallektykanty. Forma rzędu nieparzystego $2m-1$ daje się zawsze wyrazić jako suma m potęgą form liniowych

$$a_x^{2m-1} = b_1(x_1 - a_1 x_2)^{2m-1} + \dots + b_m(x_1 - a_m x_2)^{2m-1}.$$

Równanie, od którego zależy wyznaczenie współczynników $a_1, \dots, a_m$ jest postaci

$$\begin{vmatrix} a_0, & . & . & . & . & . & a_{m-1}, & 1 \\ a_1, & . & . & . & . & . & a_m, & a \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{m-1}, & . & . & . & . & . & a_{2m}, & a^m \end{vmatrix} = 0$$

i nazywa się katallektykantem (Sylvester).

Też same rozważania stosować można i do form rzędu parzystego (patrz Cayley, Crelle LIV).

16. Syzygie. Tak nazywają się związki, zachodzące pomiędzy formami niezmienniczemi układu zupełnego.

17. Formy skośne (schiefe Formen, formes gauches, forme gobbe, skwew); są to formy niezmiennicze o charakterze nieparzystym (patrz wyżej § 2).

18. Półzmienniki (Seminvarianten, peninvarianti), są to utwory, mające własność niezmienniczą nie dla wszystkich możliwych podstawień liniowych, lecz tylko dla podgrupy grupy całkowitej.

§ 5.

Układy zupełne form niezmienniczych.

Każdy niezmiennik lub półzmiennik półzmiennika jest niezmiennikiem lub półzmiennikiem układu zasadniczego.

Każda forma niezmiennicza układu form daje się zawsze złożyć przy pomocy kolejnego

stosowania procesu fałdowania (Twierdzenie Gordan a.).

Dla danej formy lub danego układu form zasadniczych istnieje zawsze liczba skończona niezmienników i spółzmienników, których każdy inny niezmiennik układu jest funkcją całkowitą (Twierdzenie Gordana).

Ogół tych niezmienników i spółzmienników tworzy to, co nazywamy układem zupełnym.

Liczba form układu zupełnego nie jest znana a priori. Granicę jej wyższą wskazał Gordan (Jour. de Liouville, 1879).

Liczba spółzmienników J stopnia m i rzędu p formy rzędu n równa się liczbie spółzmienników stopnia n i rzędu p formy rzędu m (Twierdzenie o wzajemności Hermite'a).

Inne ważne twierdzenie (Brioschi'ego, Tow. naukowe w Erlangen, 1895) jest następujące:

Jeżeli dwie formy dwójkowe mają wspólny czynnik liniowy, to ich spółzmiennik jednocześnie stopni p , q i rzędu m wyraża się przez niezmienniki i spółzmienniki form, które otrzymujemy z form danych, opuszczając ich czynnik wspólny (Zastosowanie tego twierdzenia podał Brioschi Acc. Torino, 1896).

Układ zupełny układu form liniowych. Każdy współczynnik lub niezmiennik układu form liniowych $a_x, b_x, \dots$ tworzy się z agregatów czynników trzech następujących typów:

- 1) niezmienniki typu $(ab), \dots$
- 2) spółzmienniki typu a_x, b_x, a_y, b_y .
- 3) spółzmienniki typu $(xy), \dots$

Układ zupełny jednej lub dwu form kwadratowych. Układ zupełny formy kwadratowej a_x^2 tworzy się ze spółzmiennika a_x^2 oraz z niezmiennika (wyróżnika) $(ax')^2$. Niezmiennik $(aa')^2$ wyraża się przez współczynniki w ten sposób: $2(a_0a_2 - a_1^2)$.

Układ zupełny dwu form kwadratowych $f = ax^2$, $\varphi = bx^2$ tworzy się:

1) z dwu form danych;

2) z wyróżników

$$A_{ff} = (aa')^2, \quad A_{\varphi\varphi} = (bb')^2;$$

3) z niezmiennika

$$A_{f\varphi} = (ab)^2 = a_0b_2 + a_2b_0 - 2a_1b_1;$$

4) z jakobianu form danych:

$$\vartheta = (ab)axb = (a_0b_1 - a_1b_3)x_1^2 + (a_0b_2 - a_2b_0)x_1x_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)x_2^2.$$

Pomiędzy temi formami zachodzi związek:

$$\vartheta^2 = -\frac{1}{2} (A_{ff}\varphi^2 - 2A_{f\varphi}f\varphi + A_{\varphi\varphi}f^2).$$

Jeżeli ϑ jest tożsamościowo zerem, wtedy funkcyje f i φ są proporcjonalne.

Jeżeli $A_{ff}A_{\varphi\varphi} - A_{f\varphi}^2$ jest tożsamościowo zerem, wtedy obie formy mają czynnik wspólny.

Układ zupełny trzech lub więcej form kwadratowych $f = bx^2$, $\varphi = bx^2$, $\psi = cx^2$, ... tworzy się:

1) z n form danych;

2) z $\frac{n(n+1)}{2}$ form A_{ff} , $A_{\varphi\varphi}$, $A_{\psi\psi}$, ..., $A_{f\varphi}$...

3) z $\frac{n(n-1)}{2}$ spółzmienników kwadratowych

$$(f, \varphi) = \vartheta_{f\varphi}, \quad (f, \psi) = \vartheta_{f\psi}, \dots;$$

4) z $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ niezmienników typu

$$R_{\varphi\psi} = ((f, \varphi), \psi) = (ab)(ac)(bc) = \begin{vmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Razem $\frac{n(n^2 + 3n + 8)}{6}$ form niezmienniczych, wliczając w to formy dane.

Pomiędzy temi formami, prócz związków powyższych, odnoszących się do spółzmienników pomiędzy każdą dwiema formami, istnieją związki następujące:

$$2R^2_{f\varphi\psi} = \begin{vmatrix} A_{ff} & A_{f\varphi} & A_{f\psi} \\ A_{\varphi f} & A_{\varphi\varphi} & A_{\varphi\psi} \\ A_{\psi f} & A_{\psi\varphi} & A_{\psi\psi} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} A_{ff} & A_{f\varphi} & A_{f\psi} & f \\ A_{\varphi f} & A_{\varphi\varphi} & A_{\varphi\psi} & \varphi \\ A_{\psi f} & A_{\psi\varphi} & A_{\psi\psi} & \psi \\ f & \varphi & \psi & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$f\vartheta_{\varphi\psi} + \varphi\vartheta_{\psi f} + \psi\vartheta_{f\varphi} = 0,$$

$$R_{f\varphi\psi}f + A_{ff}\vartheta_{\varphi\psi} + A_{f\varphi}\vartheta_{\psi f} + A_{f\psi}\vartheta_{\varphi\psi}.$$

Pomiędzy niezmiennikami 4 lub 5 form istnieją nadto związki:

$$\begin{vmatrix} A_{ff} & A_{f\psi} & A_{f\varphi} & A_{f\chi} \\ A_{\varphi f} & A_{\varphi\varphi} & A_{\varphi\psi} & A_{\varphi\chi} \\ A_{\psi f} & A_{\psi\varphi} & A_{\psi\psi} & A_{\psi\chi} \\ A_{\varrho f} & A_{\varrho\varphi} & A_{\varrho\psi} & A_{\varrho\chi} \end{vmatrix} = 0,$$

gdzie ϱ może być w szczególności samą formą χ ; nadto mamy związek

$$A_{f\varphi}R_{\psi\chi\varrho} - A_{f\psi}R_{\chi\varrho\varphi} + A_{f\chi}R_{\varrho\varphi\psi} - A_{f\varrho}R_{\psi\varphi\chi} = 0,$$

i inne podobne.

Pomiędzy niezmiennikami sześciu form zachodzą (prócz poprzedzających) następujące związki:

$$R_{f\varphi\psi}R_{\chi\varrho\sigma} - R_{j\varphi\chi}R_{\varrho\sigma\psi} + R_{j\varphi\varrho}R_{\sigma\psi\chi} - R_{\psi\chi\sigma}R_{\psi\chi\varrho} = 0;$$

$$2R_{f\varphi\psi}R_{\chi\varrho\sigma} = \begin{vmatrix} A_{f\chi}, & A_{j\varrho}, & A_{f\sigma} \\ A_{\varphi\chi}, & A_{\varphi\varrho}, & A_{\varphi\sigma} \\ A_{\psi\chi}, & A_{\psi\varrho}, & A_{\psi\sigma} \end{vmatrix}.$$

Oto niektóre związki pomiędzy niezmiennikami 4 lub więcej form:

$$2\vartheta_{f\varphi}\vartheta_{\psi\chi} = \begin{vmatrix} A_{f\psi}, & A_{f\chi}, & f \\ A_{\varphi\psi}, & A_{\varphi\chi}, & \psi \\ \psi, & \chi, & 0 \end{vmatrix},$$

$$2\vartheta_{j\varphi}R_{\varphi\chi\varrho} = \begin{vmatrix} A_{j\psi}, & A_{j\chi}, & A_{j\varrho} \\ A_{\varphi\psi}, & A_{\varphi\chi}, & A_{\varphi\varrho} \\ \psi, & \chi, & \varrho \end{vmatrix},$$

$$fR_{\varphi\psi\chi} - \varphi R_{\psi\chi f} + \psi R_{\chi f\varphi} - \chi R_{f\varphi\psi} = 0,$$

$$fR_{\varphi\psi\chi} = A_{f\varphi}\vartheta_{\psi\chi} + A_{\chi\psi}\vartheta_{\chi\varphi} + A_{f\chi}\vartheta_{\varphi\psi}.$$

Znikanie niezmiennika R , należącego do trzech form kwadratowych f, φ, ψ ma znaczenie następujące:

Jeżeli $R_{j\varphi\psi}$ jest tożsamościowo zerem, to trzy pary punktów, przedstawiających pierwiastki trzech form kwadratowych, przyrównanych do zera, należą do tej samej involucyi, i odwrotnie.

Układ zupełny formy rzędu 3-go. Układ zupełny formy $f = a_x^3 = a_x'^3 \dots$ tworzy się z form następujących:

1. f ;

$$2. \Delta = (aa')^2 a_x a'_x = 2 \begin{vmatrix} a_0, & a_1, & x_2^2 \\ a_1, & a_2, & -x_1 x_2 \\ a_2, & a_3, & x_1^2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{aligned}
3. \quad R &= (\Delta \Delta')^2 = (a a')^2 (a'' a''')^2 (a a'') (a' a'') \\
&= 2[4(a_0 a_2 - a_1^2)(a_1 a_3 - a_2^2) - (a_0 a_3 - a_1 a_2)^2]; \\
4. \quad Q &= (a \Delta) a_x^2 \Delta_x = (a a')^2 (a' a'') a_x a'' x^2 \\
&= (a_0^2 a_3 - 3a_0 a_1 a_2 + 2a_1^3) x_1^3 \\
&\quad + 3(a_0 a_1 a_3 - 2a_0 a_2^2 + a_1^2 a_2) x_1^2 x_2 \\
&\quad - 3(a_0 a_2 a_3 - 2a_1^2 a_3 + a_1 a_2^2) x_1 x_2^2 \\
&\quad - (a_0 a_3^2 - 3a_1 a_2 a_3 + 2a_2^3) x_2^3.
\end{aligned}$$

Ilości Δ , R , Q są odpowiednio: hesyanem, wyróżnikiem i jacobianem; pomiędzy nimi zachodzi związek

$$2 Q^2 + \Delta^3 + R f^2 = 0.$$

Wyróżnik formy f , jeżeli pominiemy czynnik stały, równa się wyróżnikowi formy Δ , t. j. R .

Jeżeli $R=0$, wtedy f i Δ mają podwójny czynnik liniowy, wspólny obu tym formom; Q zaś jest zupełnym sześciannem tego czynnika liniowego.

Jeżeli Δ jest tożsamościowo zerem, wtedy Q jest sześciannem zupełnym formy liniowej.

Punkty, przedstawiające pierwiastki $f=0$ i $Q=0$, są trzema parami punktów w inwolucyi, której punktami podwójnemi są pierwiastki równania $\Delta = 0$.

Układ zupełny formy kwadratowej i sześcienniej. Układ zupełny form $f = a_x^2 = a'_x{}^2 = \dots$; $\varphi = b_x^3 = b'_x{}^3 = \dots$ tworzy się:

1. z pięciu niezmienników:

$$\begin{aligned}
A_{ff} &= (a a')^2, \quad A_{\Delta\Delta} = (\Delta \Delta')^2, \quad A_{f\Delta} = (a \Delta)^2, \\
F &= (a \varphi)^2, \quad M = -(\theta \varphi)^2;
\end{aligned}$$

2. z czterech spółzmienników liniowych:

$$p = (ab)^2 b_x; \quad q = (a \varphi) a_x; \quad r = (p \Delta) \Delta_x; \quad s = (\theta \varphi) \theta_x.$$

3. z trzech spółzmienników kwadratowych:

$$f; \quad \Delta = (bb')^2 b_x b'_x; \quad \theta = (a \Delta) a_x \Delta_x;$$

4. z trzech spółzmienników sześciennych:

$$\varphi; \quad Q = (b \Delta) b_x^2 \Delta_x; \quad \vartheta = (a b) a_x b_x^2.$$

Wszystkich form jest 15. Znakowanie powyższe pochodzi od Gordana; znakowanie Clebscha jest nieco odmienne.

Pomiędzy pięcioma niezmiennikami zachodzi związek:

$$-2M^2 = A_{ff}L^2 - 2A_{f\Delta}F.L + A_{\Delta\Delta}F^2,$$

gdzie

$$L = \frac{1}{2} (A_{ff}A_{\Delta\Delta} - A_{f\Delta}^2).$$

Niezmiennik L jest wyróżnikiem formy θ .
Inne związki są:

$$q^2 = fF - \frac{1}{2}p^2A_{ff}; \quad r^2 = \Delta L - \frac{1}{2}p^2A_{\Delta\Delta}; \quad -s^2 = \theta M + \frac{1}{2}p^2L.$$

Formę θ można, zamiast przez nasunięcie (f, Δ) , wyrazić przez nasunięcie (φ, p) tak, że:

$$\theta = (f, \Delta) = (\varphi, p).$$

Wypadkowa form f i φ , wyrażona przez niezmienniki zasadnicze, równa się $F - 2A_{f\Delta}A_{ff}$.

Układ zupełny dwu form sześciennych.

Układ zupełny dla form $f = a_x^3 = a'_x{}^3 = \dots$; $\varphi = b_x^3 = b'_x{}^3 = \dots$ składa się z następujących 26 form:

1) siedmiu niezmienników:

$$A_{\Delta\Delta}, \quad A_{\nabla\nabla}, \quad A_{\Delta\nabla}, \quad A_{\Delta\theta}, \quad A_{\nabla\theta},$$

$$J = (f, \varphi)^3, \quad \Omega = (\Delta\nabla)(\nabla\theta)(\Delta\theta).$$

2) sześciu spółzmienników liniowych:

$$\pi = (f, \nabla)^2, \quad p = (\varphi, \Delta)^2,$$

$$(\Delta, p), \quad (\Delta, \pi), \quad (\nabla, p), \quad (\nabla, \pi)$$

3) sześciu spółzmienników kwadratowych:

$$\Delta = (f, f)^2, \quad \nabla = (\varphi, \varphi)^2, \quad \theta = (f, \varphi)^2,$$

$$(\Delta\nabla), \quad (Q, \varphi)^2, \quad (K, f);$$

4) sześciu spółmienników sześciennych:

$$f, \varphi, Q = (f, \Delta), \quad K = (\varphi, \nabla), \quad (f, \nabla), \quad (\varphi, \Delta);$$

5) spółmiennika stopnia czwartego:

$$\vartheta = (f, \varphi).$$

Zachodzi tu związek zasadniczy bardzo prosty

$$(f, \pi) + (\varphi, p) = 0.$$

Wyróżnikiem formy θ jest:

$$A_{\theta\theta} = A_{\Delta\nabla} - \frac{J^2}{2};$$

nadto jest:

$$(f, \pi) = (\nabla, \Delta); \quad 2\Omega = (p, \pi).$$

Pomiędzy 7 niezmiennikami zachodzą dwa związki:

$$2\Omega^2 = \begin{vmatrix} A_{\Delta\Delta}, & A_{\theta\theta}, & A_{\nabla\Delta} \\ A_{\Delta\theta}, & A_{\theta\theta}, & A_{\nabla\theta} \\ A_{\Delta\nabla}, & A_{\theta\nabla}, & A_{\nabla\nabla} \end{vmatrix}$$

$$2J\Omega = (A_{\Delta\Delta}A_{\nabla\nabla} - A_{\nabla\Delta}A_{\Delta\nabla}) - 4(A_{\Delta\theta}A_{\theta\nabla} - A_{\theta\theta}A_{\Delta\nabla}).$$

Wypadkowa form f, φ równa się $2J\Omega - 2J^2$.

Dawniej mniemano, że układ zupełny dwu form sześciennych składa się z 28 form (patrz np. Clebsch: „Binäre Formen“), potem odkryto, że dwa spółmienniki liniowe były zbędne, bo można je wyrazić wymiennie przez inne (patrz Sylvester C.R. 1877, D'Ovidio i Gerbaldi, Acc. Torino, 1880).

Można tworzyć i inne spółmienniki liniowe; wyrażenia ich za pomocą niezmienników układu zupełnego są:

$$(Q, \nabla)^2 = (\pi, \Delta); \quad (K, \Delta)^2 = (p, \nabla);$$

$$(\varphi, \Delta^2)^3 = (p, \Delta); \quad (f, \nabla^2)^3 = (\pi, \nabla);$$

$$-(f, \pi p)^2 = (\varphi, p^2)^2 = A_{\theta\Delta} \pi + (A_{\theta\theta} + \frac{1}{2} J^2) p + J(\Delta, \pi);$$

$$-(\varphi, \pi p)^2 = (f, \pi^2)^2 = A_{\theta\Delta} p + (A_{\theta\theta} + \frac{1}{2} J^2) \pi - J(\nabla, p);$$

$$(f, p^2)^2 = A_{\Delta\Delta} \pi + A_{\theta\Delta} p + J(\Delta, p);$$

$$(\varphi, \pi^2)^2 = A_{\nabla\nabla} p + A_{\theta\nabla} \pi + J(\nabla, \pi).$$

Jeżeli $\Omega = 0$, a nie są zerami minory wyznacznika 2-go rzędu, przez który wyraża się Ω^2 (patrz wyżej), wtedy istnieje kombinacja liniowa $f + \lambda\varphi$ form f i φ , będąca sześcianiem zupełnym spółzmiennika liniowego p lub π ; te dwie formy w tym przypadku (po za czynnikiem) zlewają się. Zachodzi również twierdzenie odwrotne.

Jeżeli są zerami wszystkie minory 2-go rzędu wyznacznika, za pomocą którego wyraża się Ω^2 (a więc jest zerem i Ω), wtedy φ jest typu $f + \lambda Q$, (jest spółzmiennikiem formy f) lub f i φ są sześcianami zupełnymi. W obu przypadkach p i π są tożsamościowo zerami.

Układem trzech form sześciennych zajmował się v. Gall (Math. Ann. XLV, 1894).

Układ zupełny formy dwójkowej dwukwadratowej. Układ ten dla formy $f = a x^4 = b' x_4$ tworzy się z utworów następujących:

1) Dwa niezmienniki:

$$i = (a a')^4 = 2(a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2);$$

$$j = (f, H)^4 = (a a')^2 (a a'')^2 (a' a'')^2;$$

$$= 6 \begin{vmatrix} a_0, & a_1, & a_2 \\ a_1, & a_2, & a_3 \\ a_2, & a_3, & a_4 \end{vmatrix}.$$

2) Dwa spółzmienniki dwukwadratowe f ,

$$\begin{aligned} H = (a a')^2 a x^2 a' x^2 &= 2[(a_0 a_2 - a_1^2) x_1^4 + 2(a_0 a_3 - a_1 a_2) x_1^2 x_2 \\ &+ (a_0 a_4 + 2a_1 a_3 - 3a_2^2) x_1^2 x_2^2 + 2(a_1 a_4 - a_2 a_3) x_1 x_2^3 \\ &+ (a_2 a_4 - a_3^2) x_2^4]. \end{aligned}$$

3) Spółzmiennik rzędu 6-go:

$$\begin{aligned}
 T = (f_1 H) &= (a a')^2 (a'' a') a_x^2 a'_x a'^3_x \\
 &= (a_0^2 a_3 - 3 a_0 a_1 a_2 + 2 a_1^3) x_1^6 \\
 &+ (a_0^2 a_4 + 2 a_0 a_1 a_3 - 9 a_0 a_2^2 + 6 a_1^2 a_2) x_1^5 x_2 \\
 &+ 5 (a_0 a_1 a_4 - 3 a_0 a_2 a_3 + 2 a_1^2 a_3) x_1^4 x_2^2 \\
 &+ 10 (a_1^2 a_4 - a_0 a_3^2) x_1^3 x_2^3 \\
 &+ 5 (-a_0 a_3 a_4 + 3 a_1 a_2 a_4 - 2 a_1 a_3^2) x_1^2 x_2^4 \\
 &+ (9 a_4 a_2^2 - a_2^4 a_0 - 2 a_1 a_3 a_4 - 6 a_3^2 a_2) x_1 x_2^5 \\
 &+ (3 a_2 a_3 a_4 - a_1 a_4^2 - 2 a_3^3) x_2^6.
 \end{aligned}$$

Formy H i T Gordan oznacza przez Δ i t . Pomiedzy wypisanemi formami zachodzi związek:

$$T^2 = -\frac{1}{2} \left[H^3 - \frac{i}{2} H f^2 + \frac{j}{3} f^3 \right].$$

Jeżeli przez m, m', m'' oznaczymy trzy pierwiastki równania sześciennego

$$\Omega = z^3 - \frac{1}{2} z - \frac{j}{3} = 0, \quad (\text{równanie rozwiązujące})$$

i położymy:

$$H + m f = -2 \varphi^2; \quad H + m' f = 2 \psi^2; \quad H + m'' f = -2 \chi^2,$$

będzie:

$$T = 2 \varphi \psi \chi.$$

Trzy formy kwadratowe φ, ψ, χ mają ciekawą własność, mianowicie, że każda z nich jest jacobianem dwóch pozostałych

$$(\psi, \chi) = \frac{m' - m''}{2} \varphi; \quad (\chi, \varphi) = \frac{m'' - m}{2} \psi; \quad (\varphi, \psi) = \frac{m - m'}{2} \chi;$$

Wyróżnikiem formy f jest:

$$H_f = \frac{1}{27} (i^3 - 6j^2).$$

Rugownik form f i H , pomijając czynnik liczbowy, równa się kwadratowi wyróżnika formy f .

Jeżeli wyróżnik formy f jest zerem, to f ma czynnik podwójny, i ten sam czynnik jest zarazem czynnikiem dwukrotnym dla H , pięciokrotnym dla T .

Jeżeli f i H różnią się czynnikiem stałym, wtedy i tylko wtedy f jest kwadratem zupełnym formy rzędu 2-go.

Jeżeli H jest dokładną czwartą potęgą, nie znikającą tożsamościowo, wtedy $i = 0$, $j = 0$, f zaś ma czynnik potrójny. Odwrotnie, jeżeli f ma czynnik potrójny, H będzie czwartą potęgą dokładną, i i j zaś będą zerami. W tym przypadku T będzie potęgą szóstą dokładną tego samego czynnika, który w f występuje trzykrotnie.

Jeżeli H jest tożsamościowo zerem, to f jest dokładnie potęgą czwartą wyrażenia liniowego i odwrotnie; w tym przypadku T , i , j są oczywiście zerami.

Układ zupełny formy kwadratowej i dwukwadratowej.
Niechaj będzie

$$f = a_x^2 = a'_x{}^2 = \dots; \quad \varphi = b_x^4 = b'_x{}^4 = \dots;$$

układ zupełny składa się z 18 form następujących:

1) Sześciu niezmienników:

$$i, j \quad (\text{jak wyżej}),$$

$$D = (a a')^2, \quad A = (a b)^2 (a' b')^2 = (\psi a)^2,$$

$$B = (a H)^2 (a' H')^2 = (\chi a)^2, \quad C = (\psi \chi, \psi a) (\chi a) = (\tau a)^2.$$

2) Sześciu spółzmienników kwadratowych:

$$f, \quad \psi = (a b)^2 b_x^2, \quad \chi = (a H)^2 H_x^2,$$

$$\tau = (\psi \chi) \psi_x \chi_x, \quad \Psi = (\psi a) \psi_x a_x, \quad X = (\chi a) \chi_x a_x.$$

3) Pięciu spółmienników dwukwadratowych:

$$\varphi, \quad H = (b b')^2 b_x^2 b'_x{}^2,$$

$$L = (b a) b_x^3 a_x, \quad M = (H a) H_x^3 a_x, \quad K = (\psi H) \varphi_x H_x^3.$$

4) Spółmiennika stopnia 6-go:

$$T = (\varphi, H).$$

Wszystkich form jest 18.

Pomiędzy temi formami zachodzi związek:

$$C^2 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} D, & A, & B, \\ A, & B + \frac{iD}{3}, & \frac{iA}{6} + \frac{jD}{3} \\ B, & \frac{iA}{6} + \frac{jD}{3}, & \frac{jA}{3} - \frac{iB}{6} + \frac{iD}{18} \end{vmatrix}$$

Rugownik form f i φ ma postać

$$A^2 - 4DB + \frac{2}{3} i D^2.$$

Jeżeli C jest zerem, wtedy i tylko wtedy istnieje forma kwadratowa g taka, że φ można wyrazić jako funkcję kwadratową form f i g . Tym układem zupełnym zajmował się Harbordt (Math. Ann. I, 1869).

Inne układy zupełne

Układ dla formy sześciennnej i dwukwadratowej obliczał Gundelfinger (Tybinga 1885); potem Sylvester C. R. 1878 sprowadził układ do trzech formacyj. Układ ten składa się z 61 form, mianowicie: 20 niezmienników, 15 spółmienników liniowych, 10 niezmienników kwadratowych, 8 niezmienników sześciennych, 5 niezmienników dwukwadratowych, 2 niezmienników rzędu 5-go, jednego niezmiennika rzędu 6-go.

Wypadkową dla formy sześciennnej i kwadratowej obliczył Brioschi (Collect. math. in memoriam Chelini, Medyolan 1881).

Dwie formy dwukwadratowe. Układ, obliczony przez Gordan (Math. Ann. II, patrz przekład niemiecki dzieła Faà di Bruno), składa się z 28 form, a mianowicie: ośmiu niezmienników, ośmiu spółzmienników kwadratowych, siedmiu spółzmienników rzędu 4-go, pięciu spółzmienników rzędu 6-go.

Gordan początkowo wprowadził dwa utwory zbyteczne, jak to później zauważył Sylvester (C. R. 1887). Pomiędzy ośmiu niezmiennikami zachodzi związek, którego obliczenie rozpoczął Bertini (Math. Ann. XI, 1877) a ukończył d'Ovidio (Acc. Torino XV, 1880). I inni autorowie zajmowali się tem pytaniem (patrz wiadomości, zawarte w nocie d'Ovidio „Sopra alcune classi di sizigie binarie“, Acc. Torino 1893) i notę Brioschi'ego (Acc. Torino, 1896). Wypadkową dwu form kwadratowych obliczył d'Ovidio (Acc. Torino, 1880).

Forma rzędu piątego posiada najwyżej 23 formy niezmiennicze, a mianowicie :

4 niezmienniki				stopni 4, 8, 12, 18
4 spółzmienniki 1-go rzędu				„ 5, 7, 11, 13
3	2	„	„	2, 6, 8
3	3	„	„	3, 5, 9
2	4	„	„	4, 6
3	5	„	„	1, 3, 7
2	6	„	„	2, 4
1 spółzmiennik	7	„	stopnia	5
1	9	„	„	3.

Niezmienniki są tedy stopni 4, 8, 12, 18 co do współczynników formy rzędu 5-go; przez dwie pierwsze z pomiędzy nich wyraża się wyróżnik, obliczony przez Salmona (Camb. math Journ. V, 1850).

Układ zupełny dla formy rzędu 5-go znajduje się u Clebscha Patrz: Gordan „Invariantentheorie“; Faà di Bruno (przekład) „Binäre Formen“ str. 328—355; Cayley; d'Ovidio (Acc. Torino, 1880). Co do wypadkowej formy 5-go rzędu i kwadratowej patrz d'Ovidio (Mem. Soc. ital. delle scienze, t. IV, 1881), a co do wypad-

kowej formy 5-go rzędu i dwukwadratowej lub dwu form 5-go rzędu d'Ovidio (Mem. Lincei IV, 1888).

Układy zupełne dla form rzędu 5-go i wraz z inną formą nie są jeszcze zupełnie znane, jeżeli wyłączymy tylko pracę Wintera (Progr. Darmstadt, 1880), gdzie badany jest przypadek formy kwadratowej i formy rzędu 5-go.

Układ zupełny formy dwójkowej szóstego rzędu składa się:

z 5 niezmienników			stopni	2, 4, 6, 10, 15
„ 6 spółzmienników	2-go rzędu	„	„	3, 5, 7, 8, 10, 12
„ 5	4	„	„	2, 4, 5, 7, 9
„ 5	6	„	„	1, 3, 4, 6
„ 3	8	„	„	2, 3, 5
„ 1	10	„	„	4
„ 1	12	„	„	3

Ten układ zupełny znajduje się u Clebscha (Binäre Formen), u Gordana (l. c.) i innych. Wyróżnik tej formy obliczył pierwszy Brioschi (Crelle LIII, Ann. di Math. I). Związki pomiędzy formami układu zupełnego znaleźli: Clebsch, Gordan, Stephanos (Comptes rendus XCVI), Maisano (Lincei XIX, Math. Ann. XXXI), d'Ovidio (Acc. Torino 1889, 1892, 1893). Wypadkową formy 6-go rzędu i formy sześcienniej obliczył d'Ovidio (Acc. Torino 1892); układem formy 6-go i 4-go rzędu zajmował się v. Gall (Progr. Lemgo, 1873).

Układ zupełny formy dwójkowej rzędu 7-go składa się z utworów, przedstawionych w poniższej tablicy, gdzie widać odrazu numer kolejny, rząd i stopień każdego z nich.

Rząd w zmiennych.

Stopień w spółczynnikach.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1								1								
2			1				1				1					
3				1		1			1			1				1
4	1				2		1		2		1					1
5		1		2		2		2		2				1		
6			3		2		2		2				1			
7		3		2		4		2				1				
8	3		3		3		3				1					
9		3		5		2				1						
10			4		4				1							
11		5		3				1								
12	6		6				1									
13		7		1		1										
14	4				2											
15		3		1												
16	2		3													
17		2														
18	9		1													
19		2														
20	2															
22	3															
23		1														
25		1														
26	2															
30	1															

Układ zupełny dla formy 7-go rzędu badali: Krey (Diss. Getynga, 1874), Gordan (Ueber das Formensystem binärer Formen, Lipsk, 1875); Sylvester (Am. Journ. of. Math., II, 1879) podał tablicę form układu zupełnego, lecz wymagała ona poprawek; v. Gall (Math. Ann. XXXI, str. 318) traktował zagadnienie ogólniej i podał tablicę, wyżej umieszczoną.

Układ zupełny dla formy rzędu 8-go jest następujący :

Rząd w zmiennych.

Stopień względem spółczynników.

	0	2	4	6	8	10	12	14	18
1					1				
2	1		1		1		1		
3	1		1	1	1	1	1	1	1
4	1		2	1	1	2	1	1	1
5	1	1	2	2	1	3		1	
6	1	1	2	3	1	1			
7	1	2	2	3					
8	1	2	2	2					
9	1	3	1						
10	1	2							
11		2							
12		1							

Razem form 69.

Układ ten znalazł Sylvester (Am. Journ. II); później badał go v. Gall (Math. Ann. XVII, str. 31, 149, 456), który początkowo myślał, iż znalazł trzy utwory zbyteczne w tablicy Sylwestera oraz brak jednego utworu (C_{10}^4 , t. j. spółzmiennika 4-go rzędu i 10 stopnia); potem na str. 456 t. XVII poprawił się co do utworów zbytecznych;

wreszcie co do C_{10}^4 , to Sylvester (C. R. 1881) uznał jej zbyt-
teczność.

Co do innych układów zupełnych patrz pracę Sylwestera (Am.
Journ. II), które dla 9-go rzędu znalazł utworów 415, dla rzędu
10-go zaś 475.

Wyróżnik formy rzędu 7-go badał Gordan (Math. Ann. XXXI).
Co do związków pomiędzy dziewięcioma niezmiennikami formy rzędu
8-go patrz Alagna, Rend. Palermo VI.

Ważną pracą o utworzeniu układów zupełnych jest praca G o r-
d a n a: „Ueber des Formensystem etc.“, Lipsk, 1875.

§ 6.

Przedstawienia typowe form dwójkowych. Formy stowarzyszone.

Przedstawieniem typowym jednej lub wielu form
nazywamy takie przedstawienie, którego zmienne są spółzmienn-
nikami wymiernymi, współczynniki zaś niezmiennikami wymier-
nemi form danych.

Dla formy a_x^n rzędu nieparzystego dochodzimy do
przedstawienia typowego w sposób następujący:

Wiemy, że dla takiej formy, gdy $n > 3$, istnieją zawsze dwa
spółzmienniki liniowe, których wyznacznik jest różny od zera;
niechaj temi formami będą α_x, β_x . Podnosząc do potęgi n -tej
obie strony tożsamości symbolicznej

$$a_x (\alpha\beta) = a_x (\alpha\beta) - \beta_x (\alpha\alpha),$$

otrzymamy po stronie pierwszej $f.(\alpha\beta)^n$, po drugiej zaś formę
rzędu n -tego ze spółzmiennikami α_x i β_x , której współczynniki
są niezmiennikami. Pozostaje tedy tylko wyrazić te współczyn-
niki przez niezmienniki zasadnicze.

Toż samo można uczynić dla układu form zasadniczych,
ile razy istnieją dwa spółzmienniki liniowe.

Do przedstawienia typowego formy a_x^n rzędu parzyste-
go dochodzimy sposobem następującym:

Wiemy, że dla n parzystego i > 4 istnieją zawsze dwa spółzmienniki kwadratowe, których wypadkowa jest różna od zera. Za ich pomocą można zawsze utworzyć trzeci, liniowo od pierwszych niezależny, t. j. ich jakobian.

W każdym przypadku możemy tedy pomyśleć trzy spółzmienniki: α^2_x , β^2_x , γ^2_x . Za ich pomocą można otrzymać przedstawienie typowe, podnosząc do potęgi $\frac{n}{2}$ obie strony związku tożsamościowego

$$\alpha_x^2 R_{\alpha\beta\gamma} = \alpha (a, A)^2 + \beta (a, B)^2 + \gamma (a, C)^2,$$

gdzie A , B , C są odpowiednio jakobianami dla β , γ ; γ , α ; α , β . Jeżeli w szczególności $\gamma = C$, wtedy:

$$R_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2} \{ (\alpha, \alpha)^2 (\beta, \beta)^2 - [(\alpha, \beta)^2]^2 \},$$

a podnosząc do potęgi $\frac{n}{2}$, otrzymujemy:

$$f \cdot [R_{\alpha\beta\gamma}]^{\frac{n}{2}} = [\alpha (a, A)^2 + \beta (a, B)^2 + \gamma (a, C)^2]^{\frac{n}{2}}.$$

Rozwijając, otrzymamy przedstawienie funkcji f za pomocą zmiennych α , β , γ ze spółczynnikami, które są niezmiennikami.

Formy (niezmienniki, spółzmienniki), za pomocą których otrzymujemy przedstawienie typowe, nazywają się formami stowarzyszonymi (Schwesterformen).

Liczbą form stowarzyszonych jest $k+3$, jeżeli k liczba spółczynników form danych i jeżeli za nowe zmienne wybieramy spółzmienniki liniowe; jeżeli zaś wybieramy spółzmienniki kwadratowe, to liczba form stowarzyszonych wynosi $k+10$.

Każdy niezmiennik lub spółzmiennik układu danego może być wyrażony wymiennie (lecz nie w funkcjach całkowitych) za pomocą form stowarzyszonych przedstawienia typowego.

§ 7.

Przedstawienie kanoniczne form.

Przedstawieniem kanonicznem form nazywa się takie przedstawienie, w którym liczba współczynników jest możliwie najmniejsza; daje się to uskutecznić za pomocą odpowiedniego podstawienia liniowego (liczba współczynników podstawienia liniowego jest 4, a więc liczba, do którego zredukować można liczbę współczynników, wynosi najwyżej 4).

Jeżeli w szczególności nowe wprowadzone zmienne i nowe współczynniki są spółzmiennikami i niezmiennikami formy, mamy wtedy przedstawienie kanoniczne typowe.

1. **Forma sześcienna.**

Każdą formę sześcienną można przekształcić w ten sposób:

$$f = \frac{1}{\sqrt{-\frac{R}{2}}} (\xi_1^3 - \xi_2^3);$$

tu ξ_1, ξ_2 , wyrażone przez x_1, x_0 , są dwoma czynnikami liniowymi spółzmiennika kwadratowego Δ ; $\Delta = -2\xi_1\xi_2$.

2 **Forma dwukwadratowa**

Każda forma dwukwadratowa daje się sprowadzić do postaci

$$f = \xi_1^4 + 6m\xi_1^3\xi_2^2 + \xi_2^4,$$

gdzie m jest pierwiastkiem równania

$$\frac{i^3}{j^2} = \frac{2}{9} \frac{(1+3m^2)^3}{m^2(1-m^2)^2}$$

stopnia 3-go względem m^2 ; ξ_1, ξ_2 są czynnikami liniowymi jednej z trzech form kwadratowych φ, ψ, χ , na które rozkłada się niezmiennik rzędu 6-go (patrz wyżej str 268).

Moduł (rs) podstawienia

$$\xi_1 = r_1 x_1 + r_2 x_2; \quad \xi_2 = s_1 x_1 + s_2 x_2,$$

oblicza się z wzoru

$$(rs)^2 = \frac{1 + 3m^2}{3m(1 - m^2)} \frac{j}{i},$$

gdzie j, i należy obliczyć dla formy kwadratowej ogólnej (niezredukowanej do postaci kanonicznej).

Aby forma dwukwadratowa dała się przekształcić na formę $\xi_1^4 + \xi_2^4$, jest koniecznem, by $j=0$.

3. Forma rzędu 5-go.

Każda forma rzędu 5-go daje się przedstawić w postaci:

$$k_1 (\xi_1 - m_1 \xi_2)^5 + k_2 (\xi_1 - m_2 \xi_2)^5 + k_3 (\xi_1 - m_3 \xi_2)^5;$$

t. j. jako suma trzech potęg piątych (Sylvester).

Ilości ξ_1, ξ_2 są dwoma spółzmiennikami liniowymi formy rzędu 5-go, a mianowicie spółzmiennikami, które oznaczamy przez a, δ ;

$a = \xi_1$ jest spółzmiennikiem liniowym stopnia 5-go

$\delta = \xi_2$ „ „ „ „ 13 „ ;

m_1, m_2, m_3 są pierwiastkami spółzmiennika sześciennego stopnia 3-go (który oznaczamy zwykle przez j), ilości k są określone za pomocą trzech związków:

$$(k_1 + k_2 + k_3) R^5 = I_{26} = - (f_1 \xi_1^5)^5$$

$$5 (k_1 m_1 + k_2 m_2 + k_3 m_3) R^5 = I_{34} = - (f, \xi_1^4 \xi_2^5)$$

$$10 (k_1 m_1^2 + k_2 m_2^2 + k_3 m_3^2) R^5 = I_{42} = (f, \xi_1^3 \xi_2^5);$$

strony drugie są tu wyrażone jako nasunięcia formy f na kombinacje liniowe $\xi_1 \xi_2$, zaś R jest niezmiennikiem, który otrzymujemy, tworząc nasunięcie drugie spółzmiennika kwadratowego stopnia 8-go ϑ na formę ξ_1 :

$$R = (\vartheta, \xi_1)^2 = (\xi, j, \xi_1)^2.$$

Szczegóły znaleźć można u Gordana (Invarianttheorie).

Jeżeli j ma jeden pierwiastek podwójny, który będzie wówczas pierwiastkiem równania $\delta = 0$, wtedy poprzedzająca forma kanoniczna nie jest możliwa. Będzie wtedy $R^2 j = \delta^2 \varrho$, a kładąc dla symetrii $\delta = \eta_1$, $\varrho = \eta_2$ otrzymamy formę kanoniczną (Bringa 1786):

$$6 R^4 f = B \eta_1^5 + 5 B \eta_1^4 \eta_2 - 4 A_2 \eta_2^5,$$

gdzie A, B są niezmiennikami formy rzędu 5-go stopni 4, 8. Podstawiając tu

$$5 B = -4 A^2 I, \quad \eta_2 = \eta_1 X^4 \sqrt{I},$$

otrzymujemy formę Hermite'a

$$X^5 - X - \frac{1}{5} I^{-\frac{1}{4}}.$$

4. Forma rzędu 6-go.

Forma ta może być sprowadzona do postaci kanonicznej

$$u^6 + v^6 + w^6 + \lambda u v w (u-v) (v-w) (w-u),$$

gdzie u, v, w są trzema formami liniowymi, λ zaś pierwiastkiem równania

$$\begin{vmatrix} a_0, & a_1, & a_2, & a_3 - \lambda \\ a_1, & a_2, & a_3 + \frac{1}{3}\lambda, & a_4 \\ a_2, & a_3 - \frac{1}{3}\lambda, & a_4, & a_5 \\ a_3 + \lambda, & a_4, & a_5, & a_6 \end{vmatrix} = 0.$$

Jeżeli niezmiennik stopnia 4-go

$$\begin{vmatrix} a_0, & a_1, & a_2, & a_3 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_3, & a_4, & a_5, & a_6 \end{vmatrix}$$

jest zerem, wtedy forma rzędu 6-go sprowadza się do postaci

$$u^6 + v^6 + w^6.$$

O redukcji formy 6-go rzędu do sumy czterech potęg szóstych patrz Salmon, Lessons, art. 246).

Inne formy kanoniczne w przypadku ogólnym podali: Brill (Math. Ann. XX, str. 330), Brioschi i Maschke (Math. Ann. XXX, str. 496, Acc. Lincei 1888, Acta math. XII). Forma ostatniego jest postaci

$$x^6 + \alpha x^5 + \beta x_3 + \frac{\alpha^2}{4} x^2 + \gamma x + \delta,$$

gdzie $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ są czterema niezmiennikami formy; to przedstawienie jest typowem i kanonicznem.

Inne jeszcze przedstawienie kanoniczne podał Brioschi (Ann. di mat. XI, 1883).

Co się tyczy historii teorii niezmienników, powiemy, że—jeżeli pominiemy pewne rozwiązania Gaussa i Lagrange'a)—wzięła ona początek swego rozwoju od Aronholda, Cayley'a i Sylvestera. Potem Clebsch i Goordan wprowadzili rachunek tak zwany symboliczny i doprowadzili go do możliwego rozwinięcia; jakkolwiek pierwszy pomysł rachunku symbolicznego, pod inną—co prawda—formą, pochodzi od matematyków angielskich.

Szczegółowa historia teorii niezmienników mieści się w pracy Fr. Meyera („Bericht über den gegenwärtigen Stand der Invariantentheorie“, Jahresbericht der Deut. Mathem.-Vereinig. II, 1892), przekład S. Dicksteina w „Pracach matematyczno-fizycznych“ t. VII, VII, IX i X).

Najważniejszymi dziełami, traktującymi o teorii niezmienników są: Salmon „Lessons to the modern higher Algebre“, Dublin 1859—1885 (przekład niemiecki Fiedlera, Lipsk 1863—1877, polski Sągajły, w t. II Algebry, Paryż, 1875); Brioschi, Annali di Tortolini, I, 1861; Fiedler, Lipsk 1862; Clebsch, Binäre Formen, Lipsk 1872; Faà di Bruno, Formes binaires, Turyn 1876, przekład niemiecki Waltera i Noethera, Lipsk 1881; Goordan, „Invariantentheorie“, Lipsk 1887; Ellis, „Algebra of Quantics, Oxford 1895.

ROZDZIAŁ XIII.

FUNKCJE ZMIENNYCH ZESPOŁONYCH.

§ 1.

Wiadomości ogólne.

Do prostoty i dogodności przyjmujemy, że zmienną zespoloną $x+iy$ przedstawia według znanego sposobu punkt na płaszczyźnie.

Zmienna zespolona $X+iY$ nazywa się funkcją *monogeniczną* (lub wprost funkcją) zmiennej zespolonej $x+iy$, jeżeli X i Y są (w pewnej części płaszczyzny, której punkty mają za współrzędne x i y) funkcjami rzeczywistymi ciągłymi dwu zmiennych rzeczywistych x i y , czyniącemi zadość dwóm związkom:

$$\frac{\partial Y}{\partial y} = - \frac{\partial X}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y} \quad \text{(określenie Cauchy'ego);}$$

albo inaczej: jeżeli $w = X + iY$ zależy w pewnej części płaszczyzny od $z = x + iy$ w ten sposób, iż stosunek odpowiednich przyrostów, t. j. $\frac{\Delta w}{\Delta z}$, ma granicę określoną i jedyną, bez

względem na sposób, w jaki Δz dąży do zera, t. j. bez względu na to, w jaki sposób punkt, przedstawiony przez zmienną zespoloną $(x + \Delta x) + i(y + \Delta y)$, zbliża się do punktu, przedstawionego przez $x + iy$ (określenie Riemanna).

W § 3 podamy definicję funkcji analitycznych według Weierstrassa.

Jeżeli X, Y są funkcjami rzeczywistymi jednowartościowymi zmiennych x, y , wtedy funkcja nazywa się jednowartościową, jednoznaczną, lub jednopostaciową (monodromiczną lub monotropową); jeżeli zaś są to funkcje, mające więcej wartości, to funkcja w nazywa się wieloznaczną, wielowartościową, lub wielopodstaciową, (polidromiczną lub politropową).

W przypadku pierwszym, jeżeli dla wszystkich wartości lub wszystkich punktów wewnątrz uważanej części płaszczyzny funkcja w jest skończoną, mamy funkcję holomorficzną, albo inaczej funkcję o charakterze funkcji całkowitej, albo wreszcie regularną (Weierstrass).

Jeżeli funkcja w staje się nieskończoną w jakimś punkcie $z = P$, lecz w ten sposób, że istnieje zawsze otoczenie tego punktu, wewnątrz którego funkcja $\frac{1}{w}$ jest holomorficzną, wtedy funkcja w nazywa się meromorficzną, a punkty, w których staje się nieskończoną, nazywają się biegunami.

Przypadkiem szczególnym funkcji holomorficznej jest funkcja wymierna, całkowita; przypadkiem szczególnym funkcji meromorficznej jest funkcja wymierna; przypadkiem szczególnym funkcji monogenicznej jest funkcja algebraiczna, którą można określić ogólniej w sposób następujący. Załóżmy, że pomiędzy ilościami w i z zachodzi związek całkowity wymierny $\varphi(w, z) = 0$; wtedy w będzie w ogóle funkcją wieloznaczną zmiennej z ; funkcja wymierna $F(w, z)$ dwu zmiennych w i z nazywa się funkcją algebraiczną ogólną zmiennej z . Funkcyom algebraicznym poświęcamy rozdział XV.

Funkcja monogeniczna niealgebraiczna jest funkcją przestępną.

Powiadamy, że $z = a$ jest pierwiastkiem lub zerem rzędu k funkcji jednoznacznej $f(z)$, gdy $f(a) = 0$, oraz gdy $\frac{f(z)}{(z-a)^k}$ nie staje się ani zerem ani nieskończonością dla $z = a$.

Powiadamy, że $z = \infty$ jest pierwiastkiem lub zerem rzędu k funkcji jednoznacznej $f(z)$, gdy $f(\infty) = 0$ nadto $z^k f(z)$ nie staje się ani zerem, ani nieskończonością dla $z = \infty$.

Nazwiemy punkt $z = a$ biegunem rzędu k funkcji $f(z)$ gdy funkcja $\frac{1}{f(z)}$ ma w punkcie $z = a$ punkt zerowy rzędu k -tego. Jeżeli w jest funkcją jednoznaczną zmiennej z , wtedy tak część jej rzeczywista X jak i współczynnik części urojonej, t. j. Y , czynią zadość równaniu różniczkowemu (Laplace'a)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Każda funkcja dwu zmiennych rzeczywistych x, y , czyniąca zadość równaniu Laplace'a, nazywa się funkcją potencjalną lub funkcją harmoniczną.

Odwrotnie: jeżeli X, Y są funkcjami ciągłymi i ilości x, y i czynią zadość powyższemu równaniu różniczkowemu, to mogą one stanowić część rzeczywistą i współczynnik części urojonej funkcji jednoznacznej.

Jeżeli część rzeczywista zmiennej w jest dana, to można wyznaczyć część czysto urojoną (z dołączeniem stałej dowolnej).

Jeżeli znany sposób przedstawimy za pomocą punktów na płaszczyźnie (w) wartości zmiennej zespolonej w , to ustanowimy odpowiedniość pomiędzy punktami płaszczyzny w a punktami płaszczyzny z . Mówimy wtedy, że płaszczyzna z jest odwzorowana na płaszczyźnie w .

Rozpatrzmy część płaszczyzny z , na której funkcyja w jest funkcyą jednoznaczną; punktowi z odpowiada punkt w ; linii ciągłej w obszarze zmiennej z odpowie linia ciągła w obszarze zmiennej w . Odwzorowanie posiada wtedy następującą ważną własność.

Kąt między dwiema liniami, spotykającemi się na płaszczyźnie z , równa się kątowi pomiędzy odpowiedniami liniami na płaszczyźnie w .

Takie odwzorowanie nazywa się podobnem (conforme, patrz „Geometrya różniczkowa“) i odpowiada przekształceniu, zwanemu ortomorficznem (Cayley).

Trójkąt nieskończenie mały na płaszczyźnie z jest (pomijając nieskończenie małe rzędów wyższych) podobny do odpowiedniego trójkątu nieskończonościowego na płaszczyźnie w .

W punktach, w których jest $\frac{dw}{dz} = 0$, odwzorowanie podobne ustaje.

Linie płaszczyzny z , dla których $X = \text{stała}$, nazywają się liniami poziomymi, to dla których $Y = \text{stała}$ — liniami prądu (przepływu), obie — liniami równego potencjału (ekwipotencyalnemi).

Linie poziome są prostopadłe do linii przepływu.

Zamiast na płaszczyźnie, można zmienną zespoloną przedstawić na kuli, rzucając stereograficznie punkty płaszczyzny na kulę. Otrzymujemy wtedy tę dogodność, że punkt w nieskończoności staje się jedynym punktem na kuli.

§ 2.

Szeregi potęgowe zmiennych zespolonych.

O działaniach na zmiennych zespolonych, mianowicie o dodawaniu, odejmowaniu, mnożeniu, dzieleniu, podnoszeniu do potęgi rzeczywistej mówiliśmy już w rozdziale I-ym; funkcyje algebraiczne tej zmiennej określiliśmy w § 1 rozdziału niniejszego. Pozostaje jeszcze rozpatrzenie podnoszenia do potęgi zespolonej, logarytmu, funkcyj trygonometrycznych zmiennych zespolonych i t. p., co pozwoli nam na wprowadzenie funkcyj przestępnych tych zmiennych. W tym celu zajmiemy się najprzód szeregami, a mianowicie szeregami potęgowymi.

Określenie szeregów o wyrazach zespolonych podaliśmy wyżej w rozdziale IV ym.

Określenia i twierdzenia zasadnicze o szeregach funkcyj zmiennych zespolonych są analogiczne do określeń i twierdzeń o szeregach funkcyj zmiennych rzeczywistych. W tenże sam sposób określamy zbieżność i zbieżność bezwzględną; należy tylko wszędzie w określeniach dawniejszych przez wartość bezwzględną rozumieć to, co nazywa się modułem lub wartością bezwzględną liczby urojonej (patrz Rozdz. 1, § 2).

Obszarem zbieżności takiego szeregu jest nie już odcinek prostej, lecz pole płaskie.

Równozbieżność danego szeregu funkcyj zmiennej zespolonej określamy w ten sposób: zachodzi ona wtedy, gdy dawszy sobie $\sigma > 0$, można znaleźć takie n , że dla każdego $m \geq n$, reszta $R_n(z)$ szeregu ma moduł mniejszy od σ , dla wszelkiej wartości z w obszarze zbieżności:

Rozpatrzmy szereg potęg całkowitych dodatnich zmiennej zespolonej z , t. j.

$$c_0 + a_1 z + a_1 z^2 + \dots$$

Jeżeli dla $z = z_0$ moduły różnych wyrazów szeregu potęgowego pozostają mniejsze od liczby A , wtedy dla każdej wartości z , której moduł jest mniejszy od z_0 , szereg potęgowy jest zbieżny bezwzględnie, a więc niezależnie od porządku wyrazów.

Jeżeli dla $z = z_0$ szereg jest zbieżny nie bezwzględnie, wtedy dla każdej wartości z o module mniejszym niż moduł z_0 , szereg będzie zbieżny bezwzględnie, a dla każdej wartości z o module większym od modułu z_0 będzie rozbieżny.

Obszar zbieżności szeregu potęgowego tworzy koło, którego środek znajduje się w początku współrzędnych. Na punktach okręgu tego koła szereg może być zbieżnym bezwzględnie, zwyczajnie, albo też być rozbieżnym. Mogą być szeregi zbieżne jedynie zwyczajnie dla wszystkich punktów okręgu (Pringsheim, Math. Ann. XXV).

Jeżeli współczynniki $a_0, a_1, a_2, \dots$ szeregu potęgowego są takie, że począwszy od pewnego skaznika n , stosunek $\frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}}$ daje się rozwinąć na szereg typu:

$$\frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} = 1 + \frac{\mu_1 + \nu_1 i}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \dots,$$

to koło zbieżności szeregu potęgowego ma promień równy 1. W punktach okręgu szereg jest rozbieżny, jeżeli $\mu_1 \geq 0$; jest zwyczajnie zbieżny (wyjąwszy dla $z = 1$), jeżeli $0 > \mu_1 \geq -1$; jest bezwzględnie zbieżny, jeżeli $\mu_1 < -1$; (Twierdzenie Weierstrassa, Crelle, LI).

Suma szeregu potęgowego jest funkcją ciągłą zmiennej z dla każdego punktu wewnątrz koła zbieżności.

Granica dla $x=0$ sumy wyrazów, poczynawszy od wyrazu n -tego ($n>1$) szeregu potęgowego zbieżnego, jest zerem.

W kole, znajdującem się całkowicie wewnątrz koła zbieżności, szereg potęgowy jest równozbieżny.

Jeżeli dwa szeregi potęgowe mają tożsame koło zbieżności i jeżeli dla każdej liczby dodatniej σ znależć można taką wartość z o module mniejszym od σ , że wartości obu szeregów będą równe dla tej wartości z , to wtedy współczynniki odpowiednie obu szeregów są równe. Twierdzenie to utrzymuje się i wtedy, kiedy oba szeregi mają skończoną liczbę wyrazów z potęgami ujemnemi całkowitemi

Pochodna szeregu potęgowego jest sumą pochodnych jego wyrazów i ma to samo koło zbieżności co i szereg dany.

Szereg potęg ujemnych, jeżeli jest zbieżny dla wartości z_0 zmiennej z , to jest bezwarunkowo zbieżny dla każdej wartości z , której moduł jest większy od $\text{mod } z_0$. Obszar zbieżności takiego szeregu przedstawia cała płaszczyzna, po wyłączeniu z niej pola koła, którego środek znajduje się w początku współrzędnych.

Jeżeli szereg potęg dodatnich i ujemnych t. j. $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ jest zbieżny dla $z=z_0$, to z dwu szeregów $\sum_0^{\infty} a_n z^n$, $\sum_1^{\infty} a_{-n} z^{-n}$, pierwszy będzie zbieżny bezwzględnie dla każdej wartości z , której moduł jest większy od $\text{mod } z_0$. Obszar zbieżności uważanego szeregu stanowi wogóle pierścień kołowy, zawarty pomiędzy dwoma kołami, mającemi środek w początku współrzędnych. W szczególności obszarem tym być może cała płaszczyzna lub tylko punkty okręgu.

Jeżeli dwa szeregi potęgowe (o potęgach dodatnich i ujemnych) mają ten sam obszar zbieżności, w którym istnieje przynajmniej jeden punkt taki, że gdy opiszemy około tego punktu, jako środka, koło o dowolnie małym promieniu, będziemy mieli zawsze wewnątrz tego koła taki punkt z' , że wartości obu szeregów dla $z=z'$ będą równe, wtedy współczynniki odpowiednie obu szeregów muszą być równe.

Jeżeli mamy nieskończoną liczbę szeregów potęgowych bezwzględnie zbieżnych w obszarze, zawartym pomiędzy dwoma okręgami; mianowicie:

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_{m,n} z^n,$$

i szereg

$$\sum_3^m f_m(z) = f_0(z) + f_1(z) + f_2(z) + \dots$$

jest równozbieżny w tymże obszarze, wtedy szereg nieskończony

$$a_{0n} + a_{1n} + a_{2n} + \dots$$

są zbieżne dla każdej wartości n , a oznaczysz ich wartości przez a_n , będziemy mieli:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{m=0}^{\infty} f_m(z),$$

(Twierdzenie Weierstrassa, Berl. Akad. 1880; Stolz, Math. Ann. XXIV).

Jeżeli szereg potęg całkowitych dodatnich $\sum_0^{\infty} a_n z^n$ jest zbieżny dla wszystkich punktów z' koła ze środkiem w początku współrzędnych, to sumę tego szeregu można wyrazić za pomocą szeregu potęg, odniesionego do punktu z' t. j.

$$f(z) = f(z') + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z')}{n!} (z-z')^n,$$

a obszarem zbieżności tego szeregu będzie koło, opisanie około punktu z' .

Jeżeli z' jest punktem okręgu pierwszego koła o promieniu R i jeżeli on porusza się na tym okręgu, to promień zbieżności R' drugiego koła będzie się zmieniał i będzie miał swoją granicę wyższą.

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby R było prawdziwym promieniem zbieżności szeregu pierwszego, jest, by ten szereg nie był już zbieżnym dla punktu zewnątrz koła o promieniu R i aby granica niższa dla R' była zerem.

Jeżeli granicą niższą dla R' jest r , wtedy prawdziwym promieniem zbieżności pierwszego szeregu jest $R+r$.

Jeżeli weźmiemy z' na obwodzie pierwszego koła lub blisko obwodu, to drugi okrąg będzie mógł obejmować punkty, nie zawarte w pierwszym.

§ 3.

Jeszcze o definicji funkcyj zmiennych zespolonych. Funkcje analityczne Weierstrassa.

Funkcje zmiennych zespolonych określiliśmy wyżej sposobem szczególnym i otrzymaliśmy t. z. funkcje monogeniczne. Własność zasadnicza tych funkcyj polega na tem, że w każdym punkcie mają one pochodną jedyną, t. j. że granica stosunku przyrostów nie zależy od sposobu, w jaki przyrost zmiennej niezależnej dąży do zera.

Lecz możnaby oczywiście rozważać funkcję zmiennej zespolonej z punktu widzenia ogólniejszego: można mianowicie powiedzieć, że zmienna rzeczywista lub zespolona jest funkcją zmiennej $z = x + iy$, gdy dla każdej wartości z (w pewnym obszarze) ma wartość oznaczoną. Wtedy wszeiką funkcją rzeczywistą lub zespoloną dwu zmiennych x, y może być uważana za funkcję zmiennej zespolonej; gdyż dawszy sobie z , mamy jednoznacznie wartość x oraz wartość y , a stąd i wartość funkcji zmiennych x i y . Pozostaje jeszcze zbadać warunki, przy których tak określona funkcja jest ciągłą i ma pochodną. W ten to sposób ogólny można wprowadzić do analizy funkcje zmiennych zespolonych (patrz np. Stolz, „Vorlesungen über allgemeine Arithmetik“ II, oraz „Grundzüge der Diff. und Integralrechnung“ II, Lipsk, 1893). Wprowadzając następnie różniczkowalność, przychodzimy do funkcji monogenicznych; dla pozyskania tedy funkcji monogenicznych wprowadzamy pojęcie różniczkowalności, lecz nie wprowadzamy przedstawienia analitycznego, od którego to pojęcia funkcja monogeniczna jest jeszcze niezależna.

Lecz wtedy powstaje myśl postępowania odmiennego, t. j. uprzedniego wprowadzenia drugiego pojęcia, aby dopiero z niego wypływało pojęcie pierwsze. Dochodzimy tym sposobem do funkcji monogenicznych analitycznych Weierstrassa.

Niechaj będzie szereg potęg całkowitych dodatnich ilości $z - z_0$; jego prawdziwe koło zbieżności około punktu z_0 niechaj ma promień R . Weźmy na okręgu punkt z_1 i przekształćmy szereg na inny, odniesiony do punktu z_1 (patrz § 2). Niechaj promień nowego koła zbieżności będzie R_1 (załóżmy, że jest on różny od zera); tym sposobem rozszerzamy funkcję pierwotną na obszar, którego szereg pierwotny nie obejmował. Dla tych punktów szereg nowy jest dalszym ciągiem analitycznym lub przeprowadzeniem analitycznym pierwszego. Tak postępując, możemy przeprowadzić funkcję w obszar rozleglejszy. Ogół tych wszystkich funkcji, które przedstawiają te różne szeregi stanowi funkcję jedyną, którą, według Weierstrassa, nazywamy funkcją monogeniczną-analityczną; różniczkowalność jej jest zapewniona skut-

kiem różniczkowalności szeregu potęgowego, Jest jasnem, że wybierając odpowiednio różne środki różnych kół zbieżności, po sobie następujących, można wyobrazić sobie różne drogi, prowadzące do tego samego punktu. Jeżeli na każdej z tych dróg dochodzimy zawsze do tej samej wartości funkcyj, ta funkcyja będzie jednowartościowa; w przeciwnym razie będzie ona wielowartościowa.

Szereg pierwotny, dający początek wszystkim innym szeregom, rozszerzającym kolejno obszar pierwotny, nazywa się elementem początkowym lub pierwotnym funkcyją analityczną. Jeżeli tu i owdzie na pewnej linii przeprowadzenie nie jest możliwe, wtedy mamy funkcyję o obszarze osobliwym.

Funkcyja analityczna w pojmowaniu powyższem jest oczywiście zarazem funkcyją monogeniczną w tem znaczeniu, o jakim mowa w § 1. Naodwrot, funkcyja monogeniczna w tem ostatniem znaczeniu niezawsze jest funkcyją analityczną; może ona (jak to zobaczymy) dać się rozwinąć na szereg potęgowy w otoczeniu pewnych punktów i wtedy obszar jej zbieżności przypada w obszarze zbieżności funkcyj analitycznej. Lecz może się zdarzyć: albo że ta funkcyja analityczna nie daje się przeprowadzić po za ten lub ów obszar, chociaż funkcyja po za tym obszarem istnieje; albo też, mimo że daje się przeprowadzić, nie daje wszakże wartości równych wartościom funkcyj zewnątrz obszaru.

O funkcyjach analitycznych Weierstrassa cytujemy prace następujące: Weierstrass (Functionenlehre, Berlin, 1886), Pincherle (Giorn. di Batt., XVIII), Biermann (Analytische Functionen, Lipsk, 1887), Puzyna (Teorya funkcyj analitycznych, t. I, Lwów, 1898).

Przykłady, odnoszące się do uwag w ustępie poprzedzającym, znajdują się u Tannery'ego (Berl. Akad. 1882), Schrödera (Schlöm. Zeitsch. 1876), Pringsheima (Math. Ann. XXII, 1883) i innych.

Funkcjami o obszarach osobliwych zajmują się głównie: Poincaré (Acta Soc. Fennicae, 1881), Appel (Acta math. I, 1882), Goursat (Comptes rendus XCIV, 1881, Bulletin des sciences math. XI, 1887), Lerch (Rozprawy Czesko - Król. Tow. nauk w Pradze,

dze, 1887, Dziennik Teixeira 1892), Stieltjes (Bull. des sciences math., XI, 1887) Krygowski (Bull. de la Société math. de France, 1897, Prace mat.-fiz. IX, 1898).

§ 4.

Najprostsze funkcje przestępne.

Funkcja e^z , gdy z jest liczbą zespoloną, określa się przez szereg

$$1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \dots,$$

zbieżny dla każdej wartości z .

Własność główna tej funkcji $e^z \cdot e^z = e^{z+z}$ utrzymuje się tu bez zmiany, jak również własność $\frac{d}{dz} e^z = e^z$.

Funkcje $\sin z$, $\cos z$, gdy z jest liczbą zespoloną, określają się przez wzory:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots,$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots$$

Twierdzenie o dodawaniu funkcji „wstawia” i „dostawia” i twierdzenia z niem związane, pozostają bez zmiany i dla argumentów zespolonych.

Wzorem zasadniczym jest wzór:

$$e^{a+bi} = e^a (\cos b + i \sin b).$$

Funkcya e^z jest peryodyczna, t. j. nie zmienia swej wartości, jeżeli z powiększamy o $2k\pi i$ (k jest liczbą całkowitą jakąkolwiek).

Każdy pierwiastek równania $e^z = A + iB$ nazywa się logarytmem neperowym liczby zespolonej $A + iB$. Równanie to ma nieskończenie wiele pierwiastków, które są w ogóle wszystkie zespolone; jeden z nich otrzymujemy z drugiego, dodając liczbę postaci $2k\pi i$ (k całkowite). Możemy nazwać wartością główną logarytmu neperowego wartość, w której współczynnik przy i jest zawarty między $-\pi$ a $+\pi$ (włączając: $+\pi$); oznaczamy ją przez $\log_e (A + iB)$.

Funkcyę a^z określamy za pomocą wzoru

$$a^z = e^{z(\log_e a + 2k\pi i)}.$$

W ten sposób a^z może mieć w ogóle nieskończenie wiele wartości; uważać będziemy tylko wartość, odpowiadającą wartości $k = 0$ i nazywać ją będziemy wartością główną potęgi a^z .

Jeżeli położymy $z = x + iy$, $a = \rho (\cos \alpha + i \sin \alpha)$, będzie

$$\begin{aligned} a^z &= \rho [\cos x (\alpha + 2k\pi) + i \sin x (\alpha + 2k\pi)] \\ &\times e^{-y(\alpha + 2k\pi)} [\cos (y \log_e \rho + i \sin (y \log_e \rho))]. \end{aligned}$$

Jeżeli przez a^z rozumiemy jedynie wartość główną, wtedy a^z nie czyni już zadość wszystkim głównym własnościom potęg, t. j. związkom:

$$a^z \cdot a^{z_1} = a^{z+z_1}, \quad (a^z)^{z_1} = a^{zz_1}, \quad \log a^z = z \log a,$$

gdyż wartość główna np. wyrażenia $(a^z)^{z_1}$ jest jedną z wartości wyrażenia a^{zz_1} , lecz nie jest jego wartością główną.

Co do różnych określeń funkcyj wykładniczych i logarytmowych patrz: Durège, Theorie der Functionen, Lipsk, 1864, rozdz. V; Briot et Bouquet, Fonctions elliptiques II; Stolz, Arithmetik II, i t. d.

§ 5.

Granica, ciągłość, różniczkowanie i całkowanie w obszarze zespolonym.

Określenie i twierdzenia zasadnicze, odnoszące się do granic i ciągłości, pozostają bez zmiany dla funkcji zmiennych zespolonych.

Pochodna, jak powiedzieliśmy, określa się, jak zwykle, jako granica stosunku przyrostów i można dowieść, że twierdzenia, odnoszące się do sumy, iloczynu i ilorazu, funkcji złożonej, funkcji odwrotnej i t. d., pozostają bez zmiany, jak również prawidła, odnoszące się do różniczkowania funkcji elementowych.

Godnem jest uwagi twierdzenie: Istnienie pierwszej pochodnej funkcji zmiennej zespolonej pociąga za sobą istnienie pochodnych wszelkiego rzędu.

Jeżeli funkcja jednowartościowa jest zerem rzędu k w punkcie (nie znajdującym się w nieskończoności), to jej pochodna jest zerem rzędu $k-1$; jeżeli punktem tym jest nieskończoność, wtedy pochodna dla $z=\infty$ będzie zerem rzędu $k+1$.

Jeżeli funkcja jednowartościowa ma biegun rzędu k w punkcie, znajdującym się w odległości skończonej, to pochodna jej ma w tym punkcie biegun rzędu $k+1$; jeżeli tym punktem jest nieskończoność, to pochodna ma w nim biegun rzędu $k-1$.

Podamy kilka spostrzeżeń, odnoszących się do całkowania.

W przypadku zmiennych rzeczywistych droga całkowania jest z góry ustalona przez to, że zmienna przebiega zawsze po osi odciętych. Weźmy teraz dwa punkty na płaszczyźnie zespolonej i połączmy je linią. Podzielmy tę linię na n części i niechaj $\delta_1, \delta_2, \dots$ oznaczają różnice pomiędzy wartościami

mi zmiennej zespolonej, odpowiadającymi kolejnym punktom podziału. Niechaj $f_1, f_2, \dots$ oznaczają wartości funkcyi f w punktach, znajdujących się pomiędzy temi punktami podziału. Granica sumy $\sum f_r \delta_r$, w założeniu, że $\delta_1, \delta_2, \dots$ dążą do zera, gdy n rośnie do nieskończoności, jest całką określoną funkcyi. Jeżeli zmieniamy granicę górną całki, mamy funkcyę całkową. Otóż tu ujawnia się fakt nowy, jakiego niema w przypadku zmiennych rzeczywistych, t. j. że do każdego punktu dojść można w nieskończenie wielu kierunkach, gdy tymczasem w przypadku zmiennych rzeczywistych dochodzi się do pewnego punktu, wychodząc z innego, tylko w jednym kierunku (jeżeli wyłączymy przejście przez nieskończoność).

Całka funkcyi monogenicznej jest również funkcyą monogeniczną. Będzie ona jedno- lub wielowartościowa, stosownie do natury funkcyi danej.

Jeżeli funkcyja dana jest monogeniczna, jednowartościowa i holomorficzna w obszarze jednoobwodowym, to całka jej ma zawsze w danym punkcie jedną wartość, niezależnie od drogi, którą do tego punktu dochodzimy. Twierdzenie to zawdzięczamy Cauchy'emu; powrócimy do niego w paragrafie następnym, w którym podamy różne twierdzenia, odnoszące się do funkcyj monogenicznych.

§ 6.

Różne twierdzenia o funkcyach monogenicznych, holomorficznych i meromorficznych.

Funkcyja holomorficzna w danym obszarze nie może mieć wszystkich pochodnych równych zeru w pewnym punkcie, nie będąc w całym tym obszarze ilością stałą.

Funkcja holomorficzna w danym obszarze i stała dla wszystkich punktów linii choćby najmniejszej, jest stałą w całym obszarze.

Funkcja holomorficzna w danym obszarze ma wszystkie pochodne również holomorficzne.

Funkcja holomorficzna w obszarze skończonym ma skończoną liczbę zer stopnia skończonego i całkowitego.

Jeżeli funkcja jest meromorficzną w pewnym obszarze, to ani ona sama, ani jej pochodne nie mogą znikać w punkcie.

Funkcja meromorficzna w obszarze skończonym ma pierwiastków i biegunów liczbę skończoną i wszystkie one są stopnia skończonego i całkowitego.

Funkcja meromorficzna w danym obszarze równa się funkcji wymiernej, powiększonej o funkcję holomorficzną w tymże obszarze. Jeżeli $a_1, a_2, \dots$ są biegunami funkcji danej, to rozłożywszy funkcję wymierną na ułamki proste (patrz Rozdział I), wyrazimy ją w ten sposób:

$$\frac{A_0}{(x-a_1)^k} + \dots + \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{B_0}{(x-a_2)^{k_2}} + \dots + \frac{B_1}{x-a_2} + \dots,$$

gdzie stałe $A_1, B_1, \dots$ będące licznikami ułamków, których mianowniki są pierwszymi potęgami dwumianów $x-a_1, x-a_2, \dots$, nazywają się pozostałościami (residua) funkcji (Cauchy).

Funkcja holomorficzna na całej płaszczyźnie, której moduł jest wszędzie mniejszy od liczby danej, jest ilością stałą.

Funkcja holomorficzna na całej płaszczyźnie, mająca jako jedyny biegun $z = \infty$, jest funkcją wymierną całkowitą.

Funkcja meromorficzna na całej płaszczyźnie (i dla $z = \infty$) jest funkcją wymierną, może więc mieć tylko skończoną liczbę pierwiastków i biegunów stopnia skończonego.

Jeżeli funkcja $f(z)$ jest holomorficzną w obszarze jednoobwodowym, to całka $\int f(z) dz$, wzięta po krzywej zamkniętej wewnątrz tego obszaru, jest zerem. (Twierdzenie Cauchy'ego).

Przy założeniach twierdzenia poprzedzającego, całka $\int f(z) dz$ ma wartość zależną jedynie od granic a niezależną od drogi całkowania.

Jeżeli funkcja $f(z)$ jest holomorficzną w obszarze o obwodzie zespolonym, to całka $\int f(z) dz$, rozciągnięta od jednego punktu do drugiego, a także od punktu do tegoż samego punktu polinii zamkniętej, zachowuje wartość stałą przy zmianie drogi całkowania wtedy, gdy nowa droga daje się sposobem ciągłym otrzymać z dawnej i gdy na wszystkich stadiach odkształcenia pozostaje wewnątrz obszaru, nie spotykając nigdzie obwodu.

Mówimy, że zmienna przebiega obwód w kierunku dodatnim, jeżeli podczas przebiegu pozostawia obszar zawsze po stronie lewej.

Jeżeli funkcja jest holomorficzną w obszarze, mającym postać pierścienia, t. j. w obszarze o dwóch obwodach, z których jeden znajduje się wewnątrz drugiego, wtedy całka jej, rozciągnięta w kierunku dodatnim po obwodzie zewnętrznym, równa się całce, rozciągniętej w kierunku ujemnym po obwodzie wewnętrznym.

Jeżeli funkcja jest holomorficzną w pe-

wnej części płaszczyzny o obwodzie pojedynczym, to jej wartość w pewnym punkcie a daje się wyrazić w ten sposób:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z)}{z-a} dz,$$

gdzie całka jest rozciągnięta w kierunku dodatnim po obwodzie pola.

Jeżeli funkcja $f(z)$ jest meromorficzna w obszarze o obwodzie pojedynczym, to całka

$$\frac{1}{2\pi i} \int f(z) dz,$$

wzięta po obwodzie w kierunku dodatnim, równa się sumie pozostałości funkcji względem biegunów, znajdujących się w obszarze.

Jeżeli funkcja $f(z)$ jest meromorficzna w obszarze i jeżeli $m_0, m'_0, \dots$ są rzędami jej zer, m_∞, m'_∞ , rzędami jej nieskończoności, wtedy

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \Sigma m_0 - \Sigma m_\infty,$$

gdzie całka rozciąga się po obwodzie obszaru w kierunku dodatnim. Toż samo twierdzenie można wypowiedzieć w ten sposób:

Jeżeli funkcja $f(z)$ jest meromorficzna w obszarze o pojedynczym obwodzie i jeżeli wychodząc z pewnego punktu obwodu, przebiegamy go w kierunku dodatnim i obliczamy zmianę, jakiej w sposób ciągły doznaje argument, gdy powracamy do punktu wyjścia; wtedy różnica pomiędzy temi dwoma argumentami jest wielokrotnością liczby 2π , a mianowicie

równa się $2k\pi$, gdzie $k = \sum m_0 - \sum m_\infty$ (Casorati, Teorica etc., str. 430).

W funkcyi meromorficznej na całej płaszczyźnie liczba zer równa się liczbie nieskończoności, jeżeli zero lub nieskończoność rzędu i uważamy za zjednoczenie i zer lub nieskończoności. Stąd otrzymuje się łatwo twierdzenie zasadnicze algebry, że wielomian wymierny ma tyle pierwiastków, ile wynosi jego stopień.

Funkcya holomorficzna w kole, którego środek jest w punkcie z_0 , daje się rozwinąć na szereg według potęg całkowitych dodatnich dwumianu $z - z_0$, zbieżny w tem kole. Szereg ten można napisać w postaci, nadanej mu przez Cauchy'ego (Acc. Tor., 1831-2, Comptes rendus 1846).

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z) dz}{z - z_0} + (z - z_0) \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^2} \\ + (z - z_0)^2 \int \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^3} + \dots$$

gdzie całki rozciągają się w kierunku dodatnim po obwodzie koła lub po jakimkolwiek obwodzie spółśrodkowym, zawartym w obszarze. Można ten szereg przedstawić też w postaci wzoru Taylora-Maclaurina:

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0) \frac{f'(z_0)}{1} + (z - z_0)^2 \frac{f''(z_0)}{1 \cdot 2} + \dots$$

Jeżeli funkcja jest holomorficzna w obszarze pierścieniowym, zawartym pomiędzy dwoma kołami spółśrodkowymi o środku z_0 , to daje się rozwinąć na szereg, postępujący według potęg dodatnich i ujemnych dwumianu $z - z_0$, zbieżny w tem polu. Otrzymujemy wtedy szereg Laurenta (Comptes rendus 1843, t. XVII, str. 939)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{-\infty}^{+\infty} (z - z_0)^n \int \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^n},$$

gdzie całka rozciąga się wzdłuż jednego z obwodów w kierunku dodatnim lub wzdłuż okręgu spółśrodkowego i zawartego w pierścieniu, ograniczonym dwoma okręgami.

§ 8.

Punkty osobliwe istotne.

Niechaj będzie funkcyja dana na całej płaszczyźnie; jeżeli funkcyja ta, nawet w nieskończoności, nie posiada innych punktów osobliwych prócz biegunów (t. j. punktów, w których odwrotność jej pozostaje jednowartościową i jest zerem), t. j. jeżeli jest funkcyą meromorficzną na całej płaszczyźnie (porów. § 1), wtedy, jak wiemy, jest funkcyą wymierną.

Jeżeli mamy funkcyę przestępną, określoną dla całej płaszczyzny, to muszą istnieć takie punkty, w których ani ta funkcyja, ani jej odwrotność, nie pozostają jednopostaciowymi; takie punkty nazywają się istotnie osobliwymi. Że mogą istnieć punkty, mające taką własność, okazuje odrazu rozważanie jednej z najprostszych funkcyj przestępnych, mianowicie funkcyj wykładniczej.

Jeżeli pewien punkt jest punktem osobliwym istotnym funkcyi, to punkt ten jest zarazem punktem istotnie osobliwym jej odwrotności.

Granica funkcyi, jeżeli zmienna jej zbliża się jakimkolwiek sposobem do punktu istotnie osobliwego, jest nieoznaczona.

Przy zbliżaniu zmiennej do punktu istotnie osobliwego można sprawić, by moduł róż-

nicy pomiędzy wartością funkcji i jakąkolwiek daną wartością A był mniejszy od wszelkiej ilości danej dowolnie

Jeżeli mamy A , to możemy w ogóle znaleźć w otoczeniu punktu istotnie osobliwego nieskończenie wiele punktów, w których wartość funkcji równa się A ; mogą wszakże istnieć dwie i nie więcej niż dwie wartości wyjątkowe na A , dla których niema w otoczeniu punktu a żadnego takiego punktu, w którym by wartość funkcji była A . (Twierdzenie Picarda, Comptes rendus LXXXVIII, LXXXIX; Ann. de l'École Normale 1880; Traité d'Analyse, t. II, str. 122).

Według tego ostatniego twierdzenia punkty istotnie osobliwe dzielą się na trzy kategorie:

1) punkty, dla których wartości wyjątkowe A , o których mowa wyżej, nie istnieją;

2) punkty, dla których istnieje jedna taka wartość wyjątkowa. Takim na przykład jest punkt $z=0$ dla funkcji

$$\frac{1}{\sin \frac{1}{z}},$$

a wartością wyjątkową A w tym przypadku jest $A=0$;

3) punkty, dla których istnieją dwie wartości wyjątkowe A . Takim jest punkt $z=0$ dla funkcji $e^{\frac{1}{z}}$, a wartościami wyjątkowymi są $A=0$, $A=\infty$.

Funkcja jednopostaciowa, mająca nieskończenie wiele biegunów, ma, jako punkt istotnie osobliwy, punkt graniczny biegunów.

Funkcja, nie mająca bieguna w odległości skończonej na płaszczyźnie, jest funkcją całkowitą lub holomorficzną na całej płaszczyźnie, oprócz w punkcie nieskończonym. Jeżeli w nieskończoności nie ma bieguna, to nie może być wielomianem całkowitym: jest funkcją przestępną całkowitą i ma

w nieskończoności punkt istotnie osobliwy. Funkcya taka daje się rozwinąć na szereg potęg całkowitych dodatnich, zbieżny dla każdego punktu płaszczyzny.

Funkcya taka może mieć nieskończoną liczbę zer w odległości skończonej.

Jakie jest wyrażenie ogólne takiej funkcji, mającej zera z góry dane? Na pytanie to odpowiada sławne twierdzenie Weierstrassa (Berl. Akad. 1876), będące rozszerzeniem twierdzenia, podanego przez Cauchy'ego. Twierdzenie Cauchy'ego brzmi.

Jeżeli $a_1, a_2, \dots$ są punktami zerowemi funkcji, jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ i szereg $\sum \left| \frac{1}{a_n} \right|$ jest zbieżny, to funkcja, mająca za zera tylko punkty powyżej dane, nie mająca żadnego bieguna a jako jedyny punkt osobliwy punkt w nieskończoności, ma postać

$$f(z) = ce^{G(z)} \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n} \right),$$

gdzie $G(z)$ jest funkcją holomorficzną na całej płaszczyźnie.

Twierdzenie Weierstrassa jest następujące:

Jeżeli szereg $\sum \left| \frac{1}{a_n} \right|$ nie jest zbieżny, to można dobrać zawsze liczbę całkowitą dodatnią ω , stałą lub zmieniającą się wraz z n , w ten sposób, aby szereg

$$\sum_n \frac{z^{\omega}}{a_n^{\omega} (z - a_n)}$$

był równozbieżny na całej płaszczyźnie, i wtedy będzie:

$$f(z) = ce^{G(z)} \prod_1^{\infty} \left[\left(1 - \frac{z}{a_n} \right) e^{P_{\omega} \left(\frac{z}{a_n} \right)} \right],$$

gdzie

$$P_{\omega}\left(\frac{z}{a_n}\right) = \frac{z}{a_n} + \frac{z^2}{2a_n^2} + \dots + \frac{z^{\omega}}{\omega a_n^{\omega}}.$$

W każdym przypadku $\omega = n - 1$ czyni zadość powyższemu warunkowi.

Czynnik $\left(1 - \frac{z}{a_n}\right)e^{f_{\omega}\left(\frac{z}{a_n}\right)}$ nazywa się czynnikiem pierwszym lub pierwotnym. W twierdzeniach poprzedzających zakładamy, że punkt — zero nie zawiera się pomiędzy punktami a_n . Jeżeli jest tam k -razy, to do iloczynu przybywa czynnik z^k .

Jeżeli ω jest stałe, to otrzymujemy funkcje holomorficzne, mające rodzaj; liczba ω nazywa się rodzajem, gdy nie zmienia się wraz z n i jest najmniejszą pomiędzy wezystkimi liczbami, czyniącemi zadość powyższemu warunkowi (Laguerre, Comptes rendus, XCIV, XCV, XCVIII; Cesàro, Comptes rendus, XCVIII i t. d.).

Funkcja jednowartościowa na całej płaszczyźnie, mająca w odległości skończonej tylko biegun, jest zawsze ilorazem dwu funkcji całkowitych; można przeto, przy pomocy powyższego otrzymać wyrażenie takiej funkcji.

Jeżeli chcemy w podobny sposób przedstawić funkcję jednowartościową na całej płaszczyźnie (nawet w nieskończoności) i mającą jedyny punkt istotnie osobliwy $z=a$ w odległości skończonej, to można zastosować wzór podobny do poprzedniego, kładąc tylko zamiast $\frac{z}{a_n}$ wyrażenie $\frac{a_n - a}{z - a}$.

Z poprzedniego twierdzenia wypływają wnioski następujące:

Funkcja jednowartościowa, która nie ma ani zer ani biegunów w odległości skończonej, a jako punkt istotnie osobliwy ma punkt w nieskończoności

ności jest postaci $e^{G(z)}$, gdzie $G(z)$ jest funkcją całkowitą.

Funkcja jednowartościowa, która ma skończoną liczbę zer w nieskończoności, nie ma biegunów, a w nieskończoności ma jedyny punkt istotnie osobliwy, jest postaci

$$P(z) e^{G(z)},$$

gdzie $P(z)$ jest wielomianem

Funkcja jednowartościowa, mająca skończoną liczbę zer i skończoną liczbę biegunów, w nieskończoności zaś jedyny punkt istotnie osobliwy, jest postaci

$$\frac{P(z)}{Q(z)} e^{G(z)},$$

gdzie P, Q są dwoma wielomianami.

Postępowanie, za pomocą którego dowodzi się wzoru Weierstrassa, może służyć do wyrażenia funkcji, mającej na płaszczyźnie nieskończenie wiele biegunów, których punktem granicznym jest punkt w nieskończoności, za pomocą sumy funkcji holomorficznej i szeregu zbieżnego na całej płaszczyźnie, którego każdy wyraz jest funkcją wymierną zmiennej z , mającą jeden tylko biegun w jednym z biegunów funkcji danej. Tym sposobem otrzymujemy przedstawienie funkcji o nieskończenie wielu biegunach, różne od przedstawienia pod postacią ilorazu iloczynów.

Rozszerzenie tego wzoru na przypadek, w którym istnieje nieskończenie wiele punktów istotnie osobliwych (zamiast biegunów), stanowi twierdzenie Mittag-Lefflera.

Twierdzenie Weierstrassa daje wyrażenie funkcji jednopostaciowej, mającej jeden punkt istotnie osobliwy; nasuwa się tu przeto od razu zagadnienie o przedstawieniu funkcji ze skończoną lub nieskończoną liczbą osobliwości istotnych.

Można otrzymać zawsze wyrażenie takie, jako sumę pewnej liczby funkcyj, z których każda ma tylko jedną osobliwość istotną.

Tym sposobem rozszerzamy twierdzenie o rozkładzie funkcji wymiernej na ułamki prostsze.

Każda funkcja jednowartościowa holomorficzna w całej płaszczyźnie, prócz w punktach $a_1, a_2, \dots, a_n$, w których posiada bieguny lub osobliwości istotne, daje się zawsze przedstawić, jako sumę n funkcji, mających po jednym tylko biegunie lub punkcie osobliwym istotnym w jednym z punktów danych. Jeżeli jeden z punktów danych a jest w nieskończoności, wtedy odpowiednia funkcja jest holomorficzną na całej płaszczyźnie z punktem istotnie osobliwym w nieskończoności.

Jeżeli mamy nieskończenie wiele punktów $a_1, a_2, \dots$, mających punkt graniczny w nieskończoności, to funkcja, mająca tylko w tych punktach punkty istotnie osobliwe lub bieguny, wyraża się za pomocą szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[G_n \left(\frac{1}{z-a_n} \right) - F_n(z) \right] + G(z),$$

gdzie G_n są funkcjami, mającemi jedyny punkt istotnie osobliwy w a_n ; F_n są wielomianami, których stopnie zawsze oznaczyć można; wreszcie G jest funkcją holomorficzną na całej płaszczyźnie, mającą jedyny punkt osobliwy punkt w nieskończoności.

Wielomiany F i G nie w jedyny tylko sposób wyznaczyć się dają. Jeżeli punkty a są wszystkie biegunami, to jest rzeczą naturalną, że wyrazy szeregu stają się wszystkimi funkcjami wymiernymi.

Co do tych twierdzeń cytujemy prace Mittag-Lefflera (Comptes rendus 1882, Acta mathem. IV); Weierstrassa (Functionenlehre, str. 23, 67, 102); Hermite'a (Crelle XCI); Casorati'ego (Annali di mat. X), traktat Forsyth'a (Theory of functions 1893), gdzie zagadnienie to traktowane jest obszernie i w wielu przypadkach szczegó-

nych; dalej lekcye analizy Hermite'a i Picarda. Co do przypadku, w którym zamiast punktów osobliwych są linie osobliwe, patrz Picard (Compt. rendus 1881), a co do rozszerzenia twierdzenia Weierstrassa na funkcy wielowartościowe (funkcy jednowartościowe na powierzchni Riemanna) patrz Appel (Acta math. I).

Teoryę funkcyi zmiennej urojonej ugruntował, rzec można, głównie Cauchy w sławnej rozprawie: *Sur les intégrales définies, prises entre les limites imaginaires* 1825, *Comptes rendus* 1846. Drugi krok ważny uczynił Riemann (1851) genialnym pomysłem swym, za pomocą którego z największą prostotą i elegancją badać można funkcy wielowartościowe, czego nie można było czynić dość prostym sposobem za pomocą metod Cauchy'ego, jakkolwiek nie jednemu z piszących dawniej o tej teorii zdawało się z początku inaczej (patrz np. przedmowę do drugiego wydania wyżej cytowanego dzieła Briota i Bouqueta).

Z innego stanowiska i prawie równocześnie z Riemannem Weierstrass utworzył teoryę funkcyj.

Różnica obu poglądów, zarówno głębokich, polega głównie na tem, że Riemann bierze za punkt wyjścia przedstawienie geometryczne funkcyi i uważa utwór, który ją przedstawia, jakby coś wcześniejszego niż sama funkcy, Weierstrass wychodzi znów z analitycznego przedstawienia funkcyi i rozważa tylko takie funkcy, które dają się przedstawić analitycznie sposobem danym. Zresztą głębokie badania nad osobliwościami istotnymi funkcyj analitycznych zawdzięczamy tylko Weierstrassowi i jego uczniom.

Sławnym traktatem o teorii funkcyj, napisanym prawie wyłącznie pod wpływem pomysłów Cauchy'ego, jest cytowane już dzieło Briota i Bouqueta, „*Théorie des fonctions elliptiques*“ (2 ed., Paryż, 1875; pod wpływem pomysłów Cauchy'ego i Riemanna powstały dzieła: Durège „*Elemente der Theorie der Functionen*“ Lipsk 1864, Neumann, „*Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale*“, Lipsk 1867, w którym wprowadzono przedstawienie funkcyj na kuli; Casorati „*Teorica delle functioni di variabili complesse*“, Pawia, 1868; Holzmüller „*Theorie der isogonalen Verwandtschaften und conf-Abbildungen*“, Lipsk 1882. Pomysły Weierstrassa, rozwinięte na jego lekcyach i w „*Functionenlehre*“ (Berlin 1886) przedstawia, lubo niezupełnie poprawnie w wielu punktach Biermann „*Theorie der*

analytischen Functionen“, Lipsk 1887. Najnowsze dzieła starają się godzić idee Riemanna i Weierstrassa; do nich należy przede wszystkim obszerne wyżej cytowane dzieło Forsytha, dzieło Picarda (Paryż 1893), dzieło Burkhardia „Einführung in die Theorie der analytischen Functionen“, (Lipsk 1897), dalej Petersena „Functionstheorie“ Kopenhaga 1898 i cytowane wyżej dzieło Puzyny „Teorya funkcyj analitycznych“. Lwów 1898.

Biblioteka

matematyczn - fizyczna

⇒ ANTONIEGO WILKA. ⇐

Liczba:

ROZDZIAŁ XIV.

TEORYA FUNKCYJ W ZWIĄZKU Z TEORYĄ GRUP; PERYODYCZNOŚĆ; AUTOMORFIZM.

§ 1.

Podstawienia liniowe.

Podstawienie liniowe ogólne, uskutecznione na zmiennej z , jest postaci

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (ad - bc = 1),$$

co wyrażamy symbolem :

$$\left(z, \frac{az + b}{cz + d} \right), \quad \text{lub też} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Jeżeli z jest zmienną zespoloną, przedstawianą sposobem zwykłym na płaszczyźnie, to podstawienie liniowe każdemu punktowi przyporządkowuje punkt tejże płaszczyzny, i ta odpowiedniość jest dwujędnoznaczna. (Przekształcenie homograficzne).

Dla tego podstawienia istnieją dwa punkty z , których każdy odpowiada sobie samemu; są nimi punkty:

$$z_1, z_2 = \frac{a - d \pm \sqrt{(a - d)^2 + 4bc}}{2c}.$$

Podstawienie, w którym te dwa punkty podwójne (Fixpunkte, według Kleina) zlewają się, nazywa się parabolicznem.

Jeżeli dla danego podstawienia dwa punkty podwójne są różnemi, to podstawienie daje się sprowadzić do postaci

$$\frac{z' - z_1}{z' - z_2} = k \frac{z - z_1}{z - z_2},$$

gdzie

$$k = \frac{[a + d - \sqrt{(a - d)^2 + 4bc}]^2}{4(ad - bc)}.$$

Jeżeli k jest liczbą rzeczywistą dodatnią, podstawienie nazywa się hyperbolicznem; jeżeli jest liczbą zespoloną o module 1, nazywa się eliptycznem; wreszcie jeżeli k jest liczbą zespoloną o module różnym od 1 i o argumencie różnym od zera, podstawienie nazywa się loksodromicznem.

Każde podstawienie loksodromiczne można złożyć z podstawienia hyperbolicznego w połączeniu z eliptycznem.

Nazwy te napotykamy poraz pierwszy w pracach Kleina (Math. Ann. XIV, str. 142, XXI, § 3).

Aby lepiej zrozumieć różnicę pomiędzy temi trzema podstawieniami, rozpatrzmy ich postacie prostsze:

$$z' = kz; \quad k \text{ rzeczywiste dodatnie,}$$

$$z' = e^{ai}z; \quad a \text{ jakiegokolwiek,}$$

$$z' = \varrho e^{ai}z; \quad \varrho \neq 1, \quad a \neq 0.$$

Jeżeli w pierwszym z nich zmieniamy k sposobem ciągłym, to punkt z' poruszać się będzie po prostej, wychodzącej z początku współrzędnych. Jeżeli w drugim podstawieniu zmieniamy a , to punkt z' poruszać się będzie po okręgu, mającym środek swój w początku współrzędnych. W loksodromicznem podstawieniu wreszcie punkt doznaje przemieszczenia, które jest kombinacją przemieszczeń poprzednich: mamy tu przedłużenie promienia wodzącego w połączeniu ze zmianą kierunku.

Podstawienie eliptyczne posiada tę własność, że jest albo peryodycznem, albo nieskończonościowem, t. j. wychodząc z punktu danego, albo powracamy do tego samego punktu po całkowitej liczbie kolejnych podstawień, albo też, kolejno stosując to podstawienie, można zbliżyć się do punktu wyjścia tak blisko, jak chcemy (patrz Forsyth, *Theory of functions*, str. 521).

Przekształcenie za pomocą promieni odwrotnych lub odwrócenie (inwersja), jest to działaniem, w którem, mając koło na płaszczyźnie, danemu punktowi przyporządkowujemy inny, leżący na prostej, łączącej punkt dany z środkiem koła i po tejże jego stronie tak, aby iloczyn dwu promieni wodzących równał się kwadratowi promienia koła.

Przekształcenie przez odbicie jest to przekształcenie, przy pomocy którego, mając prostą daną, każdemu jej punktowi przyporządkowujemy punkt symetryczny z nim odnośnie do prostej.

Każde podstawienie liniowe można zawsze złożyć z odwrócenia w połączeniu z odbiciem.

Iloczyn dwóch odwróceń daje podstawienie liniowe, które jest hyperbolicznem, parabolicznem lub eliptycznem, stosownie do tego, czy dwa koła, stanowiące podstawę odwrócenia, nie mają wcale punktu wspólnego, lub mają 1, 2 punkty wspólne.

Każde podstawienie liniowe przekształca koło na koło.

Każde podstawienie liniowe daje się przedstawić nieskończenie wielu sposobami, jako wypadkowa parzystej liczby odwróceń.

Można wraz z Poincaré'm wprowadzić pewne pojęcie użyteczne do określenia własności, charakteryzujących rozmaite gatunki podstawień liniowych. Rozłożmy podstawienie liniowe na parzystą liczbę $2m$ odwróceń względem $2m$ kół płaszczyzny (co można skutecznie nieskończenie wielu sposobami). Każde koło zastąpmy kulą o tym samym środku i promieniu i, dawszy sobie punkt w przestrzeni, utwórzmy w tym samym porządku odwrócenie względem wszystkich kul. Można dowieść, że bez względu na sposób, w jaki uskutecznilo pierwszy rozkład podstawienia na odwrócenia, otrzymamy zawsze ten sam punkt, jako odpowiadający punktowi danemu. (Poincaré, Acta math. III, str. 53). Mamy tedy środek interpretacji podstawienia liniowego jako przekształcenia punktów w przestrzeni. Otrzymujemy stąd następujące wyniki:

Jeżeli dane podstawienie jest eliptyczne to przekształca same na siebie punkty koła, które przechodzi przez dwa punkty podwójne podstawienia, ma za średnicę prostą te punkty łączącą i znajduje się na płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny danej (koło podwójne); dalej przekształca na siebie same wszystkie koła takie, że kule, przez nie przechodzące, przecinają ortogonalnie koło podwójne.

Jeżeli podstawienie jest hyperboliczne, to istnieją tylko dwa punkty przestrzeni, pozostające stałymi; są to punkty podwójne, a podstawienie przekształca same na siebie wszystkie okręgi i kule, przechodzące przez te punkty.

Jeżeli podstawienie jest paraboliczne, to jeden tylko punkt pozostaje stały; jest to je-

dyny punkt podwójny; podstawienie przekształca same na siebie wszystkie okręgi i kule, przez punkt ten przechodzące i styczne w nim do pewnej prostej na danej płaszczyźnie.

Jeżeli podstawienie jest loksodromiczne, to ono przekształca na siebie samo każde koło, mające za średnicę prostą, łączącą punkty podwójne i położone w płaszczyźnie prostopadłej do danej, lecz zmienia punkty tego koła jedne na drugie, prócz oczywiście punktów podwójnych.

Każde podstawienie, nie zmieniające punktu, położonego zewnątrz płaszczyzny, jest konieczniewie podstawieniem eliptycznym.

Niechaj kula o promieniu 1 będzie styczną w początku współrzędnych O do płaszczyzny zmiennej zespolonej z ; niechaj każdemu punktowi płaszczyzny odpowiada punkt na kuli, otrzymany za pomocą rzutu punktów płaszczyzny z górnego bieguna kuli, t. j. z punktu kuli wprost przeciwległego punktowi styczności O . Obracajmy kulę około jednej z jej średnic, wtedy zmienna z doznaje przekształcenia liniowego. Wzór odnośny znalazł Cayley (Math. Ann. XV, 1879), jest on:

$$z' = \frac{(\delta + i\gamma)z - (\beta - i\alpha)}{(\beta + i\alpha)z + (\delta - i\gamma)},$$

gdzie $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ są liczby rzeczywiste dowolne, czyniące tylko za-
dość związkowi $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 1$, wyrażającemu, że wy-
znacznik podstawienia jest jednością dodatnią.

§ 2.

Grupy podstawień liniowych.

Grupy podstawień liniowych można tworzyć ze skończoną lub z nieskończoną liczbą podstawień. Grupy z nieskończoną liczbą podstawień mogą być ciągłe lub nieciągłe; grupy są ciągłe wtedy, gdy w nich znajduje się podstawienie nieskończonostkowe; rozumiemy przed to takie podstawienie, w którym moduły ilości $a-1$, b , c , $d-1$ są nieskończenie małe.

W stosowaniu do teorii funkcyj niema potrzeby rozważania grup ciągłych, gdyż funkcya analityczna, która należałaby do takich grup, musiałaby przyjmować tę samą wartość w punktach nieskończenie blizkich, a więc mogłaby być tylko ilością stałą. Należy rozważać przeto jedynie grupy nieciągłe; lecz i pomiędzy temi trzeba uczynić nowe wyróżnienie. Istotnie można wyobrazić sobie grupy ciągłe dla punktu ogólnego płaszczyzny, które w specjalnych punktach zezwalają na przekształcenie nieskończonostkowe, t. j. można wyobrazić sobie, że istnieją punkty płaszczyzny takie, iż punkty, odpowiadające im skutkiem pewnych podstawień grupy, stają się tak do nich blizkimi, jak chcemy. W tym przypadku grupa nazywa się niewłaściwie nieciągłą; w przypadku przeciwnym mamy grupy właściwie nieciągłe (Klein, Math. Ann. XXI, str. 176; Poincaré, Acta math. III, str. 57).

Naprzykład, grupa utworzona z podstawień, których współczynniki są liczbami całkowitemi dodatniemi, jest niewłaściwie nieciągłą dla punktów z rzeczywistych, a właściwie nieciągłą dla punktów z zespolonych. Każda grupa, utworzona z podstawień o współczynnikach rzeczywistych, jest zawsze właściwie nieciągłą dla każdej wartości z zespolonej i może

być niewłaściwie nieciągłą tylko dla wartości rzeczywistej. (Poincaré, Acta math. III, str. 58).

Rozważmy grupy, których wszystkie podstawienia można utworzyć przy pomocy podstawień zasadniczych w liczbie skończonej.

Jeżeli mamy grupę nieciągłą, to może zdarzyć się, że płaszczyzna z dzieli się na pewną liczbę pól skończonych lub nieskończonych, które przekształcają się wzajemnie za pomocą podstawień grupy. Jedna z takich części może się dzielić na nieskończoną liczbę obszarów w ten sposób, że kiedy punkt z przebiega ten obszar, to punkt, przekształcony przy pomocy podstawienia grupy, przebiega inny obszar, który możemy nazwać kongruentnym z pierwszym. Każdemu obszarowi odpowiada tedy podstawienie grupy; linia, oddzielająca dwa stykające się obszary, nazywa się bokiem. Te boki są po dwa za sobą sprzężone, t. j. podstawienie przekształca punkty jednego na punkty drugiego; punkt przecięcia dwóch boków kolejnych nazywa się wierzchołkiem obszaru.

Można zawsze sprawić, że obszar będzie wielokątem, ograniczonym okręgami lub łukami okręgów koł; przytem wielokąt taki może nie być pojedynczo-spójny.

Na spójności tego wielokąta polega pojęcie rodzaju grupy.

Badanie grup i ich istnienia sprowadza się do badania podziału płaszczyzny na obszary kongruentne: jeżeli znamy jeden taki obszar (wielokąt początkowy lub tworzący), oraz rozkład jego boków na pary boków sprzężonych, to grupa jest określona.

Podstawienia zasadnicze są te, które odpowiadają wszystkim obszarom sąsiednim wielokąta tworzącego.

Pomiędzy grupami o skończonej liczbie podstawień mieszczą się grupy wielościannowe (dwuścianowe, czworościanowe, ośmiościanowe, dwudziestościanowe, patrz § 3).

Pomiędzy grupami o nieskończonej liczbie podstawień naj-

prostsza jest grupa peryodyczna, do której należą funkcje peryodyczne (patrz § 4).

Następnie idzie grupa, utworzona z podstawień, która nazywa się grupą modułową; do niej należą funkcje modułowe. Potem idzie grupa, której podstawienia mają współczynniki rzeczywiste (jest to grupa Fuchsa, a odpowiadające jej funkcje nazywają się funkcjami Fuchsa. Wreszcie idzie grupa, złożona z podstawień o współczynnikach zespolonych; jest to grupa Kleina (jak ją nazywa Poincaré), a odpowiadające jej funkcje nazywają się wogóle funkcjami automorficznymi (Klein).

Należy zauważyć, że Poincaré zachował nazwę grup Fuchsa, dla pewnych przypadków specjalnych grup o współczynnikach zespolonych. Jeżeli przyjmujemy, że

$$s_i = \left(z, \frac{a_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i} \right)$$

są podstawieniami grupy o współczynnikach rzeczywistych, to podstawienia, wyrażone symbolem

$$t_i = \left(\frac{a z + \beta}{\gamma z + \delta}, \frac{a \left[\frac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i} \right] + \beta}{\gamma \left[\frac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i} \right] + \delta} \right),$$

gdzie a, β, γ, δ są liczbami jakimikolwiek, spełniającymi warunek $a\delta - \gamma\beta = 1$, tworzą również grupę o współczynnikach zespolonych. Tę grupę nazywa Poincaré grupą Fuchsa.

Grupa podstawień o współczynnikach rzeczywistych pozostawia bez zmiany oś rzeczywistą płaszczyzny i przekształca na same siebie dwie półpłaszczyzny. Ta grupa Fuchsa w znaczeniu szerszem przekształca na siebie samo koło (koło zasadnicze), którego równaniem jest

$$\text{Część rzeczyw. wyraż. } \frac{\delta z - \gamma}{\beta z - a} = 0.$$

W przypadku grupy Fuchsa w znaczeniu ściślejszem suma pól wszystkich obszarów jest nieskończona; w przypadku grupy Fuchsa, w znaczeniu obszerniejszem, suma ta jest skończona, gdyż obszary rozciągają się tylko wewnątrz koła zasadniczego i mogą pokrywać całe koło lub tylko część jego.

W przypadku najogólniejszym grupy Kleina suma pól obszarów jest w ogólności skończona.

Co się tyczy historii i bibliografii teorii funkcyj automorficznych zauważymy, że—pomijając funkcyjne peryodyczne—pierwsze przykłady funkcyj, należących do grup o nieskończonej liczbie podstawień znalazł Schwarz w r. 1872 (Crelle LXXV), badając funkcyjne, które powstają z szeregu hypergeometrycznego Gaussa. Potem Klein i inni badali funkcyjne modułowe. Poincaré i Klein z dwóch różnych punktów widzenia utworzyli teorię funkcyj, należących do grup liniowych. Z pomiędzy prac Poincarego w tym przedmiocie wymieniamy najważniejsze i najobszerniejsze, ogłoszone w Acta math I, III, IV, V, oraz w Math. Ann. XIX, prócz ogłoszonych w Comptes rendus w r. 1881 i później. Z prac Kleina wymieniamy ogłoszone w Math. Ann. XIV, XVII, XIX, XX, XXI i t. d. Do tegoż przedmiotu odnoszą się też prace Dycka (Math. Ann. XX, XXII). Bolza'y (Am. Journ. XIII), najnowsze Rittera (Math. Ann. XLV). Funkcyom automorficznym poświęcone jest osobne dzieło: R. Fricke und F. Klein „Vorlesungen über der Theorie der automorphen Functionen“, którego t. I p. t. „Die gruppentheoretischen Grundlagen“ ukazał się w r. 1897 (Lipsk, Teubner).

§ 3.

Grupa anharmoniczna. Grupy i funkcyjne wielościannowe.

Pierwszą grupą, złożoną ze skończonej liczby podstawień, jest grupa, wynikająca z podstawień:

$$z' = z, \quad z' = \frac{1}{z}, \quad z' = 1 - z, \quad z' = \frac{1}{1 - z},$$

$$z' = \frac{z-1}{z}, \quad z' = \frac{z}{z-1},$$

których strony drugie odpowiadają sześciu wartościom, jakie przyjmować może stosunek anharmoniczny czterech ilości. Funkcją, nie zmieniającą się przy podstawieniach tej grupy, jest

$$f(z) = \frac{(z^2 - z + 1)^3}{(z^2 - z)^2},$$

Do grup skończonych należą t. zw. grupy wielościanowe (polyedralne).

Wyobraźmy sobie wielościan foremny, wpisany w kulę o promieniu 1; istnieją pewne obroty wielościanu takie, że po ich skutecznieniu wierzchołki wracają w swe położenia pierwotne. Jeżeli rzucimy tedy kulę stereograficznie na płaszczyznę styczną, na której rozmieścimy zmienną z , to każdy taki obrót kuli odpowiada specjalnemu przekształceniu liniowemu zmiennej z (patrz § 1). Funkcja, której pierwiastkami są wartości z , odpowiadające wierzchołkom wielościanu, pozostanie oczywiście niezmienną dla wszystkich obrotów, utworzymy tym sposobem grupę wielościanową i odpowiadającą jej funkcję.

1. Grupa cykliczna, jest to grupa, utworzona z n podstawień

$$z' = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \cdot z; \quad (k=0, 1, \dots, n-1).$$

Najprostsza funkcja, do tej grupy należąca, jest

$$az^n + b.$$

gdzie a i b są stałe jakiekolwiek.

2. Grupa dwuścianowa (diedralna) tworzy się z $2n$ podstawień

$$z' = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \cdot z; \quad z' = \frac{e^{-\frac{2kiz}{n}}}{z}; \quad (k=0, 1, \dots, n-1)$$

Funkcja, należąca do tej grupy, jest:

$$\frac{(z^n - 1)^2}{z^n}.$$

3. Grupa czworościanowa (tetraedalna). Stosownie do położenia czworościanu wpisanego w kulę, są dwie różne grupy, których podstawienia przemieniają pomiędzy sobą wierzchołki czworościanu. Grupy te zawierają 12 podstawień i są hołloedrycznie izomorficzne z grupą naprzemienną o 4 elementach. Pierwsza z tych grup tworzy się z 12 podstawień:

$$z' = \pm z, \quad z' = \pm \frac{1}{z},$$

$$z' = \pm i \frac{z+1}{z-1}, \quad z' = \pm i \frac{z-1}{z+1},$$

$$z' = \pm \frac{z+i}{z-i}, \quad z' = \pm \frac{z-i}{z+i},$$

druga zaś z 12 podstawień:

$$z' = \pm z, \quad z' = \pm \frac{i}{z},$$

$$z' = \pm \frac{(1+i)z + \sqrt{2}}{\sqrt{2}z - (1-i)}, \quad z' = \pm \frac{\sqrt{2} \cdot z - (1-i)}{(1+i)z + \sqrt{2}},$$

$$z' = \pm \frac{(1-i)z + \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot z - (1+i)}, \quad z' = \pm \frac{\sqrt{2} \cdot z - (1+i)}{(1-i)z + \sqrt{2}}.$$

Dla pierwszej grupy pozostają bez zmiany (przy pominięciu czynnika) dwie funkcje:

$$z^4 \pm 2\sqrt{-3} \cdot z^2 + 1;$$

przy drugiej zaś grupie dwie funkcje:

$$z^4 \pm 2\sqrt{3} \cdot z^2 - 1.$$

Te wielomiany, przyrównane do zera, dają równania, których pierwiastki odpowiadają wierzchołkom czworościanu, wpisanego w kulę i znajdującego się w czterech różnych położe-

niach. Dla tego to każde z tych równań nazywa się równaniem czworościanu.

4. **Grupa ośmiościanowa** (oktoedralna). I tych grup jest dwie. Składają się one z 24 podstawień i są holodrycznie izomorficzne z grupą symetryczną 4 elementów. Pierwszą z grup ośmiościanowych jest

$$z' = i^k z, \quad z' = \frac{i^k}{z}.$$

$$z' = i^k \frac{z+1}{z-1}, \quad z' = i^k \frac{z-1}{z+1}, \quad (k = 0, 1, 2, 3)$$

$$z' = i^k \frac{z+i}{z-i}, \quad z' = i^k \frac{z-i}{z+i}.$$

Równanie, którego pierwiastki pozostają bez zmiany przy podstawieniach grupy, jest

$$z(z^4 - 1) = 0. \quad (\text{równanie ośmiościanu.})$$

Drugą grupą ośmiościanową jest:

$$z' = i^k z, \quad z' = \frac{i^k}{z},$$

$$z' = i^k \frac{(1+i)z + \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot z - (1-i)}, \quad z' = i^k \frac{\sqrt{2} \cdot z - (1-i)}{(1+i)z + \sqrt{2}}; \quad (k=0, 1, 2, 3)$$

$$z' = i^k \frac{(1+i)z + \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot z - (1+i)}, \quad z' = i^k \frac{\sqrt{2} \cdot z - (1+i)}{(1-i)z + \sqrt{2}}.$$

Odpowiedniemi równaniem jest:

$$z(z^4 + 1) = 0, \quad (\text{równanie ośmiościanu.})$$

5. **Grupa dwudziestościanowa** (ikozaedralna) zawiera 60 podstawień i jest izomorficzna z grupą symetryczną 5 elementów. Podstawienia te są:

$$z' = \varepsilon^k z, \quad z' = \frac{-\varepsilon^{4k}}{z},$$

$$z' = \varepsilon^{k_1} \frac{-(\varepsilon - \varepsilon^4) \varepsilon^k \cdot z + (\varepsilon^2 - \varepsilon^3)}{(\varepsilon^2 - \varepsilon^3) \varepsilon^k \cdot z + (\varepsilon - \varepsilon^4)},$$

$$z' = -\varepsilon^{4k_1} \frac{(\varepsilon^2 - \varepsilon^3) \varepsilon^k \cdot z + (\varepsilon^2 - \varepsilon^4)}{-(\varepsilon - \varepsilon^4) \varepsilon^k \cdot z + (\varepsilon^2 - \varepsilon^3)},$$

gdzie $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{5}}$; k i k' przybierają wszystkie wartości 0, 1, 2, 3, 4.

Równaniem dwudziestociannu jest:

$$z(z^{10} + 1)(z^5 - 1) = 0.$$

Teoria grup skończonych, a w szczególności grup wielościanowych, jest rozwinięta w dziele Kleina „Vorlesungen über das Ikosaeder“, Lipsk, 1894, gdzie znaleźć też można odnośne wskazówki historyczne i bibliograficzne. Wymieniamy nadto prace Kleina „Binäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst“, Math. Ann. XX, dalej prace: Gordana (Math. Ann. XII), Brioschi'ego (Lincei 1889), Ann. di mat. VIII, Comptes rendus XCVI i t. d.; Cayley'a (Quart. Journ. of math. XVI, 1879) i t. d.

§ 4.

Funkcje peryodyczne.

Grupy, utworzone z jednej lub z dwu podstawień typu (parabolicznego)

$$z' = z + 2\omega, \quad z' = z + 2\omega'$$

można nazwać grupami peryodycznymi, a funkcje, im odpowiadające, funkcjami pojedynczo lub podwójnie peryodycznymi. Ilości 2ω , $2\omega'$ nazywają się peryodami

Grupe, utworzoną z powyższych dwu podstawień, można utworzyć przy pomocy jednego podstawienia tejże postaci, jeżeli stosunek $\frac{\omega'}{\omega}$ jest rzeczywisty, wymierny; jest to grupa ciągła, jeżeli $\frac{\omega'}{\omega}$ jest liczbą zespoloną.

Grupa, utworzona z trzech lub więcej podstawień typu poprzedzającego, albo daje się zbudować za pomocą dwu podstawień tegoż, albo jest grupą ciągłą. Inaczej mówiąc, można zawsze znaleźć liczby całkowite m, m', m'' takie, że $m\omega + m'\omega' + m''\omega''$ albo będzie zerem, albo częścią rzeczywistą i urojona tego wyrażenia będą mniejsze od jakiegokolwiek ilości danej, t. j. będą nieskończenie małe.

Te twierdzenia ogólne w formie nieco odmiennej można znaleźć u Clebscha-Gordana (Abel'sche Functionen, § 38).

Nie istnieją funkcje jednowartościowe jednego argumentu więcej niż dwuperyodyczne. (Twierdzenie Jacobi'ego, Werke II, str. 202).

Każda funkcja jednowartościowa $2p$ — peryodyczna musi być funkcją przynajmniej p argumentów (Jacobi).

Stosunek peryodów funkcji podwójnie peryodycznej nie może być liczbą rzeczywistą (Jacobi, Werke II, str. 5).

Wielokąt tworzący dla grupy podwójnie peryodycznej można sprowadzić do równoległoboku, którego jednym z wierzchołków jest początek na płaszczyźnie z , a jeden z boków przypada na osi rzeczywistej. Równoległobok ten nazywa się równoległobokiem zasadniczym. Cała płaszczyzna pokrywa się siecią równoległoboków, przystających do równoległoboku tworzącego.

Funkcja podwójnie peryodyczna nie może być holomorficzna.

Summa pozostałości (rezyduów) w każdym równoległoboku funkcyi meromorficznej podwójnie peryodycznej jest zerem.

Każda taka funkcyja posiada przynajmniej dwa bieguny w każdym równoległoboku.

Dla każdej takiej funkcyi suma punktów zerowych w każdym równoległoboku elementarnym równa się sumie rzędów jej nieskończoności w tymże równoległoboku.

Dwie funkcyje meromorficzne podwójnie peryodyczne, mające te same peryody, te same zera i te same nieskończoności, różnią się tylko czynnikiem stałym.

Suma punktów zerowych, zmniejszona o sumę punktów nieskończoności funkcyi podwójnie peryodycznej w równoległoboku elementarnym, równa się wielokrotności peryodów. (Twierdzenie Liouville'a).

Mając dane peryody, n punktów zerowych i tyleż punktów nieskończoności, możemy zawsze znaleźć odpowiadającą im funkcyę podwójnie peryodyczną.

Suma punktów, w których funkcyja podwójnie peryodyczna posiada też samą wartość w równoległoboku elementarnym, jest stałą (jeżeli pominiemy wielokrotności peryodów).

Funkcyja podwójnie peryodyczna nazywa się funkcyą rzędu n -tego, jeżeli w równoległoboku zasadniczym ma n nieskończoności.

Funkcyja podwójnie peryodyczna rzędu 2-go czyni zadość związkowi $f(a+\beta-z) = f(z)$, gdzie a i β są punktami jej nieskończoności.

Pochodna funkcyi podwójnie peryodycznej rzędu 2-go znika w czterech punktach (ω i ω' są półperyodami):

$$\frac{a+\beta}{2}, \quad \frac{a+\beta}{2} + \omega, \quad \frac{a+\beta}{2} + \omega', \quad \frac{a+\beta}{2} + \omega + \omega'.$$

Funkcya $F(z)$, mająca te same nieskończoności i peryody co funkcya $f(z)$ w twierdzeniu poprzedzającym i czyniąca zadość równaniu $F(\alpha + \beta - z) = F(z)$, wyraża się wymiennie przez funkcyę $f(z)$.

Każda funkcya podwójnie peryodyczna rzędu n wyraża się wymiennie przez funkcyę rzędu 2-go, mającą te same przyrody, i przez jej pochodną. (Twierdzenie Liouville'a.)

Dwie funkcye podwójnie peryodyczne, dla których sieci równoległe boków mają wspólną jedną sieć wierzchołków, są związane równaniem algebraicznym.

Funkcya podwójnie peryodyczna i jej pochodna są związane równaniem algebraicznym.

Powiadamy, że funkcya analityczna posiada twierdzenie o dodawaniu algebraicznym, jeżeli pomiędzy wartościami $f(z)$, $f(z')$, $f(z+z')$, gdzie z i z' są jakiegokolwiek punkty na płaszczyźnie, istnieje związek algebraiczny.

Jeżeli funkcya, posiadająca twierdzenie o dodawaniu, jest jednowartościową, wtedy $f(z+z')$ wyraża się wymiennie przez $f(z)$, $f(z')$, $f'(z)$, $f'(z')$.

Każda funkcya podwójnie peryodyczna meromorficzna jednowartościowa posiada twierdzenie o dodawaniu algebraicznym. Odwrotnie: każda funkcya meromorficzna na całej płaszczyźnie (z wyłączeniem punktu ∞), dla której istnieje twierdzenie o dodawaniu algebraicznym (ponieważ nie ma innych punktów istotnie osobliwych prócz ∞), jest funkcją wogóle podwójnie peryodyczną.

Funkcya meromorficzna na całej płaszczyźnie (prócz ∞) i podwójnie peryodyczna, a więc mająca twierdzenie o dodawaniu algebraicznym, nazywa się w ogóle funkcją eliptyczną jednowartościową.

Funkcja $p(u)$ może być nazwana funkcją eliptyczną elementarną. Jest ona rzędu 2-go, za pomocą niej i jej pochodnej można wyrazić każdą inną funkcję eliptyczną (na podstawie powyższego twierdzenia).

Widzimy tedy, że teoria funkcyj podwójnie peryodycznych sprowadza się do teorii funkcyj eliptycznych; do tej więc odsyłamy czytelnika po szczegóły (patrz Rozdział XVI).

Dodajemy, że teorię funkcyj eliptycznych, opartą głównie na pojęciu podwójnej peryodyczności, wyłożył Liouville w r. 1847 i ogłosił w Comptes rendus w r. 1851 (patrz też Crelle, LXXXVIII); potem tą drogą poszli Briot i Bouquet (Journ. de l'Ecol. Polyt. 1856), oraz Méray. Wykład jasny twierdzeń o funkcjach podwójnie peryodycznych znajdujemy w dziele: Briot et Bouquet „Théorie des fonctions elliptiques“ (Paryż, 1872).

Funkcje, nie pozostające bez zmiany przy powiększaniu argumentu peryodu, lecz pozyskujące wtedy czynnik stały lub wykładniczy stopnia 1, nazywamy zwykle funkcjami podwójnie peryodycznymi 2-go i 3-go gatunku, stosownie do tego, czy czynnik ten jest stałym, czy też wykładniczym stopnia 1-go co do zmiennej.

O związku tych funkcyj z funkcjami peryodycznymi zwyczajnymi znaleźć można wiadomości w pracach Hermite'a (Comptes rendus 1861—62, 85), Mittag-Lefflera (tamże 1880), Brioschi'ego (tamże 1881), Frobeniusa (Crelle XCIII) i t. 1. Porówn. też dzieło Forsytha „Theory of functions etc., Cambridge, 1893, Cap. XII, str. 273 i nast.

§ 5.

Funkcje modułowe.

Funkcja jednopostaciowa nazywa się modułową, jeżeli nie ulega zmianie przy wszystkich podstawieniach grupy lub podgrupy modułowej

$$\left(z, \frac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i} \right), \quad (a_i d_i - b_i c_i = 1)$$

gdzie a, b, c, d są liczby rzeczywiste dodatnie. Nazwa „modułowa“ pochodzi stąd, że moduł k^2 funkeyj eliptycznych, uważany za funkeyę stosunku peryodów przestępnych $z = \frac{\omega'}{\omega}$, jest właśnie funkeyą tego gatunku.

Grupa modułowa jest niewłaściwie nieciągłą dla wartości z rzeczywistych (patrz § 2).

Jeżeli $F(z)$, $f(z)$ są funkeye modułowe, należące do grup G , G' , gdzie G' jest podgrupą grupy G , to funkeya F wyraża się wymiennie przez funkeyę f .

Dwie funkeye modułowe, należące do tej samej grupy, wyrażają się wymiennie jedna przez drugą.

Niezmiennik bezwzględny funkeyj eliptycznych (patrz Rozdział XVI)

$$J = \frac{4}{27} \frac{(1 - k^2 + k^4)^3}{k^4 (1 - k^2)^2}$$

jest funkeyą modułową, należącą do grupy całkowitej.

Podstawieniami tworzącemi grupy całkowitej są podstawienia

$$\left(z, z + 1 \right), \quad \left(z, -\frac{1}{z} \right),$$

z których pierwsze jest parabolicznem, drugie zaś eliptycznem peryodycznem.

Wielobok początkowy lub tworzący dla funkeyi k^2 jest czworobokiem krzywokreślnym nieskończonym na półpłaszczyźnie dodatniej; dwa jego boki są równoległe do osi rzędnych

i mają odcięte $+1$, -1 , dwa drugie są półkołami na płaszczyźnie dodatniej o promieniu $\frac{1}{2}$, mającemi środki w punktach $+\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$.

W tym wieloboku funkcyja k^2 przyjmuje raz jeden wszystkie swoje wartości; t. j. wartości, jakie przyjmuje w innych częściach płaszczyzny, są równe tym, jakie ma wewnątrz wieloboku.

Grupa funkcyi modułowej $k^2 k'^2$ tworzy się z dwu podstawień $\left(z, z+2\right)$, $\left(z, -\frac{1}{z}\right)$.

Dwie funkcyje $\varphi = \sqrt[4]{k}$, $\psi = \sqrt[4]{k'}$ są funkcyami modułowemi, należącemi odpowiednio do grup następujących. Funkcya φ należy do podgrupy grupy funkcyi k^2 , tworzącej się z trzech podstawień

$$A = (z, z+2), \quad B = \left(z, \frac{z}{-2z+1}\right), \quad C = \left(z, \frac{z}{2z+1}\right),$$

lecz w ten sposób, że w każdym iloczynie liczba czynników A jest kongruentną z zerem według mod. 8. Funkcya ψ należy do podgrupy grupy funkcyi k^2 , tworzącej się z tychże trzech podstawień, lecz w ten sposób, że w każdym iloczynie liczba czynników B , zmniejszona o liczbę czynników C , jest $\equiv 0 \pmod{8}$.

Wielobok tworzący dla niezmiennika bezwzględnego

$$J(z) = \frac{4}{27} \frac{(1 - k^2 + k^4)^3}{k^4 (1 - k^2)^2}$$

ma trzy boki; jednym jest łuk koła o promieniu 1 ze środkiem w początku, rozciągającego się od punktu z odciętą $-\frac{1}{2}$ do punktu z odciętą $+\frac{1}{2}$; pozostałe boki są prostymi, wychodzącymi z końca tego boku i rozciągającymi się do $+\infty$ równolegle do osi rzędnych. Funkcya $J(z)$ w punktach $z = i$,

$\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ i ∞ , t. j. w wierzchołkach półtrójkąta tworzącego, przyjmuje odpowiednio wartości 1, 0, ∞ .

Grupa funkcyi modułowej k^2 (moduł Legendre'a) jest utworzona z podstawień:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{2};$$

jej podstawieniami tworzącemi są

$$\left(z, \frac{1}{2z+1}\right), \quad (z, z+2).$$

Teorya funkcyj modułowych jest najściślej związana z teorią przekształceń funkcyj eliptycznych (patrz Rozdz. XVI).

Nazwa: „funkeye modułowe eliptyczne“ pochodzi od Dedekinda (Crelle LXXXIII. 1877). Badaniem w niej zasadniczem jest to, które odnosi się do podgrup grupy zasadniczej i do funkcyj do nich należących. Klein zbadał rozległą klasę tych podgrup.

Głównemi pracami o tej teorii są prace: Kleina (Math. Ann. XVI, XVII), Hurwitza (tamże XVIII), Dycka, Gierstera (tamże XVII, XX), Frickego (tamże XXI, XXVIII, XXIX), Kiepert (Crelle LXXXVII).

Punktem wyjścia prac Kleina były jego własne badania nad grupami skończonemi, a potem studyum rozprawy Schwarza (Crelle LXXV) o szeregu hypergeometrycznym. Niedawno wyszło obszerne dwutomowe dzieło o funkcyach modułowych, opracowane przez Frichego, według wykładów Kleina („Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen“, Lipsk, 1890—92)

§ 6.

Funkcje Fuchsa i Kleina (automorficzne).

Teorię funkcji podwójnie peryodycznych rozpoczynamy od zbudowania funkcji Θ , których stosunki właśnie funkcje te wyrażają. Poincaré usiłował pójść tą samą drogą dla funkcji ogólniejszych, które nas w tej chwili zajmują.

Zauważywszy, że szereg

$$\sum_i \left| \frac{1}{(c_i z + d_i)^{2m}} \right| \quad (m \text{ całkowite} > 1)$$

jest zbieżny, zbudował on szereg zbieżny

$$\Theta(z) = \sum_i H \left(\frac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i} \right) \frac{1}{(c_i z + d_i)^{2m}},$$

(gdzie H jest symbolem jakiegokolwiek funkcji wymiernej), przedstawiający funkcję jednopostaciową, którą nazwał teta-fuchsovą lub teta-kleinową stosownie do tego, czy grupa zasadnicza jest grupą Fuchsa czy Kleina. Można tę funkcję nazwać także pseudo-automorficzną.

Liczba punktów zerowych i nieskończonościowych tej funkcji wewnątrz wieloboku początkowego lub tworzącego R_0 jest zawsze skończona.

Funkcja θ sprawdza związek:

$$\Theta \left(\frac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i} \right) = \Theta(z) (c_i z + d_i)^{2m}.$$

Każda taka funkcja analityczna istnieje tylko w tej części płaszczyzny, do której należy wielobok początkowy oraz wszystkie wieloboki w liczbie nieskończonej, które otrzymują się z nie-

go przez podstawienia grupy. Tak np. w przypadku grup fuchsowych w znaczeniu obszerniejszem funkcyja istnieje tylko w kole zasadniczem lub w części tego koła, którego okrąg jest linią osobliwą dla tej funkcyi. Mamy tu funkeye o obszarach osobliwych. (Patrz Rozdział XIII).

Iloraz dwu takich funkcyj, odpowiadających tej samej liczbie m , jest funkcyą automorficzną, mającą nieskończoną liczbę zer i nieskończoności wewnątrz R_0 . Odwrotnie, funkcyę automorficzną można zawsze wyrazić za pomocą funkcyj Θ .

Pomiędzy dwiema funkcyami automorficznymi, odpowiadającemi tej samej grupie, zachodzi zawsze związek algebraiczny, i każda inna funkcyja tej grupy wyraża się wymiernie przez dwie takie funkeye.

Spółrządne punktów krzywej algebraicznej jakiejkolwiek dają się zawsze wyrazić jako funkeye fuchsowe jednego i tego samego parametru.

Każde równanie różniczkowe liniowe o współczynnikach algebraicznych daje się zawsze całkować przez funkeye fuchsowe i teta-fuchsowe.

Co do innych szczegółów patrz prace, cytowane w § 2.

ROZDZIAŁ XV.

FUNKCJE ALGEBRAICZNE I CAŁKI ABELOWE.

§ 1.

Ogólne wiadomości o funkcjach algebraicznych. Rozgałęzienie.

Wyobraźmy sobie związek $f(w, z) = 0$, gdzie f jest funkcją wymierną całkowitą pomiędzy dwiema zmiennymi zespolonemi w i z . Ilość w , określona jako funkcja ilości z , będzie wogóle wielowartościową, a mianowicie będzie miała n wartości, jeżeli n jest stopniem równania względem w . Funkcja taka nazywa się funkcją algebraiczną zmiennej z . Ogólniej: Każda funkcja wymierna ilości w i z , pomiędzy którymi zachodzi związek powyższy, nazywa się funkcją algebraiczną zmiennej z .

Zresztą od drugiego określenia można powrócić do pierwszego, gdyż, jeżeli położymy $w_1 = R(w, z)$ i wyrugujemy w pomiędzy tem równaniem i danem $f(w, z) = 0$, otrzymamy równanie wymierne $F(w_1, z) = 0$.

Jeżeli zmiennej z nadamy wartość $z = z_0$, wtedy równanie stopnia n -tego względem w , $f(w, z) = 0$, da nam n pierwiast-

ków w , które mogą być wszystkie różne, lub też niektóre pomiędzy niemi mogą być i równe. Jeżeli przyjmiemy, że jest w ogóle m pierwiastków równych, będziemy mieli twierdzenie Cauchy'ego (Exercices, 1841).

Jeżeli dla $z=z_0$ równanie ma m pierwiastków w równych w_0 , wtedy dla wartości z blizkiej z_0 m pierwiastków równania posiadać będzie wartości nieskończenie mało różniące się od w_0 .

Gdy dla $z=z_0$ pierwiastek $w=w_0$ nie jest wielokrotny, wtedy: jeżeli w płaszczyźnie z zmienna z opisze koło dostatecznie małe około punktu z_0 , to zmienna w w płaszczyźnie w opisze koło dostatecznie małe około punktu w_0 ; jednemu obrotowi w płaszczyźnie z odpowiada jeden obrót lub całkowita liczba obrotów w płaszczyźnie w . W otoczeniu punktu z_0 funkcyja $w=w_0$ daje się rozwinąć nas szeregi, uporządkowany według potęg całkowitych różniących z od z_0 , poczynając od potęgi pierwszej, lub od potęgi wyższej, niż pierwsza.

Gdy dla $z=z_0$ funkcyja f ma m pierwiastków równych w_0 , wtedy: jeżeli zmienna z opisuje w swej płaszczyźnie około punktu z_0 koło dostatecznie małe, wartość w okrąży punkt w_0 , lecz w ten sposób, że gdy z czyni jeden obrót w swej płaszczyźnie, w przechodzić będzie od jednego z pierwiastków nieskończenie blizkich w_0 (zgodnie z twierdzeniem Cauchy'ego) do innego. Jeżeli po uskutecznieniu pewnej liczby m_1 obrotów w płaszczyźnie z , powrócimy w płaszczyźnie w do pierwiastka, z którego wyszliśmy, przeszedłszy przez m_1 z pomiędzy m pierwiastków, mówimy wtedy, że m_1 pierwiastków tworzy cykl. Z pozostałych pierwiastków znowu m_2 tworzy nowy cykl i t. d.; suma $m_1 + m_2 + \dots$ równa się oczywiście liczbie m .

Pierwiastki w liczbie m_1 , tworzące cykl, dają się w otoczeniu punktu z_0 rozwinąć na szeregi, których pierwszym wyrazem jest z_0 , a pozostałe wyrazy postępują według potęg całkowitych dodatnich czynnika $(z-z_0)^{\frac{1}{m_1}}$; podobnie się rzecz ma dla m_2 pierwiastków, tworzących cykl drugi i t. d. Wartość tedy funkcji w w punkcie najbliższym punktu z_0 wyobraża tyle szeregów, ile jest cykli, na które rozpadają się pierwiastki uważanego równania.

Jeżeli wszystkie liczby $m_1, m_2, \dots$ są równe jedności, wtedy w otoczeniu punktu z_0 otrzymujemy m rozwinięć szeregowych, odpowiadających m różnym wartościom funkcji w tym punkcie. Jeżeli przedstawimy związek $f(w, z) = 0$ za pomocą krzywej na płaszczyźnie, to przypadek ten odpowie rozważaniu punktu m -krotnego krzywej o stycznych różnych.

Jeżeli nie wszystkie liczby m są równe jedności, punkt z_0 nazywa się punktem rozgałęzienia rzędu $m_1 - 1$ dla m_1 wartości funkcji w , stanowiących cykl pierwszy, rzędu $m_2 - 1$ dla m_2 wartości, stanowiących cykl drugi i t. d. W przedstawieniu geometrycznym punkt rozgałęzienia odpowiada punktowi takiemu krzywej, że przechodząca przezeń rzędna przecina w dwu przynajmniej punktach nieskończenie bliskich tęż samą gałąź krzywej; w szczególności zaś punktowi, w którym styczna do gałęzi linii krzywej jest prostopadła do osi odciętych.

Jeżeli w szczególności rozwinięcie funkcji w na szereg według potęg ilości $(z-z_0)^{\frac{1}{m}}$ rozpoczyna się od wyrazu z czynnikiem $(z-z_0)^{\frac{m_1}{m}} = z-z_0$, t. j. jeżeli są zerami pierwsze $m_1 - 1$ współczynników rozwinięcia, to i wtedy z_0 będzie punktem rozgałęzienia, lecz natury bardziej złożonej. W przedstawieniu geometrycznym krzywej ten przypadek zachodzi dla ostrza, lub ogólniej dla punktu wielokrotnego o zlewających się stycznych. Takie rozgałęzienie nazywać będziemy rozgałęzieniem ostrzowem.

Jeżeli z_0 nie jest punktem rozgałęzienia lub jeżeli jest punktem rozgałęzienia ostrzowego, wtedy otoczenie tego punktu i otoczenie punktu w , odpowiadają sobie wzajemnie w odtworzeniu podobnem; jeżeli zaś z_0 jest punktem rozgałęzienia zwykłego rzędu $m_1 - 1$, odtworzenie nie jest podobnem.

Punkt rozgałęzienia zwykłego rzędu $m_1 - 1$ można uważać jako zjednoczenie $m_1 - 1$ nieskończenie blizkich punktów rozgałęzienia rzędu 1-go.

Dzieje się to (jeżeli wyłączymy rozważanie rozgałęzienia ostrzowego) na podstawie następującego twierdzenia Noethera (Math. Ann. IX; por. także rozprawę Halphen'a: *Sur les points singuliers des courbes algébriques*“, gdzie można znaleźć też wskazówki bibliograficzne):

Można zawsze, za pomocą przekształceń Cremony przekształcić krzywą algebraiczną płaską $f(w, z) = 0$ na inną, mającą tylko punkty wielokrotne o styecznych różnych.

Liczba punktów rozgałęzienia pojedynczych, zwyczajnych i ostrzowych, odpowiadających równaniu $f(w, z) = 0$, wynosi $n(n-1) - 2d - 2r$, gdzie n jest rząd krzywej, którą przedstawia to równanie, d jest liczba punktów podwójnych krzywej, r liczba ostrzy. Jeżeli krzywa ma punkty wielokrotne, to każdy z nich powinien być liczony w tym wzorze za pomocą swego równoważnika w punktach podwójnych i ostrzach, jak tego uczy teoria krzywych algebraicznych.

Dla każdego punktu rozgałęzienia być musi:

$$\frac{\partial f}{\partial w} = 0, \quad \text{lub} \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \infty.$$

Nie jest to wszakże warunek dostateczny rozgałęzienia, gdyż jeżeli np.

$$\frac{\partial f}{\partial w} = 0, \quad \text{i oprócz tego} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

wtedy rozgałęzienia niema.

Jeżeli równanie zasadnicze jest postaci

$$z - (a_0 w^n + a_1 w^{n-1} + \dots + a_n) = 0,$$

wtedy punktami rozgałęzienia jest punkt $z = \infty$, który jest punktem rozgałęzienia rzędu $(n-1)$ go, oraz punkty z , którym odpowiadają wartości w , będące pierwiastkami równania

$$na_0 w^{n-1} + (n-1) a_1 w^{n-2} + \dots + a_{n-2} = 0,$$

którego strona pierwsza jest pochodną strony pierwszej równania $f = 0$.

Jeżeli równanie zasadnicze $f = 0$ jest postaci

$$w^2 - (a_0 z + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n) = 0,$$

to punktów rozgałęzienia jest n i są nimi pierwiastki równania:

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0.$$

Większą część twierdzeń w tym paragrafie podaje klasyczna rozprawa Puiseux'go (Journ. de Liouville, XV, 1850).

§ 2.

Konstrukcja powierzchni Riemanna.

Do badania funkcji algebraicznych nadają się dość dobrze tak nazwane powierzchnie Riemanna, wprowadzone po raz pierwszy przez tego uczonego. Powierzchniom tym poświęcamy specjalny rozdział w tomie 2-gim tej książki, gdzie mówić będziemy o nich ze stanowiska geometrycznego („Teoria spójno-

ści powierzchni“); tu damy pojęcie o nich o tyle tylko, o ile to jest potrzebne do przedstawienia funkcji algebraicznych.

Dajmy, że funkcja algebraiczna ma n wartości. Zamiast jednej płaszczyzny z , wyobraźmy sobie n płaszczyzn z , położonych jedna na drugiej w ten sposób, aby punkty, dla których z ma tę samą wartość, znajdowały się na sobie. Na każdej z płaszczyzn położmy jedną z n wartości, jakie przyjmuje w dla tej samej wartości z ; następnie spójmy płaszczyzny w ten sposób, aby wyszedłszy z pewnego punktu i obiegłszy płaszczyzny po pewnej drodze, można było powrócić do punktu wyjścia z tą samą wartością na w .

Płaszczyzny, leżące na sobie i tworzące powierzchnię Riemanna, nazywają się jej liśćmi.

Dla ustalenia myśli, przyjmijmy, że mamy tylko dwie płaszczyzny ($n=2$); oznaczmy na nich punkty rozgałęzienia, których liczba powinna być w tym przypadku parzysta, i połączmy je po dwa (t. j. 1-y z 2-gim, potem 3-i z 4-y i t. d.) za pomocą jakichkolwiek linii (które mogą być i prostymi), nie przecinających się ze sobą (linie spójności). Przetnijmy płaszczyzny wzdłuż tych linii, a następnie złączmy brzeg prawy płaszczyzny górnej z brzegiem lewym płaszczyzny dolnej, oraz brzeg lewy płaszczyzny górnej z brzegiem prawym płaszczyzny dolnej. Skutkiem takiego spojenia płaszczyzn można przejść od jednej z nich do drugiej, lecz nie można okrążyć punktu rozgałęzienia w jednej i tej samej płaszczyźnie; przebiegając tedy po okręgu około punktu rozgałęzienia, przechodzimy od płaszczyzny górnej do dolnej, aby po tem po obrocie wrócić do płaszczyzny górnej.

Niechaj w ogólności będzie n płaszczyzn z , położonych na sobie i niechaj $z=z_0$ będzie punktem rozgałęzienia, w którym m_1 z pomiędzy n wartości w przemienia się wzajemnie kołowo, inne m_2 tworzą cykl drugi i t. d. (patrz § 1), wtedy poczynając z punktu z_0 , robimy tyleż cięć w rozmaitych płaszczyznach i spajamy je ze sobą w ten sposób, aby m_1 z pomiędzy nich stanowiło cykl pierwszy (1-y z 2-gim, 2-gi z 3-im, . . . m_1 -ty z 1-y), m_2 —cykl drugi i t. d.

Jeżeli krzywa, przedstawiona przez równanie $f(w, z)=0$, jest nierozkładalną, t. j. nie może rozpaść

się na krzywe niższe, wtedy układ tak spojonych n płaszczyzn stanowi powierzchnię jedyną, która może się przekształcać sposobem ciągłym w ten sposób, że powstaje stąd powierzchnia zwykłego wyglądu różnie spleciona i na której z jednego punktu można, sposobem ciągłym, przejść do każdego innego.

Jeżeli funkcyja f jest rozkładalna, wtedy mamy nie jedną, lecz tyle powierzchni, na ile czynników rozkłada się f ; na każdej z nich można przejść z jednego punktu do innego sposobem ciągłym.

Jeżeli krzywa nierozkładalna, przedstawiona przez równanie $f(w, z) = 0$, jest rodzaju p (patrz „Teorya krzywych“), wtedy odpowiadająca jej powierzchnia Riemanna jest także rodzaju p . Ta liczba całkowita dodatnia przedstawia największą liczbę cięć zamkniętych, które można skutecznie na powierzchni, nie doprowadzając jej do rozpadnięcia (patrz „Teorya spójności“).

Powierzchnia Riemanna rzędu p może być sposobem ciągłym przekształcona na kulę p — powłokową, t. j. na kulę, w której uczyniono $2p$ otworów i połączono je dwa po dwa powierzchniami postaci rur zwiniętych.

Powierzchnia nazywa się pojedynczo-spójną lub jedno-spójną, jeżeli rozpada się skutkiem jakiegokolwiek uskutecznionego na niej cięcia zamkniętego, albo skutkiem cięcia, łączącego punkt brzegu z innym punktem tegoż brzegu, gdy powierzchnia posiada brzegi. Tak np. jednospójną jest kula (powierzchnia bez brzegów lub część płaszczyzny ograniczona kołem).

Każdą powierzchnię Riemanna rodzaju p można uczynić jednospójną za pomocą p cięć zamkniętych (cięcia A), p cięć otwartych (cięcia B), łączących dwa punkty całkowitego brzegu, które powstały na powierzchni skutkiem pierwszych cięć, wreszcie za pomocą innych $p-1$ cięć otwartych (cięcia C).

Ogół tych wszystkich cięć przedstawia brzeg jedyny, który można przebiec całkowicie, wychodząc z pewnego punktu; jest to brzeg powierzchni, która stała się jednospójną.

Jeżeli powierzchnia Riemanna rodzaju p daje się zamienić na inną, mającą tylko dwa liście, to nazywa się hypereliptyczną.

Typem kanonicznym powierzchni hypereliptycznej Riemanna rodzaju p jest powierzchnia, złożona z dwuliscia i mająca $2p+2$ punktów rozgałęzienia.

Dla $p=1$ każda powierzchnia Riemanna jest hypereliptyczną; właściwie mamy wtedy tak zwaną powierzchnię eliptyczną Riemanna.

Dla powierzchni hypereliptycznej o dwu liściach, układ cięć A, B, C , zamieniających ją na jednospójną, tworzy się sposobem następującym. Niechaj punkty $a_1, a_2, \dots, a_{2p+1}$ będą punktami rozgałęzienia a proste $(a_1 a_2), (a_3 a_4) \dots (a_{2p+1} a_{2p+2})$ liniami spójności. Wykreślmy na jednej z płaszczyzn krzywe zamknięte, zawierające w swem wnętrzu pierwsze p z pomiędzy linii spójności, otrzymamy tym sposobem linię $A_1 A_2 \dots A_p$. Następnie tworzymy B_1 , kreśląc krzywą zamkniętą, która wychodząc z jednej z płaszczyzn z punktu linii $a_1 a_2$, dochodzi do punktu linii $a_{2p+1} a_{2p+2}$ i, przeszedłszy następnie do drugiej płaszczyzny, wraca do tegoż samego punktu linii $(a_1 a_2)$. Podobnie tworzymy $B_2, \dots B_p$ i kreślimy te linie tak, aby się nie przecinały. Wreszcie tworzymy linie $C_1, \dots, C_{p-1}$, łącząc punkt linii A_2 z punktem linii B_1 , punkt linii A_3 z punktem linii B_2 i t. d

§ 3.

Funkcje na powierzchni Riemannowskiej.

Dla każdego punktu powierzchni Riemanna mamy jedną wartość z i jedną wartość w ; ta ostatnia pozostaje bez zmiany bez względu na drogę, jaką na powierzchni dochodzimy do punktu.

Niechaj będzie funkcja monogeniczna zmiennych z i w taka, że dla każdej pary wartości z, w , czyniących zadość związkowi $f(w, z) = 0$, t. j. dla każdego punktu powierzchni Riemanna ma ona jedną wartość. Taka funkcja nazywa się funkcją jednopostaciową na powierzchni Riemanna.

Każda funkcja jednopostaciowa na powierzchni Riemanna, nie mająca innych osobliwości prócz biegunów (t. j. punktów, w których staje się nieskończoną tak, że jej odwrotność jest w tych punktach zerem i funkcją ciągłą) jest funkcją wymierną ilości w i z (funkcją algebraiczną ilości z).

Każda funkcja jednopostaciowa na powierzchni Riemanna musi koniecznie posiadać bieguny, t. j. nie może być skończoną na całej powierzchni, chyba że jest stałą.

Każda funkcja algebraiczna (funkcja jednopostaciowa na powierzchni Riemanna) przyjmuje każdą wartość k razy; w szczególności zaś ma tyle zer, ile ma biegunów. Liczba k nazywa się stopniem funkcji.

Grupa k punktów, z w których funkcja algebraiczna przyjmuje tę samą wartość, nazywa się równoresztową (koresydualną), z grupą innych k punktów, w których ta sama funkcja przyjmuje inną wartość.

Nie istnieje funkcja algebraiczna, mająca mniej niż $p+1$ biegunów dowolnie danych, gdzie p jest rodzajem zasadniczej powierzchni Riemanna.

Funkcja algebraiczna ogólna, mająca $p+1$ biegunów dowolnie danych, zawiera liniowo dwie stałe jednorodne, t. j. jest postaci $c_1 F + c_2$, gdzie F jest funkcją określoną tejże natury.

Funkcja algebraiczna ogólna, mająca k biegunów dowolnie wybranych, zawiera liniowo $k-p+1$ stałych dowolnych, t. j. istnieje $k-p$ prawdziwych funkcji (wyłączamy ilość stałą) liniowo niezależnych, mających bieguny swoje wszystkie lub niektóre w tych k punktach. (Twierdzenie Riemanna, Crelle LIV, Abelsche Functionen n. 5.)

Uogólnienie tego twierdzenia odnosi się do przypadku, w którym punkty dane mają położenie specjalne.

Jeżeli równanie $f(w, z) = 0$ rozważamy jako równanie krzywej płaskiej rzędu n -tego, to krzywą dołączoną rzędu $(n-3)$ -go nazywamy taką krzywą tego rzędu, która przechodzi $(r-1)$ -krotnie przez punkty r -krotne krzywej zasadniczej.

Krzywa dołączona rzędu $(n-3)$ -go ma $2p-2$ zmiennych punktów przecięcia (prócz punktów wielokrotnych) z krzywą zasadniczą i istnieje p krzywych dołączonych rzędu $(n-3)$ -go, liniowo od siebie niezależnych.

Jeżeli k punktów należy do przecięć (zmiennych) krzywej dołączonej rzędu $(n-3)$ -go z krzywą f , mówimy wtedy, że te k punktów tworzy grupę specjalną.

Jeżeli przez k punktów danych przechodzi τ krzywych rzędu $(n-3)$ -go liniowo niezależnych, to funkcja algebraiczna, mająca bieguny swe wszystkie lub niektóre w tych k punktach, zawierać będzie liniowo $k-p+\tau+1$ stałych dowolnych jednorodnych. (Twierdzenie Riemanna-Rocha, Crelle LXIV.)

Jeżeli $\tau=0$, mamy wyżej przytoczone twierdzenie Riemanna.

Funkcja algebraiczna, której bieguny tworzą grupę specjalną, nazywa się funkcją specjalną.

§ 3.

Funkcje na powierzchni Riemannowskiej.

Dla każdego punktu powierzchni Riemanna mamy jedną wartość z i jedną wartość w ; ta ostatnia pozostaje bez zmiany bez względu na drogę, jaką na powierzchni dochodzimy do punktu.

Niechaj będzie funkcja monogeniczna zmiennych z i w taka, że dla każdej pary wartości z , w , czyniących zadość związkowi $f(w, z) = 0$, t. j. dla każdego punktu powierzchni Riemanna ma ona jedną wartość. Taka funkcja nazywa się funkcją jednopostaciową na powierzchni Riemanna.

Każda funkcja jednopostaciowa na powierzchni Riemanna, nie mająca innych osobliwości prócz biegunów (t. j. punktów, w których staje się nieskończoną tak, że jej odwrotność jest w tych punktach zerem i funkcją ciągłą) jest funkcją wymierną ilości w i z (funkcją algebraiczną ilości z).

Każda funkcja jednopostaciowa na powierzchni Riemanna musi koniecznie posiadać bieguny, t. j. nie może być skończoną na całej powierzchni, chyba że jest stałą.

Każda funkcja algebraiczna (funkcja jednopostaciowa na powierzchni Riemanna) przyjmuje każdą wartość k razy; w szczególności zaś ma tyle zer, ile ma biegunów. Liczba k nazywa się stopniem funkcji.

Grupa k punktów, z w których funkcja algebraiczna przyjmuje tę samą wartość, nazywa się równoresztową (koresydualną), z grupą innych k punktów, w których ta sama funkcja przyjmuje inną wartość.

Nie istnieje funkcja algebraiczna, mająca mniej niż $p+1$ biegunów dowolnie danych, gdzie p jest rodzajem zasadniczej powierzchni Riemanna.

Funkcja algebraiczna ogólna, mająca $p+1$ biegunów dowolnie danych, zawiera liniowo dwie stałe jednorodne, t. j. jest postaci $c_1 F + c_2$, gdzie F jest funkcją określoną tejże natury.

Funkcja algebraiczna ogólna, mająca k biegunów dowolnie wybranych, zawiera liniowo $k-p+1$ stałych dowolnych, t. j. istnieje $k-p$ prawdziwych funkcji (wyłączamy ilość stałą) liniowo niezależnych, mających bieguny swoje wszystkie lub niektóre w tych k punktach. (Twierdzenie Riemanna, Crelle LIV, Abelsche Functionen n. 5.)

Uogólnienie tego twierdzenia odnosi się do przypadku, w którym punkty dane mają położenie specjalne.

Jeżeli równanie $f(w, z) = 0$ rozważamy jako równanie krzywej płaskiej rzędu n -tego, to krzywą dołączoną rzędu $(n-3)$ -go nazywamy taką krzywą tego rzędu, która przechodzi $(r-1)$ -krotnie przez punkty r -krotne krzywej zasadniczej.

Krzywa dołączona rzędu $(n-3)$ -go ma $2p-2$ zmiennych punktów przecięcia (prócz punktów wielokrotnych) z krzywą zasadniczą i istnieje p krzywych dołączonych rzędu $(n-3)$ -go, liniowo od siebie niezależnych.

Jeżeli k punktów należy do przecięć (zmiennych) krzywej dołączonej rzędu $(n-3)$ -go z krzywą f , mówimy wtedy, że te k punktów tworzy grupę specjalną.

Jeżeli przez k punktów danych przechodzi τ krzywych rzędu $(n-3)$ -go liniowo niezależnych, to funkcja algebraiczna, mająca bieguny swe wszystkie lub niektóre w tych k punktach, zawierać będzie liniowo $k-p+\tau+1$ stałych dowolnych jednorodnych. (Twierdzenie Riemanna-Rocha, Crelle LXIV.)

Jeżeli $\tau=0$, mamy wyżej przytoczone twierdzenie Riemanna.

Funkcja algebraiczna, której bieguny tworzą grupę specjalną, nazywa się funkcją specjalną.

Liczba biegunów funkcji specjalnej jest co najwyżej równa $2p-2$ i może osiągnąć tej granicy.

Każdą funkcję specjalną można przedstawić w postaci $\frac{\Phi}{\Psi}$, gdzie Φ i Ψ są pierwszemi stronami równań dwu krzywych dołączonych rzędu $n-3$.

Teoria funkcji algebraicznych jest ściśle związana z teorią grup punktów na krzywej. O tej teorii istnieje pierwsza praca klasyczna Brilla-Noethera (Math. Ann. VII); po szczegóły odsyłamy czytelnika do drugiego tomu tej książki.

O twierdzeniu Riemanna-Rocha, oprócz prac wskazanych, patrz jeszcze Lindemann: „Untersuchungen über den Riemann-Roch'schen Satz“ (Lipsk 1879), Noether (Spraw. Erlangen 1879).

Przed zakończeniem tego paragrafu winniśmy jeszcze dodać, że można utworzyć teorię funkcji monogenicznych na powierzchni, uogólniając pojęcie funkcji zmiennej urojonej na płaszczyźnie.

Na powierzchni danej rozważajmy układ spółrzędnych krzywokreślnych p, q i niechaj E, F, G będą spółczynnikami formy różniczkowej, wyrażającej kwadraty elementu liniowego powierzchni (patrz tom II rozdział o „Geometrii różniczkowej“).

Jeżeli p', q' są funkcjami rzeczywistemi ilości p i q , czyniącemi zadość dwom związkom:

$$\frac{\partial q'}{\partial p} = - \frac{E \frac{\partial p'}{\partial q} - F \frac{\partial p'}{\partial p}}{\sqrt{EG - F^2}},$$

$$\frac{\partial q'}{\partial q} = + \frac{G \frac{\partial p'}{\partial p} - F \frac{\partial p'}{\partial q}}{\sqrt{EG - F^2}},$$

wtedy zmienna zespolona $p' + iq'$ będzie funkcją punktu powierzchni o spółrzędnych p i q , taką, że jej wartość jest niez-

leżna od kierunku, w jakim porusza się na powierzchni punkt p, q ; nie będzie zaś funkcją zmiennej zespolonej $p + i q$, chyba że p, q stanowią układ współrzędnych izometrycznych. W ogóle wszakże będzie funkcją innej kombinacji zespolonej zmiennych p i q ; kombinacja ta jest mianowicie całką różniczki dokładnej, którą otrzymujemy, mnożąc

$$V\overline{E} dp + (F + i V\overline{EG} + F^2) \frac{\partial q}{V\overline{E}}$$

przez czynnik całkujący postaci ogólnej zespolonej $\mu + i\nu$.

Powyższe związki są związkami koniecznymi i dostatecznymi na to, aby zmienna zespolona była funkcją innej; z nich otrzymujemy dwa związki następujące:

$$\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{G \frac{\partial q'}{\partial p} - F \frac{\partial q'}{\partial q}}{V\overline{EG} - F^2} \right) + \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{E \frac{\partial q'}{\partial q} - F \frac{\partial q'}{\partial p}}{V\overline{EG} - F^2} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{G \frac{\partial p'}{\partial p} - E \frac{\partial p'}{\partial q}}{V\overline{EG} - F^2} \right) + \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{E \frac{\partial p'}{\partial q} - F \frac{\partial p'}{\partial p}}{V\overline{EG} - F^2} \right) = 0,$$

zastępujące związki $\Delta^2 = 0$ teorii zwykłej (patrz Rozdz. XIII).

Jeżeli przedstawimy $p' + i q'$ przez punkty płaszczyzny, to zmienna ta będzie funkcją punktu powierzchni (w znaczeniu wyżej wskazanem), jeżeli powierzchnia i część płaszczyzny odpowiadają sobie w o d t w o r z e n i u p o d o b n e m. Ogólniej, jeżeli p', q' są współrzędnymi krzywokreślnymi punktu innej powierzchni, wtedy zagadnienie: „uczynić punkt jednej powierzchni funkcją monogeniczną punktu drugiej“, odpowiada: „odtworzeniu podobnemu“ jednej powierzchni na drugą (patrz rozdział odpowiedni w tomie 2-gim).

Poprzednie rezultaty znajdujemy po raz pierwszy w klasycznej rozprawie Beltrami'ego (Annali di mat. I, str. 329); inne wskazówki i szczegóły u Neumanna (Abel'sche Integrale, Lipsk, 1865, 1884) i Kleina (Algebraische Functionen, Lipsk 1892).

§ 4.

Całki abelowe.

Niechaj $R(w, z)$ będzie funkcją algebraiczną zmiennej z , która ze zmienną w połączona jest związkiem wymiernym $f(w, z) = 0$; całka

$$\int R(w, z) dz$$

nazywa się całką abelową.

Funkcja z , którą ta całka przedstawia, jest w ogóle funkcją o nieskończenie wielu wartościach: to znaczy, że, idąc na powierzchni Riemanna po różnych drogach całkowania, można dojść do tego samego punktu z różnymi wartościami całki.

Jeżeli za pomocą cięć A, B, C uczynimy powierzchnię jednospójną (patrz § 2), to różnica wartości całki w dwu odpowiednich punktach brzegów, utworzonych za pomocą cięcia, A jest ilością stałą, która nazywa się modułem peryodyczności pierwszego gatunku; dla cięć B mamy moduły peryodyczności drugiego gatunku, dla cięć C ta różnica jest zerem.

Całka abelowa ma najmniej $2p$ modułów peryodyczności; różnica dwu wartości, jakie ona może mieć w punkcie, jest sumą wielokrotności jej modułów peryodyczności.

Całki abelowe rozróżniają się według natury funkcji $R(w, z)$, lub lepiej według natury biegunów tej funkcji.

Jeżeli funkcja R nie ma innych biegunów, prócz punktów rozgałęzienia, wtedy całka może być stale skończoną, i mamy całkę gatunku pierwszego. Jeżeli funkcja R ma biegun rzędu wyższego nad 1 w punkcie (w_0, z_0) , wtedy całka

staje się w tym punkcie nieskończoną, podobnie jak funkcya algebraiczna (punkt nieskończoności algebraicznej) i otrzymujemy całkę gatunku 2-go. Jeżeli wreszcie K ma biegun rzędu 1-go w punkcie (w_0, z_0) , wtedy całka staje się w tym punkcie nieskończoną, jak logarytm funkcyi algebraicznej (punkt nieskończoności logarytmowej) i będziemy mieli całkę gatunku 3-go.

Całki dwu pierwszych gatunków mają jako moduły peryodyczności tylko wyżej rzeczony moduły w liczbie $2p$; całki gatunku 3-go mają, prócz tych, jeszcze inne moduły, zależne od nieskończoności logarytmowych. Jeżeli okrążamy takie nieskończoności, to wartość całki powiększa się o iloczyn liczby $2\pi i$ przez wielokrot ność pozostałości, która tej nieskończoności odpowiada (patrz Rodział XIII, § 6).

Suma pozostałości całek 3-go gatunku jest zawsze zerem.

Każda całka abelowa daje się zawsze przedstawić za pomocą kombinacyi liniowej całek 1-go, 2-go i 3-go gatunku.

Jeżeli zmienna całki abelowej przebiega sposobem ciągłym ogół trzech układów cięć A , B , C , t. j. kontur całej powierzchni Riemannowskiej jednospójnej, otrzymujemy na rezultat tożsamościowo zero.

W przypadku rodzaju $p=0$, t. j. w przypadku zwyczajnej płaszczyzny zespolonej nie ma całek 1-go gatunku; oznacza to, że całki funkcyj wymiernych zmiennej są zawsze całkami gatunku 2-go lub 3-go; a więc dla $p=0$ nie ma funkcyj, które pozostają skończonemi dla całej płaszczyzny zespolonej (nawet dla $z=\infty$).

Jeżeli powierzchnia zasadnicza Riemannowska jest hypereliptyczną lub w szczególności eliptyczną, wtedy odpowiednie całki abelowe nazywają się hypereliptycznemi lub eliptycznemi.

§ 5.

Całki abelowe gatunku 1-go.

Istnieje p całek abelowych 1-go gatunku liniowo-niezależnych, jeżeli powierzchnia zasadnicza Riemanna jest nierozkładalna i rodzaju p .

Jeżeli $f(w, z) = 0$ rozkłada się na k czynników, wtedy istnieje $p - k + 1$ całek abelowych 1-go gatunku liniowo-niezależnych (Christoffel, Ann. di mat. X).

Każda całka abelowa 1-go gatunku odpowiada jednej z p krzywych dołączonych rzędu $(n-3)$ -go.

Oznaczmy przez $w_1, w_2, \dots, w_p$ całki 1-go gatunku i niechaj $\omega_{ik}, \omega_{i,p+k}$ będą ich moduły peryodyczności. Niechaj mianowicie ω_{ik} będzie wartością całki ω_i , gdy zmienna całkowania przebiega w kierunku dodatnim (t. j. w kierunku przeciwnym ruchowi wskazówek zegarowych) linię B_k ; i podobnie $\omega_{i,p+k}$ niechaj będzie wartością tejże całki, gdy zmienna przebiega linię A_k . Ilości ω_{ik} można też określić jako różnice dwu wartości całek na dwu brzegach linii A_k ; i podobnie określić można $\omega_{i,p+k}$.

Pomiędzy modułami peryodyczności istnieją związki dwuliniowe, znalezione przez Riemanna (Werke, str. 124). Są one następujące:

$$\sum_{k=\bar{k}}^p (\omega_{ik} \omega_{j,p+k} - \omega_{i,p+k} \omega_{jk}) = 0,$$

a jest ich $\frac{p(p-1)}{2}$.

Jeżeli razem z temi związkami będziemy rozważali związki analogiczne pomiędzy modułami peryodyczności całek 2-go gatunku (patrz niżej), to przy pomocy pewnego rozwiązania można mieć związki, w których drugie składowiki ilości ω są stałe, pier-

wsze zaś zmienne w sumowaniu, gdy tymczasem poniżej jest przeciwnie. Związki te otrzymał Weierstrass (Progr. Gymn. Braunsberg, 1849, patrz § 6).

Jeżeli położymy

$$\omega_{ik} = \alpha_{ik} + i\beta_{ik},$$

to suma

$$\sum_{k=2}^p (\alpha_{ik} \beta_{i, k+p} - \alpha_{i, k+p} \beta_{ik})$$

będzie z pewnością różna od zera i dodatnia; przedstawia ona pole całego odtworzenia podobnego powierzchni Riemanna na płaszczyźnie całki w_i . Wyznacznik

$$\begin{vmatrix} \omega_{11}, & \omega_{12}, & . & . & . & . & . & \omega_{1p} \\ \omega_{21}, & \omega_{22}, & . & . & . & . & . & \omega_{2p} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ \omega_{p,1}, & \omega_{p,2}, & . & . & . & . & . & \omega_{p,p} \end{vmatrix}$$

musi być różny od zera.

Moduły 1-go gatunku nie mogą być wszystkie rzeczywistemi, jak również nie mogą być wszystkie czysto-urojonemi.

Nie istnieje całka 1-go gatunku, dla której są zerami wszystkie moduły peryodyczności względem cięć A , ani wszystkie moduły peryodyczności względem cięć B .

Można uważać p całek v pierwszego gatunku kombinacye liniowe poprzednich całek i takie, że tablica modułów peryodyczności odnośnie do cięć A jest następująca:

	$A_1,$	$A_2,$	$\dots\dots\dots,$	A_p
$v_1,$	1,	0,	$\dots\dots\dots,$	0
$v_2,$	0,	1,	$\dots\dots\dots,$	0
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots\dots\dots$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots\dots\dots$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots\dots\dots$	$\dots$
$v_p,$	0,	0,	$\dots\dots\dots$	1

Te całki nazywają się normalnemi. Riemann zamiast tych całek normalnych rozważał inne, dla których tablica poprzednia ma za elementy przekątnej głównej liczby $i\pi$ zamiast 1. Clebsch i Gordan (Abel'sche Functionen str. 408) uważali za całki normalne takie, w których te elementy są $2i\pi$.

Jeżeli przez τ_{ij} oznaczymy moduły peryodyczności całek normalnych względem cięć B , będziemy mieli związki $\tau_{ij} = \tau_{ji}$, nadto części urojone modułów τ_{ii} powinny być wszystkie ze znakiem dodatnim.

Jeżeli położymy $\tau_{ij} = \gamma_{ij} + i\delta_{ij}$, to forma kwadratowa $\delta_{ii} n_i n_j$, gdzie liczby n są jakiegolwiek liczby rzeczywiste, powinna być zawsze różna od zera (forma kwadratowa określona).

§ 6.

Całki abelowe 2-go gatunku.

Istnieje p całek gatunku 2-go, liniowo od siebie niezależnych i stających się nieskończonościami 1-go rzędu w tym samym punkcie oznaczonym $z=t$.

Różniczkując jedną z takich całek $r-1$ razy względem t , otrzymujemy całkę gatunku 2-go, która staje się ∞^r w punkcie t .

Całka gatunku 2-go, stająca się ∞^1 w dwu punktach, daje się wyrazić jako sumą dwu całek, z których każda staje się ∞^1 w jednym tylko punkcie.

Możemy wyznaczyć całki 2-go gatunku $Y^{(n)}$ takie, że moduły ich peryodyczności względem cięć A są wszystkie zerami; wtedy moduły peryodyczności względem cięć B będą funkcjami algebraicznymi ilości t , równymi mianowicie $-2i\pi\psi_i(t)$, gdzie $\psi_i(z)$ jest pierwszą stroną równania krzywej dołączonej rzędu $n-3$, odpowiadającej całce normalnej 1-go gatunku v_i .

Jeżeli p punktów $t', t'', \dots, t^{(p)}$ nie leży na krzywej dołączonej rzędu $n-3$ względem krzywej zasadniczej $f(w, z) = 0$, wtedy każda całka $Y^{(n)}$ gatunku 2-go z nieskończonością jakąkolwiek w t rzędu pierwszego i mająca moduły równe zeru na cięciach A , daje się wyrazić za pomocą całek analogicznych, mających nieskończoności w punktach $t', t'', \dots$.

Wzór odnośny otrzymujemy, rozwijając wyznacznik

$$\begin{vmatrix} Y^{(n)}, & Y^{(n)}, & \dots, & Y^{(n)} \\ \psi_1(t), & \psi_1(t'), & \dots, & \psi_1(t^{(p)}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_p(t), & \psi_p(t'), & \dots, & \psi_p(t^{(p)}) \end{vmatrix} = \text{Funkc. alg. ilości } t,$$

gdzie ilości ψ mają znaczenie wyżej określone.

Jeżeli $Y_1, Y_2, \dots, Y_p$ oznaczają minory, zawarte w macierzy ostatnich p kolumn poprzedzającego wyznacznika, podzielone przez wyznacznik

$$C = - \begin{vmatrix} \psi_1(t'), & . & . & . & . & . & \psi_1(t^{(p)}) \\ . & . & . & . & . & . & . \\ \psi_p(t'), & . & . & . & . & . & \psi_p(t^{(p)}) \end{vmatrix}$$

wtedy zachodzi związek

$$Y^{(t)} = \sum \psi_i(t) Y_i + \text{funkcja algebr. ilości } t.$$

Całki $Y_1, Y_2, \dots, Y_p$ można nazwać normalnemi; zachowują się one w sposób specjalny odnośnie do peryodyczności.

Ich moduły na cięciach A są wszystkie zerami; moduły na cięciach B są zerami, prócz jednego równego $2i\pi$; dla Y_i jest moduł względem cięć B_i równy $2i\pi$; moduły tych całek są niezależne od punktów nieskończoności.

Jeżeli zmienimy punkty nieskończoności, to nowe całki różnić się będą od dawnych o funkcje algebraiczne.

Różniczkując wzór poprzedni $r-1$ razy, otrzymujemy całkę drugiego gatunku, stawającą się ∞^r w punkcie t , wyrażoną liniowo przez p całek normalnych.

Jeżeli $Z^{(t)}$ jest jakąkolwiek całką 2-go gatunku z punktem nieskończonościowym w trzędu 1-go, to utworzywszy $Z^{(t')}, \dots, Z^{(t^{(p)})}$, podobnie jak w twierdzeniach poprzedzających, dojdziemy do takichże rezultatów, pamiętając tylko o tem, że należy ilości Y zastąpić ilościami Z , ilości zaś ψ ilościami φ . Przez φ rozumiemy tu strony pierwsze równań krzywych dołączonych rzędu $(n-3)$ -go, odpowiadających całkom 1-go gatunku w , nie zaś całkom normalnym v (patrz § poprzedzający).

Całki $Z_1, Z_2, \dots, Z_p$, w ten sposób utworzone, nazywają się też całkami normalnemi; mają one moduły, niezależne od punktów nieskończoności.

Jeżeli przez $-\eta_{ik}$, $-\eta_{i, k+p}$ oznaczmy moduły peryodyczności całek Z_i na cięciach A_k , B_k , będziemy mieli związki dwuliniowe:

$$\sum_{k=1}^p (\omega_{ik} \eta_{j, k+p} - \omega_{i, k+p} \eta_{jk}) = 0, \quad \text{dla } i \neq j, \\ = 2i\pi, \quad i = j,$$

gdzie ilości ω są modułami całek gatunku 1-go.

Nadto pomiędzy modułami całek gatunku 2-go zachodzą związki:

$$\sum_{k=1}^p (\eta_{ik} \omega_{j, k+p} - \eta_{i, k+p} \eta_{jk}) = 0,$$

których jest $\frac{p(p-1)}{2}$.

Jeżeli napiszemy $\omega_{p+i, k}$ zamiast $\eta_{i, k}$, to wszystkie związki poprzednie wraz ze związkami § poprzedzającego zawrzeć będziemy w związku jednym:

$$\sum_{k=1}^p (\omega_{ik} \omega_{j, k+p} - \omega_{j, k} \omega_{i, k+p}) = 0, \quad j \neq i+p \\ = 2i\pi, \quad j = i+p$$

gdzie i, j przyjmują wszelkie wartości $1, 2, \dots, 2p$. (Związki Riemanna).

Odwracając te związki, otrzymamy związki Weierstrassa:

$$\sum_{k=1}^p (\omega_{k, i} \omega_{i+p, j} - \omega_{k, j} \omega_{k+p, i}) = 0, \quad j \neq i+p \\ = 2i\pi, \quad j = i+p;$$

związków tych jest $\frac{2p(2p-1)}{2}$.

Wyznacznik rzędu $2p$, utworzony ze wszystkich ilości ω , odnoszących się do całek 1-go i 2-go gatunku:

$$\begin{vmatrix} \omega_{1,1}, & . & . & . & . & . & , & \omega_{1,2p} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ \omega_{2p,1}, & . & . & . & . & . & , & \omega_{2p,2p} \end{vmatrix}$$

jest różny od zera.

Funkcyja algebraiczna ogólna, stająca się nieskończoną w r punktach $t', t'', \dots, t^{(r)}$, może być wyrażona zawsze za pomocą wzoru

$$F = c' Z^{(t')} + \dots + c^{(r)} Z^{(t^{(r)})} + C;$$

gdzie liczba stałych dowolnych określa się na podstawie twierdzenia Riemanna-Rocha.

§ 7.

Całki abelowe gatunku 3-go.

Z twierdzenia, podanego w § 4, według którego w całce 3-go gatunku suma pozostałości logarytmowych jest zerem, wynika, że całka taka ma co najmniej dwie nieskończoności logarytmowe.

Granica całki trzeciego gatunku o dwu nieskończonościach, gdy te zbliżają się do siebie nieograniczenie, jest całka gatunku 2-go, mająca w tym punkcie nieskończoność algebraiczną.

Całkę gatunku 3-go o r nieskończonościach algebraicznych można wyrazić liniowo przez r całek gatunku 3-go, z których każda ma tylko dwie nieskończoności.

Aby całkę gatunku 3-go o dwu nieskończonościach uczynić jednowartościową na po-

wierzchni Riemanna, zamienionej na jedno-spójną, dość połączyć obie nieskończoności cięciem; na powierzchni tak przeciętej całka jest jednowartościową.

Pochodna całki gatunku 3-go względem jednego z punktów nieskończoności logarytmowej jest całką gatunku 2-go, mającą tylko jeden punkt nieskończoności algebraicznej rzędu pierwszego.

Jeżeli przez $P^{(t)}$ oznaczymy całkę gatunku 3-go z dwoma punktami nieskończoności logarytmowych t, t_1 , przez $Z^{(t)}$ całkę gatunku 2-go z nieskończonością algebraiczną t , będziemy mieli wzór

$$P^{t_1} = \int_t^{t_1} Z^{(t)} dt.$$

Wyrażenie $Z^{(t)}$ jest znów całką pomiędzy dwoma punktami z, z_1 powierzchni Riemanna, które oznaczamy przez skazniki dolne, będzie wtedy:

$$P_{z_1}^{t_1} = \int_t^{t_1} Z_{z_1}^{(t)} dt.$$

Wprowadziwszy całki normalne gatunku 2-go, będziemy mieli

$$P_{z_1}^{t_1} = w_1 Z_1^{z_1} + \dots + w_p Z_p^{z_1} + \int_t^{t_1} F dt,$$

gdzie F jest funkcją algebraiczną ilości z, z_1, t i wszystkich punktów $t, t', \dots, t^{(p)}$, za pomocą których tworzymy całki normalne $Z_1, Z_2, \dots, Z_p$; ostatni wyraz jest funkcją algebraiczną jednowartościową względem z , gdyż całkowanie odbywa się tylko względem zmiennej t .

Moduły peryodyczności całki $P_{z_1}^{t_1}$ są:

$$- \sum_{i=1}^p w_i^{t_1} \eta_{ik}, \quad \text{dla cięcia } A_k,$$

$$- \sum_{i=1}^p w_i^{t_1} \eta_{i,k+p}, \quad \text{,, ,, } B_k.$$

Jeżeli wyjdziemy z całek Y_i zamiast z całek Z_i , otrzymamy całkę trzeciego gatunku, którą, według Clebscha i Gordana, oznaczamy przez Π .

Moduły peryodyczności całek $\Pi_{z_1}^{t_1}$ mają wartość zero na cięciach A_i i równają się $2i\pi v_i^{t_1}$ na cięciach B_i .

Całka Π czyni zadość równości:

$$\Pi_{z_1}^{t_1} = \Pi_{z_1}^{z_1};$$

nazywa się to przemiennością parametrów t, t_1 , z argumentami z, z_1 .

Mamy także wzór:

$$\Pi_{z_1}^{t_1} + \Pi_{z_1}^{t_1 t_2} + \Pi_{z_1}^{t_2 t} = 0,$$

jeżeli droga całkowania od z do z_1 nie przecina drogi t, t_1, t_2, t .

Dla każdej całki trzeciego gatunku $P_{z_1}^{t_1 t_2}$ suma

$$P_{z_1}^{t_1 t_1} + P_{z_1}^{t_1 t_2} + P_{z_1}^{t_2 t}$$

jest całką gatunku pierwszego.

Całki gatunków 2-go i 3-go, rozważane w poprzednim i niniejszym paragrafie, zamieniliśmy na normalne, by uczynić możliwie najprostszymi ich moduły peryodyczności. Nowsze badania Kleina i jego uczniów mają cel odmienny; idzie w nich o zbudowanie całek 2-go i 3-go gatunku w ten sposób, aby ilości podcałkowe były wyrażeniami niezmienniczemi wzglę-

dem formy podstawowej $f(w, z) = 0$, przedstawiającej powierzchnię Riemanna.

Należy wtedy zamiast w, z wprowadzić trzy zmienne jednorodne, utworzyć całkę trzeciego gatunku Q , która również jak i całka Π Clebscha-Gordana posiada własność niezmienności przy przemianie parametrów i argumentów.

Nie możemy tu wchodzić w szczegóły i dlatego ograniczamy się na podaniu wskazówek bibliograficznych, odnoszących się do całek abelowych.

Abel pierwszy znalazł sławne i ważne twierdzenie, o którym mówimy w paragrafie następnym. Teoria całek abelowych jest pokrewna z teorią funkcji abelowych, o których mówimy w rozdziale XVII, tak że bibliografie obu tych działów wiążą się ze sobą. Dziełami podstawowymi są tu: rozprawa Riemanna (Crelle, LXIV), lekcje Weierstrassa o funkcjach abelowych, dzieło Neumanna (Lipsk 1865, 1884), oraz dzieło Clebscha-Gordana (Lipsk 1866), które szczęśliwie zapoczątkowało związek pomiędzy pojęciami geometrycznymi i analitycznymi w tej dziedzinie. Najnowsze prace Kleina mieszczą się w Math. Ann. XXVII, XXXII, XXXVI.

§ 8.

Twierdzenie Abela.

Niechaj będzie funkcja algebraiczna t na powierzchni Riemanna i niechaj $x_1, x_2, \dots, x_m$; $y_1, y_2, \dots, y_m$ będą odpowiednio jej punkty zerowe i punkty nieskończonościowe (dwie grupy punktów spółresztowych); jeżeli I jest jakąkolwiek całką abelową, to suma

$$\sum_{i=1}^m \int_{y_i}^{x_i} dI$$

jest funkcją algebraiczno-logarytmową ilości t z dodaniem wielokrotności modułów peryodyczności całki I (Twierdzenie Abela).

Jeżeli I jest całką 1-go gatunku, to powyższa suma jest zerem (nie licząc wielokrotności modułów peryodyczności).

Jeżeli I jest całką gatunku 3-go, mającą dwa punkty ξ, η nieskończoności logarytmowej, to suma powyższa ma wartość, niezależną od specjalnego wyboru całki; wartość ta równa się $\log \frac{t(\xi)}{t(\eta)}$ (pomijając wielokrotności modułów peryodyczności).

Jeżeli I jest całką gatunku 2-go z punktem nieskończoności algebraicznej ξ , to wartość sumy (jeżeli pominiemy wielokrotności modułów) jest $\frac{t'(\xi)}{t(\xi)}$.

Jeżeli napiszemy t w postaci

$$t = \frac{\varphi(w, z)}{\psi(w, z)},$$

i jeżeli istnieje taka wartość λ , dla której krzywa $\varphi(w, z) - \lambda \psi(w, z) = 0$ przechodzi przez oba punkty ξ, η , wtedy strona druga wzoru w twierdzeniu Abela dla całek gatunku 3-go jest zerem (jeżeli pominiemy wielokrotności peryodów).

Za pomocą twierdzenia Abela suma k całek

$$\sum_{i=1}^k \int_{\gamma^i}^{x_i} dI,$$

gdzie $k > p + 1$, x zaś i y są jakimikolwiek wartościami, daje się zawsze wyrazić jako suma analogicznych p całek (p jest „rodzajem“ powierzchni

Riemanna), pomijając (jeżeli idzie o całki 2-go i 3-go gatunku) pewną funkcję algebraiczno-logarytmową.

W przypadku eliptycznym $p=1$ mamy: suma dwu lub więcej całek eliptycznych daje się zawsze wyrazić za pomocą jednej całki, przyczem jedna z granic może być wybrana dowolnie. (Twierdzenie o dodawaniu Eulera.)

Twierdzenie Abela dla całek pierwszego gatunku wyraża warunek konieczny i dostateczny na to, aby dwie grupy punktów były spółresztowe. (Riemann, Weierstrass).

Jeżeli we wzorze, wyrażającym twierdzenie Abela, zmienimy odpowiedniość pomiędzy granicami wyższemi i niższemi, to cała suma powiększy się albo zmniejszy o wielokrotności całkowite modułów peryodyczności.

Za pomocą twierdzenia Abela można udowodnić twierdzenie Riemanna-Rocha i inne twierdzenia zasadnicze teorii funkcji algebraicznych, np. tak nazwane „twierdzenie o reszcie“ którego twierdzenie Abela jest tylko formą przestępną. „Twierdzenie o reszcie“ brzmi jak następuje:

Jeżeli $x_1, x_2, \dots, x_m$; $y_1, y_2, \dots, y_m$ są dwie grupy punktów spółresztowych, to gdy przez punkty x przechodzi jakakolwiek krzywa, przecinająca krzywą zasadniczą w innych k punktach $z_1, z_2, \dots, z_k$, wtedy punkty z i y stanowią przecięcie zupełne innej krzywej z krzywą zasadniczą.

Jeżeli powierzchnia Riemanna ma r liści, to suma wartości, które przyjmuje ta sama całka abelowa 1-go i 2-go gatunku przy opisaniu dróg zamkniętych, sprzężonych we wszystkich r liściach, jest zerem.

Twierdzenie Abela jest najbardziej zasadniczem w całej teorii funkcji algebraicznych i ich całek.

Odkrył je A b e l najprzód dla przypadku hypereliptycznego (Crelle III), a następnie (1826) dla przypadku ogólnego (*Mémoire sur une propriété générale d'une classe très-étendue de fonctions transcend.*; *Mémoires des Sav. étrang.*, t. VII, 1841).

Dowód tego twierdzenia znaleźć można w dziele C l e b s c h a - G o r d a n a oraz w innych dziełach, cytowanych w § poprzedzającym.

ROZDZIAŁ XVI.

TEORIA FUNKCYJ ELIPTYCZNYCH

§ 1.

Funkcje θ Jacobi'ego.

Funkcje θ Jacobi'ego są następujące:

$$\begin{aligned}\vartheta(x) &= 1 + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} q^{\nu^2} \cos 2\nu x \\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{\nu} q^{\nu^2} e^{2\nu i x}, \\ \vartheta_1(x) &= 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} q^{\frac{1}{4}(2\nu-1)^2} \sin (2\nu-1)x \\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{\nu} i q^{\frac{1}{4}(2\nu-1)^2} e^{(2\nu-1)ix}, \\ \vartheta_2(x) &= 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} q^{\frac{1}{4}(2\nu-1)^2} \cos (2\nu-1)x \\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{\frac{1}{4}(2\nu-1)^2} e^{(2\nu-1)ix},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vartheta_3(x) &= 1 + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} q^{\nu^2} \cos 2\nu x \\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{\nu^2} e^{2\nu i x}.\end{aligned}$$

Te szeregi są zbieżne dla każdej wartości x , jeżeli $\text{mod } q < 1$.

Funkcyja ϑ_1 jest nieparzysta, wszystkie pozostałe są parzystymi:

$$\begin{aligned}\vartheta(x \pm \tfrac{1}{2}\pi) &= \vartheta_3(x); \quad \vartheta_1(x \pm \tfrac{1}{2}\pi) = \pm \vartheta_2(x), \\ \vartheta_2(x \pm \tfrac{1}{2}\pi) &= \mp \vartheta_1(x), \quad \vartheta_3(x \pm \tfrac{1}{2}\pi) = \vartheta(x).\end{aligned}$$

$$\vartheta(x \pm \tfrac{1}{2}i \log q) = \mp q^{-\frac{1}{4}} e^{\pm xi} \vartheta_1(x),$$

$$\vartheta_1(x \pm \tfrac{1}{2}i \log q) = \mp i q^{-\frac{1}{4}} e^{\pm xi} \vartheta(x),$$

$$\vartheta_2(x \pm \tfrac{1}{2}i \log q) = + q^{-\frac{1}{4}} e^{\pm xi} \vartheta_3(x),$$

$$\vartheta_3(x \pm \tfrac{1}{2}i \log q) = + q^{-\frac{1}{4}} e^{\pm xi} \vartheta_2(x),$$

$$\vartheta(x + \tfrac{1}{2}\pi \pm \tfrac{1}{2}i \log q) = q^{-\frac{1}{4}} e^{\pm xi} \vartheta_2(x),$$

$$\vartheta_1(x + \tfrac{1}{2}\pi \pm \tfrac{1}{2}i \log q) = q^{-\frac{1}{4}} e^{\pm xi} \vartheta_3(x),$$

$$\vartheta_2(x + \tfrac{1}{2}\pi \pm \tfrac{1}{2}i \log q) = \pm i q^{-\frac{1}{4}} e^{\pm xi} \vartheta(x),$$

$$\vartheta_3(x + \tfrac{1}{2}\pi \pm \tfrac{1}{2}i \log q) = \mp q^{-\frac{1}{4}} e^{\pm xi} \vartheta_1(x).$$

$$\vartheta(x \pm \pi) = \vartheta(x); \quad \vartheta_1(x \pm \pi) = -\vartheta_1(x),$$

$$\vartheta_2(x \pm \pi) = -\vartheta_2(x); \quad \vartheta_3(x \pm \pi) = \vartheta_3(x).$$

$$\vartheta(x \pm i \log q) = -q^{-1} e^{\pm 2xi} \vartheta(x),$$

$$\vartheta_1(x \pm i \log q) = -q^{-1} e^{\pm 2xi} \vartheta_1(x),$$

$$\vartheta_2(x \pm i \log q) = + q^{-1} e^{\pm 2x} \vartheta_2(x),$$

$$\vartheta_3(x \pm i \log q) = + q^{-1} e^{\pm 2x} \vartheta_3(x).$$

Wszystkie funkcje ϑ i ich pochodne czynią zadość równaniu różniczkowemu:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial \vartheta}{\partial (\log q)} = 0.$$

Jeżeli ilości x' są połączone z ilościami x związkami:

$$x'_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4), \quad x'_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - x_3 - x_4),$$

$$x'_3 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + x_3 - x_4), \quad x'_4 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 - x_3 + x_4),$$

to wtedy mamy następujące trzy wzory Jacobi'ego:

$$\prod_{k=1}^4 \vartheta_2(x'_k) + \prod_{k=1}^4 \vartheta_3(x_k) = \prod_{k=1}^4 \vartheta_1(x'_k) + \prod_{k=1}^4 \vartheta_3(x'_k),$$

$$\prod_{k=1}^4 \vartheta(x_k) - \prod_{k=1}^4 \vartheta_1(x_k) = \prod_{k=1}^4 \vartheta(x'_k) - \prod_{k=1}^4 \vartheta_1(x'_k),$$

$$\prod_{k=1}^4 \vartheta_3(x_k) - \prod_{k=1}^4 \vartheta_2(x_k) = \prod_{k=1}^4 \vartheta_1(x'_k) + \prod_{k=1}^4 \vartheta(x'_k).$$

Jeżeli przez $(ijkl)$ oznaczymy iloczyn $\vartheta_i(x_1) \vartheta_j(x_2) \vartheta_k(x_3) \vartheta_l(x_4)$, a przez $(ijkl)'$ takiż iloczyn dla argumentów x' , to zachodzić będą związki następujące:

$$(0033) + (1122) = (0033)' + (1122)',$$

$$(0033) - (1122) = (2211)' + (3300)',$$

$$(0022) + (1133) = (0022)' + (1133)',$$

$$(0022) - (1133) = (2200)' + (3311)',$$

$$(3322) + (0011) = (3322)' + (0011)',$$

$$(3322) - (0011) = (2233)' + (1100)',$$

$$(3021) - (2130) = (3021)' - (2130)',$$

$$(2031) - (3120) = (2031)' - (3120)',$$

$$(1320) + (2013) = (1320)' + (2013)'.$$

$$\begin{aligned}\vartheta_2(0) \vartheta(x_1+x_2) \vartheta(x_1-x_2) &= \vartheta^2(x_1) \vartheta^2(x_2) - \vartheta_1^2(x_1) \vartheta_1^2(x_2) \\ &= \vartheta_3^2(x_1) \vartheta_3^2(x_2) - \vartheta_2^2(x_1) \vartheta_2^2(x_2),\end{aligned}$$

$$\vartheta^2(0) \vartheta_1(x_1+x_2) \vartheta_1(x_1-x_2) = \vartheta_1^2(x_1) \vartheta^2(x_2) - \vartheta^2(x_1) \vartheta_1^2(x_2),$$

$$\vartheta_2^2(0) \vartheta_1(x_1+x_2) \vartheta_1(x_1-x_2) = \vartheta_1^2(x_1) \vartheta_2^2(x_2) - \vartheta_2^2(x_1) \vartheta_1^2(x_2),$$

$$\vartheta_3^2(0) \vartheta_1(x_1+x_2) \vartheta_1(x_1-x_2) = \vartheta_1^2(x_1) \vartheta_2^2(x_2) - \vartheta_3^2(x_1) \vartheta_1^2(x_2),$$

$$\begin{aligned}\vartheta_2^2(0) \vartheta_2(x_1+x_2) \vartheta_2(x_1-x_2) &= \vartheta_3^2(x_1) \vartheta_3^2(x_2) - \vartheta^2(x_1) \vartheta^2(x_2), \\ &= \vartheta_2^2(x_1) \vartheta_2^2(x_2) - \vartheta_1^2(x_1) \vartheta_1^2(x_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vartheta_3^2(0) \vartheta_3(x_1+x_2) \vartheta_3(x_1-x_2) &= \vartheta^2(x_1) \vartheta^2(x_2) + \vartheta_2^2(x_1) \vartheta_2^2(x_2), \\ &= \vartheta_3^3(x_1) \vartheta_3^2(x_2) + \vartheta_1^2(x_1) \vartheta_1^2(x_2),\end{aligned}$$

$$\vartheta^3(0) \vartheta(2x) = \vartheta^4(x) - \vartheta_1^4(x) = \vartheta_3^4(x) - \vartheta_2^4(x),$$

$$\vartheta_2^3(0) \vartheta_2(2x) = \vartheta_3^4(x) - \vartheta^4(x) = \vartheta_2^4(x) - \vartheta_1^4(x),$$

$$\vartheta_3^3(0) \vartheta_3(2x) = \vartheta^4(x) + \vartheta_2^4(x) = \vartheta_3^4(x) + \vartheta_1^4(x),$$

$$\vartheta(0) \vartheta_2(0) \vartheta_3(0) \vartheta_1(2x) = 2\vartheta(x) \vartheta_1(x) \vartheta_2(x) \vartheta_3(x).$$

Pomiędzy funkcjami ϑ jednego argumentu istnieją dwa niezależne od siebie związki algebraiczne. Można je przedstawić przez dwa z pomiędzy czterech związków następujących:

$$\vartheta_3^2(0) \vartheta^2(x) = \vartheta^2(0) \vartheta_3^2(x) + \vartheta_3^2(0) \vartheta_1^2(x),$$

$$\vartheta_3^2(0) \vartheta_1^2(x) = \vartheta_2^2(0) \vartheta^2(x) - \vartheta^2(0) \vartheta_2^2(x),$$

$$\vartheta_3^2(0) \vartheta_2^2(x) = \vartheta_2^2(0) \vartheta_3^2(x) - \vartheta^2(0) \vartheta_1^2(x),$$

$$\vartheta_3^2(0) \vartheta_3^2(x) = \vartheta^2(0) \vartheta^2(x) + \vartheta_2^2(0) \vartheta_2^2(x).$$

Pomiędzy funkcyami & parzystemi i pochodną funkcyi ϑ_1 dla argumentu zero istnieją dwa następujące związki algebraiczne:

$$\vartheta_3^4(0) = \vartheta^4(0) + \vartheta_2^4(0); \quad \vartheta'_1(0) = \vartheta(0) \vartheta_2(0) \vartheta_3(0).$$

Zachodzą jeszcze następujące związki pomiędzy pochodnemi funkcyj & dla argumentu zero:

$$\begin{aligned} \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} - \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} &= \vartheta^4; & \frac{\vartheta^{IV}}{\vartheta} - 3 \frac{\vartheta''^2}{\vartheta^2} &= -2\vartheta_2^4 \vartheta_3^4; \\ \frac{\vartheta''}{\vartheta} - \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} &= \vartheta_2^4; & \frac{\vartheta_2^{IV}}{\vartheta_2} - 3 \frac{\vartheta_2''^2}{\vartheta_2^2} &= -2\vartheta_3^4 \vartheta^4; \\ \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} - \frac{\vartheta''}{\vartheta} &= -\vartheta_3^4; & \frac{\vartheta_3^{IV}}{\vartheta_3} - 3 \frac{\vartheta_3''^2}{\vartheta_3^2} &= +2\vartheta^4 \vartheta_2^4; \\ & -3 \frac{\vartheta_1^V}{\vartheta_1'} + 5 \frac{\vartheta_1'''^2}{\vartheta_1'^3} &= \vartheta^8 + \vartheta_2^8 + \vartheta_3^8. \end{aligned}$$

Funkcya ϑ_1 czyni zadość następującemu związkowi, który nazywa się równaniem trójwyrazowem:

$$\begin{aligned} &\vartheta_1(x_1 + x_2) \vartheta_1(x_1 - x_2) \vartheta_1(x_3 + x_4) \vartheta_1(x_3 - x_4) \\ &+ \vartheta_1(x_1 + x_3) \vartheta_1(x_1 - x_3) \vartheta_1(x_4 + x_2) \vartheta_1(x_4 - x_2) \\ &+ \vartheta_1(x_1 + x_4) \vartheta_1(x_1 - x_4) \vartheta_1(x_2 + x_3) \vartheta_1(x_2 - x_3) = 0. \end{aligned}$$

Pochodne stosunków funkcyj & wyrażają się przez stosunki samych funkcyj & za pomocą wzorów następujących:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)} &= \vartheta^2(0) \frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)} \frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)}, \\ \frac{d}{dx} \frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)} &= -\vartheta_3^2(0) \frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)} \frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)}, \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx} \frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)} = -\vartheta_2^2(0) \frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)} \frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)},$$

$$\frac{d}{dx} \frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta_2(x)} = \vartheta_2^2(0) \frac{\vartheta(x)}{\vartheta_2(x)} \frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta_2(x)},$$

$$\frac{d}{dx} \frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta_3(x)} = \vartheta_3^2(0) \frac{\vartheta(x)}{\vartheta_3(x)} \frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta_3(x)},$$

$$\frac{d}{dx} \frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta_3(x)} = -\vartheta_3^2(0) \frac{\vartheta(x)}{\vartheta_3(x)} \frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta_3(x)}.$$

Pochodne logarytmów rządów drugiego i wyższych funkcyj ϑ wyrażają się przez same funkcyjne ϑ za pomocą wzorów:

$$\frac{d^2}{dx^2} \log \vartheta(x) = \frac{\vartheta''(0)}{\vartheta(0)} - \frac{\vartheta_1'^2(0)}{\vartheta^2(0)} \cdot \frac{\vartheta_1^2(x)}{\vartheta^2(x)},$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \log \vartheta_1(x) = \frac{\vartheta''(0)}{\vartheta(0)} - \frac{\vartheta_1'^2(0)}{\vartheta^2(0)} \cdot \frac{\vartheta^2(x)}{\vartheta_1^2(x)},$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \log \vartheta_2(x) = \frac{\vartheta''(0)}{\vartheta(0)} - \frac{\vartheta_1'^2(0)}{\vartheta^2(0)} \cdot \frac{\vartheta_3^2(x)}{\vartheta_2^2(x)},$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \log \vartheta_3(x) = \frac{\vartheta''(0)}{\vartheta(0)} - \frac{\vartheta_1'^2(0)}{\vartheta^2(0)} \cdot \frac{\vartheta_2^2(x)}{\vartheta_3^2(x)}.$$

$$\frac{d^3}{dx^3} \log \vartheta(x) = -2\vartheta_1'^2(0) \frac{\vartheta_1(x) \vartheta_2(x) \vartheta_3(x)}{\vartheta^3(x)},$$

$$\frac{d^3}{dx^3} \log \vartheta_1(x) = +2\vartheta_1'^2(0) \frac{\vartheta(x) \vartheta_2(x) \vartheta_3(x)}{\vartheta_1^3(x)},$$

$$\frac{d^3}{dx^3} \log \vartheta_2(x) = -2\vartheta_1'^2(0) \frac{\vartheta_1(x) \vartheta(x) \vartheta_3(x)}{\vartheta_2^3(x)},$$

$$\frac{d^3}{dx^3} \log \vartheta_3(x) = +2\vartheta_1'^2(0) \frac{\vartheta(x) \vartheta_1(x) \vartheta_2(x)}{\vartheta_3^3(x)},$$

Funkcyjne ϑ są funkcjami całkowitemi, które nie stają się nieskończonemi dla żadnej skończonej war-

tości x ; ich punktami zerowymi, t. j. punktami płaszczyzny, w których funkcje ϑ znikają, są następujące:

dla funkcji $\vartheta_1(x)$ punkty $x = m\pi - ni \log q$

„ „ $\vartheta(x)$ „ „ $x = \frac{1}{2}i \log q + m\pi - ni \log q$,

„ „ $\vartheta_2(x)$ „ „ $x = -\frac{1}{2}\pi + m\pi - ni \log q$,

„ „ $\vartheta_3(x)$ „ „ $x = -\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}i \log q + m\pi - ni \log q$,

gdzie m i n mogą przyjmować wszystkie wartości całkowite dodatnie i ujemne.

Rozwinięcia funkcji ϑ na iloczyny nieskończone mają postać:

$$\vartheta(x) = \vartheta(0) \prod_{m,n} \left(1 - \frac{x}{m\pi - (n + \frac{1}{2})i \log q} \right),$$

$$\vartheta_1(x) = \vartheta_1'(0) x \prod_{m,n} \left(1 - \frac{x}{m\pi - ni \log q} \right),$$

$$\vartheta_2(x) = \vartheta_2(0) \prod_{m,n} \left(1 - \frac{x}{(m + \frac{1}{2})\pi - ni \log q} \right),$$

$$\vartheta_3(x) = \vartheta_3(0) \prod_{m,n} \left(1 - \frac{x}{(m + \frac{1}{2})\pi - (n + \frac{1}{2})i \log q} \right),$$

gdzie iloczyny $\prod$ rozciągają się na wszystkie wartości m, n całkowite, dodatnie i ujemne, nie wyłączając zera; tylko dla iloczynu nieskończonego, przedstawiającego funkcję ϑ_1 , należy wyłączyć kombinację $m = 0, n = 0$.

§ 2.

Funkcje eliptyczne Jacobi'ego.

Położmy:

$$\sqrt{k} = \frac{\wp_2(0)}{\wp_3(0)}, \quad \sqrt{k'} = \frac{\wp(0)}{\wp_3(0)}, \quad k^2 + k'^2 = 1,$$

$$\frac{\wp_1(x)}{\wp(x)} = \sqrt{k} \cdot \sin \varphi, \quad \frac{\wp_2(x)}{\wp(x)} = \sqrt{\frac{k}{k'}} \cdot \cos \varphi,$$

$$\frac{\wp_3(x)}{\wp(x)} = \frac{1}{\sqrt{k'}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} = \frac{1}{\sqrt{k'}} \Delta \varphi,$$

$$v = \wp_3^2(0) \cdot x.$$

Wzory te określają ilość φ jako pewną funkcję zmiennej v , nazwaną funkcją-amplitudą i oznaczaną symbolem am , tak że

$$\varphi = \text{am } v.$$

Funkcje $\sin \varphi$, $\cos \varphi$, $\Delta \varphi$ oznaczają się odpowiednio przez

$$\text{sn } v, \quad \text{cn } v, \quad \text{dn } v,$$

i nazywają się wstawą-amplitudą, dostawą-amplitudą, delta-amplitudą. Są to trzy funkcje eliptyczne Jacobi'ego; pomiędzy nimi zachodzą związki algebraiczne:

$$\text{sn}^2 v + \text{cn}^2 v = 1; \quad \text{dn}^2 v + k^2 \text{sn}^2 v = 1.$$

Funkcja odwrotna względem funkcji-amplitudy wyraża się przez całkę określoną:

$$v = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta \varphi}$$

i nazywa się całką eliptyczną gatunku 1-go.

Funkcye te posiadają twierdzenie o dodawaniu algebraicznem, t. j. wartość funkcyi dla argumentu $v_1 + v_2$ wyraża się algebraicznie przez jej wartości dla argumentów pojedynczych v_1, v_2 . Wzory odnośne są:

$$\operatorname{sn}(v_1 \pm v_2) = \frac{\operatorname{sn} v_1 \operatorname{cn} v_2 \operatorname{dn} v_2 \pm \operatorname{sn} v_2 \operatorname{cn} v_1 \operatorname{dn} v_1}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 v_1 \operatorname{sn}^2 v_2},$$

$$\operatorname{cn}(v \pm v_2) = \frac{\operatorname{cn} v_1 \operatorname{cn} v_2 \mp \operatorname{sn} v_1 \operatorname{sn} v_2 \operatorname{dn} v_1 \operatorname{dn} v_2}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 v_1 \operatorname{sn}^2 v_2},$$

$$\operatorname{dn}(v_1 \pm v_2) = \frac{\operatorname{dn} v_1 \operatorname{dn} v_2 \mp k^2 \operatorname{sn} v_1 \operatorname{sn} v_2 \operatorname{cn} v_1 \operatorname{cn} v_2}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 v_1 \operatorname{sn}^2 v_2},$$

Inną własność tych funkcij eliptycznych stanowi to, że pochodne ich wyrażają się algebraicznie przez same funkcye:

$$\frac{d}{dv} \operatorname{sn} v = \operatorname{cn} v \cdot \operatorname{dn} v,$$

$$\frac{d}{dv} \operatorname{cn} v = - \operatorname{sn} v \cdot \operatorname{dn} v,$$

$$\frac{d}{dv} \operatorname{dn} v = - k^2 \operatorname{sn} v \operatorname{dn} v.$$

Wprowadźmy ilości:

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi}},$$

(t. t. całki zupełne Legendrea, gdzie znak $\int$ ma oznaczać, iż całkowanie odbywa się na drodze prostoliniowej pomiędzy wskazanymi granicami. Mamy wtedy wzory:

$$\vartheta_3(0) = \sqrt{\frac{2K}{\pi}}; \quad \vartheta_2(0) = \sqrt{\frac{2Kk}{\pi}},$$

$$\vartheta(0) = \sqrt{\frac{2Kk'}{\pi}}; \quad x = \frac{\pi v}{2K}; \quad q = e^{-\pi \frac{K'}{K}}.$$

Ponieważ q ma mieć moduł mniejszy od 1, przeto część rzeczywista stosunku $\frac{K'}{K}$ powinna być dodatnia i różna od zera.

Trzy funkcyje eliptyczne $\operatorname{sn} v$, $\operatorname{cn} v$, $\operatorname{dn} v$ są funkcyami podwojnie peryodycznymi; wartości ich nie zmieniają się, jeżeli argument v powiększymy o wielokrotności całkowite następujących ilości:

$$\text{dla } \operatorname{sn} v \text{ o } 4K, 2iK',$$

$$,, \quad \operatorname{cn} v \quad ,, \quad 4K, 4iK',$$

$$,, \quad \operatorname{dn} v \quad ,, \quad 2K, 4iK',$$

Przy powiększeniu argumentu o pół lub o ćwierć peryodów otrzymujemy:

$$\operatorname{sn}(v+2K) = -\operatorname{sn} v; \quad \operatorname{cn}(v+2K) = -\operatorname{cn} v; \quad \operatorname{dn}(v+2K) = \operatorname{dn} v,$$

$$\operatorname{sn}(v+2iK) = \operatorname{sn} v; \quad \operatorname{cn}(v+2iK') = -\operatorname{cn} v; \quad \operatorname{dn}(v+2iK') = -\operatorname{dn} v.$$

$$\operatorname{sn}(v+K) = \frac{\operatorname{cn} v}{\operatorname{dn} v}; \quad \operatorname{cn}(v+K) = -k' \frac{\operatorname{sn} v}{\operatorname{dn} v}; \quad \operatorname{dn}(v+K') = \frac{k'}{\operatorname{dn} v},$$

$$\operatorname{sn}(v+iK') = \frac{1}{k \operatorname{sn} v}; \quad \operatorname{cn}(v+iK') = \frac{\operatorname{dn} v}{ik \operatorname{sn} v}; \quad \operatorname{dn}(v+iK') = \frac{\operatorname{cn} v}{i \operatorname{sn} v}.$$

Wszystkie trzy funkcyje stają się nieskończonościami w tych samych punktach

$$v = 2mK + (2n+1)iK'$$

i stają się zerami:

$$\text{funkcya } \operatorname{sn} v \text{ w punktach } v = 2mK + 2niK',$$

$$,, \quad \operatorname{cn} v \quad ,, \quad ,, \quad v = (2m+1)K + 2niK',$$

$$,, \quad \operatorname{dn} v \quad ,, \quad ,, \quad v = (2m+1)K + (2n+1)iK'$$

W punktach, w których argument ma wartość połowy lub ćwierci peryodu, funkcje mają wartości następujące:

v	$\operatorname{sn} v$	$\operatorname{cn} v$	$\operatorname{dn} v$
$\frac{1}{2} K$	$\frac{1}{\sqrt{1+k'}}$	$\frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{1+k'}}$	$\sqrt{k'}$
$\frac{3}{2} K$	$\frac{1}{\sqrt{1+k'}}$	$-\frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{1+k'}}$	$\sqrt{k'}$
$\frac{1}{2} K + i K'$	$\frac{1}{\sqrt{1-k'}}$	$-\frac{i \sqrt{k'}}{\sqrt{1-k'}}$	$-i \sqrt{k'}$
$\frac{3}{2} K + i K'$	$\frac{1}{\sqrt{1-k'}}$	$\frac{i \sqrt{k'}}{\sqrt{1-k'}}$	$i \sqrt{k'}$
$\frac{1}{2} i K'$	$\frac{i}{\sqrt{k}}$	$\frac{\sqrt{1+k}}{\sqrt{k}}$	$\sqrt{1+k}$
$K + \frac{1}{2} i K'$	$\frac{1}{\sqrt{k}}$	$-\frac{i \sqrt{1-k}}{\sqrt{k}}$	$\sqrt{1-k}$
$\frac{3}{2} i K'$	$-\frac{i}{\sqrt{k}}$	$-\frac{\sqrt{1+k}}{\sqrt{k}}$	$-\sqrt{1+k}$
$K + \frac{3}{2} i K'$	$\frac{1}{\sqrt{k}}$	$-\frac{\sqrt{1-k}}{\sqrt{k}}$	$-\sqrt{1-k}$
$\frac{1}{2} K + \frac{1}{2} i K'$	$\frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{k}} \{ \sqrt{1+k} + i \sqrt{1-k} \}$	$-\frac{1-i}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}}$	$\frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{2}} \{ \sqrt{1-k'} - i \sqrt{1-k'} \}$
$\frac{3}{2} K + \frac{1}{2} i K'$	$\frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{k}} \{ \sqrt{1+k} - i \sqrt{1-k} \}$	$-\frac{1-i}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}}$	$\frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{2}} \{ \sqrt{1+k'} + i \sqrt{1-k'} \}$
$\frac{1}{2} K + \frac{3}{2} i K'$	$\frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{k}} \{ \sqrt{1+k} - i \sqrt{1-k} \}$	$-\frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}}$	$-\frac{k'}{\sqrt{2}} \{ \sqrt{1+k'} + i \sqrt{1-k'} \}$
$\frac{3}{2} K + \frac{3}{2} i K'$	$\frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{k}} \{ \sqrt{1+k} + i \sqrt{1-k} \}$	$\frac{1-i}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}}$	$-\frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{2}} \{ \sqrt{1+k'} - i \sqrt{1-k'} \}$

Przypadki zniekształceń. Dla $k=0$ mamy:

$$\varphi = \operatorname{am} v = v, \quad K = \frac{\pi}{2}; \quad K' = \infty, \quad q = 0, \quad k' = 1,$$

$$\operatorname{sn} v = \sin v, \quad \operatorname{cn} v = \cos v, \quad \operatorname{dn} v = 1,$$

$$\wp(x) = 1, \quad \wp_1(x) = 0, \quad \wp_2(x) = 0, \quad \wp_3(x) = 1.$$

Dla $k'=0$ mamy:

$$v = \log \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}, \quad \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{e^v - 1}{e^v + 1},$$

$$K = \infty, \quad K' = \frac{\pi}{2}, \quad q = 1, \quad k = 1,$$

$$\operatorname{sn} v = \frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}}, \quad \operatorname{cn} v = \frac{2}{e^v + e^{-v}}, \quad \operatorname{dn} v = \frac{2}{e^v + e^{-v}}$$

szeregi zaś $\wp$ stają się rozbieżnymi.

§ 3.

Cztery funkcje σ Weierstrassa.

Kładąc

$$x = \frac{\pi u}{2\omega}, \quad \eta = -\frac{1}{12} \frac{\pi^2}{\omega} \frac{\wp_1'''(0)}{\wp_1'(0)},$$

mamy:

$$\sigma(u) = \frac{2\omega}{\pi} e^{\frac{1}{2} \frac{\eta}{\omega} u^2} \frac{\wp_1(x)}{\wp_1'(0)},$$

$$\sigma_1(u) = e^{\frac{1}{2} \frac{\eta}{\omega} u^2} \frac{\wp_2(x)}{\wp_2(0)},$$

$$\sigma_2(u) = e^{\frac{1}{2} \frac{\eta}{\omega} u^2} \frac{\wp_3(x)}{\wp_3(0)},$$

$$\sigma_3(u) = e^{\frac{1}{2} \frac{\eta}{\omega} u^2} \frac{\wp(x)}{\wp(0)},$$

Te cztery funkcyje $\sigma(u)$ są funkcyami całkowitemi zmiennej u , dającemi się rozwinąć na szeregi według potęg całkowitych rosnących tej zmiennej; pierwsza z nich jest funkcyą nieparzystą, trzy ostatnie — parzystemi. Wyraz przy potędze pierwszej u w rozwinięciu $\sigma(u)$ ma współczynnik 1, a wyrazu drugiego (zawierającego u^3) nie ma. Wyraz pierwszy rozwinięcia pozostałych funkcyi σ jest jednością, a w rozwinięciu iloczynu $\sigma_1(u) \sigma_2(u) \sigma_3(u)$ brak wyrazu, zawierającego u^2 .

Wzory peryodyczności. Połóżmy:

$$\log q = i\pi\tau = i\pi \frac{\omega'}{\omega}, \quad \omega'' = \omega + \omega'.$$

Stąd i na zasadzie znanych własności wynika, że współczynnik części urojonej stosunku $\frac{\omega'}{\omega}$ musi być dodatni i różny od zera. Połóżmy nadto:

$$\eta\omega' - \eta'\omega = \frac{i\pi}{2}, \quad \eta'' = \eta + \eta'.$$

Ilości ω , ω' nazywają się modułami gatunku pierwszego, η , η' modułami gatunku drugiego. Mamy wtedy wzory:

$$\sigma(u + 2\omega) = -\sigma(u) e^{2\eta(u+\omega)},$$

$$\sigma(u + 2\omega') = -\sigma(u) e^{2\eta'(u+\omega')},$$

$$\sigma(u + 2\omega'') = -\sigma(u) e^{2\eta''(u+\omega'')},$$

$$\sigma_1(u + 2\omega) = -\sigma_1(u) e^{2\eta(u+\omega)},$$

$$\sigma_1(u + 2\omega') = +\sigma_1(u) e^{2\eta'(u+\omega')},$$

$$\sigma_2(u + 2\omega) = +\sigma_2(u) e^{2\eta(u+\omega)};$$

$$\sigma_2(u + 2\omega') = +\sigma_2(u) e^{2\eta'(u+\omega')},$$

$$\sigma_3(u + 2\omega) = +\sigma_3(u) e^{2\eta(u+\omega)},$$

$$\sigma_3(u + 2\omega') = -\sigma_3(u) e^{2\eta'(u+\omega')},$$

$$\eta = \frac{\sigma'(\omega)}{\sigma(\omega)}, \quad \eta' = \frac{\sigma'(\omega')}{\sigma(\omega')}, \quad \eta'' = \frac{\sigma'(\omega'')}{\sigma(\omega'')},$$

$$\sigma(u + \omega) = \sigma(\omega) e^{\eta u} \sigma_1(u),$$

$$\sigma(u + \omega') = \sigma(\omega') e^{\eta' u} \sigma_3(u),$$

$$\sigma(u + \omega'') = \sigma(\omega'') e^{\eta'' u} \sigma_2(u).$$

Funkcyja σ czyni zadość następującym związkom:

$$\begin{aligned} & \sigma(u_1 + u_2) \sigma(u_1 - u_2) \sigma_3(u_3 + u_4) \sigma(u_3 - u_4) \\ & + \sigma(u_1 + u_3) \sigma(u_1 - u_3) \sigma(u_1 + u_2) \sigma(u_4 - u_2) \\ & + \sigma(u_1 + u_4) \sigma(u_1 - u_4) \sigma(u_2 + u_3) \sigma(u_2 - u_3) = 0. \end{aligned}$$

Jest to t. zw. równanie trójwyrazowe.

Wzór:

$$\frac{\sigma(u_1 + u_2) \sigma(u_1 - u_2)}{\sigma_2(u_1) \sigma_2(u_2)} = \frac{d_2}{du_1^2} \log \sigma(u_1) = \frac{d_2}{du_2^2} \log \sigma(u_2).$$

nazywa się wzorem na dodawanie.

Dalej jest:

$$\frac{\sigma_i(u_1 + u_2)}{\sigma(u_1 + u_2)} = \frac{\sigma_i(u_1) \sigma(u_1) \sigma_j(u_2) \sigma_k(u_2) - \sigma_i(u_2) \sigma(u_2) \sigma_j(u_1) \sigma_k(u_1)}{\sigma^2(u_1) \sigma^2(u_2) - \sigma^2(u_2) \sigma^2(u_1)},$$

gdzie i, j, k przedstawiają jakąkolwiek przemianę skazników 1, 2, 3.

Wprowadźmy oznaczenia następujące:

$$e_1 = \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2\omega} \right)^2 (\vartheta^4 + \vartheta_3^4); \quad e_2 = \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2\omega} \right)^2 (\vartheta_2^4 - \vartheta^4); \quad e_3 = -\frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2\omega} \right)^2 (\vartheta_3^4 + \vartheta_2^4);$$

będzie:

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}, \quad k'^2 = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3}.$$

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0,$$

$$v = \sqrt{e_1 - e_3} \cdot u; \quad K = \sqrt{e_1 - e_3} \cdot \omega; \quad iK' = \sqrt{e_1 - e_3} \cdot \omega'.$$

Położmy jeszcze:

$$\Delta = 16 (e_1 - e_2)^2 (e_2 - e_3)^2 (e_1 - e_3)^2, \quad (\text{wyróżnik})$$

$$\left. \begin{aligned} g_2 &= -4 (e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_3 e_1) \\ g_3 &= 4 e_1 e_2 e_3; \end{aligned} \right\}, \quad (\text{niezmienniki})$$

otrzymamy stąd:

$$\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2 = \sqrt{2} \left/ \left(\frac{\pi}{2\omega} \right) \right. \vartheta'_1(0),$$

$$g_2 = \frac{4}{3} \left(\frac{\pi}{2\omega} \right)^4 (\vartheta^8 - \vartheta^4 \vartheta_2^4) = \frac{2}{3} \left(\frac{\pi}{2\omega} \right)^4 (\vartheta^8 + \vartheta_2^8 + \vartheta_3^8),$$

$$g_3 = -\frac{4}{27} \left(\frac{\pi}{2\omega} \right)^6 (3\vartheta^4 \vartheta_2^8 - 3\vartheta^8 \vartheta_2^4 + 2\vartheta_2^{12} - 2\vartheta^{12}).$$

Wyrażenie $\frac{g_2^3}{\Delta}$ nazywa się niezmiennikiem bezwzględnym; w funkcji modułu Legendre'a wyraża się ono tak:

$$J = \frac{g_2^3}{\Delta} = \frac{4}{27} \frac{(1 - k^2 + k^4)^3}{k^4(1 - k^2)^2}.$$

Pomiędzy czterema funkcjami σ istnieją dwa związki algebraiczne; mamy mianowicie cztery wzory następujące, z których dwa są następstwem dwóch pozostałych:

$$\sigma_1^2(u) - \sigma_3^2(u) + (e_1 - e_3) \sigma^2(u) = 0,$$

$$\sigma_2^2(u) - \sigma_1^2(u) + (e_2 - e_1) \sigma^2(u) = 0,$$

$$\sigma_3^2(u) - \sigma_2^2(u) + (e_3 - e_2) \sigma^2(u) = 0,$$

$$(e_3 - e_2) \sigma_1^2(u) + (e_1 - e_3) \sigma_2^2(u) + (e_2 - e_1) \sigma_3^2(u) = 0.$$

Pomiędzy funkcjami sn , cn , dn i funkcjami σ zachodzą związki:

$$\text{sn } v = \sqrt{e_1 - e_3} \frac{\sigma(u)}{\sigma_3(u)}, \quad \frac{\sigma_1(u)}{\sigma(u)} = \sqrt{e_1 - e_3} \frac{\text{cn } v}{\text{sn } v},$$

$$\text{cn } v = \frac{\sigma_1(u)}{\sigma_3(u)}, \quad \frac{\sigma_2(u)}{\sigma(u)} = \sqrt{e_1 - e_3} \frac{\text{dn } v}{\text{sn } v},$$

$$\text{dn } v = \frac{\sigma_2(u)}{\sigma_3(u)}, \quad \frac{\sigma_3(u)}{\sigma(u)} = \sqrt{e_1 - e_3} \frac{1}{\text{sn } v}.$$

Punktami zerowymi funkcji σ są:

dla funkcji σ punkty $2m\omega + 2n\omega' = w$,

$$\text{„ „ } \sigma_1 \text{ „ } (2m+1)\omega + 2n\omega' = w_1,$$

$$\text{„ „ } \sigma_2 \text{ „ } (2m+1)\omega + (2n+1)\omega' = w_2,$$

$$\text{„ „ } \sigma_3 \text{ „ } 2m\omega + (2n+1)\omega' = w_3;$$

tu m i n są dwie jakiekolwiek liczby całkowite dodatnie lub ujemne.

Rozwinięcia na iloczyn nieskończone są:

$$\sigma(u) = u \prod_{m,n} \left(1 - \frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w} - \frac{1}{2} \frac{u^2}{w^2}},$$

$$\sigma_i(u) = e^{-\frac{1}{2} e_i u^2} \prod_{m,n} \left(1 - \frac{u}{w_i}\right) e^{\frac{u}{w_i} + \frac{1}{2} \frac{u^2}{w_i^2}}.$$

Kładąc:

$$D = -2\eta \frac{\partial}{\partial \omega} - 2\eta' \frac{\partial}{\partial \omega'} = 12g_3 \frac{\partial}{\partial g_2} + \frac{2}{3} g_2^2 \frac{\partial}{\partial g_3},$$

otrzymujemy :

$$De_i = 4e_i^2 - \frac{2}{3} g_2; \quad D\Delta = 0;$$

$$D\eta = \frac{1}{6} g_2 \omega, \quad D\eta' = \frac{1}{6} g_2 \omega', \quad D\eta'' = \frac{1}{6} g_2 \omega'',$$

$$D\omega = -2\eta, \quad D\omega' = -2\eta', \quad D\omega'' = -2\eta'',$$

oraz równania różniczkowe dla funkcji σ :

$$\sigma''(u) - D\sigma(u) + \frac{1}{12} g_2 u^2 \sigma(u) = 0,$$

$$\sigma_i''(u) - D\sigma_i(u) + \left(e_i + \frac{1}{12} g_2 u^2\right) \sigma_i(u) = 0.$$

Pochodne modułów jednych względem drugich:

$$\frac{\partial \omega}{\partial g_2} = \frac{1}{\Delta} \left(-\frac{1}{4} g_2^2 \omega + \frac{9}{2} g_3 \eta \right); \quad \frac{\partial \omega}{\partial g_3} = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{9}{2} g_3 \omega - 3 g_2 \eta \right)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial g_2} = \frac{1}{\Delta} \left(-\frac{3}{8} g_2 g_3 \omega + \frac{1}{4} g_2^2 \eta \right); \quad \frac{\partial \eta}{\partial g_3} = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{1}{4} g_2^2 \omega - \frac{9}{2} g_3 \eta \right);$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \omega} = \frac{2i}{\pi} \left(\frac{1}{12} g_2 \omega \omega' - \eta \eta' \right); \quad \frac{\partial \eta}{\partial \omega'} = -\frac{2i}{\pi} \left(\frac{1}{12} g_2 \omega^2 - \eta^2 \right);$$

$$\eta = \frac{i\pi}{24} \frac{\partial \log \Delta}{\partial \omega'}, \quad \eta' = -\frac{i\pi}{24} \frac{\partial \log \Delta}{\partial \omega}.$$

Rozwinięcia funkcji σ na szeregi.

Kładąc :

$$\sigma(u) = \sum b_{2n+1} \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \sigma_i(u) = \sum c_{2n}^{(i)} \frac{u^{2n}}{(2n)!}!$$

otrzymujemy następujące wzory zwrotne:

$$b_{2n+1} = Db_{2n-1} - \frac{(2n-1)(n-1)}{6} g_2 b_{2n-3},$$

$$c_{2n}^{(i)} = D_{i;n-2}^{(i)} - e_i c_{2n-2}^{(i)} - \frac{(n-1)(2n-3)}{6} g_2 c_{2n-4}^{(i)}.$$

Stąd wynikają następujące rozwinięcia:

$$\sigma(u) = u - \frac{1}{2} g_2 \frac{u^5}{5!} - 6g_3 \frac{u^7}{7!} - \frac{9}{4} g_2^2 \frac{u^9}{9!} - 18g_2 g_3 \frac{u^{11}}{11!} \\ + \left(\frac{3 \cdot 2 \cdot 3}{8} g_2^3 - 3^3 \cdot 2^3 g_3^2 \right) \frac{u^{13}}{13!} + \dots$$

$$\sigma_i(u) = 1 - e_i \frac{u^2}{2!} + \left(\frac{1}{2} g_2 - 3 e_i^2 \right) \frac{u^4}{4!} + \left(\frac{3}{4} g_3 - \frac{3}{4} g_2 e_i \right) \frac{u^6}{6!} \\ + \left(\frac{21}{4} g_2 e_i^2 - \frac{39}{4} g_3 e_i - \frac{1}{4} g_2^2 \right) \frac{u^8}{8!} \\ + \left(\frac{135}{4} g_3 e_i^2 - \frac{9}{16} g_2^2 e_i + \frac{99}{16} g_2 g_3 \right) \frac{u^{10}}{10!} + \dots,$$

Następne wyrazy znaleźć można w tablicy, znajdującej się na str. 7 dzieła: „Formeln und Lehrsätze etc.“ Schwarza, Göttinga 1885.

Przypadki zniekształcenia. Jeżeli wyróżnik Δ staje się zerem, a zatem dwie ilości e równymi sobie, np. $e_2 = e_3 = 0$, wtedy będzie:

$$e_1 = -2a, \quad \omega = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{-3a}}, \quad \eta \omega = \frac{\pi^2}{12} \quad \eta \omega = -a,$$

a funkcje σ przybierają postać:

$$\sigma(u) = \frac{1}{\sqrt{-3a}} e^{-\frac{1}{2} a u^2} \sin(u \sqrt{-3a})$$

$$\sigma_1(u) = e^{-\frac{1}{2} a u^2} \cos(u \sqrt{-3a}); \quad \sigma_2(u) = e^{-\frac{1}{2} a u^2}; \quad \sigma_3(u) = e^{-\frac{1}{2} a u^2}.$$

§ 4.

Funkcja p Weierstrassa.

Funkcja $p(u)$ określa się za pomocą jednego z następujących wzorów :

$$p(u) = - \frac{d^2}{du^2} \log \sigma(u),$$

$$p(u) = - \frac{\eta}{\omega} - \frac{\pi^2}{4\omega^2} \frac{d^2}{dx^2} \log \vartheta_1(x),$$

$$p(u) = e_3 + \frac{e_1 - e_2}{\operatorname{sn}^2(\sqrt{e_1 - e_2} \cdot u)}.$$

Nadto można $p(u)$ określić jako całkę równania różniczkowego

$$s'^2 = 4s^3 - g_2 s - g_3$$

z warunkiem $p(0) = \infty$. Definicja ta jest równoważna z następującą: funkcja p jest funkcją odwrotną całki

$$\int_{\infty}^{p(u)} \frac{ds}{2\sqrt{(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)}} = u.$$

Funkcja p jest podwójnie peryodyczną o peryodach 2ω i $2\omega'$.

Mamy wzory :

$$p(\omega) = e_1, \quad p(\omega') = e_2, \quad p(\omega'') = e_3,$$

$$p(u) - p(\omega) = \left[\frac{\sigma_1(u)}{\sigma(u)} \right]^2; \quad p(u) - p(\omega') = \left[\frac{\sigma_2(u)}{\sigma(u)} \right]^2,$$

$$p(u) - p(\omega'') = \left[\frac{\sigma_3(u)}{\sigma(u)} \right]^2;$$

$$\operatorname{sn} v = \sqrt{\frac{e_1 - e_3}{p(u) - e_3}}; \quad \operatorname{cn} v = \sqrt{\frac{p(u) - e_1}{p(u) - e_3}}; \quad \operatorname{dn} v = \sqrt{\frac{p(u) - e_2}{p(u) - e_3}}$$

$$p'^2(u) = 4p^3(u) - g_2p(u) - g_3.$$

$$p''(u) = 6p^2(u) - \frac{1}{2}g_2; \quad p'''(u) = 12p(u)p'(u);$$

$$p^{\text{IV}}(u) = 120p^3(u)p'(u) - 18g_2p(u) - 12g_3,$$

$$p^{\text{V}}(u) = 360p^2(u) - 18g_2p'(u),$$

$$p^{\text{VI}}(u) = 36 \left[140p^4(u) - 28g_2p^2(u) - 20g_3p(u) + \frac{1}{4}g_2^2 \right].$$

Różne postaci twierdzenia o dodawaniu dla funkcji $p(u)$.

$$p(u_1 + u_2) + p(u_1) + p(u_2) = \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{p'(u_2) - p'(u_1)}{p(u_2) - p(u_1)} \right]^2,$$

$$p(u_1 + u_2) - p(u_1) = -\frac{1}{2} \frac{d}{du_1} \frac{p'(u_1) - p'(u_2)}{p(u_1) - p(u_2)}.$$

Jeżeli $u_1 + u_2 + u_3 = 0$, będzie:

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ p(u_1), & p(u_2), & p(u_3) \\ p'(u_1), & p'(u_2), & p'(u_3) \end{vmatrix} = 0.$$

Jeżeli $u_1 + u_2 + \dots + u_n = 0$, będzie:

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & \dots, & 1 \\ p(u), & p(u), & \dots, & p(u_n) \\ p'(u_1) & p'(u_2), & \dots, & p'(u_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p^{(n-2)}(u_1), & p^{(n-2)}(u_2), & \dots, & p^{(n-2)}(u_n) \end{vmatrix} = 0.$$

Dodając do argumentu półperyody ω, ω' , znajdziemy wzory:

$$p(u+\omega) = e_1 + \frac{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}{p(u)-e_1}; \quad p(u+\omega') = e_3 + \frac{(e_3-e_1)(e_3-e_2)}{p(u)-e_3};$$

$$p(u+\omega'') = e_2 + \frac{(e_2-e_1)(e_2-e_3)}{p(u)-e_2}.$$

Punkty postaci $2m\omega + 2n\omega'$, gdzie m i n są liczbami całkowitymi, są wszystkimi punktami nieskończoności funkcji p . Są to punkty nieskończoności rzędu 2-go; poza temi, innych nieskończoności funkcja nie ma.

Wartości funkcji p i p' dla wartości argumentów równych ćwiartkom peryodów są:

$$p\left(\frac{\omega}{2}\right) = e_1 + \sqrt{e_1-e_2} \sqrt{e_1-e_3}; \quad p\left(\frac{\omega}{2} + \omega'\right) = e_1 + \sqrt{e_1-e_2} \cdot \sqrt{e_1-e_3};$$

$$p\left(\frac{\omega'}{2}\right) = e_3 - \sqrt{e_2-e_3} \cdot \sqrt{e_1-e_3}; \quad p\left(\frac{\omega'}{2} + \omega\right) = e_3 + \sqrt{e_2-e_3} \cdot \sqrt{e_1-e_3}.$$

$$p\left(\frac{\omega}{2} \pm \frac{\omega'}{2}\right) = e_2 \mp i \sqrt{e_2-e_3} \sqrt{e_1-e_2},$$

$$p'\left(\frac{\omega}{2}\right) = -2(e_1-e_3)\sqrt{e_1-e_2} - 2(e_1-e_2)\sqrt{e_1-e_3},$$

$$p'\left(\frac{\omega}{2} + \omega'\right) = 2i(e_1-e_3)\sqrt{e_1-e_2} - 2(e_1-e_2)\sqrt{e_1-e_3},$$

$$p'\left(\frac{\omega'}{2}\right) = -2i(e_1-e_3)\sqrt{e_2-e_3} - 2(e_2-e_3)\sqrt{e_1-e_3},$$

$$p'\left(\frac{\omega'}{2} + \omega\right) = 2i(e_1-e_3)\sqrt{e_2-e_3} - 2(e_2-e_3)\sqrt{e_1-e_3},$$

$$p'\left(\frac{\omega}{2} \pm \frac{\omega'}{2}\right) = 2(e_1-e_2)\sqrt{e_2-e_3} \pm 2i(e_2-e_3)\sqrt{e_1-e_2}$$

W otoczeniu punktu $u=0$ funkcja p rozwija się na szereg

$$p(u) = \frac{1}{u^2} + a_2 u^2 + a_4 u^4 + \dots$$

którego współczynniki są funkcjami wymiernymi ilości g_2 , g_3 , a mianowicie:

$$a_2 = \frac{1}{20} g_2, \quad a_4 = \frac{1}{28} g_3, \quad a_6 = \frac{g_2^2}{2^4 \cdot 3 \cdot 5}, \quad a_8 = \frac{3 g_2 g_3}{2^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11},$$

$$a_{10} = \frac{1}{2^4 \cdot 13} \left(\frac{g_3^2}{7} + \frac{g_2^3}{2 \cdot 3 \cdot 5^3} \right), \quad a_{12} = \frac{g_2^2 g_3}{2^5 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11},$$

$$a_{14} = \frac{1}{17} \left(\frac{3 g_2 g_3^2}{2^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13} + \frac{g_2^4}{2^8 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 13} \right), \quad a_{16} = \frac{1}{19} \left(\frac{29 g_2^3 g_3}{2^8 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13} + \frac{g_3^3}{2^6 \cdot 7^3 \cdot 13} \right),$$

Można nadto funkcję p rozwinąć na szereg podwójny za pomocą wzoru:

$$p(u) = \frac{1}{u^2} + 3u^2 \sum \frac{1}{w^4} + 5u^4 \sum \frac{1}{u^6} + \dots$$

gdzie $w = 2m\omega + 2n\omega'$, sumowanie zaś rozciąga się na wszystkie kombinacje wartości całkowitych, dodatnich i ujemnych liczb m i n , wyjąwszy kombinację 0, 0.

Przypadki szczególne; zniekształcenie funkcji p . Jeżeli $g_3=0$, mamy przypadek zwany harmonicznym; całka eliptyczna daje się przekształcić na

$$u = - \frac{1}{Vc_1} \int_0^q \frac{dq}{V1-q^4},$$

i będzie $p=e_1 q^{-2}$.

W tym przypadku p ma własność, którą przedstawia wzór:

$$p(iu) = -p(u).$$

Jeżeli 2ω jest peryodem, to i $2i\omega$ będzie peryodem.

Jeżeli $g_2=0$, mamy przypadek zwany równoanharmonicznym. Funkcja p ma w tym przypadku własność, wyrażoną wzorem:

$$p(au) = ap(u),$$

gdzie a jest pierwiastkiem sześciennym z jedności. Jeżeli 2ω jest peryodem, to i $2a\omega$ będzie peryodem.

Jeżeli wyróżnik Δ staje się zerem, wtedy funkcja p zniekształca się i staje się funkcją pojedynczo-peryodyczną, a mianowicie: albo funkcją trygonometryczną, albo funkcją złożoną z wykładniczych.

Jeżeli $e_2 = e_3 = a$, wtedy:

$$p(u) = a - \frac{3a}{\sin^2(u\sqrt{-3a})} \quad ; \quad \omega = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{-3a}}; \quad \omega' = \infty,$$

a jeżeli $a = 0$, będzie wprost $p(u) = \frac{1}{u^2}$.

Jeżeli $e_1 = e_2 = a$, wtedy:

$$p(u) = e_3 + 3a \left(\frac{e^{u\sqrt{3a}} + e^{-u\sqrt{3a}}}{e^{u\sqrt{3a}} - e^{-u\sqrt{3a}}} \right)^2; \quad \omega = \infty; \quad \omega' = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{3a}}.$$

§ 5.

Funkcje wymierne ilości p i p' .

Każda funkcja wymierna ilości p i p' daje się wyrazić jako kombinacja liniowa typu:

$$c + \sum_r c_r \zeta(u - u_r) + \sum_\mu c'_\mu p(u - u'_\mu) + \sum_e c''_e p'(u - u''_e) + \dots,$$

t. j. liniowa względem $\zeta(u) = \frac{d}{du} \log \sigma(u)$, względem $p(u)$ oraz względem pochodnych kolejnych funkcji p . Nadto suma wszystkich współczynników c_r , t. j. $\sum_r c_r = 0$.

Punkty u_r są punktami nieskończoności rzędu pierwszego funkcji danej; punkty u'_μ punktami nieskończoności rzędu drugiego; punkty u''_e — rzędu trzeciego i t. d.

Każda funkcyja wymierna ilości p i p' daje się przedstawić zawsze w postaci:

$$A \frac{\sigma(u-u'_1) \sigma(u-u'_2) \dots \sigma(u-u'_r)}{\sigma(u-u''_1) \sigma(u-u''_2) \dots \sigma(u-u''_r)},$$

gdzie A jest stała, u' —punkty zerowe funkcyi, u'' —punkty nieskończoności i gdzie suma wszystkich wartości u' równa się sumie wszystkich wartości u'' .

Te dwa przedstawienia funkcyj wymiernych ilości p i p' odpowiadają dwom przedstawieniom funkcyj wymiernych jednej zmiennej: jednemu za pomocą ułamków elementarnych, drugiemu za pomocą rozkładu licznika i mianownika na czynniki.

§ 6.

Teorya przekształcenia funkcyj eliptycznych.

Niechaj będą dwie funkcyje eliptyczne:

$$p_1 = p(an + b, \omega_1, \omega'_1), \quad p = p(u, \omega, \omega').$$

Warunek konieczny i dostateczny na to aby pierwsza z nich dała wyrazić się wymiernie przez drugą, stanowi to. by pomiędzy modułami $\omega_1, \omega'_1, \omega, \omega'$ i liczbami a, b zachodziły związki:

$$a\omega = \alpha\omega_1 + \beta\omega'_1; \quad a\omega' = \gamma\omega_1 + \delta\omega'_1;$$

$$1 = (m - \alpha - \gamma)\omega_1 + (n - \beta - \delta)\omega'_1,$$

gdzie $a, b, \gamma, \delta, m, n$ są jakiekolwiek liczby całkowite. Szukanie takiego wyrażenia wymiernego funkcyi p_1 przez funkcyę p stanowi zagadnienie o przekształceniu wymiernem funkcyi p . Liczba a nazywa się mnożnikiem; lecz łatwo okazać, że w przekształceniu wymiernem funkcyi p można mnożnik a przyjąć zawsze równym 1, liczbę zaś b równą zeru, gdyż wzory, odpowiadające różnym od jedności wartościom a i różnym od zera wartościom b , otrzymują się łatwo z wzorów, odnoszących się do przypadku $a=1, b=0$.

Wyznacznik

$$\begin{vmatrix} a, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{vmatrix} = 0$$

jest zawsze liczbą całkowitą dodatnią i nazywa się rzędem przekształcenia. Własność zasadnicza liczby n jest następująca. Dajmy, że p_1 wyraża się wymiernie przez p za pomocą wzoru $p_1 = \frac{\varphi(p)}{\psi(p)}$, gdzie φ i ψ są dwa wielomiany bez czynnika wspólnego; wtedy liczba n jest równa stopniowi równania

$$\varphi(p) - p_1 \psi(p) = 0$$

względem p , t. j. jest większem ze stopni wielomianów φ i ψ ; innemi słowy: liczba ta wskazuje, ile wartości funkcyi p odpowiada jednej i tej samej wartości funkcyi p_1 .

Jeżeli za punkt wyjścia obrać nie funkcyę eliptyczną p , lecz funkcyę sn , to zagadnienie o przekształceniu wymiernem dla funkcyi sn można wypowiedzieć w sposób podobny do powyższego; zwracamy przytem uwagę na to, że jedno zagadnienie odpowiada drugiemu tylko w pewnych przypadkach.

Warunek konieczny i dostateczny na to, aby funkcyą

$$sn_1 = sn(a'v + b', K_1, K'_1)$$

wyrażała się wymiennie przez funkcję

$$\operatorname{sn} = \operatorname{sn}(v, k', K'),$$

stanowią związku:

$$a' \cdot 2K = a' 2K_1 + \beta' i k'_1; \quad a' \cdot iK' = \gamma' 2K_1 + \delta' iK'_1;$$

$$b = (2m' + 1 - a') K_1 + \frac{1}{2} (2n' - \beta') iK'_1,$$

gdzie $a', \beta', \gamma', \delta'$ są liczbami całkowitemi.

W tym przypadku nie można już, jak poprzednio, przyjąć, że mnożnik równa się 1, albowiem mnożnik a' ma wartość zależną od samego przekształcenia; i liczba b' nie może być zerem w każdym przypadku.

Zagadnienie o przekształceniu można przedstawić jeszcze w następującej postaci:

Danem jest równanie różniczkowe:

$$\frac{dy}{V(1-y^2)(y-l^2y^2)} = a' \cdot \frac{dx}{V(1-x^2)(1-k^2x^2)};$$

znaleść związki, jakie powinny zachodzić pomiędzy stałymi l, a', k , aby całką tego równania było $y=\varphi(x)$, gdzie φ jest symbolem funkcji wymiernej stopnia określonego względem x .

Albo też tak:

Mając daną całkę eliptyczną

$$\frac{dx}{V(1-x^2)(1-k^2x^2)}$$

przekształcić ją na inną całkę tejże postaci, t. j. na całkę

$$\frac{1}{a'} \frac{dy}{V(1-y^2)(1-l^2y^2)},$$

za pomocą przekształcenia $y=q(x)$ danego stopnia i znaleźć związku pomiędzy ilościami l, a', k .

Widzimy stąd, że w tej postaci zagadnienie o przekształceniu funkcyj eliptycznych schodzi się z zagadnieniem o przekształceniu całki eliptycznej na inną, które to przekształcenie, odpowiednio zastosowane, służy do obliczania przybliżonej wartości samych całek.

Przekształcenie jest określone przez liczby całkowite $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ i dlatego oznacza się za pomocą symbolu

$$\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix},$$

który jest zwykłym symbolem podstawienia liniowego dwóch zmiennych jednorodnych (w naszym przypadku ω i ω'). Dowodzi się, że składanie dwu przekształceń uskutecznia się za pomocą zwykłego prawidła o iloczynie dwóch podstawień liniowych.

Każde podstawienie

$$\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix},$$

rzędu $n = \alpha\delta - \beta\gamma$ można za pomocą mnożenia przez odpowiednie podstawienie rzędu 1-go sprowadzić do podstawienia typu

$$\begin{pmatrix} d, & 0 \\ \nu, & \frac{n}{d} \end{pmatrix},$$

gdzie d jest dzielnikiem liczby n , ν zaś przedstawia liczbę całkowitą dodatnią, mniejszą od $\frac{n}{d}$. Podstawienie takie nazywa się elementarnem;

liczba takich podstawień wynosi $\sum \frac{n}{d}$, gdzie suma rozciąga

się na wszystkie dzielniki d liczby n . Jeżeli n jest liczbą pierwszą, to podstawień elementarnych jest $n + 1$.

Iloczyn dwu podstawień elementarnych jest także podstawieniem elementarnem

Każde podstawienie rzędu nie pierwszego można złożyć — pomijając podstawienia rzędu 1 — z innych podstawień rzędów, będących liczbami pierwszymi.

Wszystkie podstawienia rzędu 1-go można złożyć z dwu tylko podstawień, tworzących

$$A = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 1, & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix}.$$

Przekształcenie liniowe, wykonane na półperyodach ω i ω' , daje wyniki następujące: 1) Funkcja p pozostaje bez zmiany, t. j. wzór na przekształcenie jest wprost $p_1 = p$. 2) Niezmienniki g_2, g_3 pozostają bez zmiany. 3) Funkcja σ nieparzysta pozostaje niezmienną. 4) Funkcje σ parzyste oraz niezmienniki niewymierne e przemieniają się według wzorów:

$$\sigma'_1 = \sigma_1, \quad \sigma'_2 = \sigma_3, \quad \sigma'_3 = \sigma_2;$$

$$e'_1 = e_1, \quad e'_2 = e_3, \quad e'_3 = e_2,$$

odnoszących się do podstawienia tworzącego A , oraz według wzorów:

$$\sigma'_1 = \sigma_3, \quad \sigma'_2 = \sigma_2, \quad \sigma'_3 = \sigma_1,$$

$$e'_1 = e_3, \quad e'_2 = e_2, \quad e'_3 = e_1,$$

odnoszących się do podstawienia tworzącego B . 5) Półmoduły przestępne drugiego gatunku η, η' przekształcają się dla podstawienia liniowego przy pomocy tych samych wzorów, które służą dla ω, ω' . 6) Dla podstawienia A , wykonanego na peryodach

ilości x i $\tau = \frac{\omega'}{\omega}$ stają się odpowiednio $x_1 = x$, $\tau_1 = \tau + 1$, a funkcyje ϑ przekształcają się za pomocą wzorów :

$$\vartheta(x, \tau+1) = e^{\frac{i\pi}{\tau}} \vartheta_2(x, \tau); \quad \vartheta_1(x, \tau+1) = e^{\frac{i\pi}{\tau}} \vartheta_1(x, \tau);$$

$$\vartheta_2(x, \tau+1) = \vartheta_3(x, \tau); \quad \vartheta_3(x, \tau+1) = \vartheta(x, \tau).$$

7) Dla podstawienia B , wykonanego na peryodach ω , ilości x i τ stają się odpowiednio $x_1 = \frac{x}{\tau}$, $\tau_1 = -\frac{1}{\tau}$, a funkcyje ϑ przekształcają się za pomocą wzorów:

$$\vartheta\left(\frac{x}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right) = i\sqrt{i\tau} e^{\frac{ix^2}{\tau}} \vartheta_2(x, \tau); \quad \vartheta_1\left(\frac{x}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{i\tau} e^{\frac{ix^2}{\tau}} \vartheta_1(x, \tau);$$

$$\vartheta_2\left(\frac{x}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right) = i\sqrt{i\tau} e^{\frac{ix^2}{\tau}} \vartheta(x, \tau); \quad \vartheta_3\left(\frac{x}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right) = i\sqrt{i\tau} e^{\frac{ix^2}{\tau}} \vartheta_3(x, \tau).$$

8) Funkcya p , jak wiadomo, nie zmienia się przy podstawieniu liniowem, funkcya sn nie zachowuje się tak prosto. Podstawienia liniowe $\begin{pmatrix} a, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}$ odnoszą się w tym przypadku nie do ω , ω' , lecz do $2K$, iK' . Wszystkie rozwiązania związku

$$\text{sn}(av + b, l^2) = \frac{A + B \text{sn}(v, k^2)}{A' + B' \text{sn}(v, k^2)},$$

zawierają się w następujących 24 wzorach :

$$\text{sn}(\pm v, k^2) = \pm \text{sn}(v, k^2); \quad \text{sn}(\pm v + iK_1', K^2) = \pm \frac{1}{k \text{sn}(v, k^2)}$$

$$\text{sn}\left(\pm kv, \frac{1}{k^2}\right) = \pm k \text{sn}(v, k^2); \quad \text{sn}\left(\pm kv + iK_1', \frac{1}{k^2}\right) = \pm \frac{1}{\text{sn}(v, k^2)}$$

$$\text{sn}\left(\pm \left\{ \frac{(1+\sqrt{k})^2}{2i} v + i \frac{K_1'}{2} + K_1 \right\}, \left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}} \right)^4 \right) = \pm \frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}} \cdot \frac{1-\sqrt{k} \text{sn}(v, k^2)}{1+\sqrt{k} \text{sn}(v, k^2)},$$

$$\text{sn}\left(\pm \left\{ \frac{(1-\sqrt{k})^2}{2i} v - i \frac{K_1'}{2} - K_1 \right\}, \left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}} \right)^4 \right) = \mp \frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}} \cdot \frac{1-\sqrt{k} \text{sn}(v, k^2)}{1+\sqrt{k} \text{sn}(v, k^2)},$$

$$\left\{ \begin{aligned} \operatorname{sn}\left(\pm\left\{\frac{(1-V\bar{k})^2}{2i}v+i\frac{K_1'}{2}+K_1\right\},\left(\frac{1+V\bar{k}}{1-V\bar{k}}\right)^4\right) &= \pm \frac{1-V\bar{k}}{1+V\bar{k}} \cdot \frac{1+V\bar{k}\operatorname{sn}(v,k^2)}{1-V\bar{k}\operatorname{sn}(v,k^2)}, \\ \operatorname{sn}\left(\pm\left\{\frac{(1-V\bar{k})^2}{2i}v-i\frac{K_1'}{2}-K_1\right\},\left(\frac{1+V\bar{k}}{1-V\bar{k}}\right)^4\right) &= \mp \frac{1-V\bar{k}}{1+V\bar{k}} \cdot \frac{1+V\bar{k}\operatorname{sn}(v,k^2)}{1-V\bar{k}\operatorname{sn}(v,k^2)}, \\ \operatorname{sn}\left(\pm\left\{\frac{(1+iV\bar{k})^2}{2i}v+i\frac{K_1'}{2}+K_1\right\},\left(\frac{1-iV\bar{k}}{1+iV\bar{k}}\right)^4\right) &= \pm \frac{1+iV\bar{k}}{1-iV\bar{k}} \cdot \frac{1-iV\bar{k}\operatorname{sn}(v,k^2)}{1+iV\bar{k}\operatorname{sn}(v,k^2)}, \\ \operatorname{sn}\left(\pm\left\{\frac{(1+iV\bar{k})^2}{2i}v-i\frac{K_1'}{2}-K_1\right\},\left(\frac{1-iV\bar{k}}{1+iV\bar{k}}\right)^4\right) &= \mp \frac{1+iV\bar{k}}{1-iV\bar{k}} \cdot \frac{1-iV\bar{k}\operatorname{sn}(v,k^2)}{1+iV\bar{k}\operatorname{sn}(v,k^2)}, \\ \operatorname{sn}\left(\pm\left\{\frac{(1-iV\bar{k})^2}{2i}v+i\frac{K_1'}{2}+K_1\right\},\left(\frac{1+iV\bar{k}}{1-iV\bar{k}}\right)^4\right) &= \pm \frac{1-iV\bar{k}}{1+iV\bar{k}} \cdot \frac{1+iV\bar{k}\operatorname{sn}(v,k^2)}{1-iV\bar{k}\operatorname{sn}(v,k^2)}, \\ \operatorname{sn}\left(\pm\left\{\frac{(1-iV\bar{k})^2}{2i}v-i\frac{K_1'}{2}-K_1\right\},\left(\frac{1+iV\bar{k}}{1-iV\bar{k}}\right)^4\right) &= \mp \frac{1-iV\bar{k}}{1+iV\bar{k}} \cdot \frac{1+iV\bar{k}\operatorname{sn}(v,k^2)}{1-iV\bar{k}\operatorname{sn}(v,k^2)}. \end{aligned} \right.$$

Wzory pary pierwszej, drugiej oraz każde dwa połączone klamrą odpowiadają tej samej wartości modułu przekształconego l^2 , który może mieć tylko sześć wartości różnych. Płaszczyzny $2K_1$, i K_1' są półperiodymi funkcji sn przekształconej.

Przekształcenie rzędu 2-go. Trzy przekształcenia elementarne rzędu 2-go, zastosowane do ω, ω' , są:

$$(a) = \begin{pmatrix} 2, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{t. j.} \quad \omega = 2\omega_1, \quad \omega' = \omega'_1,$$

$$(b) = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{t. j.} \quad \omega = \omega_1, \quad \omega' = 2\omega'_1,$$

$$(c) = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 1, & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{t. j.} \quad \omega = \omega_1, \quad \omega' = \omega_1 + 2\omega'_1.$$

1. Dla tych podstawień odpowiednie przekształcenia funkcji p (p po drugiej stronie rozumie się przy wartościach półmodułowych ω, ω') są następujące:

$$a) \quad p\left(u; \frac{\omega}{2}, \omega'\right) = \frac{p^2(u) - e_1 p(u) + (e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{p(u) - e_1},$$

$$b) \quad p\left(u; \omega, \frac{\omega'}{2}\right) = \frac{p^2(u) - e_3 p(u) + (e_3 - e_1)(e_3 - e_2)}{p(u) - e_3},$$

$$c) \quad p\left(u; \omega, \frac{\omega' - \omega}{2}\right) = \frac{p^2(u) - e_2 p(u) + (e_2 - e_3)(e_2 - e_1)}{p(u) - e_2},$$

2. Przekształcenia funkcyj σ parzystej są:

$$a) \quad \sigma\left(u; \frac{\omega}{2}, \omega'\right) = e^{\frac{1}{2} e_1 u^2} \sigma(u) \sigma_1(u),$$

$$b) \quad \sigma\left(u, \omega, \frac{\omega'}{2}\right) = e^{\frac{1}{2} e_3 u^2} \sigma(u) \sigma_3(u),$$

$$c) \quad \sigma\left(u, \omega, \frac{\omega' - \omega}{2}\right) = e^{\frac{1}{2} e_2 u^2} \sigma(u) \sigma_2(u),$$

3. Odpowiednie przekształcenia modułów przestępnych 2-go gatunku η, η' są:

$$a) \quad \eta_1 = \frac{1}{2} e_1 \omega + \eta; \quad \eta_1' = e_1 \omega' + 2\eta',$$

$$b) \quad \eta_1 = e_2 \omega + 2\eta; \quad \eta_1' = \frac{1}{2} e_3 \omega' + \eta',$$

$$c) \quad \eta_1 = e_2 \omega + 2\eta; \quad \eta_1' = \frac{1}{2} e_2 (\omega' - \omega) + (\eta' - \eta).$$

4. Odpowiednie przekształcenia funkcyj σ parzystych są:

$$a) \quad \sigma_1\left(u; \frac{\omega}{2}, \omega\right) = \sigma_2(u) \left[p(u) - p\left(\frac{\omega}{2}\right) \right] e^{\frac{1}{2} e_1 u^2},$$

$$\sigma_2\left(u; \frac{\omega}{2}, \omega'\right) = \sigma_3^2(u) \left[\frac{p\left(\frac{\omega}{2}\right) - p(\omega + \omega')}{p\left(\frac{\omega}{2}\right) - p(\omega')} \right] e^{\frac{1}{2} e_1 u^2}$$

$$\sigma_3\left(u; \frac{\omega}{2}, \omega'\right) = \sigma_3(u) \cdot \sigma_2(u) e^{\frac{1}{2} e_1 u^2}.$$

$$b) \quad \sigma_1 \left(u, \omega, \frac{\omega'}{2} \right) = \sigma_1(u) \sigma_2(u) e^{\frac{1}{2} e_3 u^2}.$$

$$\sigma_2 \left(u; \omega, \frac{\omega'}{2} \right) = \sigma_1^2(u) \cdot \frac{p(u+\omega) - p\left(\frac{\omega'}{2}\right)}{p(\omega) - p\left(\frac{\omega'}{2}\right)} e^{\frac{1}{2} e_3 u^2},$$

$$\sigma_3 \left(u; \omega, \frac{\omega'}{2} \right) = \sigma_1^2(u) \cdot \left[p(u) - p\left(\frac{\omega'}{2}\right) \right] e^{\frac{1}{2} e_3 u^2}.$$

$$c) \quad \sigma_1 \left(u; \omega; \frac{\omega' - \omega}{2} \right) = \sigma_1(u) \sigma_3(u) e^{\frac{1}{2} e_3 u^2},$$

$$\sigma_2 \left(u, \omega, \frac{\omega' - \omega}{2} \right) = \sigma(u) \left[p(u) - p\left(\frac{\omega''}{2}\right) \right] e^{\frac{1}{2} e_3 u^2},$$

$$\sigma_3 \left(u, \omega, \frac{\omega' - \omega}{2} \right) = \sigma_1^2(u) \cdot \frac{p\left(\frac{\omega''}{2}\right) - p(u+\omega)}{p\left(\frac{\omega''}{2}\right) - p(\omega)} e^{\frac{1}{2} e_3 u^2}.$$

5. Niezmienniki niewymierne e_1, e_2, e_3 przekształcają się za pomocą wzorów:

$$a) \quad e'_1 = e_1 + 2\sqrt{e_1 - e_2} \sqrt{e_1 - e_3}; \quad e'_2 = e_1 - 2\sqrt{e_1 - e_2} \sqrt{e_1 - e_3};$$

$$e'_3 = -2e_1,$$

$$b) \quad e'_1 = -2e_3; \quad e'_2 = e_3 + 2\sqrt{e_1 - e_3} \sqrt{e_2 - e_3};$$

$$e'_3 = e_3 - 2\sqrt{e_1 - e_3} \sqrt{e_2 - e_3},$$

$$c) \quad e'_1 = -2e_2; \quad e'_2 = e_2 - 2i\sqrt{e_2 - e_3} \sqrt{e_1 - e_2},$$

$$e'_3 = e_2 + 2i\sqrt{e_2 - e_3} \sqrt{e_1 - e_2}.$$

6. Znalazłszy wartości ilości e' , można znaleźć wartość modułu przekształconego l^2 w każdym z trzech przypadków. Mamy:

$$a) \quad l^2 = \frac{(1-k')^2}{(1+k')^2}, \quad b) \quad l^2 = \frac{4k}{(1+k)^2}, \quad c) \quad l^2 = \frac{4ik k'}{(k' - ik)^2}.$$

7. Funkcye ϑ przekształcają się za pomocą wzorów:

$$a) \quad q_1 = q^2, \quad x_1 = 2x,$$

$$\vartheta(2x, q^2) = \sqrt{\frac{\pi}{2K\sqrt{k'}}} \vartheta(x, q) \vartheta_3(x, q),$$

$$\vartheta_1(2x_1, q^2) = \sqrt{\frac{\pi}{2K\sqrt{k'}}} \vartheta_1(x, q) \vartheta_2(x, q),$$

$$\vartheta_2(2x, q^2) = \frac{1}{2k'} \sqrt{\frac{\pi}{K}} \left\{ \sqrt{1-k'} \vartheta^2(x, q) - \sqrt{1+k'} \vartheta_1^2(x, q) \right\},$$

$$\vartheta_3(2x, q^2) = \frac{1}{2k'} \sqrt{\frac{\pi}{K}} \left\{ \sqrt{1+k'} \vartheta^2(x, q) - \sqrt{1-k'} \vartheta_1^2(x, q) \right\},$$

$$b) \quad q_1 = q^{\frac{1}{2}}, \quad x_1 = x,$$

$$\vartheta(x, \sqrt{q}) = \frac{1}{k'} \sqrt{\frac{\pi(1-k)}{2K}} \left\{ \vartheta^2(x, q) + \vartheta_1^2(x, q) \right\},$$

$$\vartheta_1(x, \sqrt{q}) = \sqrt{\frac{\pi}{K\sqrt{k}}} \vartheta(x, q) \vartheta_1(x, q),$$

$$\vartheta_2(x, \sqrt{q}) = \sqrt{\frac{\pi}{K\sqrt{k}}} \vartheta_3(x, q) \vartheta_2(x, q),$$

$$\vartheta_3(x, \sqrt{q}) = \frac{1}{k'} \sqrt{\frac{\pi(1+k)}{2K}} \left\{ \vartheta^2(x, q) - \vartheta_1^2(x, q) \right\},$$

$$c) \quad q_1 = e^{-\frac{i\pi}{2}} q^{\frac{1}{2}}, \quad x_1 = x,$$

$$\vartheta_1(x, e^{-\frac{i\pi}{2}} q^{\frac{1}{2}}) = \sqrt{\frac{\pi i \sqrt{i}}{K\sqrt{k}k'}} \vartheta_3(x, q) \vartheta_1(x, q),$$

$$\vartheta_2(x_1, e^{-\frac{i\pi}{2}} q^{\frac{1}{2}}) = \sqrt{\frac{\pi i \sqrt{i}}{K\sqrt{k}k'}} \vartheta(x, q) \vartheta_2(x, q),$$

$$\vartheta_3(x, e^{-\frac{i\pi}{2}} q^{\frac{1}{2}}) = \sqrt{\frac{\pi}{2K(k'+ik)}} \left\{ \vartheta_3^2(x, q) + i \vartheta_1^2(x, q) \right\},$$

$$\vartheta_4(x, e^{-\frac{i\pi}{2}} q^{\frac{1}{2}}) = \sqrt{\frac{\pi}{2K(k'-ik)}} \left\{ \vartheta_3^2(x, q) - i \vartheta_1^2(x, q) \right\},$$

8. Podamy jeszcze wzory na przekształcenie funkcji sn. Gdy ω i ω' są poddane wszystkim trzem wskazanym wyżej podstawieniom, funkcja p przekształca się wymiennie, lecz funkcja sn przekształca się wymiennie tylko przy dwóch pierwszych z pomiędzy tych podstawień, przy trzecim przekształca się niewymiennie. Przekształcenia funkcji sn, odpowiadające wszystkim trzem przekształceniom wymiernym funkcji p , są następujące:

$$a) \quad \operatorname{sn} \left((1+k')v + K_1, \left(\frac{1-k'}{1+k'} \right)^2 \right) = \frac{1 - (1+k') \operatorname{sn}^2(v, k)}{1 - (1-k') \operatorname{sn}^2(v, k)},$$

(Przekształcenie Landena);

$$b) \quad \operatorname{sn} \left((1+k)v, \frac{4k}{(1+k)^2} \right) = \frac{(1+k) \operatorname{sn}(v, k)}{1+k \operatorname{sn}^2(v, k)},$$

(Przekształcenie Gausa);

$$c) \quad \operatorname{sn} \left((k'-ik)v, -\frac{4ikk'}{(k'-ik)^2} \right) = \frac{(k'-ik) \operatorname{sn}(v, k) \sqrt{1-k^2 \operatorname{sn}^2(v, k)}}{1-k(k+ik') \operatorname{sn}^2(v, k)}$$

(Przekształcenie niewymierne).

§ 7.

O mnożeniu argumentu w funkcjach eliptycznych.

Mnożenie zespolone.

Zagadnienie o mnożeniu argumentu w funkcjach eliptycznych jest następujące:

Znaleść wzór, przy pomocy którego funkcya eliptyczna (n. p. sn lub p) o argumentcie, pomnożonym przez n (gdzie n jest liczbą całkowitą), wyraża się za pomocą tejże funkcyi eliptycznej o argumentcie pojedynczym.

Zagadnienie o mnożeniu przez n jest specyjalnem zagadnieniem o przekształceniu rzędu n^2 ; w takim przekształceniu moduł pozostaje niezmiennym.

Rozpatrzmy mnożenie argumentu dla funkcyi sn . Jeżeli n jest nieparzyste, to funkcya $\operatorname{sn}(nv)$ wyraża się zawsze wymiennie przez $\operatorname{sn} v$; jeżeli zaś n jest parzyste, to $\operatorname{sn}(nv+K)$ (gdzie $2K$ jest pierwszym półperyodem funkcyi sn) wyraża się wymiennie przez $\operatorname{sn} v$, funkcya zaś $\operatorname{sn}(nv)$ daje się wyrazić przez funkcję wymierną ilości $\operatorname{sn} v$, pomnożoną przez $\sqrt{1-\operatorname{sn}^2 v} \cdot \sqrt{1-k^2 \operatorname{sn}^2 v}$.

Co się tyczy funkcyi $p(u)$, to dla niej $p(nu)$ zawsze daje się wyrazić wymiennie przez $p(u)$.

Rozłożywszy liczbę n na czynniki pierwsze, możemy zawsze mnożenie przez n sprowadzić do kolejnych mnożeń przez 2 i przez czynniki pierwsze nieparzyste.

Wzory na mnożenie przez 2, 3 dla funkcyi sn są:

$$\operatorname{sn} 2 v = \frac{2 \operatorname{sn} v \sqrt{1-\operatorname{sn}^2 v} \cdot \sqrt{1-k^2 \operatorname{sn}^2 v}}{1-k^2 \operatorname{sn}^4 v},$$

$$\operatorname{sn} 3 v = \frac{\operatorname{sn} v \{ 3 - 4(1+k^2 \operatorname{sn}^2 v) + 6k^2 \operatorname{sn}^4 v - k^4 \operatorname{sn}^8 v \}}{1 - 6k^2 \operatorname{sn}^4 v + 4k^2(1+k^2) \operatorname{sn}^6 v - 3k^4 \operatorname{sn}^8 v}.$$

Wzory na mnożenie przez 4, 5 są bardziej skomplikowane. Można je znaleźć w dziele Cayley'a o „funkcjach eliptycznych“ (tłom. włoskie Brioschi'ego, Medyolan, 1880, Cap. IV, str. 73 i nast.)

Godnym uwagi jest następujący wzór ogólny (patrz Ennper Ellipt. Funct. Halle 1890, str. 374), w którym wszakże

spółczynniki nie są przedstawione wyraźnie jako funkcje ilości k ; liczba n jest w nim nieparzysta:

$$\operatorname{sn}(nv) = n \operatorname{sn} v \prod_{m, m'} \frac{1 - \frac{\operatorname{sn}^2 v}{\operatorname{sn}^2 \frac{2mK + 2m'iK'}{n}}}{1 - k^2 \frac{\operatorname{sn}^2 \frac{2mK + 2m'iK'}{n}}{\operatorname{sn}^2 v}},$$

gdzie iloczyn rozciąga się na wszystkie kombinacje

$$m = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}; \quad m' = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \frac{n-1}{2},$$

oraz na kombinacje:

$$m = 0, \quad m' = +1, +2, +3, \dots, + \frac{n-1}{2}.$$

Wzór na mnożenie dla funkcji p jest:

$$p(mu) = p(u) - \frac{\psi_{n+1} \psi_{n-1}}{\psi_n^2},$$

gdzie

$$\psi_1 = 1; \quad \psi_2 = -p'(u);$$

$$\psi_3 = 3p^4(u) - \frac{3}{2} g_2 p^2(u) - 3g_3 p(u) - \frac{1}{16} g_2^2,$$

$$\psi_4 = p'(u) \left(-2p^6 + \frac{5}{2} g_2 p^4 + 10g_3 p^2 + \frac{5}{8} g_2 p^2 + \frac{1}{2} g_2 g_3 p + g_3^2 + \frac{1}{32} g_2^2 \right)$$

.....

Wzór zwrotny dla funkcji ψ jest w ogólności:

$$\psi_{2n+1} = \psi_{2n+2} \psi_n^3 - \psi_{n+1} \psi_{n+1}^3,$$

$$\psi_{2n} = -\frac{\psi_n}{p'} (\psi_{n+2} \psi_{n-1}^2 - \psi_{n-2} \psi_{n+1}^2).$$

Patrz Halphen, Fonctions elliptiques I, str. 102.

Zagadnienie o mnożeniu zespolonem argumentu funkcyj eliptycznych można przedstawić pod następującemi postaciami :

Dany jest wielomian $f(x)$ stopnia 4-go lub 3-go; jakim warunkom winny zadość czynić te wielomiany oraz liczba zespolona m , aby równanie różniczkowe

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = \frac{1}{m} \frac{dy}{\sqrt{f(y)}}$$

miało całkę wymierną postaci $y=R(x)$?

W przypadku, gdy m jest liczbą rzeczywistą całkowitą, równanie to ma zawsze całkę tej postaci i wtedy mamy zagadnienie o mnożeniu zwykłym. Jeżeli wielomian $f(x)$ weźmiemy w postaci specjalnej Jacobiego albo Weierstrassa, to zagadnienie będzie można wysłowić w ten sposób: Jakim warunkom powinny zadość moduły funkcyj eliptycznej Jacobiego albo funkcyj Weierstrassa i jakim warunkom liczba zespolona m , aby $\operatorname{sn}(mv)$ dało się wyrazić wymiennie przez $\operatorname{sn} v$, albo $p(mu)$ wymiennie przez $p(u)$.

Moduły, które w ten sposób znajdziemy, nazywają się modułami osobliwemi. Liczba m powinna być postaci $a+i\sqrt{b}$, gdzie a i b są dwie liczby wymierne. Stosunek $i = \frac{\omega'}{\omega}$ modułów funkcyj eliptycznych powinien być pierwiastkiem równania stopnia 2-go o współczynnikach całkowitych.

Pierwsze własności funkcyj eliptycznych, obdarzonych mnożeniem zespolonem, w części intuicyjnie, przeczuł Abel. Najważniejsze prace o tym przedmiocie zawdzięczamy Kroneckerowi (Ber. Monatsber. 1857—1862—1863—1870—1875—1877—1880—1882) i Hermite'owi (Comptes rendus 1859). Potem zajmowali się tą rzeczą Greenhill (Proc. of Camb etc., 1884), Weber (Acta math.

VI), Pick (Math. Ann. XXV, XXVI), Sylow (Liouville, III, 1887), Kiepert (Math. Ann. XXXIX) i t. d.

O zastosowaniach tej teorii do podziału łuku lemniskaty pisali: Abel (Dzieła), Hoffmann (Crelle XLVIII), Kiepert (tamże LXXV), Schering (tamże CVII).

Teoria funkcji eliptycznych powstała wraz z zagadnieniem o wyprostowaniu elipsy, hyperboli, lemniskaty i t. d. Zajmowali się nią pierwsi: Fagnano, Landen, d'Alembert, Maclaurin. Euler (Novi Comm. Petrop. X, 1764) zebrał rozproszone rezultaty i ustanowił zasady ogólne teorii. Po Eulerze przedmiotem tym zajmował się Legendre w licznych rozprawach (Acad. de Paris, 1786, 1793 i t. d.), poczem w r. 1825 ogłosił sławne dzieło p. t. „*Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes*“ (Paryż 1825 — 1828, 2 tomy z trzema suplementami).

Okres 1815 do 1829 nazwać można najważniejszym dla teorii funkcji eliptycznych, albowiem w nim, prócz klasycznego dzieła Legendre'a, ogłoszone były w krótkich odstępach czasu jedna po drugiej genialne prace Abela i Jacobi'ego. Dzieło Jacobi'ego p. t. „*Fundamenta nova Theoriae functionum ellipticarum*“ wydane zostało właśnie w r. 1829. W klasycznej tej pracy rozpoczął Jacobi badanie funkcji $\wp$, których teorię rozwinał następnie w późniejszych rozprawach. O historii rozwoju teorii funkcji eliptycznych w latach 1826—1829 można czytać z korzyścią dziełko Königsbergera (Zur Geschichte der ellipt. Funct. Lipsk 1879). Wskazówki historyczne zawiera też dzieło Casorati'ego „*Teorica delle funz. etc.*“ Po Jacobim najważniejszy krok w teorii funkcji eliptycznych uczynił Weierstrass przez wprowadzenie funkcji σ .

Teorią funkcji eliptycznych zajmowali się prawie wszyscy analitycy tego wieku, jedni inniej, drudzy więcej: Cayley, Hermite, Weierstrass, Brioschi, Klein i wielu innych.

Wskazówki historyczne szczegółowe, odnoszące się do tej teorii, zawiera cenne dzieło Ennepera (Elliptische Funct. Halle, 1890). Najważniejszymi traktatami, prócz Ennepera, są: Briota i Bouquet'a (Paryż 1875), Cayley'a przekład Brioschi'ego, Mediolan 1880), Königsbergera (Lipsk 1874), Greenhilla (Lon-

dyn 1892, przekład fr. 1897), Halphen'a (Paryż 1886). Ostatni autor stara się w dziele swem wprowadzić funkcy eliptyczne metodą elementarną, podobną do tej, jaką wprowadzają się funkcy trygonometryczne. Nie sądzę wszakże, aby metoda ta była najodpowiedniejszą do wytworzenia ogólnego i rozległego poglądu, i mniemam, że autor nie ma słuszności, gdy mówi w pewnem miejscu swej książki, że odtąd pewne inne metody i pewne inne rozważania należą już do historyi.

Zbiór wzorów, odnoszących się do teoryi Weierstrassa, zawiera dzieło wydane przez Schwarza: „Formeln und Lehrsätze etc.“ (Getynga 1889). Najnowszemi traktatami są dzieła: Tannery'ego i Molka (Paryż 1893), Appela-Lacoura (Paryż 1877), Krausego („Theorie der doppellperiodischen Funct.“, Lipsk 1890), Pascala (Medyolan 1896), Burkhardta „Elliptische Functionen, Lipsk 1899, Riemanna „Elliptische Functionen wyd. H. Stahl, Lipsk 1899.

Teoryę funkcyj eliptycznych przedstawić można za pomocą różnych metod: albo wychodzi się z odwrócenia całek eliptycznych, albo z teoryi ogólnej funkcyj, którą stosuje się do funkcyj podwójnie peryodycznych, albo wreszcie bierze się za punkt wyjścia funkcyę $\wp$ Jacobi'ego i liczne pomiędzy niemi zachodzące związki. W dziele, przeze mnie ogłoszonem, obrałem właśnie ten ostatni kierunek, wychodząc z rozprawy Jacobi'ego, w którym on założył sobie ten sam cel, o ile to było możliwem w jego czasach. Nie ulega wszakże wątpliwości, że i przy pomocy innych metod można w sposób zupełny i ogólny wyłożyć podstawy zasadnicze teoryi funkcyj eliptycznych, która jest jedną z najważniejszych w matematyce.

Teoryą funkcyj podwójnie peryodycznych, które są ogólnemi funkcyami eliptycznemi, zajmuje się rozdział XIV.

ROZDZIAŁ XVII.

FUNKCJE HYPERELIPTYCZNE I ABELOWE.

§ 1.

Twierdzenie Jacobiego o odwróceniu.

Rozpatrzmy całkę abelową rodzaju p (patrz Rozdz. XV).

$$v = \int_a^{(w, z)} F(w, z) dz,$$

Ma ona $2p$ modułów peryodyczności (jeżeli jest 1-go lub 2-go gatunku); stąd punkt (w, z) , uważany jako funkcya ilości v , jest funkcją $2p$ -krotnie peryodyczną. Na mocy sławnego twierdzenia Jacobiego (patrz Rozdział XIV) wiemy, że taka funkcya nie może być jednowartościową dla $p > 1$; stąd z , jako funkcya ilości v , będzie właściwie funkcją nie o jednej wartości, lecz o nieskończonej liczbie wartości. Odwrócenie całki abelowej nie daje się tym sposobem uskutecznić, gdyż nie doszlibysmy na tej drodze do funkcyj jednowartościowych. Jacobie pokonał tę trudność sposobem następującym (Crelle, IX).

sposób; że każdemu punktowi przestrzeni odpowiadać będzie punkt równoległoscianu początkowego o współrzędnych, różniących się o całkowite wielokrotności modułów peryodyczności od współrzędnych punktu rozważanego.

Każdemu układowi punktów $z_1, z_2, \dots, z_p$ odpowiada punkt równoległoscianu początkowego przestrzeni ilości u . Układ p punktów nie może w ogóle zmieniać się, pozostając równoresztowym z samym sobą o ile jest układem ogólnym, nie specjalnym (patrz twierdzenie Riemanna - Rocha). Jeżeli zaś rozważamy układ specjalny p punktów, wtedy wszystkim innym punktom równoresztowym z uważanym odpowiada ten sam punkt przestrzeni (u).

Każdy punkt równoległoscianu początkowego w przestrzeni (u) (pomijając pewne miejsce punktów osobliwych) odpowiada jednemu i tylko jednemu z układów p punktów i każdy układ p punktów odpowiada jednemu i tylko jednemu punktowi równoległoscianu początkowego. Punkty u , odpowiadające wszystkim możliwym układom p punktów, wypełniają cały równoległoscian początkowy.

Można tedy układ p punktów uważać w ogóle za funkcję p argumentów u ; mianowicie funkcja wymierna symetryczna p punktów, jakkolwiek na powierzchni Riemanna wybranych, może być uważana za funkcję jednowartościową ilości u . Funkcja taka nazywa się **abelową** i jest funkcją $2p$ -krotnie peryodyczną p argumentów. Na tem właśnie polega Jacobi'ego twierdzenie o odwróceniu, udowodnione przez niego najprzód dla przypadku hyperliptycznego, a następnie przez Weierstrassa dla przypadku abelowego (Crelle, LII).

Można jeszcze określić funkcję abelową w ten sposób. Wyobraźmy sobie funkcję wymierną $\frac{\varphi}{\psi}$ ilości w i z rozpatrzmy p wartości tej funkcji w p jakichkolwiek punktach.

Wartości te będą pierwiastkami równania, którego współczynniki są funkcjami jednowartościowymi argumentów u i funkcjami wymiernymi symetrycznymi współrzędnych p punktów. Funkcja symetryczna p pierwiastków takiego równania będzie funkcją abelową (Clebsch - Gordan, Abel'sche Functionen, str. 138—139).

Funkcja abelowa, według powyższego, będzie określona jako jednowartościowa dla wszystkich punktów przestrzeni $2p$ —wymiarowej ilości u , prócz pewnego miejsca ($p-2$) wymiarowego punktów osobliwych, w których może mieć nieskończenie wiele wartości. Dla $p=2$ miejsce to sprowadza się do punktu równoległościanu początkowego (np. do punktu (0) i wszystkich mu odpowiadających). Dla $p=3$ miejsce to tworzy w równoległościanie początkowym rozmaitość jednowymiarową. W miejscach tych funkcja abelowa przyjmuje postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$. (Patrz Clebsch - Gordan l. c. str. 184—187)

Szukanie wyrażeń funkcyj abelowych przez całki u stanowi tak zwane zagadnienie o odwróceniu. Rozwiązujemy to zagadnienie przy pomocy funkcyi ϑ , podobnie jak w przypadku eliptycznym

Jeżeli zasadnicza powierzchnia Riemanna jest hypereliptyczną, wtedy odpowiadające jej funkcyje nazywają się hypereliptycznymi lub ultraeliptycznymi (Prym).

W rozprawach Weierstrassa funkcyje abelowe oznaczone są symbolami $A_1(u_1, u_2, \dots, u_p)$.

§ 2.

Własności zasadnicze funkcyj abelowych.

Pochodna funkcyi abelowej jest funkcją abelową.

Pomiędzy $p+1$ funkcyami abelowemi, a w szczególności pomiędzy funkcyą abelową i jej p pochodnemirzędu 1-go, zachodzi związek algebraiczny.

Każdą funkcyę abelową można wyrazić wymiennie przez $p+1$ danych funkcyj abelowych, w szczególności zaś przez daną funkcyę abelową i jej p pochodnych pierwszego rzędu.

Każda funkcyja abelowa posiada **twierdzenie o dodawaniu algebraicznem**, t. j. wartość jej dla argumentów $u_i + U_i$ wyraża się wymiennie przez wartości $p+1$ funkcyj abelowych dla argumentów u_i i U_i .

Istnieje, jak widzimy, analogia tych twierdzeń z twierdzeniami, odnoszącemi się do funkcyj podwójnie peryodycznych.

Co do innych szczegółów patrz np. *Stahl, Abel'sche Functionen*, Lipsk 1896, str. 305 i następ.

§ 3.

Szeregi ϑ i ich własności.

Uogólnijmy szeregi ϑ , znane z teoryi funkcyj eliptycznych.

Napiszmy:

$$\vartheta(v_1, v_2, \dots, v_p) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{\Omega},$$

gdzie

$$\Omega = (\tau_{11}n_1^2 + 2\tau_{12}n_1n_2 + \dots + \tau_{pp}n_p^2) + 2(n_1v_1 + n_2v_2 + \dots + n_pv_p),$$

suma zaś Σ rozciąga się na wszystkie możliwe kombinacje wartości całkowitych, dodatnich i ujemnych liczb $n_1, n_2, \dots, n_p$.

Ilości $u_1, v_1, \dots, v_p$ nazywamy argumentami funkcji ϑ , ilości $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{pp}$ — modułami. Moduły czynią zadość związkowi $\tau_{ij} = \tau_{ji}$.

Aby szereg powyższy był zbieżny, jest koniecznem i dostatecznem, by wyznacznik

$$\begin{vmatrix} \tau'_{11}, & . & . & . & . & , & \tau'_{1p} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ \tau'_{p1}, & . & . & . & . & . & \tau'_{pp} \end{vmatrix},$$

gdzie τ' oznacza część rzeczywistą modułu τ , był różny od zera i by forma kwadratowa

$\sum_{i,k=1}^{1,\dots,p} \tau'_{ik} n_i n_k$ była określona i ujemnego znaku.

Gdy te warunki spełniają się, wtedy ϑ przedstawia funkcję zawsze skończoną i ciągłą dla wszystkich skończonych wartości argumentów; nadto czyni zadość następującym związkom zasadniczym. 1. Jeżeli v_k powiększymy o πi , funkcyja nie ulegnie zmianie. 2. Jeżeli argumenty $v_1, v_2, \dots, v_p$ powiększymy odpowiednio o $\tau_{k1}, \tau_{k2}, \dots, \tau_{kp}$, nowa wartość funkcji będzie równa pierwotnej, pomnożonej przez $e^{-(2\pi i \tau_{kk} + \tau_{kk})}$. Kombinując te dwie własności, otrzymujemy następującą ogólniejszą. 3. Jeżeli $g_1, g_2, \dots, g_p; h_1, h_2, \dots, h_p$ są liczby całkowite, a G_k i G oznaczają odpowiednio wyrażenia

$$h_k \pi i + \sum_j g_j \tau_{kj}; \quad 2 \sum_j g_j v_j + \sum_{jk} \tau_{jk} g_j g_k + 2i\pi \sum_k g_k h_k,$$

będzie:

$$\vartheta(v_1 + G_1, \dots, v_p + G_p) = \vartheta(v_1, \dots, v_p) e^G.$$

4. Funkcya ϑ jest funkcją parzystą. 5. Funkcya ϑ i wszystkie jej pochodne czynią zadość równaniom różniczkowym:

$$4 \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau_{ii}} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial v_i^2}, \quad 2 \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau_{ij}} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial v_i \partial v_j}.$$

Powyższe własności są charakterystycznymi dla funkcji ϑ ; funkcja, która je posiada, może różnić się od funkcji ϑ tylko czynnikiem.

Oznaczmy teraz przez $g_1, g_2, \dots, g_p$; $h_1, h_2, \dots, h_p$ szereg liczb niecałkowitych, mianowicie ułamków o mianowniku 2; wystarczy rozważyć dwa przypadki, w którym licznik jest zerem lub jednością.

Utwórzmy przy pomocy liczb g i h wskazane wyżej wyrażenia $G_1, \dots, G_p$ i rozpatrzmy funkcję $\vartheta(v_1 + G_1, \dots, v_p + G_p)$, którą oznaczać będziemy

$$\text{przez } \vartheta \left(\begin{matrix} g_1, \dots, g_p \\ h_1, \dots, h_p \end{matrix} \right) (r_1, \dots, v_p) \quad \text{lub przez } \vartheta \left(\begin{matrix} g \\ h \end{matrix} \right) (v).$$

Nowa ta funkcja różni się od poprzedniej funkcji ϑ , którą obejmuje i tenże symbol ogólny, mianowicie gdy wszystkie liczby g i h są zerami. Symbol

$$\left(\begin{matrix} g_1, \dots, g_p \\ h_1, \dots, h_p \end{matrix} \right) \text{ lub } \left(\begin{matrix} g \\ h \end{matrix} \right)$$

nazywa się **charakterystyką** funkcji ϑ . Każdej charakterystyce odpowiada pewna funkcja ϑ ; dwie zaś charakterystyki, których odpowiednie liczby różnią się od siebie o liczby całkowite, dają tę samą funkcję ϑ (pomijając czynnik). Stąd wynika, że będzie można mieć tyle funkcji ϑ , ile można utworzyć charakterystyk w ten sposób, aby liczby odpowiednie w dwóch takich charakterystykach różniły się zawsze o liczby całkowite. Dość będzie, jak już powiedziano, ograniczyć się do takich charakterystyk, w których liczniki ułamków g, h mają wartości 0, 1. Istnieje 2^{2p} charakterystyk, które można uważać za różne, a więc i tyleż funkcji ϑ . Funkcja ϑ początkowa ma charakterystykę $\left(\begin{matrix} 0, \dots, 0 \\ 0, \dots, 0 \end{matrix} \right)$.

Te funkcye ϑ są parzyste lub nieparzyste stosownie do tego, czy suma $4(g_1h_1+g_2h_2+\dots+g_ph_p)$ jest parzysta lub nieparzysta (g i h są ułamkami o mianowniku 2).

Jeżeli przez $g_1, \dots, g_p, h_1, \dots, h_p$ rozumiemy nie same ułamki o mianowniku 2, lecz liczniki tych ułamków, wtedy liczby, składające charakterystykę, nie są już ułamkowemi, lecz są całkowitemi i otrzymujemy tym sposobem symbole uproszczone.

Liczba funkcyj ϑ parzystych jest $2^{p-1}(2^p+1)$, nieparzystych jest $2^{p-1}(2^p-1)$. Dla $p=2$ mamy 10 parzystych, 6 nieparzystych; dla $p=3$ mamy 36 parzystych, 28 nieparzystych.

Tak utworzone funkcye ϑ czynią zadość wyżej napisanym równaniom różniczkowym. Nadto czynią zadość związkom:

$$\vartheta\left(\frac{g}{h}\right)(v, \dots, v_k + \pi i, \dots, v_p) = (-1)^{g_k} \vartheta\left(\frac{g}{h}\right)(v_1, \dots, v_p),$$

$$\vartheta\left(\frac{g}{h}\right)(v_1 + \tau_{k1}, \dots, v_p + \tau_{kp}) = (-1)^{h^k} e^{-(2\tau_k + \tau_{kk})} \vartheta\left(\frac{g}{h}\right)(v_1, \dots, v_p);$$

związki te można uważać za uogólnienie związków, którym czyni zadość funkcya ϑ zasadnicza.

Jeżeli do składu charakterystyki, zamiast liczb o mianowniku 2, bierzemy liczby o mianownikach 3, 4 ..., otrzymujemy funkcye, bardziej złożone od poprzednich.

Funkcye ϑ dla jakiegokolwiek wartości liczby p badał pierwszy Riemann w sławnej rozprawie o funkcjach abelowych oraz w innych rozprawach (Crelle, LXV). Rozliczne związki w przypadku $p=2$ badali: Göpel (Crelle XXXV), Rosenhain (Mém. des Sav. étrang., XI, 1851) i Hermite (Comptes rendus XL, 1855). Ważne prace o teorii funkcyj ϑ , o ich związkach i o teorii charakterystyk ogłosili: Prym (Riemann's Charakteristikentheorie etc, Lipsk, 1822), Krazer (Theorie der zweifachen unendlichen Thetareihen, Lipsk 1882), We-

ber (Math. Ann. XIV, Crelle LXXXIV), Prym i Krazzer (Acta math. III), Stahl (Crelle LXXXVIII), Frobenius (Crelle LXXXIX), Kause (Hyperell. Functionen, Lipsk 1886), Schottky (Abel'sche Functionen, Lipsk 1880) i inni.

O charakterystykach wyższych, t. j. gdy mianownik jest większy od 2, pisali: Krazzer (Math. Ann. XXII), von Braunnühl (Math. Ann. XXXII). Co do rodzaju $p=1$ patrz: Thomae (Math. Ann. VI), Klein (tamże XVII, str. 132, 565), Bianchi tamże, XVII. str. 234). Badania t. z. konfiguracji charakterystyk dla $p=3$ i $p=4$ oraz różnych zastosowań tej teorii prowadził E. Pascal (Ann. di mat. XX, XXI i rozmaite noty w Rend. Lincei 1892—93),

§ 4.

Funkcye ϑ , mające za argumenty całki abelowe gatunku 1-go.

Można przyjąć, że moduły τ funkcyj ϑ są modułami peryodyczności układu całek normalnych gatunku 1-go, gdyż warunki, jakim te ostatnie czynią zadość, są takie same jak warunki, które muszą spełniać ilości τ , aby odpowiedni szereg, wyrażający funkcję ϑ , był zbieżny.

Weźmy następnie zamiast argumentów układ p całek normalnych 1-go gatunku o większej liczbie wyrazów niż w § 1, wtedy funkcye ϑ staną się funkcjami punktów powierzchni Riemanna.

Weźmy argumenty pod postacią $\tau_i - e_i$, gdzie e_i są ilościami stałymi, τ_i zaś są równe $\int_a^{\tau_i} dv_i$. Tak utworzona funkcya ϑ jest zawsze skończona i ciągła dla każdego punktu powierzchni Riemanna; zachowuje ona też samą wartość przy przejściu przez cięcia A i przy przejściu przez cięcia C , a pozyskuje czynnik $e^{-2(\tau_i - e_i) - \tau_i}$, gdy przekraczamy cięcia B_i na

powierzchni Riemanna. Funkcya ta posiada p punktów zerowych, czyniących zadość związkom:

$$\int_a^{z_1} + \dots + \int_a^{z_p} = k_i - e_i \pmod{\tau i \pi i},$$

t. j. sumy, jakie przedstawiają strony pierwsze, są równe $k_i - e_i$ (k są stałe, niezależne od punktów z i od stałych e_i , a zależne od cięć na powierzchni Riemanna), jeżeli pominiemy kombinację liniową o współczynnikach całkowitych modułów τ i πi (które są modułami peryodyczności całek gatunku 1-go). (Twierdzenie Riemanna.)

Jeżeli ϑ jest tożsamościowo zerem, to punkty $z_1, z_2, \dots, z_p$ są punktami zerowymi krzywej dołączonej rzędu $n-3$; jeżeli zaś punkty z nie są takimi punktami, to ϑ nie może być tożsamościowo zerem.

Można wyznaczyć punkty $a_1, a_2, \dots, a_p$ w ten sposób, aby funkcya:

$$\vartheta \left(\int_a^z dv - \sum_{i=1}^p \int_{a_i}^{z_i} dv \right)$$

znikała w p punktach $z=z_i$; punkty a_i są określone algebraicznie jako punkty styczności krzywej oznaczonej, stycznej do krzywej zasadniczej $f(w, z)=0$, oraz określone przestępnie jako punkty zerowe (w liczbie) p funkcyi $\vartheta \left(\int_a^z dv \right)$. Takież twierdzenie stosuje się do funkcyi ϑ z charakterystyką jakąkolwiek; zmienia się tylko krzywa styczności.

Biorąc pod uwagę funkcye ϑ z charakterystyką jakąkolwiek $\left(\frac{g}{h} \right)$, możemy powiedzieć ogólnie:

Punktami zerowymi funkcji $\vartheta \left(\frac{g}{h} \right) \left(\int_a^z dv \right)$ są punkty styczności krzywej dołączonej rzędu $n-2$, gdy charakterystyka funkcji ϑ jest parzysta; punkt a i zbiór $p-1$ punktów styczności krzywej dołączonej rzędu $n-3$, gdy charakterystyka funkcji ϑ jest nieparzysta. Każdej charakterystyce odpowiada specjalny układ krzywych styczności.

Logarytm ilorazu dwu funkcji ϑ , których argumenty są całkami gatunku 1-go, wyraża się za pomocą całki gatunku 3-go.

Pierwsze pochodne logarytmowe funkcji ϑ wyrażają się za pomocą całek gatunku 2-go oraz funkcji algebraicznych.

Drugie pochodne logarytmowe funkcji ϑ wyrażają się za pomocą funkcji algebraicznych; pochodne te są właściwie funkcjami abelowymi w tem znaczeniu, w jakim je określono w § 1.

Ilorazy funkcji ϑ są funkcjami abelowymi.

Na podstawie tych i innych twierdzeń podobnych funkcje ϑ służą do rozwiązywania zagadnienia odwróceniu.

Więcej szczegółów znajdzie czytelnik w cytowanych już dziełach Clebscha-Gordana, Neumanna, Stahla; w pracach: Pryma (Akad. wied, 1864, Schweiz. Gesell. 1868), Webera (Berlin 1876), Thomae'go (Halla, 1877—1879).

Ze stanowiska teoretycznego uczyniono w ostatnich czasach znaczny postęp, wprowadzając zamiast funkcji ϑ funkcje σ , podobnie jak to uczynił Weierstrass dla przypadku eliptycznego. Funkcje σ , wprowadzone przez Kleina różnią się od funkcji ϑ czynnikiem, a przedstawiają tę dogodność że wzajemnie przemieniają się wprost przy przekształceniu liniowem

peryodów, gdy tymczasem funkcye ϑ przy przemianie tej pozyskują jeszcze czynnik wykładniczy.

Odsyłając czytelnika do dzieł Kleina i innych, poniżej cytowanych, ograniczamy się tu jedynie na podaniu głównych wzorów nowej teorii i to tylko dla przypadku hyperliptycznego.

§ 5.

Funkcye σ Kleina w przypadku hyperliptycznym.

Po wprowadzeniu spórzędnych jednorodnych, t. j. przy założeniu $z = \frac{z_1}{z_2}$, forma zasadnicza hyperliptyczna rodzaju p niechaj będzie typu:

$$w^2 z_2^{2p} = f_{2p+2}(z_1, z_2) = a_2^{2p+2} = b_2^{2p+2} = \dots,$$

gdzie strona druga jest formą dwójkową stopnia $2p+2$ w postaci symbolicznej (patrz Rozdział XII).

Niechaj całkami normalnemi gatunku 1-go będą:

$$w_1 = \int_y^x \frac{z_1^{p-1} (z_1 dz_2 - z_2 dz_1)}{V f(z_1, z_2)},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$w_p = \int_y^x \frac{z_2^{p-1} (z_1 dz_2 - z_2 dz_1)}{V f(z_1, z_2)},$$

Całką zasadniczą gatunku 1-go z punktem pojedynczo-nieskończonym niechaj będzie:

$$Z^{(t)} = \int_y^x \frac{(z dz)}{V f(z)} \frac{V \overline{f(z)} V \overline{f(t)} + a_2^{p+1} a_t^{p+1}}{2 (zt)^3},$$

Różniczkując to wyrażenie $p-1$ razy względem t_1 i t_2 dzieląc przez $(n-1)!$, otrzymujemy p całek normalnych $Z_1, Z_2, \dots, Z_p$. Całka normalna gatunku 3-go niechaj będzie całką, którą Klein oznacza literą Q ; ma ona własność, że jej funkcya podcałkowa jest spółmiennikiem formy dwójkowej zasadniczej: jest tedy:

$$Q_{xy}^{x', y'} = Q_{x' y'}^{xy} = \int_y^x \frac{(z dz)}{V f(z)} \cdot \int_{y'}^{x'} \frac{z' dz'}{V f(z')} \frac{V f(z) \cdot V f(z') + a_z^{p+1} \cdot a_{z'}^{p+1}}{2 (z z')^2}.$$

Punktami nieskończoności logarytmowej tej całki trzeciego gatunku są punkty: x', y' .

Przy pomocy całki Q utwórzmy wyrażenie:

$$\Omega(x, y) = \frac{(xy)}{V f(x) f(y)} e^{\frac{1}{2} Q_{xy}^{\bar{x} \bar{y}}},$$

gdzie przez $Q_{xy}^{\bar{x} \bar{y}}$ rozumiemy wartość Q wtedy, gdy punkty nieskończoności x', y' stają się punktami odpowiednio sprzężonemi na powierzchni hyperliptycznej dwupowłokowej (punktami sprzężonemi na powierzchni dwupowłokowej nazywamy dwa punkty, z których jeden leży na jednej, drugi na drugiej połowie). Wyrażenie to ma ważne znaczenie w rozważaniach Kleina; nazywa się ono formą pierwotną lub główną (Primform) i ma tę własność, że nie posiada wcale rozgałęzienia na powierzchni Riemanna; że ma jeden tylko punkt zerowy $x=y$ i nie staje się wcale nieskończonem.

Funkcyę σ argumentów

$$u_i = \left\{ \int_{y'}^{x'} + \int_{y''}^{x''} + \dots + \int_{y^{(p)}}^{x^{(p)}} \right\} dw_i, \quad (i=1, 2, \dots, p)$$

można określić niezależnie od funkcji ϑ . Utwórzmy wyrażenie

$$M = \frac{\prod_{i,k} \Omega(x^{(i)} y^{(k)})}{\prod_{i,k} (x^{(i)} y^{(k)}) \prod_{i,k} \Omega(x^{(i)} x^{(k)}) \prod_{i,k} \Omega(y^{(i)} y^{(k)})},$$

w którym symbol $\Pi_{i,k}$ oznacza iloczyn, rozciągnięty na wszystkie kombinacje $i, k=1, 2, \dots, v$, symbol zaś $\Pi'_{i,k}$ także iloczyn z wyłączeniem kombinacji $i=k$. Wszystkie funkcje σ posiadać będą czynnik M ; drugi czynnik zmieniać się będzie wraz z σ ; budowa jego zależy od rozkładu formy dwójkowej f ma dwa czynniki takie, że różnica ich stopni jest wielokrotnością liczby 4. Połóżmy tedy:

$$f_{2p+2} = \varphi_{p-1-2\mu} \psi_{p+1+2\mu}, \quad (\mu=0, 1, \dots, \frac{p+1}{2})$$

i napiszmy wyznacznik $D_{\varphi\psi}$ rzędu $2v$, którego wiersze tworzą się przez podstawienie zamiast z odpowiednio

$$x', x'', \dots, x^{(v)}, y', y'', \dots, y^{(v)}$$

w elementach:

$$z_1^{v-1+\mu} \sqrt{\varphi(z)}, \quad z_2^{v-1+\mu} \sqrt{\varphi(z)}, \dots, z_1^{v-1-\mu} \sqrt{\psi(z)}, \dots$$

Wtedy każda funkcja σ będzie miała wyrażenie takie:

$$\sigma_{\varphi\psi} = M D_{\varphi\psi}.$$

Ponieważ można uskuteczyć 2^{2v} rozkładów formy f na iloczyn $\varphi\psi$, istnieje przeto 2^{2v} zasadniczych funkcji σ , z których każda jednemu z tych rozkładów odpowiada.

Funkcje σ dają się wyrazić jako iloczyn funkcji ϑ przez czynnik wykładniczy stopnia 2-go względem argumentów u oraz przez czynnik, zależny tylko od modułów i współczynników.

Gdy pomnożymy funkcje σ przez $s = \sqrt[8]{\Delta_\varphi \Delta_\psi}$, gdzie $\Delta_\varphi, \Delta_\psi$ są wyróżnikami form φ i ψ (jeżeli stopień jednej z funkcji φ, ψ staje się 0 lub 1, zamiast odpowiedniego wyróżnika należy podstawić 1), otrzymamy funkcję, którą niektórzy autorowie oznaczają symbolem Th (np. Wiltheiss, Math. Ann. XXXIII).

Tak utworzone funkcyje σ nie stają się nigdzie nieskończonemi na powierzchni Riemanna. Stosownie do tego, czy liczba μ jest parzystą lub nieparzystą i funkcyja σ jest parzystą lub nieparzystą. Funkcyja σ , odpowiadająca specjalnej wartości μ , staje się 0^μ w punkcie $u_1 = u_2 = \dots u_p = 0$.

Dla $p=2$ istnieje 10 funkcyj σ parzystych i 10 nieparzystych. Dla $p=3$ mamy: 28 funkcyj σ nieparzystych, odpowiadających rozkładowi formy rzędu 8go na formę kwadratową i formę rzędu 6-go; 35 funkcyj σ parzystych nieznikających dla argumentu zero i odpowiadających rozkładowi formy f na dwie formy rzędu 4-go; ostatnia funkcyja parzysta, która znika dla argumentu zero, odpowiada rozkładowi formy danej na funkcyję rzędu 8-go oraz formę rzędu zerowego.

Funkcye σ czynią zadość pewnym równaniom różniczkowym cząstkowym rzędu drugiego, dającym się przy pomocy pewnych modyfikacyj wyprowadzić z równań prostszych, którym czynią zadość funkcyje ϑ .

Dla funkcyj T_h równanie takie otrzymał Wiltheiss.

Funkcye σ dają się rozwinąć na szeregi, których wyrazy postępują według potęg argumentów, są funkcyami wymiernemi całkowitemi współczynników form φ i ψ i posiadają własność niezmienniczą. Jeżeli położymy:

$$f(z) = u_1 z_2^{p-1} - (p-1) u_2 z_2^{p-2} z_1 \dots \dots ,$$

to każdy wyraz będzie niezmiennikiem jednoczesnym trzech form dwójkowych χ , φ , ψ ; każdy z nich mianowicie jest typu:

$$\begin{pmatrix} \mu + 2\varrho & \mu + \varrho & \varrho \\ \chi & \varphi & \psi \end{pmatrix},$$

gdzie skażniki, postawione nad literami χ , φ , ψ , oznaczają stopnie wyrazu względem współczynników tych trzech form dwójkowych.

Klein rozciągnął konstrukcję funkcji α i na przypadek funkcji abelowych dla p jakiegokolwiek. Przypadek $p=3$ zbadał on potem szczegółowiej; lecz nie możemy wchodzić w szczegóły tego badania.

Głównymi pracami, traktującymi o funkcjach σ hyperliptycznych, o ich rozwinięciu na szeregi, o równaniach różniczkowych, którym zadość czynią, są prace: Kleina (Math. Ann. XXVII, XXXII), Burkhardta (Math. Ann. XXXII, XXXY), Brioschi'ego (Acc. dei Lincei 1888), Wiltheissa (Crelle IC, Math. Ann. XXIX, XXXI, XXXIII), E. Pascala (Ann. di mat. XVII, XVIII, XIX). Z prac, odnoszących się do wspomnianej wyżej konstrukcji ogólniejszych funkcji σ , wymienimy badania: Kleina (Math. Ann. XXXVI), Wiltheissa (Götting. Nachr. 1889), E. Pascala (tamże 1889, Annali di Mat. XVII, XVIII), Wirtingera (Math. Ann. XL, Monatshefte, II). Wykłady Kleina, które dały początek tym badaniom nad funkcjami σ hyperliptycznymi i abelowymi, miały miejsce w Getyndze w latach 1887—1889.

ROZDZIAŁ XVIII.

FUNKCJE SPECYALNE.

§ 1.

Funkcja wykładnicza i funkcja logarytmowa. Liczba e.

Funkcję wykładniczą przedstawia szereg

$$1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \dots,$$

zbieżny dla wszelkiej wartości zespolonej zmiennej z ; oznaczamy tę funkcję symbolem e^z . Wartość tej funkcji dla $z=1$, t. j. e nazywa się podstawą logarytmów naturalnych; wartość funkcji wykładniczej dla jakiejkolwiek wartości z jest potęgą z -tą liczby e .

Liczba e jest nie tylko liczbą niewymierną, ale jest nadto liczbą przestępną (patrz Rozdz. XXI). Wartość liczby e wynosi:

$$e = 2, 71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 02874\ 71353\ \dots,$$

$$\log \text{ vulg. } e = 0, 434\ 294\ 481\ 903\ 251\ 827\ 651\ 128\ 919\ \dots$$

$$\sqrt[e]{e} = 1, 444\ 667\ \dots$$

Funkcya wykładnicza posiada własność zasadniczą, wyrażającą się związkiem:

$$f(z) \cdot f(z') = f(z+z'),$$

t. j. tak zw. twierdzeniem o dodawaniu.

Funkcya e^z jest peryodyczna; peryodem jej jest $2\pi i$. Równanie $e^z = 0$ nie ma żadnego pierwiastku skończonego.

Każdy pierwiastek równania $e^z = w$ nazywa się logarytmem naturalnym liczby w . Logarytmów liczby w jest nieskończenie wiele; każde dwa różnią się o wielokrotność liczby $2\pi i$. Ilość z , uważana jako funkcja ilości w , jest funkcją wielowartościową o nieskończenie wielu wartościach; pomiędzy temi wartościami obieramy jedną, w której współczynnik części urojonej zawiera się pomiędzy $-\pi$ a $+\pi$, (włączając $\pm\pi$). Tym sposobem określamy funkcję jedno-wartościową ilości w , która nazywa się funkcją logarytmową naturalną i oznacza się przez $\log_e w$.

Dla każdej wartości w , której moduł jest ≤ 1 (z wyłączenia wartości $w = -1$) szereg

$$w - \frac{w^2}{2} + \frac{w^3}{3} - \dots$$

jest zbieżny, a wartością jego jest logarytm (w znaczeniu ściślejszem, o którym dopiero co była mowa) ilości $1+w$ t. j. $\log_e(1+w)$; część urojona tej funkcji zawiera się pomiędzy $-\frac{\pi i}{2}$ a $+\frac{\pi i}{2}$.

Można, według Riemanna, określić funkcję logarytmową ogólną jako funkcję, czyniącą zadosięc związkowi funkcyj-nemu:

$$f(w \cdot w_1) = f(w) + f(w_1);$$

wtedy funkcja jest oznaczona, gdy się pominie stałą mnożącą. Z tego związku mamy $f(1)=0$, $f(0)=\infty$. Różniczkując, względem w_1 i kładąc następnie $w_1=1$, otrzymujemy

$wf'(w) = f'(1)$, a stąd, gdy oznaczymy $f'(1)$ przez M (moduł), będzie:

$$f(w) = M \int_1^w \frac{dw}{w},$$

Funkcja tak określona jest funkcją odwrotną względem funkcji typu $w = A^x$; liczba A nazywa się podstawą.

Jeżeli moduł $M=1$, wtedy funkcja logarytmowa staje się naturalną; jej podstawą jest liczba e .

Funkcja logarytmowa nienaturalna równa się funkcji naturalnej, pomnożonej przez stałą (moduł).

Gdy zmienna w okrąży punkt zero i powróci do punktu wyjścia, znajdziemy wtedy na funkcję logarytmową wartość różną od pierwotnej, a więc będziemy mieli nieskończenie wiele wartości. Uczynimy jednowartościową tę funkcję, jeżeli na płaszczyźnie w przeprowadzimy cięcie od punktu zero do nieskończoności (patrz Rozdz. XIII, § 4).

Dla argumentu rzeczywistego otrzymujemy zawsze wartość rzeczywistą funkcji logarytmowej naturalnej. Taką wartość będzie można wtedy wprost określić jako liczbę rzeczywistą z , czyniącą zadość równaniu $e^z = w$ dla danej jakiegokolwiek wartości rzeczywistej na w . Tę liczbę nazywamy zwykle logarytmem naturalnym lub hyperbolicznym (ponieważ może służyć do kwadratury hyperboli równobocznej). Dzieląc liczbę z przez

$$\log e = 2,3025851 \dots$$

lub mnożąc przez

$$M = \frac{1}{\log_e 10} = 0,43429 \dots$$

otrzymujemy logarytm zwyczajny lub dziesiętny Briggsa, (od nazwiska autora, który pierwszy sporządził ich tablice w r. 1617). Liczba M nazywa się zwykle modulem

układu logarytmów Briggsa. Adams obliczył tę liczbę (Proceed. of the Royal Society 1878, str 73) z 282 cyframi dziesiętnymi. Logarytmy zwyczajne określa się zwykle jako rozwiązania rzeczywiste równania wykładniczego $10^x = w$ dla wszystkich wartości w . Dla logarytmów naturalnych podstawą jest e , a modułem 1; dla logarytmów zwyczajnych podstawą jest 10, modułem $\frac{1}{\log_e 10} = 0,43429 \dots$

Logarytmy, utworzone pierwotnie przez Nepera 1614), nie były właściwie logarytmami naturalnymi. Te ostatnie zbudowano po raz pierwszy w r. 1619 (New logarithmes, London, 1619). Logarytmy Nepera, znajdujące się w dziełach „Canonis descriptio“ (Edynburg 1614) i „Canonis constructio“ (tamże 1619) mają podstawę zmienną. Jeżeli przez La oznaczymy logarytmy Nepera, przez $\log_e a$ logarytmy naturalne będzie:

$$\frac{La}{10^x} + \log_e \frac{a}{10^i} = 0,$$

a więc podstawa logarytmów Nepera zmienia się wraz z a . I dla tego to pierwotne logarytmy Nepera zarzucono i zastąpiono je logarytmami naturalnymi (które nazywano też neperowemi).

Należy się tu wzmianka logarytmom dodawania i odejmowania, zbudowanym po raz pierwszy przez Leonelli'ego, a następnie przez Gaussa (Werke II, III) przy pomocy których, mając logarytmy dwu liczb a, b , można znaleźć logarytm ich sumy i różnicy. Tablice te składają się z trzech kolumn: w pierwszej umieszczono $\log m$, w drugiej $\log \left(1 + \frac{1}{m}\right)$, w trzeciej $\log (1+m)$. W kolumnie pierwszej szukamy:

$$\log a - \log b = \log \frac{a}{b} \quad (\text{w założeniu } \log a > \log b)$$

w drugiej:

$$\log \left(1 + \frac{b}{a} \right) = \log \frac{a+b}{a} = \log (a+b) - \log a,$$

i stąd już znajdujemy $\log(a+b)$. Podobnie możnaby posługiwać się kolumną trzecią. Tablice takie znajdują się w wielu podręcznikach logarytmowych, np. w podręczniku K ö h l e r a.

§ 2.

Funkcje kołowe i hyperboliczne.

Funkcje kołowe „wstawa“ i „dostawa“ określają się analitycznie dla jakiegokolwiek argumentu rzeczywistego lub zespolonego przez wzory:

$$\sin z = \frac{z}{1} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots,$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots;$$

szeregi po stronach drugich są zbieżne dla wszelkich wartości z . Przy pomocy tych funkcji określamy następujące:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z}, \quad \operatorname{ses} z = \frac{1}{\cos z}, \quad \operatorname{cosec} z = \frac{1}{\sin z}.$$

Dla dwóch funkcji $\sin z$, $\cos z$ ma miejsce związek zasadniczy $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$. Dla argumentu rzeczywistego funkcje kołowe są rzeczywistymi.

Nie będziemy się tu zatrzymywać nad dobrze znanym przedstawieniem geometrycznym tych funkcji w przypadku, gdy z jest rzeczywiste.

Funkcje kołowe są peryodyczne; modulem ich peryodyczności jest 2π .

Wzoram i głównemi są następujące:

$$\sin(z \pm z_1) = \sin z \cos z_1 \pm \cos z \sin z_1,$$

$$\cos(z \pm z_1) = \cos z \cos z_1 \mp \sin z \sin z_1,$$

$$\begin{aligned} \sin(z + z_1 + z_2) &= \sin z \cos z_1 \cos z_2 + \sin z_1 \cos z_1 \cos z_2 \\ &\quad + \sin z_2 \cos z \cos z_1 - \sin z \sin z_1 \sin z_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(z + z_1 + z_2) &= \cos z \cos z_1 \cos z_2 - \cos z \sin z_1 \sin z_2 \\ &\quad - \cos z_1 \sin z \sin z_2 - \cos z_2 \sin z \sin z_1, \end{aligned}$$

$$(z \pm z_1) = \frac{\operatorname{tg} z \pm \operatorname{tg} z_1}{1 \mp \operatorname{tg} z \operatorname{tg} z_1}, \quad \operatorname{tg}(z + z_1 + z_2 + \dots) = \frac{S_1 - S_2 + S_3 - \dots}{1 - S_2 + S_4 - \dots}$$

gdzie przez S_1 rozumiemy sumę stycznych argumentów pojedynczych, przez S_2 sumę iloczynów stycznych argumentów, branych po dwa, przez S_3 sumę iloczynów argumentów, branych po trzy i t.d.;

$$\sin z \pm \sin z_1 = 2 \sin \frac{1}{2}(z \pm z_1) \cos \frac{1}{2}(z \mp z_1),$$

$$\cos z \pm \cos z_1 = 2 \sin \frac{1}{2}(z + z_1) \cos \frac{1}{2}(z - z_1),$$

$$\cos z \pm \sin z_1 = 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{z \mp z_1}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{z \pm z_1}{2} \right),$$

$$\operatorname{tg} z \pm \operatorname{tg} z_1 = \frac{\sin(z \pm z_1)}{\cos z \cos z_1},$$

$$\sin 2z = 2 \sin z \cos z, \quad \cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z, \quad \operatorname{tg} 2z = \frac{2 \operatorname{tg} z}{1 - \operatorname{tg}^2 z},$$

$$\sin 3z = 3 \sin z - 4 \sin^3 z; \quad \cos 3z = 4 \cos^3 z - 3 \cos z,$$

$$\operatorname{tg} nz = \frac{n \operatorname{tg} z - (n)_3 \operatorname{tg}^3 z + \dots}{1 - (n)_2 \operatorname{tg}^2 z + (n)_4 \operatorname{tg}^4 z - \dots},$$

$$\frac{1}{2}z = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos z}{2}}, \quad \cos \frac{1}{2}z = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos z}{2}}, \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2}z = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos z}{1 + \cos z}}.$$

Funkcye kołowe są związane z funkcyami wykładniczymi za pomocą godnych uwagi związków Eulera:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad e^{iz} = \cos z + i \sin z.$$

Funkcya „wstawa“ dla argumentu czysto urojonego iz , gdzie z jest rzeczywiste, jest ilością urojoną czystą, stąd funkcyą $\frac{\sin(iz)}{i}$ (z rzeczywiste) jest funkcyą rzeczywistą. Dla tegoż argumentu czysto urojonego funkcyą „dostawa“ jest funkcyą rzeczywistą, funkcyą zaś „styczna“ jest funkcyą rzeczywistą po podzieleniu przez i . Te funkcye rzeczywiste

$$\frac{\sin(iz)}{i}, \quad \cos iz, \quad \frac{\operatorname{tg}(iz)}{i}$$

nazywają się funkcyami hyperbolicznymi i oznaczają się odpowiednio za pomocą symboli:

$$\sinh z, \quad \cosh z, \quad \operatorname{tgh} z.$$

Z tych określeń widać odrazu, że funkcye hyperboliczne posiadają własności, podobne do własności funkcyj kołowych; wzory dla pierwszych wyprowadzają się z wzorów dla drugich przez podstawienie $i \sinh$ zamiast $\sin$, $\cosh$ zamiast $\cos$, $i \operatorname{tgh}$ zamiast tg . Wzorami wykładniczymi dla funkcyj hyperbolicznych są:

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

Związek zasadniczy pomiędzy wstawą i dostawą zamienia się na następujący:

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1.$$

Funkcye hyperboliczne otrzymały swoją nazwę z powodu własności następującej:

Jeżeli nakreślimy hyperbolę równoboczną, której równaniem (w odniesieniu do osi hyperboli) jest $x^2 - y^2 = 1$ i jeżeli przez z oznaczymy pole podwójne wycinka hyperbolicznego, ograniczonego osią x , promieniem wodzącym OA (idącym ze środka O hyperboli do punktu A na niej) oraz gałęzią samej krzywej, wtedy współrzędne x, y punktu A będą równe odpowiednio dostawie i wstawie hyperbolicznej ilości z .

Jeżeli poprowadzimy styczną w wierzchołku M hyperboli aż do przecięcia się w punkcie T z promieniem wodzącym OA i przez punkt T poprowadzimy równoległą do osi x aż do punktu przecięcia się L z okręgiem, opisanym z punktu O promieniem $OM=1$, wtedy kąt $\tau = LOM$ nazywa się kątem przestępnym Lamberta; funkcje hyperboliczne wyrażają się przez funkcje kołowe kąta Lamberta w ten sposób:

$$\sinh z = \operatorname{tg} \tau, \quad \cosh z = \frac{1}{\cos \tau}.$$

Funkcje hyperboliczne badali w wieku zeszłym Riccati i Lambert; znakowania pierwszego z nich zostały powszechnie przyjęte. Następnie zajmowali się nimi: Gudermann, który zbudował obszerne tablice (Crelle VI, VII, VIII) i Mossotti. Z nowszych autorów pisali o nich: Hoüel, Laisant (Mém. de Bordeaux), Günther (Die Lehre von den Hyperbelfunctionen, Halla, 1881), Forti, który ogłosił nowe tablice tych funkcji. (Rzym, 1892). Szczegóły bibliograficzne i dokładną historję tego przedmiotu znajdzie czytelnik w dziełach ostatnich dwu autorów.

§ 3.

Funkcja Bernoulli'ego. Liczby Bernoulli'ego i Eulera.

Funkcją lub wielomianem Bernoulli'ego nazywamy wyrażenie:

$$\varphi_m(x) = x^m - \frac{m}{2} x^{m-1} + (m)_2 B_2 x^{m-2} - (m)_4 B_4 x^{m-4} + \dots,$$

w którym $B_1, B_2, \dots$ są t. z. liczbami Bernoulli'ego (R a a b e, Crelle XLII).

Istnieje wzór:

$$\varphi_{m+1}(x+1) - \varphi_{m+1}(x) = (m+1) x^m;$$

Dla $x=n$ całkowitego dodatniego jest:

$$\varphi_m(n) = m [1^{m-1} + 2^{m-1} + \dots + (n-1)^{m-1}].$$

Wielomiany Bernoulli'ego dla x całkowitego dają tedy wyrażenie sumy jednakowych potęg pierwszych $x-1$ liczb całkowitych (przy pominięciu czynnika liczbowego).

Liczby Bernoulli'ego są współczynnikami rozwinięcia na szereg funkcji $\frac{x e^x}{e^x - 1}$; jeżeli mianowicie rozwinięcie napiszemy w postaci:

$$1 + \frac{1}{2} x + \frac{B_2 x^2}{2!} - \frac{B_4 x^4}{4!} + \dots$$

to liczby B będą liczbami Bernoulli'ego. Liczby te mają związek ze współczynnikami rozwinięcia styecznej. Jeżeli napiszemy:

$$\operatorname{tg} x = \sum_1^{\infty} \beta_{2m} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!},$$

będzie:

$$\beta_{2m} = \frac{2^{2m} (2^{2m} - 1)}{2m} B_{2m}.$$

Liczby Bernoulli'ego wyrażają się przy pomocy różnic wyrażenia 0^n (patrz Rozdz. X) w ten sposób:

$$B_{2m} = (-1)^{m-1} \left[0^{2m} - \frac{1}{2} \Delta 0^{2m} + \frac{1}{3} \Delta^2 0^{2m} - \dots + \frac{1}{2m+1} \Delta^{2m} 0^{2m} \right].$$

Przez wyznaczniki liczby Bernoulli'ego wyrażają się tak:

$$B_{2m} = \frac{2m}{2^{2m}(2^{2m}-1)} \begin{vmatrix} 1, & 0, & . & . & . & . & . & 0, & 1 \\ (3)_1, & 1, & . & . & . & . & . & 0, & 1 \\ (5)_1, & (5)_3, & . & . & . & . & . & 0, & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ (2m-3)_1, & (2m-3)_3, & . & . & . & . & . & 1, & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{Hausssner}),$$

$$B_{2m} = (2m)! \begin{vmatrix} \frac{1}{2}, & 1, & 0, & . & . & . & . & 0 \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{2!}, & 1, & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ \frac{1}{(2m+1)!}, & \frac{1}{(2m)!}, & \frac{1}{(2m-1)!}, & . & . & . & \frac{1}{2!} \end{vmatrix} \quad (\text{Glaisher}),$$

Godnym uwagi jest wzór:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} B_{2m} \left(-\frac{\pi e}{m} \right)^{2m + \frac{1}{2}} = 4\pi e^{-}.$$

Istnieje bardzo wiele wzorów zwrotnych dla liczb Bernoulli'ego. Najdawniejszym jest wzór Moivre'a (Miscell anal. Londyn 1730):

$$(m+1)_1 B_{2m} - (2m+1)_3 B_{2m-2} + \dots + (-1)^{m-1} (2m+1)_{2m-1} B_2 + (-1)^m (m - \frac{1}{2}) = 0.$$

Następnie idzie wzór Jacobi'ego (Crelle XII, str. 263):

$$(2m+2)_3 B_{2m} - (2m+2)_4 B_{2m-2} + \dots + (-1)^{m-1} (2m+2)_{2m} B_2 + (-1)^m m = 0.$$

Wzór Sterna (Crelle, LXXXIV):

$$(2m+1)_2 B_{2m} - (2m+1)_4 B_{2m-2} + \dots + (-1)^{m-1} (2m+1)_{2m} B + (-1)^m \frac{1}{2} = 0.$$

Inne wzory zwrotne znaleźć można w cytowanej poniżej książce Saalschütza.

Do liczb Bernoulli'ego stosuje się następujące ważne twierdzenie v. Staudta i Clausena (Crelle XXI, Astr. Nachr. XVII, 1840):

Jeżeli $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ są liczby pierwsze nieparzyste, które, zmniejszone o jedność, dają dzielniki liczby $2m$, to wtedy:

$$B_{2m} = \text{liczbie całk.} + (-1)^m \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \dots \right\}.$$

Można otrzymać wzory zwrotne tylko pomiędzy częściami całkowitemi liczb Bernoulli'ego; wzory takie podali po raz pierwszy Hermite (Crelle, LXXXI) i Stern (Crelle, LXXXVI), a następnie ogólnie Lipschitz (Crelle, XCVI).

Spółczynniki β rozwinięcia stycznej (patrz wyżej) są liczbami całkowitemi, które kończą się naprzemiennie cyfry 2 i 6, poczynając od $\beta_4 = 2$.

Liczby Bernoulli'ego otrzymały swą nazwę od Jakóba Bernoulli'ego, który wprowadził je po raz pierwszy do analizy („Ars conjectandi“, Bazylea, 1713); tę nazwę nadali im Moivre i Euler. Bernoulli obliczył 5 pierwszych z tych liczb, Euler obliczył ich 15, Ohm 31 (Crelle XX), Adams 62 (Crelle, LXXXV). Bliższe szczegóły o liczbach Bernoulli'ego znaleźć można w dziele Saalschütza „Vorlesungen über die Bernoulli'schen Zahlen“ (Berlin 1893).

Prace dalsze o tym przedmiocie ogłosili: Glaisher (Mess. of. Math. 1876), Seidel (Münch. Akad. 1877), Radicke (Die Recursionsformeln für die Bernoulli'schen und Euler'schen Zahlen, Halla 1880), Haussner (Göttinger Nachr. 1892, Zeitschrift für Math. 1894) i t. d.

Oto tablica pierwszych 18 liczb Bernoulli'ego.

$$B_2 = \frac{1}{6}; B_4 = \frac{1}{30}, B_6 = \frac{1}{42}, B_8 = \frac{1}{30}, B_{10} = \frac{5}{66},$$

$$B_{12} = \frac{691}{2730}, B_{14} = \frac{7}{6}, B_{16} = \frac{3617}{510}, B_{18} = \frac{43867}{798},$$

$$B_{20} = \frac{174611}{330}, B_{22} = \frac{854513}{138}, B_{24} = \frac{236364091}{2730},$$

$$B_{26} = \frac{8553103}{6}, B_{28} = \frac{23749461029}{870},$$

$$B_{30} = \frac{8615841276005}{14322}, B_{32} = \frac{7709321041217}{510},$$

$$B_{34} = \frac{2577687858367}{6}, B_{36} = \frac{26315271553053477373}{1919190},$$

Pokrewni z liczbami Bernoulli'ego są liczby Eulera, odpowiadające współczynnikom rozwinięcia siecznej. Jeżeli położymy :

$$\sec x = \sum_0^{\infty} E_{2m} \frac{x^{2m}}{(2m)!},$$

to liczby E_{2m} będą liczbami Eulera. Wyrażają się one przy pomocy wyznaczników w ten sposób:

$$E_{2m} = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 0, & . & . & . & . & 0 \\ 1, & (4)_2, & 1, & . & . & . & . & 0 \\ 1, & (6)_2, & (6)_4, & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 1, & (2m-2)_2, & (2m-2)_4, & . & . & . & . & 1 \\ 1, & (2m)_2, & (2m)_4, & . & . & . & . & (2m)_{2m-2} \end{vmatrix} \quad (\text{H a u s s n e r})$$

$$E_{2m} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2!}, & 1, & 0, & \dots, & 0 \\ \frac{1}{4!}, & \frac{1}{2!}, & 1, & \dots, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{(2m)!}, & \frac{1}{(2m-2)!}, & \frac{1}{(2m-4)!}, & \dots, & \frac{1}{2!} \end{vmatrix} \quad (\text{Glaisher})$$

Liczby Eulera dają się wyrazić przez liczby Bernoulli'ego przy pomocy wzoru:

$$\begin{aligned} (2m+1) E_{2m} &= 2^{2m+1} (2^{2m+1}-1) (2m+1)_1 B_{2m} \\ &\quad - 2^{2m-1} (2^{2m-3}-1) (2m+1)_3 B_{2m-2} \\ &\quad + \dots \\ &\quad + (-1)^{m-1} 2^3 (2-1) (2m+1)_{2m-1} B_2 + (-1)^m. \end{aligned}$$

Jeżeli wprowadzimy współczynniki β rozwinięcia styczney, otrzymamy wzór Sterna:

$$E_{2m} = \beta_{2m} + (2m-1)_2 E_2 \beta_{2m-2} + \dots + (2m-1)_{2m-2} E_{2m-2} \beta_2.$$

Wzór zwrotny dla liczb Eulera jest następujący:

$$\begin{aligned} E_{2m} - (2m)_3 E_{2m-2} + (2m)_4 E_{2m-4} - \dots \\ + (-1)^{m-1} (2m)_{2m-2} E_2 + (-1)^m = 0. \end{aligned}$$

Podajemy jeszcze dwa wzory:

$$E_{2m} > \frac{2m}{2} \beta_{2m}, \quad E_{2m} > \frac{2m(2m-1)}{4} E_{2m-1}.$$

Liczby Eulera są wszystkie liczbami całkowitemi, dodatniemi, nieparzystemi. Suma dwu liczb kolejnych jest podzielna przez 3. Liczba $E_{2m}+1$ dla m parzystego, liczba zaś $E_{2m}-1$

dla m nieparzystego jest podzielna przez 3. Liczby E_{2m} dla m parzystego kończą się na cyfrę 1, dla m nieparzystego na cyfrę 5.

Pierwsze dziewięć liczb obliczył sam Euler (dziwiątą błędnie). Liczby te badał (i nadał im nazwę) Scherk (Math. Abh., Berlin 1825); później zajmowało się nimi wielu autorów, zwłaszcza ci, którzy badali liczby Bernoulli'ego. Stern (Crelle, LXXIX) znalazł wiele ich własności.

Podajemy tu tablice pierwszych czternastu liczb Eulera $E_2, E_4, E_6, \dots, E_{28}$ według Scherka:

1, 5, 61, 1385, 50521, 2702765, 199360981, 19391512145,
2404879675441, 370371188237525, 69348874393137901,
155145344163557086905, 4087072509293123892361,
1252259641403629865468285.

§ 4.

Stała Eulera. Stała harmoniczna.

Znany jest wzór Eulera, służący do wyrażenia całki różnicowej określonej (sumy) przez całkę zwykłą tej samej funkcji (patrz Rozdz. X). Wzór ten jest:

$$\sum_a^b f(x) = \int_a^b f(x) dx - \frac{1}{2} [f(x)]_a^b + \frac{B_2}{2!} [f'(x)]_a^b - \frac{B_4}{4!} [f''(x)]_a^b + \dots;$$

tu $B_2, B_4, \dots$ są liczbami Bernoulli'ego.

Położmy $a=0, b=x$, wtedy wzór przybiera postać:

$$\sum_0^x f(x) = \int_0^x f(x) dx - \frac{1}{2} f(x) + \frac{B_2}{2!} f'(x) - \frac{B_4}{4!} f''(x) + \dots \text{stała}$$

gdzie wyraz ostatni (stała) nie zależy oczywiście od x , a przez symbol $\int f(x) dx$ rozumiemy całkę nieokreśloną funkcji $f(x)$. Połóżmy:

$$f(x) = \frac{1}{a+bx}, \quad \int f(x) dx = \frac{1}{b} \log \frac{a+bx}{b};$$

stała w tym przypadku nazywa się stałą harmoniczną, ponieważ suma po stronie pierwszej jest wtedy sumą pierwszych wyrazów szeregu harmonicznego pierwszego rzędu (rozbieżnego). Stała harmoniczna zależy będzie od wartości a i b ; oznaczamy ją przez $A(a, b)$. Dla $a=0$, $b=1$ będzie ona stałą Eulera, którą oznaczamy przez A .

Stałe $A(a, b)$ i A określają się tedy za pomocą wzorów:

$$A(a, b) = -\frac{1}{b} \log \frac{a}{b} + \frac{1}{2a} + \frac{B_2 b}{2a^2} - \frac{B_2 b^3}{4a^4} + \dots,$$

$$A = \lim_{a \rightarrow 0} \left\{ -\log a + \frac{1}{2a} + \frac{B_2}{2a^2} - \frac{B_4}{4a^4} + \dots \right\},$$

Mamy związki:

$$A(a, b) - A(b-a, b) = \frac{\pi}{b} \cotg \frac{a\pi}{b},$$

$$A(a, b) = \frac{1}{b} A\left(\frac{a}{b}, 1\right).$$

Wartość stałej A z 26 cyframi dziesiętnymi jest:

$$A = 0,57721\ 56649\ 01532\ 86106\ 06512\ 4\dots$$

Przez całki określone stała A wyraża się w ten sposób:

$$\int_0^1 \log \log x dx = -A, \quad (\text{Mascheroni})$$

$$\int_0^{\infty} \left(e^{-x} - \frac{1}{1+x} \right) \frac{dx}{x} = -A; \quad \int_0^{\infty} \left(e^{-x} - \frac{1}{1+x^2} \right) \frac{dx}{x} = -A,$$

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{1+e^{-x}} - \frac{1}{x} \right) e^{-x} dx = A; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-e^x} x e^x dx = -A,$$

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{\log x} + \frac{1}{1-x} \right) dx = A; \quad (\text{Legendre})$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \log x dx = -A.$$

Przez szereg oraz przez iloczyn nieskończony stała Eulera wyraża się w ten sposób:

$$\sum_1^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \log \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right) = A; \quad \log \prod_1^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{1 + \frac{1}{n}} = A.$$

Stałą A napotykamy w teorii funkcyj Eulerowych.

Euler obliczył tę stałą najprzód z 6, potem z 16 cyframi dziesiętnymi („De numero memorabili etc“, Acta Petrop. V, 1781) i ozna-
czał ją literą γ . Następnie zajmowali się tym przedmiotem: Ma-
scheroni (Adnotationes ad Euleri Calc. etc), który obliczył stałą do
20-ej cyfry, Legendre do 19-ej, Soldner do 25-ej, Lindemann
(Grunert, Archiv XXIX) do 35-ej, Oettinger (Crelle LX) do 40-ej,
Nicolai do tyluż (patrz Gauss, Werke III, str. 154), Shanks
(Proc. Roy. Soc. 1866—1867) do 59 cyfry (50-ta cyfra jest błędna);
Glaisher (tamże, 1871) do 100 i wreszcie Adams (tamże 1878 oraz
„Papers“ I, str. 459) do 263 cyfr dziesiętnych. O stałej Eulera
ogłosił pracę Knar (Grunert's Archiv XLI, XLIII). Funkcję $A(a, 1)$
badał Gauss w rozprawie o szeregu hypergeometrycznym (Werke III).
Tablicę wartości tych funkcyj podał Nicolai; znajduje się ona na końcu
wspomnianej rozprawy Gaussa.

§ 5.

Funkcye Eulera.

Legendre (Fonctions elliptiques, vol. II, str. 365, Paryż 1826) nazwał po raz pierwszy funkcjami Eulera gatunku pierwszego i drugiego funkcje, badane przez Eulera (Calc. integr.), a o których obecnie mówić będziemy.

Całką Eulera gatunku 1-go, jak była pierwotnie określona przez Legendre'a, jest:

$$B(p, q; n) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x^n)^{\frac{q}{n}-1} dx;$$

tu n jest liczbą stałą; p, q liczbami zmiennymi, tak że B jest funkcją ilości p, q . Legendre, idąc za Eulerem, oznaczał tę funkcję symbolem $\left(\frac{p}{q}\right)$. Następnie Binet (Journ del Écol. polytech. zesz. XXVII) zaczął oznaczać tę funkcję literą grecką B i dla tego nazywają ją funkcją beta. Przypadek $n=1$ rozważany bywa w podręcznikach; symbol uproszczony $B(p, q)$ pisze się zamiast $B(p, q, 1)$.

Funkcja beta dla $n=1$ jest symetryczna względem p, q , t.j.

$$B(p, q) = B(q, p).$$

Wartości funkcji $B(p, q; n)$, gdy p, q są większe od n , wyrażają się przez te funkcje dla wartości p, q , zawarte pomiędzy 1 i n (Legendre). Mamy:

$$B(p, n; n) = \frac{1}{p}; \quad B(p, n-p; n) = \frac{\frac{\pi}{n}}{\sin \frac{\pi}{n}},$$

$$B(p, q+1; 1) = \frac{q}{p} B(p+1, q; 1),$$

$$B(p, q+1; 1) = B(p, q; 1) - B(p+1, q; 1).$$

Funkcja B czyni zadość związkowi (Eulera):

$$B(b, q; n) B(p+q, r; n) = B(p, r; n) B(p+q, q; n).$$

W przypadku $n=3, 4, 6, 8, 12$ funkcja B daje się wyrazić za pomocą całek eliptycznych (patrz Legendre, l. c. Rozdz. III). Logarytm funkcji B daje się wyrazić za pomocą całki określonej. Zakładając $n=1$, mamy:

$$\log B(p, q) = \int_0^{\infty} \left[e^{-qx} \cdot \frac{1-e^{-px}}{1-e^{-x}} - \frac{1-e^{-px}}{1-e^{-x}} + 1 + e^{-x} \right] \frac{dx}{x}.$$

Nazywamy całką Eulera gatunku 2-go i oznaczamy literą Γ funkcję:

$$\Gamma_m(z) = \int_0^1 x^{m-1} \left(\log \frac{1}{x} \right)^{z-1} dx.$$

Bez zmniejszenia ogólności rachunku, możemy przyjąć $m=1$, i kładąc $x^m=t$, napisać:

$$\Gamma_m(z) = \frac{1}{m^n} \Gamma_1(z).$$

Pisze się wprost (Legendre):

$$\Gamma(z) = \int_0^1 \left(\log \frac{1}{x} \right)^{z-1} dx.$$

Euler i Gauss używają symbolu $\Pi(z-1)$.

Jeżeli z jest liczbą całkowitą, mamy:

$$\Gamma(z) = (z-1)!$$

Funkcya Γ jest skończona dla każdej wartości rzeczywistej z , większej od 0.

Inne wyrażenia funkcyi Γ są:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{z-1} dx,$$

$$\Gamma(z) = \lim_{\mu=\infty} \mu^z \frac{(\mu-1)(\mu-2)\dots 1}{z(z+1)\dots(z+\mu-1)} \quad (\text{Euler, Gauss}),$$

$$\Gamma(z) = \prod_{\mu=\infty}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^{z-1}}{1 + \frac{z-1}{\mu}}, \quad (\text{Euler, 1729}).$$

Funkcya Γ ma własności, wyrażające się za pomocą związków następujących:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z); \quad \Gamma(z+k) = (z+k-1)(z+k-2)\dots z\Gamma(z),$$

$$\frac{d\Gamma(z)}{dz} = \Gamma(z) \log z; \quad \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin z\pi},$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - z\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} + z\right) = \frac{\pi}{\cos z\pi}; \quad \lim_{z=0} \frac{\Gamma(nz)}{\Gamma(z)} = \frac{1}{n},$$

$$\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \dots (2z-1)}{2^z} \cdot \sqrt{\pi}, \quad (z \text{ całkowite})$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}, \dots$$

$$\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2z-1}} \frac{\Gamma(2z)}{\Gamma(z)}, \quad (\text{dla } z \text{ jakiegokolwiek})$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{2}{m}\right)\dots\Gamma\left(\frac{m-1}{m}\right) = (2\pi)^{\frac{m-1}{2}} m^{-\frac{1}{2}} \quad (m \text{ całkowite, Euler})$$

$$\Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{m}\right) \Gamma\left(z + \frac{2}{m}\right) \dots \Gamma\left(z + \frac{m-1}{m}\right) \\ = \Gamma(mz) (2\pi)^{\frac{m-1}{2}} m^{\frac{1}{2} - mz}, \quad (m \text{ całkowite, } z \text{ jakiegokolwiek,} \\ \text{G a u s s, Werke III. str. 150),}$$

$$\log \Gamma(z) = \int_0^{\infty} \left[(z-1) e^{-x} - \frac{e^{-x} - e^{-zx}}{1 - e^{-x}} \right] \frac{dx}{x},$$

$$\log \Gamma(z) = \sum_{r=1}^{\infty} \left[z \log \left(1 + \frac{1}{r} \right) - \log \left(1 + \frac{z}{r} \right) \right], \quad (\text{G a u s s})$$

$$\frac{d \log \Gamma}{dz} = Z(z) = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \left\{ \log \mu - \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} - \dots - \frac{1}{z+\mu} \right\} \\ = \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-zx}}{1 - e^{-x}} \right) dx,$$

$Z(1) = A$ jest stałą Eulera.

$$\int_0^{z+1} \log \Gamma(x) dx = z \log z - z + \frac{1}{2} \log 2\pi. \quad (\text{R a a b e}).$$

Wartość funkcji $\Gamma(z)$, gdy z przyjmuje wartości od 0 do $\frac{1}{2}$, zmienia się od ∞ do $\sqrt{\pi} = 1, 77245$, a dla wartości z , od $\frac{1}{2}$ do 1 zmienia się od $\sqrt{\pi}$ do 1. Funkcja $\Gamma(z)$ ma wartość najmniejszą dla $z=1$, 46163 21451 105 , a wartość $\log \Gamma(z)$ w tym punkcie wynosi 9, 94723 91743 9340, co odpowiada przybliżeniu wartości $\Gamma(z) = 0, 885$

Droga od $z=0$ do $z=1$ zwykle nazywa się peryodem pierwszym funkcji Γ , droga od $z=1$ do $z=2$ peryodem drugim i t. d. Z równań poprzedzających widać, że znając funkcję Γ dla peryodu pierwszego, możemy wyznaczyć ją łatwo dla każdej innej wartości zmiennej.

Można udowodnić ogólnie, że znając funkcję $\Gamma(z)$ dla dowolnie małej części peryodu pierwszego, możemy wyznaczyć ją dla

każdej wartości argumentu, t. j. możemy za pomocą środków elementarnych wyznaczyć jej wartość dla każdej wartości z (Legendre, l. c. str. 446, Rozdz. XI).

Funkcje Γ są ważniejsze od funkcji B ; rachunek tych ostatnich sprowadza się do rachunku funkcji Γ przy pomocy wzoru zasadniczego

$$B(p, q; n) = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{n}\right) \Gamma\left(\frac{q}{n}\right)}{n \Gamma\left(\frac{p+q}{n}\right)}.$$

Dla $n=1$ mamy:

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Tym sposobem rachunek funkcji B o dwu argumentach sprowadza się do rachunku funkcji Γ o jednym tylko argumente. Do rachunku liczbowego funkcji $\log \Gamma(z)$ Legendre stosował szeregi rozbieżne, które wszakże obliczone w pewien sposób prowadziły do dostatecznie wielkiego przybliżenia. Wzór, stosowany przez Legendre'a, mało różni się od następującego:

$$\log \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right) \log z - z + \frac{1}{2} \log 2\pi + J(z),$$

gdzie

$$J(z) = \frac{B_2}{2z} - \frac{B_4}{3 \cdot 4 z^3} + \frac{B_6}{5 \cdot 6 \cdot 2^5} + \dots + (-1)^r \frac{\theta B_{2r+2}}{(2r+1)(2r+2) z^{2r+1}},$$

gdzie B są liczby Bernoulli'ego, θ liczba zawarta pomiędzy 0 a 1. Jeżeli przedłużymy szereg po stronie drugiej poprzedniego wzoru, otrzymamy szereg rozbieżny.

Wyrazy tego szeregu najprzód zmniejszają się, a następnie rosną bez granic; można przeto znaleźć taką wartość r , aby

reszta była możliwie najmniejszą, a obliczywszy następnie wyrazy aż do tej wartości r , otrzymujemy przybliżenie, wystarczające w praktyce. Nadto wzór staje się bardziej przybliżonym, gdy z jest większe, gdyż można wykazać, iż wyraz najmniejszy maleje bystro wraz z wzrostem ilości z . Na tej podstawie Legendre zbudował tablicę wartości $\log \Gamma(z)$ z 12 cyframi dziesiętnymi dla wszystkich wartości z , stanowiących postęp arytmetyczny od 1 do 2 z różnicą równą jednej tysięcznej. Wyznaczenie skażnika r wyrazu o wartości najmniejszej było przedmiotem badań Genocchi'ego (Mem. Soc. It. VI) i Limbourg'a (Acad. de Belg XXX). Patrz także „Cours d'analyse“ Hermite'a. Dla funkeyi Γ istnieją też tablice Gaussa z 20 cyframi dziesiętnymi.

Rozciągnięcie funkeyi $\Gamma(z)$ (określonej dla wartości rzeczywistych dodatnich argumentu) na wartości rzeczywiste ujemne zmiennej z skutecznił już Legendre przy pomocy wzoru $\Gamma(1+z) = z \Gamma(z)$, w założeniu, że w tym wzorze wartość z ujemne zawiera się pomiędzy -1 a 0 . Ten wzór określa wtedy funkeyę Γ dla wszystkich wartości ujemnych pomiędzy -1 a 0 (pierwszy peryod ujemny, według Legendre'a); w tenże sposób idąc dalej, można określić funkeyę Γ dla wszystkich wartości ujemnych zmiennej z . Znajdujemy wtedy, że dla $z = -1, -2, -3, \dots$ funkeya Γ jest nieskończoną, oraz że pomiędzy 0 a -1 jest ujemną, pomiędzy -1 a -2 dodatnią i t. d.

Rozciągnięcie funkeyi Γ na całe pole zespolone zapoczątkował Weierstrass (Crelle, LI), rozważając zbieżność iloczynu (badanego już dawniej przez Eulera i Gaussa, Werke III, str. 145):

$$\frac{(\mu - 1)! \mu^z}{\mu(\mu + 1) \dots (\mu + z - 1)!},$$

gdzie z jest liczbą zespoloną. Otrzymujemy tym sposobem funkeyę $\Gamma(z)$ ogólną, mającą dwie własności charakterystyczne:

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\Gamma(z + \mu)}{(\mu - 1)! \mu^z} = 1; \quad \Gamma(z + 1) = z \Gamma(z).$$

Funkcya $\Gamma(z)$ dla wartości z zespolonych jest funkcją jednopostaciową w całej płaszczyźnie, mającą nieskończoność rzędu pierwszego w punktach $z=0, -1, -2, \dots$ i osobliwość istotną w punkcie nieskończoności na płaszczyźnie; odwrotność tej funkcyi jest funkcją holomorficzną w całej płaszczyźnie i wyraża się ważnym wzorem Weierstrassa:

$$\frac{1}{\Gamma(1+z)} = e^{Az} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{z}{n} \right) e^{-\frac{z}{n}} \right].$$

Funkcya $\Gamma(z)$ daje się rozłożyć na sumę dwu funkcyj: $\Gamma(z) = Q(z) + P(z)$, obu jednowartościowych; pierwsza z nich jest holomorficzną, druga meromorficzną w całej płaszczyźnie. Pierwsza wyraża się w ten sposób:

$$Q(z) = e_0 + e_1 z + e_2 z^2 + \dots$$

gdzie

$$e_r = \frac{1}{r!} \int_1^{\infty} e^{-x} \log^r x \frac{dx}{x};$$

druga zaś

$$P(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{1!(z+1)} + \frac{1}{2!(z+2)} - \dots$$

uwidocznia nieskończoność rzędu pierwszego funkcyi $\Gamma(z)$. (Twierdzenie Pryma, Crelle LXXXII). Dowód tego twierdzenia znajdujemy w cyt. pracy Pryma oraz u Pincherlego (Rend. Palermo 1880) i w „Cours d'analyse“ Hermite'a.

Funkcya $\Gamma(z)$ nie może być całką równania różniczkowego algebraicznego (Hölder, Math. Ann. XXVIII, 1886).

Podajemy tu szereg wzorów, odnoszących się do funkcyi Γ oraz jej pochodnej logarytmowej Z :

$$\int_0^1 (1-x^b)^p x^{q-1} dx = \frac{\Gamma\left(\frac{b}{q}\right) \Gamma(p+1)}{q \Gamma\left(\frac{b}{q} + p + 1\right)}, \quad (\text{Plana, Crelle, XVII}).$$

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \frac{1}{2} Z\left(\frac{p+1}{2}\right) - \frac{1}{2} Z\left(\frac{p}{2}\right)$$

$$\int_0^1 \frac{1-x^p}{1-x} x^{q-1} dx = Z(p+q) - Z(q)$$

$$\int_0^1 \frac{x^p}{1+x^2} dx = \frac{1}{4} Z\left(\frac{p+3}{4}\right) - \frac{1}{4} Z\left(\frac{p+1}{4}\right) \quad (\text{Legendre})$$

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x^b} dx = \frac{1}{2b} Z\left(\frac{a+b}{2b}\right) - \frac{1}{2b} Z\left(\frac{a}{2b}\right)$$

$$\int_0^1 \frac{x^q - x^p}{1-x} \frac{dx}{x} = Z(p) - Z(q)$$

$$\int_0^\infty x^{p-1} \sin qx dx = \frac{\Gamma(p)}{q^p} \sin \frac{p\pi}{2}$$

$$\int_0^\infty x^{p-1} \cos qx dx = \frac{\Gamma(p)}{q^p} \cos \frac{p\pi}{2}$$

$$\int_0^\infty x^{p-1} \frac{\sin}{\cos} (q^r x) dx = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{r}\right)}{r V q^p} \frac{\sin}{\cos} \frac{p\pi}{2r} \quad (\text{R a a b e}).$$

Pierwszy ważny, cytowany już wyżej, traktat o funkeyach Γ ogłosił Legendre. Gauss położył podwaliny teoryi tej funkeyi przy pomocy wzoru podanego na str. 430. Poisson (Éc. Pol. Cahl. XIX). Jacobi

(Crelle XI), Dirichlet (Crelle XV, Werke I str. 271) prowadzili dalsze badania w tym kierunku. Inne prace, prócz cytowanych już Pryma, Weierstrassa i innych są: Cauchy (Exerc.), Crelle (Crelle, VII), Plana (Crelle XVII), Piola (Opusc. mat. e fis, Medyolan 1832), Schlämilch (Analyt. Studien VI), Brunel (Monographie, Bordeaux 1885 oraz Encykl. der Math. Wiss. II, 1, Lipsk 1899). W nowszej pracy bada Blaserna (Acc. Lin. 1895) funkcję $\frac{d[zZ(z+1)]}{dz}$ i podaje tablice jej wartości, którą obliczył A. Sella. Patrz art. Lercha (Prace mat. fiz., X, 1899—1900).

§ 6.

Funkcja hypergeometryczna.

Nazywamy funkcją hypergeometryczną funkcję, którą przedstawia szereg

$$F(a, b, c, z) = 1 + \frac{a \cdot b}{1! \cdot c} z + \frac{a(a+1) b(b+1)}{2! \cdot c(c+1)} z^2 + \dots$$

gdzie a, b, c, z są liczby zespolone jakiegokolwiek. Jeżeli jedna z dwu liczb a, b jest liczbą całkowitą ujemną $-n$, szereg urywa się i staje się wielomianem całkowitym stopnia n tego; jedynie tylko w tym przypadku mamy wielomian.

Jest widocznem, że funkcja F jest symetryczna względem a i b .

Prostemi przypadkami szczególnymi szeregu hypergeometrycznego są:

$$\text{szereg dwumianowy} \quad F(-m, b, b, z) = (1+z)^m,$$

$$\text{szereg logarytmowy} \quad F(1, 1, 2, -z) = z \log(1+z);$$

oraz

$$F\left(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, z^2\right) = \frac{1}{2z} \log \frac{1+z}{1-z};$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} F\left(1, b, 1, \frac{z}{b}\right) = e^z;$$

$$\lim_{b=\infty} F\left(b, b, c \frac{z}{b^2}\right) = 1 + \frac{z}{1! c} + \frac{z^2}{2! c(c+1)} + \dots$$

$$\lim_{b=\infty} F\left(b, b, \frac{1}{2}, \frac{z}{b^2}\right) = \cos(2i\sqrt{z}),$$

$$\lim_{b=\infty} F\left(b, b, \frac{3}{2}, \frac{z}{b^2}\right) = \frac{\sin 2i\sqrt{z}}{2i\sqrt{z}},$$

$$F(a, b, c, 1) = \frac{\Gamma(c) \Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a) \Gamma(c-b)} \quad (\text{Gauss}).$$

Szereg hypergeometryczny jest zbieżny dla $|z| < 1$, rozbieżny dla $|z| > 1$; jego kołem zbieżności jest tedy koło o promieniu 1 ze środkiem w początku współrzędnych (Gauss, Werke III).

Jeżeli przez $R(a+b-c)$ oznaczmy część rzeczywistą wyrażenia $a+b-c$, będziemy mieli następujące twierdzenie (Weierstrass, Crelle; LI):

Jeżeli $|z| = 1$, wtedy
 gdy $R(a+b-c) > 1$, granica wyrazu ogólnego jest ∞ ;
 „ $R(a+b-c) = 1$, „ „ „ „ skończona
 „ $0 < R(a+b-c) < 1$, „ „ „ „ zerem i szereg jest zbieżny dla wszystkich punktów okręgu $|z|=1$, prócz punktów $z=1$;
 „ $R(a+b-c) < 0$, szereg jest zbieżny dla wszystkich punktów okręgu $|z|=1$.

Jeżeli uważać będziemy szereg typu hypergeometrycznego, jako element funkcji analitycznej w pojmowaniu teorii funkcji analitycznych Weierstrassa, wtedy mamy funkcję holomorficzną w całej płaszczyźnie z wyłączeniem punktów $r=\infty$ i $z=1$.

Funkcja hypergeometryczna jest całką szczególną równania różniczkowego liniowego rzędu drugiego (Euler):

$$z(1-z) \frac{d^2 F}{dz^2} + [c - (a+b-1)z] \frac{dF}{dz} - a b F = 0.$$

Jeżeli położymy ogólniej

$$y = C x^a (1-x)^{\gamma} F(a, b, c, z),$$

to y będzie całką szczególną równania :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \left[\frac{1-a-a'}{z} + \frac{1-\gamma-\gamma'}{z-1} \right] \frac{dy}{dx} + \left[\frac{-aa'}{z} + \frac{\gamma\gamma'}{z-1} + \beta\beta' \right] \frac{y}{z(z-1)} = 0,$$

gdzie dla symetrii przyjęto :

$$a' = 1-c-a, \quad \beta' = b-a-\gamma, \quad \gamma' = c-a-b+\gamma, \quad \beta = a-a-\gamma;$$

$$a + a' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 1.$$

Jeżeli położymy:

$$z = \frac{x-a}{x-b} \cdot \frac{c-b}{c-a},$$

to powyższe równanie różniczkowe przyjmie postać symetryczną :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} + \left\{ \frac{1-a-a'}{x-a} + \frac{1-\beta-\beta'}{x-b} + \frac{1-\gamma-\gamma'}{x-c} \right\} \frac{dy}{dx} \\ + \left\{ \frac{a a' (a-b)(a-c)}{x-a} + \frac{\beta \beta' (b-a)(b-c)}{x-b} \right. \\ \left. + \frac{\gamma \gamma' (c-a)(c-b)}{x-c} \right\} \frac{y}{(x-a)(x-b)(x-c)} = 0, \end{aligned}$$

(Papperitz, Math. Ann. XXV).

Funkcję hypergeometryczną można uważać za całkę określoną. Mamy (według Eulera):

$$F(z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 u^{a-1} (1-u)^{c-b-1} (1-zu)^{-a} du.$$

Uważana za funkcję ilości a lub b funkcya hypergeometryczna jest funkcją holomorficzną w całej płaszczyźnie (prócz w punkcie ∞); uważana za funkcję ilości c , jest funkcją meromorficzną w całej płaszczyźnie i staje się nieskończoną rzędu pierwszego w punktach $c=0, -1, -2, \dots$. W obu przypadkach mamy punkt istotnie osobliwy w nieskończoności.

Jeżeli uważamy funkcję hypergeometryczną jako funkcję argumentu a i oznaczymy przez $\Delta F, \Delta^2 F, \dots$ jej kolejne różnice dla wartości $a, a+1, a+2, \dots$ tegoż argumentu, wtedy funkcya hypergeometryczna czynić będzie zadość równaniu różnicowemu rzędu 2-go:

$$(a+1)(z-1)\Delta^2 F + [(a+b+1)(z-c)]\Delta F + bzF = 0.$$

Dwie funkcje, F , których parametry a, b, c różnią się o ilości stałe, nazywają się sąsiednimi (contiguae, Gauss).

Pomiędzy trzema funkcjami sąsiednimi zachodzi zawsze związek liniowy jednorodny o współczynnikach, które są funkcjami wymiernymi zmiennej z . Równanie różniczkowe liniowe jest przypadkiem szczególnym takich związków pomiędzy funkcjami sąsiednimi. Pochodne funkcji F względem z są też funkcjami hypergeometrycznymi sąsiednimi z F . Pochodną pierwszą jest

$$F' = \frac{ab}{c} F(a+1, b+1, c+1, z).$$

Iloraz dwu funkcji sąsiednich daje się rozwinąć na ułamek ciągły.

Funkcję hypergeometryczną badano z trzech odmiennych punktów widzenia, jako całkę określoną, jako szereg, wreszcie jako całkę szczególną równania różniczkowego liniowego rzędu 2-go.

Pierwszy badał funkcję tę Euler (Nova Acta Petrop. 1778, Calc. integ. 1769), następnie zajmowali się nią Pfaff, nauczyciel

G a u s s a (Disquisitiones anal. I). G a u s s Werke III) w sławnej rozprawie, oraz K u m m e r (Crelle XV) wzięli za punkt wyjścia równanie różniczkowe. Praca R i e m a n n a z r. 1857 stanowi wielce ważny krok w tej teorii; można powiedzieć, że od niej to datuje nowoczesna teoria równań różniczkowych liniowych, ugruntowana przez F u c h s a.

Badanie ilorazu dwu rozwiązań szczególnych równania różniczkowego rzędu 2-go zapoczątkował, rzecz można, R i e m a n n w dwóch rozprawach o powierzchniach najniższych (Werke, Nr. 17 i 26); następnie badanie to dla przypadku hypergeometrycznego rozwinął S c h w a r z w doniosłej rozprawie (Crelle, LXXV, 1872), która stała się punktem wyjścia ważnych poszukiwań, między innemi nad zmiennikami różniczkowymi rzutówemi.

Niedawno K l e i n (Math. Ann. XXXVII) znalazł nowe ważne rezultaty o punktach zerowych funkcji hypergeometrycznej (por. też Math. Ann, XL i pracę S c h i l l i n g a (Math. Ann. XLIV).

Uogólnienia funkcji hypergeometrycznych są różnego rodzaju. Pomiedzy innemi zasługują na uwagę uogólnienie H e i n e g o (Crelle, XXXII, XXXIV) i T h o m a e g o (Math. Ann. II), którzy uogólnili szereg G a u s s a, wprowadzając większą liczbę parametrów. Inne uogólnienie podał H e u n (Math. Ann. XXXIII) wzięwszy za punkt wyjścia równania różniczkowe. Wreszcie P o c h h a m m e r (Crelle LXXI, 1870), A p p e l (Comptes rendus 1880 i Journal de Liouv. VIII), P i c a r d (Ann. de l'Ecol. Norm. XH, 1881), G o u r s a t (tamże 1883) i H o r n (Acta math. XV) rozpatrywali funkcje hypergeometryczne nie jednej, lecz dwu i więcej zmiennych; pierwszy z tych autorów postawił to zagadnienie mniej wyraźnie od pozostałych. Co do innych szczegółów tej teorii patrz kurs litografowany K l e i n a z r. 1894 „Ueber die hypergeometrischen Functionen“ oraz wyciąg z kursu lekcji P i n c h e r l e g o (Giorn. di Batt. XXXII).

§ 7.

Funkcje kuliste (Legendre'a) jednej zmiennej.

Rozwińmy wyrażenie

$$T = (1 - 2az + a^2)^{-\frac{1}{2}},$$

gdzie a i z są liczby rzeczywiste mniejsze od 1 na szereg według potęg dodatnich rosnących ilości a ; współczynnikami rozwinięcia będą ilości:

$$P^{(n)}(z) = \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{n!} \left\{ z^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} z^{n-1} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4.(2n-1)(2n-2)} z^{n-2} \dots \right\}.$$

Wielomian $P^{(n)}$ dla z rzeczywistego lub zespolonego nazywa się funkcją kulistą pierwszego gatunku Legendre'a; oznaczamy ją zwykle przez $X^{(n)}$ lub X_n . Nazwę „funkcja kulista“ (sferyczna) wprowadził Gauss.

Funkcje te są przypadkiem szczególnym funkcji hypergeometrycznej; dla n całkowitego dodatniego przedstawiają one mianowicie szeregi hypergeometryczne skończone:

$$P^{(n)}(z) = \frac{1.3\dots(2n-1)}{n!} \cdot z^n F\left(-\frac{n}{2}, \frac{1-n}{2}, \frac{1}{2}-n, \frac{1}{z^2}\right),$$

$$P^{(2n)}(z) = (-1)^n \cdot \frac{1.3\dots(2n-1)}{2.4\dots 2n} F\left(-n, n+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, z^2\right),$$

$$P^{(2n+1)}(z) = (-1)^n \cdot \frac{3.5\dots(2n+1)}{2.4\dots 2n} \cdot z F\left(-n, n+\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, z^2\right),$$

gdzie F jest symbolem funkcji hypergeometrycznej Gaussa.

Zasadniczymi wzorami dla funkcji $P^{(n)}$ są następujące:

$$P^{(0)} = 1, \quad P^{(1)}(z), \quad P^{(2)} = \frac{3}{2} \left(z^2 - \frac{1}{3} \right), \quad P^{2n}(-z) = P^{2n}(z),$$

$$P^{(2n+1)}(-z) = -P^{(2n+1)}(z), \quad P^{(n)}(0) = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n},$$

$$\lim_{z=0} \frac{P^{(2n+1)}(z)}{z} = (-1)^n \cdot \frac{3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n}.$$

Kładąc $y = \cos \theta$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{2 \cdot 4 \dots 2n}{1 \cdot 3 \dots (2n-1)} P^{(n)}(\cos \theta) &= \cos n \theta + \frac{1 \cdot n}{1 \cdot (2n-1)} \cos (n-2) \theta \\ &+ \frac{1 \cdot 3 \cdot n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2 \cdot (2n-1) (2n-3)} \cos (n-4) \theta + \dots \end{aligned}$$

Jeżeli θ jest rzeczywiste to największa wartość $P^{(n)}(\cos \theta)$ przypada na $\theta=0$; wartość ta równa się jedności.

Funkcję kulistą można wyrazić też za pomocą wzoru:

$$P^{(n)}(z) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n (z^2 - 1)^n}{dz^n}.$$

Wzór ten nazywa się wzorem Ivory'ego i Jacobi'ego, lecz należy przypisać go Rodrigues'owi (patrz Heine „Kugelfunctionen“, wyd. 2-gie, str. 20); można go uważać za ciekawy wzór rachunku różniczkowego, wyrażający pochodną rzędu n -tego funkcji $(z^2 - 1)^n$ (Jacobi, Crelle, XV).

Wszystkie pierwiastki równania $P^{(n)}(z)=0$ są rzeczywiste, mniejsze od 1 i różne od siebie; nadto jeżeli β jest pierwiastkiem, to i $-\beta$ jest nim także. Wartości liczbowe tych pierwiastków dla wartości n od 1 do 7 obliczył Gauss, który używał ich do swego wzoru na kwadraturę. Podaliśmy część tablicy Gaussa w Rozdziale X, str. 229. Co do pierwiastków funkcji kulistych patrz także ważną rozprawę Markowa (Math. Ann. XXVII).

Funkcye kulistą wyrazić można za pomocą ważnego wzoru Laplace'a (Méc. celeste, t. V, Paryż 1825, księga XI, rozdz. II):

$$\pi P^{(n)}(z) = \int_0^\pi (z + \cos \varphi \sqrt{z^2 - 1})^n d\varphi.$$

Na podstawie tego wzoru można uogólnić funkcye P^n dla przypadku, gdy n jest dodatnie lecz niecałkowite.

Jeżeli weźmiemy argument w postaci dostawy i przyjmiemy, że θ jest rzeczywiste i $0 < \theta < \pi$, będziemy mieli dwa wzory Dirichleta:

$$\frac{\pi}{2} F^{(n)}(\cos \theta) = \int_0^\theta \frac{\cos \frac{1}{2} \varphi \cos n \varphi d\varphi}{\sqrt{2}(\cos \varphi - \cos \theta)} + \int_\theta^\pi \frac{\sin \frac{1}{2} \varphi \cos n \varphi d\varphi}{\sqrt{2}(\cos \theta - \cos \varphi)},$$

$$\frac{\pi}{2} P^{(n)}(\cos \theta) = - \int_0^\theta \frac{\sin \frac{1}{2} \varphi \sin n \varphi d\varphi}{\sqrt{2}(\cos \varphi - \cos \theta)} + \int_\theta^\pi \frac{\cos \frac{1}{2} \varphi \sin n \varphi d\varphi}{\sqrt{2}(\cos \theta - \cos \varphi)},$$

Te wzory nie stosują się do przypadku $n = 0$.

Funkcya kulista $F^{(n)}$ czyni zadość równaniu różniczkowemu:

$$(1 - z^2) \frac{d^2 F^{(n)}(z)}{dz^2} - 2z \frac{d P^{(n)}(z)}{dz} + n(n+1) P^{(n)}(z) = 0.$$

Funkcye kuliste gatunku drugiego określa wzór:

$$Q^{(n)}(z) = \frac{n!}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+1)} \left\{ y^{-n-1} + \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)} y^{-n-3} \right. \\ \left. + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2 \cdot 4 \cdot (2n+3)(2n+5)} y^{-n-5} + \dots \right\}.$$

Funkcye te analogiczne do funkcij kulistych gatunku 1-go badał Heine (Crelle XVII, Kugelfunctionen, etc.).

Pomiędzy funkcjami P i Q istnieje związek prosty:

$$\frac{1}{y-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P^{(n)}(x) Q^{(n)}(y) \quad (\text{Heine l. c.})$$

dla każdej pary wartości x, y , dla których:

$$|x - \sqrt{x^2 - 1}| > |y - \sqrt{y^2 - 1}|.$$

Co do tego twierdzenia patrz C. Neumann (Ueber die Entwickel. e. Function nach den Kugelfunctionen, Halle 1862; Theorie der Bessel'schen Functionen, Lipsk 1867), Thomae (Crelle, LXVI).

Funkcye Q^n wyrażają się przez szereg hypergeometryczny za pomocą wzoru:

$$Q^n(z) = \frac{n!}{3 \cdot 5 \cdot \dots (2n-1)} z^{-n-1} F\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n+2}{2}, \frac{3}{2} + n, \frac{1}{z^2}\right).$$

Dla $z=1$ funkcya $Q^{(n)}$ jest nieskończona, przyczem:

$$\lim_{z=1} (1-z) Q^{(n)}(z) = 1.$$

Dla każdej wartości z , której moduł jest mniejszy od 1, funkcya Q jest skończona. Funkcye $Q^{(n)}$ można wyrazić za pomocą całki wielokrotnej:

$$Q^{(n)}(z) = 2^n n! \int \dots \int \frac{dz^{n+1}}{(z^2-1)^{n+1}},$$

gdzie po stronie drugiej całkowanie wykonywa się $n+1$ razy.

Funkcya $Q^{(n)}$ jest inną całką szczególną tego samego równania różniczkowego, któremu czyni zadość funkcya $P^{(n)}$.

Funkcye $Q^{(n)}$ można też określić za pomocą wzoru:

$$Q^{(n)}(z) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} P^{(n)}(y) \frac{dy}{z-y} \quad (\text{Neumann, Crelle XXXVII}).$$

Nadto funkcję $Q^{(n)}$, podobnie jak i $P^{(n)}$, można wyrazić jako pochodną n -tą, t. j.

$$Q^{(n)} = \frac{(-2)^n n!}{(2n)!} \frac{d^n}{dz^n} \left[(z^2 - 1)^n \int_{-1}^{\infty} \frac{dz}{(z^2 - 1)^{n+1}} \right].$$

Funkcye kuliste gatunku 1-go i 2-go czynią zadość związkom:

$$\int P^{(m)}(z) P^{(n)}(z) dz = 0; \quad \int Q^{(m)}(z) Q^{(n)}(z) dz = 0,$$

$$\int P^{(m)}(z) Q^{(n)}(z) dz = \begin{cases} \frac{2\pi i}{2n+1}, & \text{gdy } m=n; \\ 0, & \text{gdy } m \leq n, \end{cases}$$

w których całkowania uskuteczniają się w zwrocie dodatnim po elipsie, mającej ogniska w punktach $+1$, -1 , lub po innej krzywej zamkniętej, dającej się przez przekształcenie ciągłe i bez przekroczenia drogi $(-1, +1)$ zamienić na rzeczoną elipsę.

Z pierwszym z powyższych wzorów pokrewny jest wzór Legendre'a dla przypadku zmiennej z rzeczywistej:

$$\int_{-1}^{+1} z^m P^{(n)}(z) dz = 0; \quad m < n.$$

Funkcye kuliste czynią zadość następującym wzorom zwrotnym:

$$(n+1)P^{n+1} - (2n+1)zP^{(n)} + nP^{(n+1)} = 0; \quad P^{(1)} - zP^{(0)} = 0,$$

(Gauss; patrz Heine, Kugelf. I str. 91–92)

$$\frac{dP^{n+1}}{dz} - \frac{dP^{(n-1)}}{dz} = (2n+1)P^{(n)},$$

$$(n+1)Q^{(n+1)} - (2n+1)zQ^{(n)} + nQ^{(n-1)} = 0; \quad Q^{(1)} + zQ^{(0)} + 1 = 0,$$

$$\frac{dQ^{(n+1)}}{dz} - \frac{dQ^{(n-1)}}{dz} = (2n+1)Q^{(n)}.$$

Funkcja $Q^{(n)}$ czyni jeszcze zadość następującemu ważnemu związkowi (Gauss, Nova integr. val. per approxim. inv.):

$$Q^{(n)}(z) = \frac{1}{2} P^{(n)}(z) \log \frac{z+1}{z-1} - Z^{(n)},$$

gdzie $Z^{(n)}$ jest funkcją całkowitą stopnia $(n-1)$ -go względem z . Wielomian $Z^{(n)}$ można wyrazić w ten sposób:

$$Z^{(n)} = \frac{2n-1}{1 \cdot n} P^{(n)}(z) + \frac{2n-5}{3(n-1)} P^{(n-3)}(z) + \frac{2n-9}{5(n-2)} P^{(n-5)}(z) + \dots;$$

wyraz ostatni zawiera $P^{(0)}$ lub $P^{(1)}$, stosownie do tego, czy n jest nieparzyste lub parzyste.

Wskazówki historyczne i bibliograficzne o funkcjach kulistych w ogólności podajemy w paragrafie następnym.

§ 8

Funkcje kuliste dwu zmiennych (Lagrange'a).

W funkcji kulistej gatunku pierwszego $P^{(n)}(z)$ zamiast z położmy $\cos \gamma$, gdzie

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos (\varphi - \varphi').$$

Temu kątowi γ można dać interpretację geometryczną, uważając go za kąt pomiędzy dwoma promieniami wodzącymi, wychodzącymi z początku współrzędnych i idącymi do dwu punktów danych. W rzeczy samej, jeżeli $(\varrho, \theta, \varphi)$, $(\varrho', \theta', \varphi')$ są współrzędne biegunowe dwu punktów danych, to kąt pomiędzy dwoma promieniami wodzącymi jest właśnie γ , a odległość punktów

wynosi $r = (\rho^2 - 2\rho\rho' \cos \gamma + \rho'^2)^{\frac{1}{2}}$. Jeżeli przez $x, y, z; x', y', z'$ oznaczymy współrzędne kartezyańskie obu punktów, będzie:

$$x = \rho \cos \theta, \quad x' = \rho' \cos \theta',$$

$$y = \rho \sin \theta \cos \varphi, \quad y' = \rho' \sin \theta' \cos \varphi',$$

$$z = \rho \sin \theta \sin \varphi, \quad z' = \rho' \sin \theta' \sin \varphi',$$

$$\cos \gamma = \frac{xx' + yy' + zz'}{\rho\rho'}, \quad r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}.$$

Funkcya $P^{(n)}$ staje się wtedy funkcją zmiennych $\theta, \theta', \varphi, \varphi'$, a po wprowadzeniu tych zmiennych przyjmuje postać:

$$P^{(n)} \cos \gamma = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{[\cos \theta' + i \sin \theta' \cos(\varphi' - \omega)]}{[\cos \theta + i \sin \theta \cos(\varphi - \omega)]^{n+1}} d\omega.$$

Przyjmijmy drugi z dwu uważanych punktów za stały, pierwszy za zmienny, wtedy $P^{(n)}$ staje się funkcją dwu zmiennych θ, φ lub też trzech zmiennych $\frac{x}{\rho}, \frac{y}{\rho}, \frac{z}{\rho}$, związanych równaniem

$$\left(\frac{x}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{y}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{z}{\rho}\right)^2 = 1.$$

Najważniejszą własnością funkcji $P^{(n)}$, uważanych za funkcyje zmiennych x, y, z , jest następująca: funkcyje te, pomnożone przez pewien czynnik, czynią zadość równaniu różniczkowemu o pochodnych cząstkowych rzędu 2-go:

$$\Delta^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$$

Mamy mianowicie:

$$\Delta^2 (\rho^n P^{(n)}) = 0, \quad \Delta^2 \left(\frac{P^{(n)}}{\rho^{n+2}} \right) = 0.$$

Jeżeli przekształcimy wyrażenie $\Delta^2 U$ przez wprowadzenie zmiennych θ, φ , funkcyja $P^{(n)}$ czynić będzie zadość równaniu o pochodnych cząstkowych:

$$\frac{\partial^2 P^{(n)}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 P^{(n)}}{\partial \varphi^2} + \cotg \theta \frac{\partial P^{(n)}}{\partial \theta} + n(n+1) P^{(n)} = 0.$$

Funkcyja $P^{(n)}$ jest więc funkcyą wymierną całkowitą ilości $\cos \theta, \sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi$, czyniącą zadość powyższemu równaniu.

Przechodząc do definicyi funkcyi kulistej dwu zmiennych, powiemy:

Najogólniejsza funkcyja wymierna całkowita stopnia n -tego tych trzech ilości (a więc funkcyja dwu zmiennych niezależnych), czyniąca zadość poprzedniemu równaniu różniczkowemu, nazywa się funkcyą kulistą Laplace'a i oznacza się przez $Y^{(n)}$; przypadkiem szczególnym funkcyi $Y^{(n)}$ jest $P^{(n)}$, t. j. funkcyja kulista Legendre'a, gdy w niej za argument przyjmiemy $\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \sin(\varphi - \varphi')$.

Funkcyja Laplace'a wyraża się przez funkcyę Legendre'a za pomocą wzoru:

$$Y^{(n)} = \sum_{i=0}^n [h_i \cos(i\varphi) + k_i \sin(i\varphi)] \sin^i \theta \frac{d^i P^{(n)}(\cos \theta)}{d(\cos \theta)^i},$$

gdzie h_i i k_i są stałemi dowolnemi.

Innem wyrażeniem funkcyi Laplace'a przez funkcyę Legendre'a jest:

$$Y^{(n)} = \sum_{k=0}^{2n+1} m_k P^{(n)}(\cos \gamma_k)$$

gdzie $m_1, m_2, \dots, m_{2n+1}$ są stałe dowolne w liczbie $2n+1$, zaś

$$\cos \gamma_k = \cos \theta \cos \theta_k + \sin \theta \sin \theta_k \cos(\varphi - \varphi_k);$$

θ_k, φ_k są współrzędne $2n+1$ punktów, znajdujących się na kuli o promieniu 1.

Każda funkcyja wymierna jednorodna całkowita stopnia n -tego $U(x, y, z)$, czyniąca zadość równaniu $\Delta^2 U = 0$, podzielona przez ϱ^n , jest funkcyą Laplace'a. Funkcya najogólniejsza Laplace'a zawiera $2n+1$ stałych dowolnych.

Funkcya kulista $Y^{(n)}$, uważana za funkcyę współrzędnych x, y, z punktów na kuli o promieniu, 1 ma własność:

$$\iint Y^{(n)} Y^{(m)} d\sigma = 0, \quad m \leq n,$$

gdzie całkowanie rozciąga się na całą powierzchnię kuli. Mamy także:

$$\iint Y^{(n)} P^{(n)} d\sigma = \frac{4\pi}{2n+1} Y_{\theta=\theta', \varphi=\varphi'}^{(n)},$$

gdzie $Y_{\theta=\theta', \varphi=\varphi'}^{(n)}$ oznacza wartość funkcyi $Y^{(n)}$ dla $\theta=\theta'$, $\varphi=\varphi'$.

Wzory te można tak napisać:

$$\int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} Y^{(n)}(\theta, \varphi) \cdot Y^{(m)}(\theta, \varphi) d\varphi = 0, \quad m \leq n,$$

$$\int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} Y^{(n)}(\theta, \varphi) P^{(n)}(\cos \gamma) d\varphi = \frac{4\pi}{2n+1} Y_{\theta=\theta', \varphi=\varphi'}^{(n)}$$

gdzie $\cos \gamma$ wyraża się wiadomym sposobem przez $\theta, \theta', \varphi, \varphi'$.

Funkcye kuliste badali równocześnie Legendre (Sur l'attraction des sphéroides, Mém. de Paris 1785, 1787, Exerc. Fonct. ellipt.) i Laplace (Mém. de Paris 1785, Mécan. céleste). Później zajmowali się nimi głównie: Gauss (Werke V), Dirichlet (Crelle XVII), Jacobi (Crelle, XV); w nowszych czasach: Dini (Annali di mat. VI), F. Neumann (Lipsk 1878), a zwłaszcza Heine, którego praca dwutomowa „Theorie der Kugelfunctionen“ (2 tomy, wydanie 2-gie, Lpask 1878) zawiera najwięcej szczegółów i wskazówek

o tym przedmiocie. Badano także funkcyje stożkowe, mające wiele związku z funkcyami kulistemi i walcowemi. Patrz Mehler (Crelle LXVIII) „Ueber eine mit den Kugel- und Cylinderfunctionen verwandte Function“ it d. (Progr. Elbląg 1870), a także cytowany traktat Heinego. (t. I str. 300, II str. 218). Najważniejszy rezultat dla funkcyj stożkowych jest ten: są to funkcyje kuliste w przypadku, gdy skaźnik n jest zespolony.

Zarys teorii funkcyj kulistych zawiera się w najnowszej książce Frischaufa (Lipsk 1897).

§ 9.

Funkcye walcowe Bessela.

Funkcyą walcową (cylindryczną) lub funkcyą Bessela gatunku pierwszego nazywamy funkcyę, określoną za pomocą wzoru:

$$\begin{aligned} J^{(n)}(z) &= \frac{z^n}{2^n \cdot n!} \left(1 - \frac{z^2}{2(2n+2)} + \frac{z^4}{2 \cdot 4 \cdot (2n+2)(2n+4)} - \dots \right) \\ &= \frac{1}{0! n!} \left(\frac{z}{2} \right)^n - \frac{1}{1! (n+1)!} \left(\frac{z}{2} \right)^{n+2} + \frac{1}{2! (n+2)!} \left(\frac{z}{2} \right)^{n+4} - \dots \end{aligned}$$

Szereg ten jest zbieżny dla każdej wartości z . Bessel dał (Akad. Berl. 1824) definicyę następującą:

$$J^{(n)}(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(z \sin \omega - n\omega) d\omega.$$

Jest nadto:

$$J^{(n)}(z) = \frac{z^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(z \cos \omega) \sin^{2n} \omega d\omega,$$

$$J^{(n)}(z) = \frac{(-1)^n}{\pi} \int_0^\pi e^{i z \cos \omega} \cos n\omega d\omega.$$

Funkcya $J^{(n)}(z)$ jest całką szczególną równania różniczkowego:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial F}{\partial z} + \left(1 - \frac{n^2}{z^2}\right) F = 0.$$

Dla $n=0$ funkcya $J^{(n)}(z)$ staje się:

$$J^{(n)}(z) = 1 - \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^4}{2^2 \cdot 4^2} - \dots$$

i jest granicą funkcyi kulistej $P^{(n)}\left(\cos \frac{z}{n}\right)$ dla $n = \infty$.

Wraz z funkcją J Neumann rozważał inną funkcję, która oznacza przez $O^{(n)}$ i nazywa funkcją Bessela gatunku 2-go. Określa się ta funkcya przy pomocy wzoru:

$$\varepsilon_n O^{(n)}(z) = \frac{2^n n!}{z^{n+1}} \left(1 + \frac{z^2}{2(2n-2)} + \frac{z^4}{2 \cdot 4 \cdot (2n-2)(2n-4)} + \dots \right),$$

gdzie $\varepsilon_n=1$ dla $n=0$, $\varepsilon_n=2$ dla $n>0$ i gdzie liczba wyrazów w nawiasie jest skończona; ostatnim wyrazem jest:

$$\frac{z^n}{2 \cdot 4 \dots n \cdot (2n-2)(2n-4) \dots n}, \text{ gdy } n \text{ parzyste,}$$

$$\frac{z^{n-1}}{2 \cdot 4 \dots (n-1)(2n-2)(2n-4) \dots (n+1)}, \text{ gdy } n \text{ nieparzyste.}$$

Poprzednie wyrażenie można i tak napisać:

$$\varepsilon_n O^{(n)}(z) = \frac{n}{z} \left(\frac{(n-1)!}{0!} \left(\frac{2}{z}\right)^n + \frac{(n-2)!}{1!} \left(\frac{2}{z}\right)^{n+2} + \frac{(n-3)!}{2!} \left(\frac{2}{z}\right)^{n+4} + \dots \right);$$

ostatnim wyrazem jest:

$$\frac{(n-2)!}{\left(\frac{n}{2}\right)!} \left(\frac{2}{z}\right)^0, \text{ gdy } n \text{ parzyste, albo } \left(\frac{2}{z}\right)^1, \text{ gdy } n \text{ nieparzyste.}$$

Funkcję $O^n(z)$ można wyrazić za pomocą całki określonej

$$O^n(z) = \int_0^\infty \frac{(\omega + \sqrt{\omega^2 + z^2})^n + (\omega - \sqrt{\omega^2 + z^2})^n}{2z^{n+1}} e^{-\omega} d\omega.$$

Funkcja $O^n(z)$ jest funkcją wymierną całkowitą ilości $\frac{1}{z}$ stopnia $(n+1)$ -go, znikającą dla $z=\infty$; czyni ona zadość równaniu różniczkowemu:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{3}{z} \frac{\partial F}{\partial z} + \left(1 - \frac{n^2 - 1}{z^2}\right) F = g_n,$$

gdzie $g_n = \frac{1}{z}$ dla n parzystego, $\frac{n}{z^2}$ dla n nieparzystego.

Przez wprowadzenie funkcji O^n gatunku 2-go Neumann pokazał, że można utworzyć teorię funkcji walcowych analogiczną do teorii funkcji kulistych; wiele własności pozostaje bez zmiany, różnicę jedyną stanowi to, że funkcje kuliste gatunku 1-go i 2-go są rozwiązaniami szczególnymi jednego i tego samego równania różniczkowego, gdy funkcje walcowe I^n , O^n są rozwiązaniami dwu różnych równań różniczkowych.

Funkcja $J^n(z)$ znika dla nieskończonej wartości rzeczywistej i tylko rzeczywistych zmiennej z (twierdzenie Fouriera).

Funkcje J^n i O^n mają trzy własności analogiczne do własności funkcji kulistych, mianowicie:

$$\int J^m(z) J^n(z) dz = 0; \int O^m(z) O^n(z) dz = 0; \int J^m(z) O^n(z) dz = k,$$

gdzie całkowanie odbywa się w zwrocie dodatnim wzdłuż krzywej zamkniętej. Gdy krzywa ta nie zawiera w swym wnętrzu punktu zerowego, jest zawsze $k=0$; gdy go zawiera, wtedy $k \neq 0$,

jeżeli $m \leq n$; $k = \frac{2\pi i}{\varepsilon_n}$ jeżeli $m = n$. Gdy krzywa przechodzi przez

punkt zero, wtedy wzory, w których zachodzi $O^{(n)}$ nie mają miejsca.

Dla każdej wartości n (wyjąwszy $n=0$) zachodzą związki zwrotne:

$$2 \frac{dJ^{(n)}(z)}{dz} = J^{(n-1)}(z) - J^{(n+1)}(z); \quad 2 \frac{dO^{(n)}(z)}{dz} = O^{(n-1)}(z) - O^{(n+1)}(z).$$

Dla $n=0$ mamy:

$$\frac{dJ^{(0)}(z)}{dz} = -J^{(1)}(z); \quad \frac{dO^{(0)}(z)}{dz} = -O^{(1)}(z).$$

Funkcya $J^{(n)}(z)$ czyni zadość związkowi zwrotnemu (Bessela) dla $n > 0$:

$$\frac{2n}{z} J^{(n)}(z) = J^{(n-1)}(z) - J^{(n+1)}(z).$$

Nadto jest:

$$J^{(n)}(z) = \frac{n}{z} J^{(n)}(z) - \frac{dJ^{(n)}(z)}{dz}.$$

Wzór:

$$\frac{1}{y-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n J^{(n)}(x) O^{(n)}(y)$$

ma miejsce dla wszelkich par wartości x, y , czyniących zadość warunkowi $\text{mod } x < \text{mod } y$.

Ciekawą, zwłaszcza ze względu na zastosowania, własnością funkcyj Bessela jest następująca:

Niechaj n będzie odległością dwu punktów o współrzędnych $x, y; x_1, y_1$; funkcyja $J^{(0)}(r)$ czyni zadość równaniu o pochodnych cząstkowych:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + U = 0,$$

i też własność posiada inna funkcyja $Y^{(0)}(r)$, która wraz z funkcyją $J^{(0)}(r)$ jest inną całką szczególną równania różniczkowego liniowego rzędu 2-go, któremu czyni zadość funkcyja $I^0(r)$.

O rozwinięciu na szeregi według funkcyj Bessela patrz Rozdział XIX.

Najważniejsze prace o funkcyjach Bessela ogłosili: Bessel (Abh. der Berl. Akad. 1824), Jacobi (Crelle XV), Schlömilch (Zeit. f. Math. u. Phys. 1857), Lipschitz (Crelle LVI), C. Neumann (Besselsche Functionen, Lipsk 1867), Heine (Kugelfunctionen) etc

§ 10.

Funkcye Lamégo.

Wprowadzimy funkcyę Lamégo pod postacią najogólniejszą, nadaną im przez Heinego. Niechaj $\psi(z)$ będzie wielomianem stopnia $(p+1)$ względem z ; połóżmy $du = \frac{1}{2} \frac{dz}{V\psi(z)}$ i niechaj będzie równanie różniczkowe:

$$\frac{d^2 V}{du^2} + \varphi(z) V = 0,$$

w którym $\varphi(z)$ jest znowu wielomianem tak wybranym, aby to równanie miało rozwiązanie V , równe funkcyi całkowitej stopnia n -tego względem z . W takim razie funkcyę V nazywamy funkcyą Lamégo rzędu p -tego i stopnia n -tego.

Funkcyę Lamégo można także określić jako funkcyę całkowitą stopnia n -tego, czyniącą zadość równaniu:

$$4\psi(z) \frac{d^2 V}{dz^2} + 2\psi'(z) \frac{dV}{dz} + \varphi(z) V = 0,$$

gdzie ψ jest wielomianem danym stopnia $p+1$, φ wielomianem tak dobrac się mającym, aby to równanie różniczkowe miało właśnie takie rozwiązanie, o jakim mowa.

Istnieje $\frac{(n+1)(n+2)\dots(n+p+2)}{(p-1)!} (2n+p-1)$ funkcji φ , dających początek tyluż funkcjom Lamégo, pomiędzy którem nie zachodzi żaden związek liniowy jednorodny o współczynnikach stałych. Wielomian φ jest stopnia $p-1$. Funkcje, wprowadzone przez Lamégo, są właśnie przypadkiem szczególnym tu uważanych; są one rozwiązaniami równania

$$(z^2 - b^2)(z^2 - c^2) \frac{d^2 E}{dz^2} + z(2z^2 - b^2 - c^2) \frac{dE}{dz} + [(b^2 + c^2)m - n(n+1)z^2] E = 0.$$

Jeżeli wprowadzimy całkę eliptyczną u , określoną za pomocą związku

$$du = -c \frac{dz}{V(z^2 - b^2)(c^2 - z^2)},$$

wtedy powyższemu równaniu nadać można postać typu:

$$\frac{d^2 E(z)}{du^2} = [n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2 u + h] E(z).$$

Funkcje tu uważane badali: Lamé (Leçons sur les fonctions inverses, etc., Paryż 1857; „Chaleur“, tamże 1861; Journ. Liouville'a IV, V, VIII; w przypadku ogólnym Heine (Crelle, LX, LXI, LXII, Berl. Monatsb. 1864, patrz także „Kugelfunctionen“, I str. 445).

ROZDZIAŁ XIX.

PRZEDSTAWIENIE ANALITYCZNE FUNKCYJ.

§ 1.

Rozważania ogólne, szereg Wrońskiego. Szereg Lagrange'a.

Zagadnienie zasadnicze o przedstawieniu analitycznem funkcyj jest bardzo dawne. Rozważania, odnoszące się do tego przedmiotu, podzielić można na dwie kategorie: albo idzie o wyrażenie funkcyi przez inne funkcyjne, z góry dane; albo, też o wyrażenie funkcyi danej przez wartości, jakie ona i jej pochodne posiadają w pewnych punktach i t. p.

Każde wyrażenie analityczne o skończonej lub nieskończonej liczbie działań można rozważać z dwojakiego punktu widzenia, stosownie do tego, czy dajemy z góry ilości stałe, jakie mają zachodzić w rozwinięciu, czy też dajemy formę ilości zmiennych.

Najprostszem rozwinięciem, należącym do tego porządku rzeczy, jest sławne rozwinięcie, znane pod nazwą wzoru *Taylor - Maclaurina*. Można je uważać za wzór pierwszej kategorii, jeżeli żądamy rozwinięcia, którego wyrazy postępują według potęg całkowitych dodatnich różnicy $z - z_0$; za wzór zaś kategorii drugiej, jeżeli widzimy w nim rozwinięcie, za pomocą

którego można obliczać wartości funkcyi przy pomocy danych wartości funkcyi i jej kolejnych pochodnych w punkcie x_0 .

Do tego samego rzędu rozważań należą wzory Cauchy'ego i Laurenta (patrz Rozdz. XIII), różne wzory interpolacyjne (patrz Rozdz. X), wzory Weierstrassa i Mittag-Lefflera (patrz Rozdz. XIII). Wreszcie innemi wzorami, należącemi do pierwszej kategorii, są wzory Wrońskiego i Lagrange'a.

Pierwszy z tych autorów stawia sobie zadanie, dotyczące wyrażenia funkcyi za pomocą szeregów, których wyrazy zależą od innych funkcyj, dowolnie danych. Wzór, który otrzymuje, nazywa prawem najwyższem. Jest to wzór bardzo ogólny, lecz daleki od tego, aby można było uważać go za ścisły z punktu widzenia analizy dzisiejszej; Du Bois-Reymond nadaje mu znaczenie jedynie formalne. Praca Wrońskiego, dotycząca tego przedmiotu, była przedstawiona Instytutowi francuskiemu w r. 1810, lecz pomysły jego pozostały nieznanemi prawie przez lat 60, póki nie ukazała się praca Cayley'a (Quart. Journ. 1873), po której nastąpiły dopiero prace Transona (Nouv. Ann. de Math. 1875, Ch. Lagrange'a (Comptes Rendus 1884, Acad. de Belgique 1884) i innych.

Większe szczegóły o szeregach Wrońskiego znaleźć można w pracach Dicksteina (Prace matemat. - fiz., Warszawa t. II 1890 i t. V, 1893; Bibliotheca mathematica, Stockholm 1894; „Życie i dzieła Wrońskiego“, Kraków 1896). Porówn. Laurent, Cours d'analyse, t. III.

Jest rzeczą naturalną, że z szeregu Wrońskiego wynikają jako przypadki szczególne—wzór Taylora, wzory Bürmanna (rozwiniecie funkcyi według potęg innych funkcyj) oraz tak zwany szereg Lagrange'a. Ten ostatni ma postać następującą :

$$f(z) = f(a) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \left[\frac{z-a}{\varphi(z)} \right]^{n+1} \left| \frac{(d^n f'(z) \varphi(z)^{n+1})}{dz^n} \right|_{z=a},$$

gdzie $\varphi(z)$ jest funkcją dowolną z tem zastrzeżeniem, aby była

holomorficzną w części płaszczyzny otaczającej punkt a . Dla $\varphi(z) = 1$ otrzymujemy rozwinięcie *Taylor'a*.

Szereg ten stosujemy przy szukaniu pierwiastków równania postaci $(z-a) - a\varphi(z) = 0$, którego rozwiązanie dla przypadku szczególnego $\varphi(z) = \sin z$ stanowi ważne zagadnienie mechaniki niebieskiej.

Wymieniamy następujące prace o szeregu *Lagrange'a*: *Chio* (*Savants étrang.* XII, Acc. di Torino 1872), *Genocchi* (*Comptes rend.* 1873), *Rouché* (*Ecole polytech.* cah. XXXIX), *Żorawski* (*Prace mat.-fiz.* V, 1894; *Rozpr. Akad. krak.* XXXVII, 1899).

Należy zwrócić uwagę na to, że do wzorów drugiej kategorii należą wzory, których wyrazami są funkcyje kołowe (szeregi *Fouriera*), kuliste, funkcyje *Bessela* i t. p. O tych rozwinięciach jest mowa w paragrafach następnych.

§ 2.

Rozwinięcie na szeregi Fouriera.

Szereg typu

$$\sum_{k=0}^{\infty} [a_k \sin(kz) + b_k \cos(kz)]$$

nazywa się szeregiem trygonometrycznym. Jeżeli w szczególności współczynniki tego szeregu wyznaczają się za pomocą wzorów:

$$b_0 = \frac{1}{a} \int_{-\pi}^{+\pi} f(a) da; \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(a) \cos(ka) da;$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(a) \sin(ka) da,$$

gdzie $f(z)$ jest funkcją, którą szereg przedstawia, mamy wtedy szereg Fouriera. Sądzono dawniej, że wszystkie szeregi trygonometryczne są szeregami Fouriera; później pokazało się, że tak nie jest (Heine, Crelle LXXI).

Mówi się, że funkcja czyni zadość warunkowi Dirichleta, jeżeli w pewnym przedziale jest zawsze skończona, nie ma nieskończenia wielu nieciągłości zwykłych i nie ma nieskończenia wielu maximów i minimów; wtedy zachodzi twierdzenie (Dirichleta):

Funkcja $f(z)$, czyniąca zadość wszystkim warunkom Dirichleta, daje się rozwinąć na szereg Fouriera, którego wartość w każdym punkcie zwyczajnym jest wartością funkcji; w każdym zaś punkcie przerwy zwykłej jest średnią dwu granic prawej i lewej, do których dąży funkcja, zbliżając się do punktu przerwy. Rozwinięcie takie jest możliwe tylko jednym sposobem (Heine, Crelle LXXI).

Jeżeli funkcja staje się nieskończoną w punkcie c , wtedy warunkiem dostatecznym na to, aby szereg w dalszym ciągu przedstawiał funkcję, jest, by całka

$$\int_{c-\omega}^{c+\omega} f(a) da$$

była zbieżną (Dirichlet, Du Bois Reymond, Crelle LXXXIX).

Jeżeli funkcja posiada skończoną liczbę punktów osobliwych, w których otoczeniu istnieje nieskończenie wiele punktów przerwy zwyczajnej, wtedy twierdzenie powyższe utrzymuje się, lecz szereg nie daje wartości funkcji w punkcie osobliwym (Dirichlet, Lipschitz, Crelle LXIII).

Jeżeli funkcja ma nieskończenie wiele

maximów i minimów i jeżeli dla każdego takiego punktu β czyni zadość warunkowi:

$$\lim_{\delta=0} |f(\beta + \delta) - f(\beta)| \log \delta = 0,$$

to i wtedy daje się rozwinąć na szereg Fouriera. Jest to twierdzenie Lipschitza, a warunek poprzedzający, który jest warunkiem bardziej ścieśniającym niż warunek ciągłości funkcyi, nazywa się warunkiem Lipschitza.

Istnieją napewno funkcyje, nie czyniące zadość warunkowi Lipschitza, dla których szereg Fouriera jest rozbieżny (Du Bois Reymond, Abh. der Bayr. Akad. XII, 1876).

Zbieżność szeregu Fouriera w punkcie określonym zależy jedynie od sposobu, w jaki zachowuje się funkcyja w sąsiedztwie tego punktu (Riemann).

Istnieją funkcyje całkowalne z nieskończeniem wielu maximami i minimami, nie dające się przedstawić za pomocą szeregu Fouriera (Riemann).

Są funkcyje niecałkowalne ze skończoną liczbą maximów i minimów, nie dające się przedstawić za pomocą szeregu Fouriera (Riemann).

Szereg Fouriera jest jednostajnie zbieżny, gdy przedstawia funkcyję ciągłą albo też nieciągłą tylko w skończonej liczbie punktów i nie mającą nieskończenie wielu maximów i minimów (Heine, Crelle LXXI).

Funkcyja skończona, posiadająca nieskończenie wiele osobliwości takich, że jedna z grup pochodnych tej grupy nieskończenie wielu punktów jest skończona, jeżeli daje się rozwinąć na szereg Fouriera, to jednym tylko sposobem (twierdzenie Cantora, Math. Ann. V).

Bez względu na sposób, w jaki funkcyja daje się rozwinąć na szereg trygonometryczny, którego współczynniki a_k , b_k stają się nieskończenie małemi gdy rośnie, liczba k , współczynniki te mają zawsze postać wyżej wskazaną przez szereg Fouriera, o ile tylko całki zachodzące w ich wyrażeniu nie są pozbawione znaczenia (Twierdzenie Du Bois-Reymonda Abh. der Bayr. Akad. 1875).

Badaniu przedstawienia funkcyj za pomocą szeregów trygonometrycznych dało początek całkowanie równania t. zw. struny drgającej, t. j. równania o pochodnych cząstkowych $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, któremu czyni zadość szereg trygonometryczny. Euler postawił zagadnienie, czy każda funkcyja daje się zawsze przedstawić za pomocą szeregu trygonometrycznego; Fourier zaś (Acad. de Paris 1807) mniemał, że można na nie odpowiedzieć twierdząco. Rozważania Fouriera były bardzo dalekimi od ścisłości; po nich nastąpiły prace Poissona i Cauchy'ego; lecz pierwszą pracą istotnie ważną o tym przedmiocie była praca Dirichleta (Créle, IV, 1829). Z późniejszych ważną jest rozprawa Riemanna (Diss. inaug. 1854), który rozważa ten przedmiot z nowych punktów widzenia, a w pierwszej części rozprawy daje wyborny rys historyczny i krytyczny wszystkich poprzednich badań, odnoszących się do szeregów trygonometrycznych. Z prac nowszych wymieniamy prace już cytowane: Heinego, Du Bois Reymonda, Lipschitza, dalej Dini'ego (Ann. di mat. VI), Ascoli'ego (Lincei 1878), książkę Dini'ego: „Sulla serie di Fourier“ (Piza 1880), studyum krytyczne i historyczne Sachsego (Inaug. Diss., Getynga 1879), podane w przekładzie w Bull. Darboux z r. 1880. Dirichlet i Riemann mniemali, że każda funkcyja ciągła może być w każdym punkcie bez wyjątku przedstawiona przez szereg Fouriera; Du Bois Reymond dowiódł pierwszy, iż to mniemanie jest błędne. Schwarz podał na to przykład dostatecznie prosty.

Badano też szeregi trygonometryczne o dwu zmiennych i przedstawialność funkcyj przez takie szeregi; patrz co do tego pracę Ascoli'ego (Lincei 1879—1880).

§ 3.

Rozwinięcie na szereg według funkcyj kulistych Legendre'a.

Każda funkcyja jednowartościowa $f(z)$, która jest skończona i ciągła wewnątrz elipsy z ogniskami w punktach $+1, -1$, daje się rozwinąć na szereg typu:

$$f(z) = a^0 P^{(0)}(z) + a_1 P^{(1)}(z) + \dots$$

gdzie współczynniki a określają się za pomocą wzoru:

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) P^{(n)}(x) dx.$$

Rozwinięcie takie jest możliwe tylko jednym sposobem.

Każda funkcyja jednowartościowa $f(z)$, skończona i ciągła wewnątrz pierścienia eliptycznego, ograniczonego dwiema elipsami współogniskowymi o ogniskach w punktach $+1, -1$, daje się rozwinąć na szereg typu:

$$f(z) = a_0 P^{(0)}(z) + a_1 P^{(1)}(z) + \dots \\ + \beta_0 Q^{(0)}(z) + \beta_1 Q^{(1)}(z) + \dots,$$

który zachowuje swe znaczenie dla wszystkich punktów pier-

ścienia. Spółczynniki α , β , określają się za pomocą wzorów:

$$\alpha_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) Q^{(n)}(x) dx,$$

$$\beta_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) P^{(n)}(x) dx.$$

Potęgą z^n w rozwinięciu według funkcyj kulistych przedstawia się tak:

$$z^n = \frac{n!}{3 \cdot 5 \cdot (2n+1)} \left\{ (2n+1) P^{(n)}(z) + (2n+3) \frac{2n+1}{2} P^{(n+2)}(z) \right. \\ \left. + (2n+7) \frac{(2n+1)(2n-1)}{2 \cdot 4} P^{(n+4)}(z) + \dots \right\} \text{ (Legendre 1784)}$$

Wzór analogiczny stanowi:

$$\frac{1}{z^{n+1}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (2n-1)}{n!} \left\{ (2n+1) Q^{(n)}(z) - (2n+5) \frac{2n+1}{2} Q^{(n+2)}(z) \right. \\ \left. - (2n+9) \frac{(2n+1)(2n+3)}{2 \cdot 4} Q^{(n+4)}(z) + \dots \right\}.$$

Godnemi uwagi są rozwinięcia następujące (Bauer, Crelle LVI):

$$\frac{2}{\pi \sqrt{1-z^2}} = P^{(0)} + 5 \left(\frac{1}{2} \right)^2 P^{(2)} + 9 \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 P^{(4)} + \dots,$$

$$\frac{8}{\pi} \arcsin z = 3 P^{(1)} + 7 \left(\frac{1}{4} \right)^2 P^{(3)} + 11 \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 P^{(5)} + \dots,$$

$$\frac{2}{\pi} \sqrt{1-z^2} = \frac{1}{2} P^{(0)} - 5 \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \right) P^{(2)} - 9 \cdot \frac{3}{6} \left(\frac{1}{2 \cdot 4} \right)^2 P^{(4)} \\ - 13 \cdot \frac{5}{8} \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^2 P^{(6)} - \dots$$

Rozwinięcia funkcji $\sin n\theta$ i $\cos n\theta$ według funkcji kulistych (Heine, Kugelf. I, str. 86 i dalsze; Most, Crelle LXX) są:

$$\begin{aligned} \frac{4}{\pi} \cdot \frac{2 \cdot 4 \dots (2n-2)}{1 \cdot 3 \dots (2n-3)} \sin n\theta &= (2n-1) P^{(n-1)}(\cos \theta) \\ &+ (2n+3) \frac{(n-1)^2 - n^2}{(n+2)^2 - n^2} P^{(n+1)}(\cos \theta) \\ &+ (2n+7) \frac{[(n-1)^2 - n^2][(n+1)^2 - n^2]}{[(n+2)^2 - n^2][(n+4)^2 - n^2]} P^{(n+3)}(\cos \theta) + \dots \\ 2 \frac{3 \cdot 5 \dots (2n+1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \cos n\theta &= (2n+1) P^{(n)}(\cos \theta) \\ &+ (2n-3) \frac{n^2 - (n+1)^2}{n^2 - (n-2)^2} P^{(n-2)}(\cos \theta) \\ &+ (2n-7) \frac{[n^2 - (n+1)^2][n^2 - (n-1)^2]}{[n^2 - (n-2)^2][n^2 - (n-4)^2]} P^{(n-4)}(\cos \theta) + \dots \end{aligned}$$

§ 5.

Rozwinięcie funkcji punktów na kuli na szereg według funkcji kulistych Laplace'a.

Niechaj będzie kula o promieniu 1 i punkt na niej, określony przez dwie współrzędne biegunowe: jedną θ (zmieniającą się od 0 do π) i drugą φ (zmieniającą się od 0 do 2π). Funkcya zmiennych θ, φ nazywa się zwykle funkcją punktów kuli lub także funkcją dwóch kątów.

Funkcya $f(\theta, \varphi)$, skończona i ciągła dla wszystkich punktów kuli, mająca przerwy w skończono-

nej liczbie punktów lub linii, daje się rozwinąć na szereg funkeyj kulistych Laplace'a w postaci:

$$f(\theta, \varphi) = Y^{(0)} + Y^{(1)} + Y^{(2)} + \dots,$$

gdzie

$$Y^{(n)} = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^\pi d\theta_1 \sin \theta_1 \int_0^{2\pi} f(\theta_1, \varphi_1) P^{(n)}(\cos \gamma) d\varphi_1,$$

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta_1 + \sin \theta \sin \theta_1 \cos(\varphi - \varphi_1).$$

Rozwinięcie to ma miejsce dla każdego punktu kuli, o ile w punkcie średnicowo-przeciwległym funkeya jest także ciągłą, a na kołach wielkich, przez punkt dany przechodzących, ma skończoną liczbę maximów i minimów. Rozwinięcie to daje się też rozciągnąć na przypadek, w którym ta liczba maximów i minimów nie jest skończona; lecz wtedy zachodzą warunki, w których szczegóły wchodzić nie będziemy.

Rozważania nad przedmiotem, o którym mowa, rozpoczął Poisson (École polyt. cah. XIX, „Chaleur“ str. 212); później zajmowali się nim: Dirichlet (Crelle XVII), który sprostował błąd w dowodzeniu Poissona; Bonnet (Liouville, 1852); Kronecker (patrz Heine, Kugelf. I str. 434) i Dini (Annali di mat VI, 1874) stwierdzili, że dowodzenia Dirichleta wymagają jeszcze pewnych uzupełnień.

§ 5.

Rozwinięcie funkeyi na szereg funkeyj Bessela.

Każda funkeya $f(z)$, jednowartościowa, skończona i ciągła wewnątrz koła o promieniu 1, daje się rozwinąć na szereg:

$$f(z) = a_0 J^{(0)}(z) + a_1 J^{(1)}(z) + a_2 J^{(2)}(z) + \dots$$

stosuje się do wszystkich punktów tego koła. Spółczynniki wyrażają się w ten sposób:

$$a_n = \frac{\varepsilon_n}{2\pi i} \int f(z) O^{(n)}(z) dz,$$

gdzie całkowanie uskutecznia się w zwrocie dodatnim wzdłuż okręgu; wzór powyższy na rozwinięcie daje się obustronnie różniczkować.

Każda funkcyja, jednowartościowa skończona i ciągła w pierścieniu pomiędzy dwoma kołami spółśrodkowymi, których środki są w punkcie zero, daje się rozwinąć na szereg postaci:

$$f(z) = a_0 J^{(0)}(z) + a_1 J^{(1)}(z) + \dots + \beta_0 O^{(0)}(z) + \beta_1 O^{(1)}(z) + \dots,$$

który stosuje się do wszystkich punktów pierścienia; spółczynniki mają wartości:

$$\alpha_n = \frac{\varepsilon_n}{2\pi i} \int f(z) O^{(n)}(z) dz, \quad \beta_n = \frac{\varepsilon_n}{2\pi i} \int f(z) J^{(n)}(z) dz,$$

gdzie oba całkowania wykonywają się w zwrocie dodatnim wzdłuż krzywej zamkniętej, zawartej w pierścieniu i otaczającej punkt zero.

Przypadkami szczególnymi tych rozwinięć są następujące:

$$\cos z = J^{(0)}(z) - 2J^{(2)}(z) + 2J^{(4)}(z) - \dots$$

$$\sin z = 2J^{(1)}(z) - 2J^{(3)}(z) + 2J^{(5)}(z) - \dots$$

$$1 = J^{(0)}(z) + 2J^{(2)}(z) + 2J^{(4)}(z) + \dots$$

$$\frac{1}{2} z = J^{(1)}(z) + 3J^{(3)}(z) + 5J^{(5)}(z) + \dots$$

$$J^{(0)}(c+z) = J^{(0)}(c) J^{(0)}(z) - 2J^{(1)}(c) J^{(1)}(z) + 2J^{(2)}(c) J^{(2)}(z) - \dots$$

Jeżeli rozwinieśmy na szeregi Fouriera funkcyę $\cos(z \sin \omega)$, $\sin(z \sin \omega)$, to współczynniki wstaw i dostaw będą funkcyami Bessela.

Jeżeli funkcyę $f(z)$ jest skończona i ciągła dla wartości rzeczywistych z , zawartych między 0 i π i ma pochodną zawsze skończoną, wtedy można ją rozwinąć według wzoru:

$$f(z) = f(0) + \frac{1}{2} A_0 + A_1 J^{(0)}(z) + A_2 J^{(0)}(2z) + A_3 J^{(0)}(3z) + \dots,$$

gdzie

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \mu \cos(n\mu) d\mu \int_0^1 \frac{f'(t)}{1-t^2} dt.$$

Do prac, odnoszących się do tego przedmiotu, prócz wymienionych już poprzednio, należy dodać pracę C. Neumanna „Ueber die Kreis-Kugel- und Cylinderfunctionen fortschr. Entwickl.“ Lipsk 1881

Biblioteka
matematyczno-fizyczna
»ANTONIEGO WILKA.«
Liczba:

ROZDZIAŁ XX.

TEORIA LICZB CAŁKOWITYCH: WYMIERNYCH I ZESPOŁONYCH.

§ 1.

Podzielność liczb wymiernych całkowitych. Liczby pierwsze.

Liczba całkowita jest podzielna przez drugą, jeżeli reszta po podzieleniu pierwszej przez drugą jest zerem.

Liczba całkowita pierwsza jest liczbą podzielną tylko przez siebie samą i przez jedność.

Każda liczba całkowita rozkłada się jednym tylko sposobem na iloczyn skończonej liczby czynników pierwszych.

Jeżeli liczba N , rozłożona na czynniki pierwsze, jest $\alpha^m \beta^n \dots$, to suma jej wszystkich dzielników pierwszych i niepierwszych wynosi:

$$\frac{\alpha^{m+1} - 1}{\alpha - 1} \cdot \frac{\beta^{n+1} - 1}{\beta - 1} \dots$$

a liczba tych dzielników:

$$(m + 1) (n + 1) \dots$$

Liczba N daje się: $\frac{1}{2}(m+1)(n+1)\dots$ albo $\frac{1}{2}(m+1)(n+1)\dots + \frac{1}{2}$ różnemi sposobami rozłożyć na dwa czynniki, stosownie do tego, czy przynajmniej jeden z wykładników $m, n \dots$ jest nieparzysty lub żaden.

Dwie liczby nazywają się względnie pierwszymi, jeżeli nie mają innego wspólnego dzielnika prócz jedności.

Oznaczamy symbolem $\varphi(N)$ liczbę liczb pierwszych względem N i mniejszych od niej.

Istnieje związek (Eulera):

$$\varphi(N) = N \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) \dots$$

gdzie $\alpha, \beta \dots$ są czynniki pierwsze różne liczby N .

Jeżeli N, N' są liczbami względnie pierwszymi, to:

$$\varphi(NN') = \varphi(N)\varphi(N').$$

Jeżeli Σ przyjmuje kolejno wszystkie wartości dzielników liczby N , to:

$$\Sigma \varphi(z) = N.$$

Jeżeli $N = N_1 + N_2 + \dots$, gdzie $N, N_1, N_2 \dots$ są liczbami całkowitymi, to wyrażenie

$$\frac{N!}{N_1! N_2! \dots}$$

jest liczbą całkowitą.

Jeżeli p jest liczbą pierwszą, to najwyższa jej potęga, zawarta w $N!$ jest $N' + N'' + N''' + \dots$, gdzie N' jest częścią całkowitą ułamka $\frac{N}{p}$, N'' częścią całkowitą ułamka $\frac{N'}{p}$ i t. d.

Dirichlet dowiódł następującego twierdzenia (Akad. Berl. 1837).

Każdy nieograniczony postęp arytmetyczny, którego wyraz pierwszy i różnica są liczbami

bami względnie pierwszemi, zawiera nieskończenie wiele liczb pierwszych.

Wymieniamy jeszcze następujące twierdzenia o liczbach pierwszych i złożonych.

Aby $2^n + 1$ było liczbą pierwszą, jest konieczne, by m było potęgą liczby 2.

Nie można wszakże twierdzić, by wszystkie liczby postaci $2^{2^n} + 1$ (jak mniemał był Fermat) były liczbami pierwszemi; istotnie dla $n=0, 1, 2, 3, 4$ otrzymujemy liczby pierwsze 3, 5, 17, 257, 65537, lecz już dla $n=4$ liczba

$$2^{2^4} + 1 = 4294967297$$

jest podzielna przez 641.

Aby liczba $2^{2^n} + 1$ była pierwszą, jest koniecznem i dostatecznem, by dzieliła liczbę $3^{2^{2^n}} + 1$ (Lucas).

Aby $2^p - 1$ było liczbą pierwszą, koniecznem jest, by p było liczbą pierwszą. Warunek ten nie jest wszakże dostateczny, gdyż np. $2^{11} - 1 = 23 \cdot 89$.

Dzielniki nieparzyste liczby $2^{2^n} + 1$ mają postać $2^{n+1}q + 1$. Dzielniki pierwsze nieparzyste liczby postaci $a^{2^n+1} - 1$ lub $a^{2^{n+1}} + 1$, gdzie $2n+1$ jest liczbą pierwszą, albo mają postać $2(2n+1)q + 1$, albo są odpowiednio dzielnikami liczb $a-1, a+1$.

Jeżeli p jest dzielnikiem nieparzystym liczby $a^m + 1$, to można p przedstawić w postaci $2\omega q + 1$, gdzie ω jest jednym z dzielników liczby m (włączając liczbę 1). Nadto liczba $\frac{m}{\omega}$ będzie nieparzysta i pierwsza względem q , p zaś będzie dzielnikiem liczby $a^{\frac{m}{\omega}} + 1$.

Dowody niektórych tych twierdzeń oparte są na teorii kongruencyi, którą niżej podajemy.

Aby liczba nieparzysta była liczbą pierwszą, jest koniecznem i dostatecznem, by jednym tylko sposobem była równa różnicy kwadratów dwu liczb całkowitych.

Żadna liczba postaci $a^4 + 4$ z wyjątkiem 5, nie jest liczbą pierwszą (Zofia Germain).

Jeżeli $2a > 7$, to istnieje przynajmniej jedna liczba pierwsza, zawarta pomiędzy a i $2a-2$ (Twierdzenie Czebyszewa, Journ. de Louville, XVII, Akad. Petersb. 1850).

Iloczyn n pierwszych liczb całkowitych nie może być potęgą liczby całkowitej ani iloczynem potęg liczb całkowitych, (Liouville, (2), II).

Liczba nazywa się doskonałą wtedy, gdy równa się sumie wszystkich swoich dzielników.

Liczb doskonałych, dotąd znanych, otrzymują się za pomocą wzoru (odpowiadającego metodzie, znalezionej już przez Euklidesa) $E_p = 2^{p-1}(2^p - 1)$ w przypadku, gdy czynnik drugi jest liczbą pierwszą.

Nie ma innych liczb doskonałych parzystych, prócz tych, które są zawarte we wzorze Euklidesa.

Nie znamy dotąd liczb doskonałych nieparzystych.

Dotychczas znane liczby doskonałe odpowiadają następującym wartościom liczby p : 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61; oto ośm z nich:

6; 28; 496; 8128; 33550336; 8589869056; 137438691328;

2305843008139982128.

Lucas zapewnia, iż dowiódł, że dla $p=67$ i $p=89$ nie otrzymujemy liczb doskonałych (Théorie des nombres, I, str. 376).

Zagadnienie o znalezieniu liczby liczb pierwszych, mniejszych od liczby danej lub zawartych pomiędzy danymi granicami, dało pobudkę do licznych badań.

Euler (Pam. Akad. berlińskiej 1772, str. 36) znalazł wzór $x^2 + x + 41$, z którego kładąc, $x = 0, 1, 2 \dots$, otrzymał 40 liczb pierwszych; analogicznymi wzorami są $x^2 + x + 17$, dający dla ($x=0, 1, 2 \dots$) 17 oraz wzór $2x^2 + 29$, dający 29 liczb pierwszych.

Legendre (Théorie des nombres) znalazł w zó przybliżony, wyrażający liczbę liczb pierwszych, mniejszych od liczby danej x . Jeżeli tę liczbę oznaczmy przez $\varphi(x)$, będzie z dostatecznym przybliżeniem dla x bardzo wielkiego:

$$\varphi(x) = \frac{x}{\log x - 1,08366}.$$

Riemann (Werke, str. 136) zajmuje się w pracy specjalnej zagadnieniem o znalezieniu dokładnej wartości funkcji $\varphi(x)$; lecz wzór jego jest bardzo skomplikowany.

Temże zagadnieniem zajmowali się: Gauss (Werke II, str. 435—447), Dirichlet (Berl. Akad. 1838), Czebyszew (Liouville XVII, a także w „Teorii kongruencji“ Dodatek III). Inne prace o tym przedmiocie są: Curtzego (Annali di mat. I), Meissela (Math. Ann. II, III, XXI, XXIII, XXV), który obliczył liczbę liczb pierwszych dla pierwszego miliarda liczb naturalnych, Mertensa (Crelle, LXXVIII), de Jonquières'a (C. R. XCV), Lipschitza (tamże XCV, XCVI), Piltza (Jena 1884) Poincarégo (C. R. CXIII), v. Mangoldta (Akad. Berl. 1897, Ann. de l'Ecole Polyt. 1896), Cahena (C. R. 1893, Annales de l'Ecole Normale 1894), Levi-Civita (Linnei, 1895). Wykład tego przedmiotu znajduje się w rozdziale 12-ym dzieła Bachmanna „Zahlentheorie“ t II, 1894.

Niektóre prostsze twierdzenia, odnoszące się do tego przedmiotu, są następujące:

Granica wyrażenia $\frac{x}{\varphi(x)} - \log x$ dla $x = \infty$ jest -1 (Czebyszew).

Wartość całki

$$\int_2^x \frac{dx}{\log x}$$

wyraża wartość funkcji $\varphi(x)$ z przybliżeniem tem większem, im większe jest x . Ten wzór na wartość funkcji $\varphi(x)$ jest daleko bardziej przybliżony, niż powyżej podany wzór Legendre'a; znajdujemy go u Gaussa (l. c. str. 444).

Następująca tablica daje liczbę liczb pierwszych, zawartych w granicach między 1 a 100, między 101 a 300 i t. d.:

Pomiędzy	1 a	100 zawiera się	25 liczb pierwszych
"	101 "	200 "	21 "
"	201 "	300 "	16 "
"	301 "	400 "	16 "
"	401 "	500 "	17 "
"	501 "	600 "	14 "
"	601 "	700 "	16 "
"	701 "	800 "	14 "
"	801 "	900 "	15 "
"	901 "	1000 "	14 "
"	1 "	1000 "	168 "
"	1001 "	2000 "	135 "
"	2001 "	3000 "	127 "
"	3001 "	4000 "	120 "
"	4001 "	5000 "	119 "
"	5001 "	6000 "	114 "
"	6001 "	7000 "	117 "
"	7001 "	8000 "	107 "
"	8001 "	9000 "	110 "
"	9001 "	10000 "	112 "
"	1 "	1000000 "	78498 "
"	1 "	100000000 "	5761455 "

Podobna tablica częstości liczb pierwszych, dość daleko posunięta, znajduje się w tomie II „Dzieł“ Gaussa; w niej pomieszczono liczby liczb pierwszych w różnych chiliadach aż do chiliady 1000-ej, t. j. do 1000000. Tablicę tę należy w kilku miejscach sprostować według wskazówek Meissela w Math. Ann. II.

Tablice dzielników liczb pierwszych dla 1-go i 2-go miliona wraz z liczbami pierwszymi w nich zawartymi ułożyli: pierwszą Chernaie (1811), drugą Burkhardt (Paryż 1814); patrz Gauss, (Werke II, str. 181—183). W tablicach Burkhardta należy uskutecznić poprawki (patrz np. Meissel l. c.). Wspomnimy wreszcie o tablicach Vegi (Sammlung math. Tafeln, r. 1796, wydanie, opracowane przez Hülsego, Lipsk, 1840).

Pytanie, pokrewne z zagadnieniem poprzedzającym odnosi, się do funkcji μ Mertensa (Crelle, LXXVII). Rozumiemy przez $\mu(n)$ jedność dodatnią lub ujemną, stosownie do tego, czy n jest iloczynem parzystej lub nieparzystej liczby czynników pierwszych różnych, przytem $\mu(1) = +1$, $\mu(n) = 0$ jeżeli n

ma czynniki kwadratowe (wyjawszy jedność). Pierwszem prostem twierdzeniem o funkcji μ jest następujące:

Suma $\sum \mu(d)$, rozciągnięta na wszystkie dzielniki liczby jakiegokolwiek N (włączając w nie samą liczbę N i jedność) jest zerem.

O tej funkcji patrz notę Lipschitza (C. R. 1879) i wykład u Bachmanna, l. c.

§ 2.

O funkcji liczbowej $E(x)$.

Za pomocą symbolu $E(x)$ (Legendre) oznaczamy największą liczbę całkowitą wymierną, zawartą w liczbie dodatniej rzeczywistej x

Za pomocą symbolu $E_q(x)$ (Hermite) oznaczamy wyrażenie

$$E_q(x) = \frac{E(x) E(x+1) \dots E(x+q-1)}{q!}.$$

Funkcja E jest oczywiście funkcją nieciągłą. Godnem jest uwagi, że funkcja

$$\varphi(x) = E(x) + \sqrt{x - E(x)}$$

jest funkcją ciągłą zmiennej x dla rzeczywistych dodatnich wartości x . Funkcję tę zastosował Schwarz do zbadania funkcji, nie mającej pochodnej w nieskończenie wielu punktach.

Dla funkcji E mamy wzory następujące:

$$\sum_{r=1}^{m-1} E\left(x + \frac{r}{m}\right) = E(mx) - E(x), \quad (\text{Hermite})$$

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{m-1} (m-r) \left\{ E_2\left(x + \frac{r}{m}\right) + E_2\left(x - \frac{r}{m}\right) \right\} \\ = E_2(mx) - m E_2(x). \quad (\text{Hermite}) \end{aligned}$$

$$\sum_{r=1}^{m-1} E\left(nx - \frac{rn}{m}\right) - \sum_{s=1}^{n-1} E\left(mx - \frac{sm}{n}\right) = m - n, \quad (\text{Stern})$$

$$\sum_{r=1}^{m-1} \left\{ E_2\left(x + \frac{r}{m}\right) - E_2\left(x - \frac{r}{m}\right) \right\} = \sum_{r=1}^{m-1} E\left(x + \frac{r}{m}\right) \quad (\text{Stern})$$

O funkcji $E(x)$ ogłosili prace: Hermite (Acta math. V, str. 315, VIII, Correction), Stern (Acta math. VIII, X, Crelle CII), Pringsheim (Math. Ann. XXVI), który szukał rozwinięcia na szereg trygonometryczny funkcji $E'(x)$, wreszcie Bertolani (Giorn. di Matem. XXXIV, 1895).

§ 3.

Wiadomości ogólne o kongruencyach.

Dwie liczby a , β nazywają się kongruentnymi lub przystającymi według modułu n , jeżeli ich różnica jest podzielna przez n . Oznaczamy to za pomocą symbolu

$$a = \beta \pmod{n}$$

i nazywamy kongruencyą.

Wszystkie liczby, w odniesieniu do modułu n , dzielą się na n klas (Gauss); w każdej klasie znajdują się liczby, przystające według tego modułu. Liczby $0, 1, 2, \dots, n-1$ można uważać za przedstawicielki tych n klas.

Liczba danej klasy jest niekongruentna (nieprzystająca) do liczby innej klasy.

Układ n liczb, wybranych dowolnie po jednej z każdej klasy np. układ $0, 1, 2, \dots, n-1$, tworzy układ zupełny liczb nieprzystających lub układ zupełny reszt względem modułu n .

Dwie liczby, przystające do trzeciej według tego samego modułu, są przystającami do siebie według tego modułu.

Dwie lub więcej kongruencji o tym samym module można dodawać, odejmować, mnożyć stronami; wyrazy kongruencji można wszystkie mnożyć przez jedną i tę samą liczbę.

Wyrazy kongruencji można dzielić przez ich czynnik wspólny k , jeżeli czynnik ten jest względnie pierwszy do modułu n ; jeżeli zaś ten przypadek nie zachodzi, to można dzielić moduł przez największy wspólny dzielnik pomiędzy nim a liczbą k .

Jeżeli a jest liczbą pierwszą względem n , $\varphi(n)$ zaś oznacza liczbę liczb pierwszych mniejszych od n i względnie pierwszych z tą liczbą, to:

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}. \quad (\text{Euler.})$$

Dla $n=p^k$, gdzie p jest liczbą pierwszą, zachodzi twierdzenie:

Jeżeli a jest niepodzielne przez liczbę pierwszą p , to:

$$a^{(p-1)p^{k-1}} \equiv 1 \pmod{p^k}.$$

Dla $k=1$ otrzymujemy twierdzenie Fermata:

Jeżeli a nie jest podzielne przez liczbę pierwszą p , to:

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Jeżeli p jest liczbą pierwszą, to:

$$(p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{p}. \quad (\text{Twierdz. Wilsona.})$$

Niechaj f będzie symbolem funkcji wymiernej całkowitej; jeżeli $a \equiv \beta \pmod{n}$, to będzie także $f(a) \equiv f(\beta) \pmod{n}$.

Niechaj $f(x)$, $F(x)$ będą wielomiany. Dawszy sobie moduł n , możemy postawić następujące zagadnienie:

Jakie są wartości wymierne całkowite liczby x , które, podstawione zamiast x , czynią zadość kongruencji:

$$f(x) \equiv F(x) \pmod{n}?$$

Przeniosłszy na stronę pierwszą wszystkie wyrazy ze strony drugiej i wyrażając tymże znakiem f nową funkcję, jaką otrzymamy na stronie pierwszej, możemy poprzednią kongruencję napisać w postaci:

$$f(x) \equiv 0 \pmod{n}.$$

Powstaje wtedy pytanie o rozwiązaniu kongruencji, analogiczne do pytania o rozwiązywaniu równań. Stosownie do stopnia funkcji f , mamy kongruencje stopnia 1-go, 2-go itd.

Jeżeli $x = a$ czyni zadość kongruencji $f(x) \equiv 0 \pmod{n}$, to każda liczba, przystająca do liczby a według mod n , również czyni zadość kongruencji.

Z tego twierdzenia wynika, że kongruencja, jeżeli ma jedno rozwiązanie, to ma ich nieskończenie wiele; wszakże rozwiązań przystających do siebie nie będziemy uważali za różne i dla tego możemy powiedzieć, że kongruencja może mieć najwyżej tyle różnych rozwiązań, ile jest klas liczb według n .

Jeżeli n jest liczbą pierwszą, to liczbę rozwiązań różnych kongruencji $f(x) \equiv 0 \pmod{n}$ określa stopień wielomianu $f(x)$, jeżeli jest niższy od n .

Jeżeli moduł n jest liczbą pierwszą p , to rozwiązanie kongruencji $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$ można sprowadzić do rozwiązania kongruencji $R(x) \equiv 0 \pmod{p}$, gdzie $R(x)$ jest wielomianem

stopnia $p-1$, a mianowicie resztą z podzielenia funkcji $f(x)$ przez $x^p - x$.

§ 4.

Kongruencya stopnia 1-go.

Kongruencya $ax - b \equiv 0 \pmod{n}$ ma zawsze rozwiązanie, jeżeli a i n są liczby względnie pierwsze.

Jeżeli n jest liczbą pierwszą p , to rozwiązaniem kongruencji $ax - b \equiv 0 \pmod{p}$ jest $x \equiv ba^{p-2} \pmod{p}$.

Jeżeli n jest liczbą złożoną, to rozwiązaniem kongruencji $ax - b \equiv 0 \pmod{n}$ jest $x \equiv ba^{\varphi(n)-1} \pmod{n}$, gdzie $\varphi(n)$ ma znaczenie wyżej podane (str. 469).

Kongruencya $ax - b \equiv 0 \pmod{n}$ nie ma rozwiązania, jeżeli którykolwiek czynnik wspólny liczb a i n nie jest dzielnikiem liczby b . Jeżeli największym wspólnym dzielnikiem liczb a i n jest d , i liczba d jest zarazem dzielnikiem liczby b , to kongruencya będzie miała d rozwiązań:

$$x \equiv d, \quad x \equiv a + \frac{n}{d}, \quad x \equiv a + \frac{2n}{d}, \quad \dots \quad x \equiv a + \frac{(d-1)n}{d} \pmod{n},$$

gdzie a jest pierwiastkiem kongruencji

$$\frac{a}{d}x - \frac{b}{d} \equiv 0 \pmod{\frac{n}{d}}.$$

§ 5.

Kongruenecje stopnia 2-go. Reszty kwadratowe.

Jeżeli w kongruencji stopnia 2-go :

$$ax^2 + bx + c \equiv 0 \pmod{n},$$

a jest podzielne przez n , to kongruenecja sprowadza się do kongruencji stopnia 1-go, którą otrzymujemy, odejmując od strony pierwszej wyraz ax^2 .

W przypadku $n=2$, kongruenecja daje się również sprowadzić do kongruencji stopnia 1-go, której strona pierwsza jest resztą z podzielenia $ax^2 + bx + c$ przez $x^2 - x$ (patrz § 3).

Rozwiązanie kongruencji:

$$ax^2 + bx + c \equiv 0 \pmod{p},$$

gdzie p jest liczbą pierwszą, nie dzielącą liczby a i różną od 2, sprowadza się do rozwiązania kongruencji

$$z^2 \equiv (b^2 - 4ac) \pmod{p},$$

gdzie pomiędzy z i x zachodzi związek $2ax + b = z$. Kładąc $b^2 - 4ac = q$, mamy:

Jeżeli $q \equiv 0 \pmod{p}$, to powyższa kongruenecja ma jedyne rozwiązanie $z \equiv 0 \pmod{p}$; jeżeli $q \not\equiv 0 \pmod{p}$ (znak $\not\equiv$ oznacza: „jest nieprzystające“), to kongruenecja $z^2 \equiv q \pmod{p}$, albo wcale nie ma nierozwiązania, albo ma ich dwa, stosownie do tego,

czy $q^{\frac{p-1}{2}}$ przystaje do -1 lub do $+1$, według modułu p . W przypadku, gdy $z^2 \equiv q \pmod{p}$, kongruenecja ma dwa rozwiązania, t. j.

gdy $q^{\frac{p-1}{2}} \equiv +1 \pmod{p}$, liczba q nazywa się resztą kwadratową liczby p .

Jeżeli p jest liczbą pierwszą nieparzystą, to liczba reszt oraz liczba niereszt wynosi $\frac{1}{2}(p-1)$.

Iloczyn dwu reszt jest resztą, iloczyn reszty przez resztę jest nieresztą; dwu niereszt jest resztą.

Liczba 1 jest zawsze resztą liczby p , liczba zaś -1 jest resztą lub nieresztą, stosownie do tego, czy liczba $\frac{p-1}{2}$ jest parzysta lub nieparzysta.

Liczba 2 jest resztą kwadratową wszystkich liczb pierwszych postaci $8n+1$, $8n+7$; jest nieresztą wszystkich liczb pierwszych postaci $8n+3$, $8n+5$ (Lagrange).

Dwie liczby, przystające do siebie według modułu p , są równocześnie obie resztami lub obie nieresztami.

Wszystkie twierdzenia o resztach względem modułu pierwszego można wyrazić sposobem łatwym za pomocą tak zwanego symbolu Legendre'a.

Niechaj $\left(\frac{q}{p}\right)$ oznacza $+1$ lub -1 , stosownie do tego, czy q jest lub nie jest resztą kwadratową liczby p . Poprzednie twierdzenia dają się wtedy wyrazić sposobem następującym:

Jeżeli:

$$Q = q_1 q_2 \dots, \text{ to: } \left(\frac{Q}{p}\right) = \left(\frac{q_1}{p}\right) \left(\frac{q_2}{p}\right) \dots$$

$$\left(\frac{1}{p}\right) = +1; \quad \left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}; \quad \left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}.$$

Jeżeli (jak w § 1) E oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od x , to:

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{E\left(\frac{2q}{p}\right) + E\left(\frac{4q}{p}\right) + \dots + E\left(\frac{(p-1)q}{p}\right)}.$$

Jeżeli q jest nieparzyste i mniejsze od p , to:

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{q-1}{2} \cdot \frac{p-1}{2}} - E\left(\frac{p}{q}\right) - E\left(\frac{2p}{q}\right) - \dots - E\left(\frac{\frac{1}{2}(p-1)p}{q}\right).$$

Najważniejsze twierdzenie z teorii reszt kwadratowych znane jest pod nazwą prawa wzajemności dwuliczb pierwszych.

Jeżeli p i q są dwie liczby pierwsze, to:

$$\left(\frac{q}{p}\right) \left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}.$$

Twierdzenie to znał już Euler (Opuscula anat I, 1772, patrz Kummer, Berl. Akad. 1859, Kronecker, (Berl. Monatsber. 1875); dowiódł go po raz pierwszy Legendre (Acad. des sciences 1785); potem Gauss (Disquis. arithm) dał wiele dowodów, z których niektóre opierają się na równaniu podziału koła. Inne dowodzenia podali: Eisenstein (Crelle, XXVII), Lebesgue (Liouville XII), Kummer (Abh. der Berl Ak. 1861), Zeller (Berl. Monatsber. 1872) i t. d.

W poprzednich twierdzeniach była mowa o resztach kwadratowych względem modułu pierwszego nieparzystego. Dla modułu nieparzystego określenie reszty kwadratowej pozostaje bez zmiany. Nadto:

Liczba q jest resztą lub nieresztą kwadratową potęgi p^ω liczby pierwszej nieparzystej p , stosownie do tego, czy jest resztą lub nieresztą tej ostatniej.

Liczba q jest resztą kwadratową potęgi 2^ω , gdy $\omega=1$, albo gdy $\omega=2$, $q \equiv 1 \pmod{4}$, albo wreszcie gdy $\omega \geq 3$, $q \equiv 1 \pmod{8}$. Aby liczba q była resztą kwadratową liczby złożonej $P = p_1 p_2 \dots$, gdzie $p_1, p_2, \dots$ są liczbami pierwszymi, jest koniecznem i dostatecznem, aby była resztą względem każdego z czynników pierwszych $p_1, p_2, \dots$

Twierdzenia te można też wypowiedzieć w ten sposób:

Kongruencja $x^2 \equiv q \pmod{p^\omega}$ ma rozwiązanie wtedy, jeżeli ma je kongruencja $x^2 \equiv q \pmod{p}$ i w takim razie ma dwa rozwiązania.

Kongruencja $x^2 \equiv q \pmod{2^\omega}$ jest zawsze możliwa, gdy $\omega=1$ i wtedy ma jeden pierwiastek; gdy $\omega=2$, jest tylko możliwa, jeżeli $q \equiv 1 \pmod{4}$ i wtedy ma dwa pierwiastki; gdy wreszcie $\omega \geq 3$, jest tylko możliwa, jeżeli $q \equiv 1 \pmod{8}$ i wtedy ma cztery pierwiastki.

Kongruencja $x^2 \equiv q \pmod{p_1 p_2 \dots}$ jest możliwa wtedy tylko, gdy są możliwymi kongruencje $x^2 \equiv q \pmod{p_1}$, $x^2 \equiv q \pmod{p_2} \dots$. Jeżeli liczby $p_1, p_2, \dots$ są wszystkie nieparzyste lub jedna tylko równa 2, a liczba wszystkich wynosi μ , to kongruencja ma 2^μ rozwiązań. Jeżeli dwa z pomiędzy czynników $p_1, p_2, \dots$ są równe 2, wtedy być powinno $q \equiv 1 \pmod{4}$ i w tym przypadku mamy $2^{\mu+1}$ rozwiązań. Wreszcie, jeżeli trzy lub więcej z pomiędzy czynników $p_1, p_2, \dots$ równają się 2, wtedy być musi $q \equiv 1 \pmod{8}$ i rozwiązań będzie $2^{\mu+2}$.

Symbol Legendre'a rozciągnął Jacobi na przypadek modułu złożonego. Kładziemy jako określenie:

$$\left(\frac{q}{P}\right) = \left(\frac{q}{p_1}\right) \left(\frac{q}{p_2}\right) \dots \dots \dots,$$

wtedy $\left(\frac{q}{P}\right)$ ma wartość $+1$ lub -1 . Lecz nie można już mówić, że $\left(\frac{q}{P}\right) = +1$ jest warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by q było resztą kwadratową liczby P , albowiem według wyżej wskazanego twierdzenia trzeba, aby każdy z symbolów $\left(\frac{q}{p_1}\right), \left(\frac{q}{p_2}\right), \dots$ był $+1$, a nie wystarcza, aby iloczyn ich był $+1$.

Symbol *Jacobiego* $\left(\frac{q}{p}\right)$ ma wszystkie własności symbolu *Legendre'a* w przypadku modułu pierwszego nieparzystego. Posługując się wzorem wzajemności, któremu ten symbol także czyni zadość, możemy upraszczać rachunek z symbolem *Legendre'a* w przypadku modułu pierwszego.

Dla znalezienia pierwiastków kongruencji kwadratowej $x^2 = q \pmod{p}$ trzeba uciec się do teorii skaźników, którą wyłożymy w § 7.

W jednym tylko przypadku łatwo znaleźć rozwiązanie kongruencji, mianowicie, kiedy p jest liczbą pierwszą postaci $4r+3$. W tym przypadku (jeżeli kongruenecya jest rozwiązalna) jedno jej rozwiązanie jest resztą a z podzielenia q^{r+1} przez p , drugim rozwiązaniem jest $p-a$.

§ 6

Kongruenecye dwumienne Reszty sześciennie i rzędów wyższych.

Kongruenecya postaci:

$$x^m = A \pmod{p},$$

w której p jest liczbą pierwszą nieparzystą jest możliwa tylko wtedy, gdy:

$$A^{\frac{p-1}{m}} \equiv 1 \pmod{p},$$

gdzie ω jest największym wspólnym dzielnikiem liczb m i $p-1$.

W tym przypadku kongruenecya ma ω rozwiązań, które są zarazem rozwiązaniami kongruencji

$$x^\omega = A^s \pmod{p},$$

gdzie s jest liczbą, czyniącą zadość warunkowi:

$$\frac{m}{\omega} s \equiv 1 \left(\text{mod } \frac{p-1}{\omega} \right).$$

Liczba A w tym przypadku nazywa się resztą rzędu m -tego liczby p .

Liczba $+1$ jest zawsze resztą rzędu m każdej liczby p . Liczba -1 jest resztą, gdy dzieląc $p-1$ przez ω (największy wspólny dzielnik liczb m i $p-1$), otrzymujemy liczbę parzystą.

Co do rozwiązania kongruencji dwumiennych patrz § 7.

Analogicznie do symbolu Legendre'a $\left(\frac{q}{p}\right)$, dla reszt kwadratowych, wprowadza się symbol $\left[\frac{q}{p}\right]$ dla reszt sześciennych oraz symbol $\left(\left(\frac{q}{p}\right)\right)$ dla reszt dwukwadratowych.

Dla utworzenia teorii zupełnej tych reszt i ustanowienia twierdzenia analogicznego z twierdzeniem o wzajemności, należy rozszerzyć dziedzinę liczb wymiernych i objąć w niej liczby postaci $a + b\sqrt{-1}$, gdzie a, b są liczbami całkowitemi, oraz liczby $a + b\epsilon$, gdzie ϵ jest pierwiastkiem sześciennym z jedności. Patrz niżej §§ 9 i 10.

§ 6.

Kongruencye wykładnicze. Pierwiastki pierwotne i skazniki.

Jeżeli kongruencyi

$$A^x \equiv q \pmod{p},$$

gdzie p jest liczbą pierwszą, nie dzielącą ani A ani q , czyni zadość $x=a$, to czynić będzie jej

zadość i każda liczba, przystająca do a według modułu $p-1$.

Liczba rozwiązań (nieprzystających według modułu $p-1$) kongruencyi $A^x \equiv q \pmod{p}$ jest ta sama, jak kongruencyi $A^x \equiv 1 \pmod{p}$.

Najmniejsza a z liczb (prócz zera), czyniących zadość kongruencyi $A^x \equiv 1 \pmod{p}$ (która ma zawsze puźynajmniej jedno rozwiązanie), jest dzielnikiem liczby $p-1$ (włączając i $p-1$); inne rozwiązania są wielokrotnościami liczby a .

Na podstawie twierdzenia Fermata wiadomo, że $p-1$ czyni zawsze zadość kongruencyi $A^x \equiv 1 \pmod{p}$; otóż, jeżeli $p-1$ jest najmniejszą z pomiędzy liczb, czyniących zadość tej kongruencyi, A nazywa się wtedy pierwiastkiem pierwotnym liczby p .

Istnieje $\varphi(p-1)$ pierwiastków pierwotnych liczby p , zawartych pomiędzy 0 i $p-1$.

Jeżeli A jest pierwiastkiem pierwotnym liczby p , kongruencya $A^x \equiv q \pmod{p}$ ma jedno rozwiązanie. To rozwiązanie jedyne, zawarte pomiędzy 0 i $p-1$, nazywa się skaźnikiem (indeksem) liczby q i oznacza się w ten sposób: $x = \text{ind } q$.

Teorya skaźników ma analogię z teorią logarytmów; liczba A nazywa się podstawą układu skaźników; twierdzenia o skaźnikach są podobne do twierdzeń o logarytmach.

Dwie liczby przystające mają skaźniki równe.

Skaźnikiem jedności jest zero.

Skaźnik iloczynu przystaje $\pmod{p-1}$ do sumy skaźników.

Skaźnik potęgi przystaje $\pmod{p-1}$ do iloczynu wykładnika przez skaźnik podstawy potęgi.

Za pomocą tych twierdzeń można rozwiązywać kongruen-sye dwumienne (patrz § 4 i 5):

$$x^m \equiv q \pmod{p},$$

albowiem z kongruencji takiej wypływa następująca:

$$m \cdot \text{ind. } x = \text{ind. } q \pmod{p-1}.$$

W tablicach skażników szukamy $\text{ind. } q$, a dla możliwości tej kongruencji potrzeba, by największy wspólny dzielnik ω liczb m i $p-1$ był dzielnikiem skażnika liczby q . W tym przypadku kongruencya ma ω rozwiązań, które znajdujemy przy pomocy metody, podanej w § 3.

Twierdzenia, odnoszące się do pierwiastków pierwotnych, są następujące:

Pierwiastkiem pierwotnym liczby pierwszej postaci $2^{2^n} + 1$ jest 3.

Jeżeli $4n+1$ jest liczbą pierwszą, to 2 jest pierwiastkiem pierwotnym liczby $2(4n+1)+1$, gdy ta jest pierwszą, a jeżeli $4n+3$ jest liczbą pierwszą, to $2(4n+3)-1$ jest pierwiastkiem pierwotnym liczby $2(4n+3)+1$.

Liczba pierwsza postaci $4n+1$ ma pierwiastek pierwotny 2, jeżeli n jest liczbą pierwszą > 2 .

Liczba pierwsza postaci $4 \cdot 2^m \cdot n + 1$ ma za pierwiastek pierwotny liczbę 3, jeżeli n jest liczbą pierwszą większą od $\frac{9^{2m}}{4 \cdot 2^m}$ i gdy $m > 0$.

Pierwiastki pierwotne i skażniki obliczył J a c o b i w pracy „Canon arithmeticus“ (Berlin 1839), której nie włączono do wydania dzieł zupełnych. Tablice tych pierwiastków obliczyli również: C r e l l e (Crelle IX), K u l i k (Crelle XLV), a tablice obszerne aż do modułu 353 znajdują się we włoskim przekładzie „Teoryi liczb“. C z e b y s z e w a H o ü e l obliczył tablice (aż do mod 199) według wskazówek L e b e s g u e'a (Tables arithmétiques, Paryż 1866; patrz także Journ. de Liouv. XIX, 1854). W tablicach tych za podstawę bierze się najmniejszy co do wartości bezwzględnej z pierwiastków pierwotnych względem danego modułu.

§ 8.

Formy kwadratowe. Przedstawialność liczb przez formy.

Formą kwadratową liczbową nazywa się wyrażenie typu

$$ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

gdzie a, b, c są liczbami danymi wymiernymi całkowitemi; x, y liczbami całkowitemi nieoznaczonymi lub niewiadomymi. Formę taką oznaczamy za pomocą symbolu (a, b, c) . Wyłączamy przypadek, w którym wyróżnik lub wyznacznik formy, t. j. $D = b^2 - ac$, jest kwadratem zupełnym, albowiem wtedy forma rozpada się na dwa czynniki liniowe o współczynnikach wymiernych.

Jeżeli położymy:

$$x = \alpha x' + \beta y'; \quad y = \gamma x' + \delta y',$$

to forma dana przekształci się na inną, której współczynnikami będą:

$$a' = a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2,$$

$$b' = a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + c\gamma\delta,$$

$$c' = a\beta^2 + 2b\beta\delta + c\delta^2.$$

Podstawienie powyższe oznaczamy, jak zwykle, symbolem $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$. Jeżeli D jest wyznacznikiem formy przekształconej, będzie:

$$D' = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 D.$$

Stosownie do tego, czy wyznacznik $\alpha\delta - \beta\gamma$ (wyznacznik podstawienia liniowego) jest dodatni lub ujemny, podstawienie nazywa się właściwem lub niewłaściwem. Dwa pod-

stawienia są podobne, gdy oba są albo właściwe, albo oba niewłaściwe

Mówimy, że forma (a', b', c') jest zawarta w formie (a, b, c) , gdyż każda liczba przedstawialna przez drugą formę może być przedstawiona i przez pierwszą.

Mówimy, że forma (a', b', c') jest zawarta w formie (a, b, c) właściwie lub niewłaściwie, stosownie do tego, czy podstawienie $\begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ jest właściwe lub niewłaściwe.

Dwie formy, zawarte wzajemnie jedna w drugiej, nazywają się równoważnemi.

Dwie formy są równoważnemi, jeżeli mają wyznaczniki równe i gdy jedna z nich jest zawarta w drugiej.

Dwie formy nazywają się równoważnemi właściwie lub niewłaściwie, stosownie do tego, czy wyznacznik przekształcenia, przy pomocy którego przechodzimy od jednej do drugiej, jest $+1$ lub -1 . Dwie formy mogą być równoważnemi jednocześnie jednym i drugim sposobem.

W zagadnieniu o przedstawianiu liczby m za pomocą formy kwadratowej (a, b, c) możemy ograniczyć się na przedstawieniach tak zwanych właściwych, t. j. takich, w których x i y są liczbami względnie pierwszymi, albowiem z tych przedstawień właściwych łatwo otrzymać można niewłaściwe.

Aby liczba m dała się przedstawić właściwie przez formę (a, b, c) jest koniecznem, by $D = b^2 - 4ac$ było resztą kwadratową liczby m .

Teoria przedstawialności liczb za pomocą form kwadratowych (odpowiadająca znowu teorii równań nieoznaczonych stopnia 2-go o dwu niewiadomych) daje się sprowadzić do teorii równoważności samych form (Porówn. Dirichlet — Dedekind § 60).

Dwa zagadnienia zasadnicze teorii równoważności są następujące:

I. Znaleść kryterium, przy pomocy którego można rozstrzygnąć, czy dane dwie formy są równoważne lub nie.

II. Znaleść wszystkie podstawienia, za pomocą których dana forma przekształca się na inną jej równoważną.

To drugie zagadnienie, gdy znanem już jest jedno z tych podstawień, sprowadza się do następującego:

II bis. Znaleść wszystkie podstawienia, za pomocą których dana forma przekształca się na samą siebie.

To znów zagadnienie przekształca się na inne (patrz niżej II-ter), za pomocą twierdzeń następujących:

Jeżeli $\begin{pmatrix} a, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$ jest podstawieniem, za pomocą którego forma (a, b, c) o wyznaczniku D , w której niechaj σ będzie największym wspólnym dzielnikiem współczynników $a, 2b, c$, przekształca się na siebie samą, to będzie zawsze:

$$\alpha = \frac{t - bu}{\sigma}, \quad \beta = -\frac{cu}{\sigma},$$

$$\gamma = \frac{au}{\sigma}, \quad \delta = \frac{t + bu}{\sigma};$$

t, u są liczby całkowite, czyniące zadość równaniu nieoznaczone-mu, zwanemu równaniem Pella:

$$t^2 - Du^2 = \sigma^2,$$

gdzie

$$D = 0 \pmod{\sigma^2} \quad \text{lub} \quad 4D = \sigma^2 \pmod{4\sigma^2}.$$

Odwrotnie, jeżeli t, u są dwie liczby całkowite, sprawdzające poprzednie równanie, to liczby $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, wyrażone podanemi wyżej wzorami, są współczynnikami podstawienia, które przekształca formę (a, b, c) na siebie samą.

Stąd wypływa zagadnienie:

II-ter. Znaleść wszystkie rozwiązania całkowite równania nieoznaczonego:

$$t^2 - Du^2 = \sigma^2,$$

gdzie

$$D \equiv 0 \pmod{\sigma^2} \quad \text{lub} \quad 4D \equiv \sigma^2 \pmod{4\sigma^2}.$$

Dla rozwiązania zagadnienia I wprowadzamy pojęcie formy zredukowanej. Określenie tej formy jest inne w przypadku D ujemnego, niż w przypadku D dodatniego.

Jeżeli D jest ujemne, to formą zredukowaną nazywamy formę o współczynnikach skrajnych a, c dodatnich i sprawdzających nierówności:

$$c \geq a \geq 2|b|,$$

gdzie $|b|$ oznacza wartość bezwzględną ilości b . Mamy wtedy:

Każda forma o wyznaczniku ujemnym jest równoważna formie zredukowanej.

Jedynymi typami dwu form zredukowanych równoważnych owym wyznaczniku ujemnym i nietożsamościowych są:

$$(a, \tfrac{1}{2}a, c) \quad \text{i} \quad (a, -\tfrac{1}{2}a, c),$$

$$(a, b, a) \quad \text{i} \quad (a, -b, a).$$

Podstawienia, za pomocą których przejdziemy od jednej do drugiej, są odpowiednio:

$$\begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}.$$

Dane formy o wyznacznikach ujemnych przekształcają się najprzód na odpowiednie formy zredukowane (patrz co do tego w § 64 dzieła Dirichleta - Dedekinda), a następnie bada się, czy formy zredukowane podchodzą pod jeden z tych przypadków.

Jeżeli D jest dodatnie, to formę nazywamy zredukowaną, jeżeli pierwiastki jej są znaku przeciwnego i takie, że co do wartości bezwzględnej jest:

$$\left| \frac{-b - \sqrt{D}}{c} \right| > 1; \quad \left| \frac{-b + \sqrt{D}}{c} \right| < 1,$$

gdzie przez $\sqrt{D}$ rozumie się zawsze wartość dodatnią pierwiastka. Mamy wtedy:

Dla każdego wyznacznika dodatniego istnieje zawsze skończona liczba form zredukowanych.

Każda forma o wyznaczniku dodatnim jest zawsze równoważna formie zredukowanej,

Forma (a, b, c) nazywa się sąsiednią po stronie prawej względem formy (a', b', c') , jeżeli obie formy mają ten sam wyznacznik, jeżeli nadto $c' = a$, suma zaś $b + b'$ jest przez a podzielna. Forma druga nazywa się wtedy sąsiednią po lewej względem formy pierwszej.

Każda forma zredukowana o wyznaczniku dodatnim ma jedną tylko sąsiednią po prawej, która jest zredukowana, i podobnie jedną tylko sąsiednią zredukowaną po lewej.

Mając formę zredukowaną o danym wyznaczniku budujemy jej zredukowane sąsiednie po prawej i po lewej; następnie z każdą z form zredukowanych postępujemy tak samo. Otrzymujemy tym sposobem szereg nieograniczony form zredukowanych; ponieważ wszakże liczba ich jest skończona, więc po pewnej liczbie działań musimy powrócić do zredukowanej pierwotnej.

Ogół wszystkich form zredukowanych w ten sposób otrzymanych tworzy to, co Gauss nazywa peryodem.

Jeżeli istnieją inne formy zredukowane o tym samym wyznaczniku i nie zawarte w tym peryodzie, to można wyjść jednej z nich i utworzyć peryod drugi i tak dalej.

Po takim ustaleniu pojęć, można dowieść następującego twierdzenia zasadniczego Gaussa.

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby dwie formy zredukowane o tym samym wyznaczniku dodatnim były równoważne, jest, by należały do jednego i tego samego peryodu.

Twierdzenie to daje rozwiązanie zagadnienia I dla wyznacznika dodatniego.

Ważnem jest następujące rozważanie związku pomiędzy peryodami form zredukowanych a uławkami ciągłymi.

Jeżeli daną jest forma zredukowana o wyznaczniku dodatnim D , której pierwszy współczynnik jest dodatni, to jej **pierwszy pierwiastek** (t. j. pierwiastek, w którym pierwiastnikowi $\sqrt{D}$ dajemy znak ujemny) będzie dodatni. Jeżeli więc rozwiniemy na ułamek ciągły pierwszy pierwiastek ω , otrzymamy ułamek ciągły peryodyczny, którego peryod ma tyle wyrazów, ile ma wyrazów szereg form zredukowanych sąsiednich.

Za pomocą wyrazów tego ułamka ciągłego możemy utworzyć cztery liczby $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ podstawienia, które formę o wyznaczniku dodatnim D przekształca na samą siebie. Odbywa się to w sposób następujący: Niechaj będzie

$$\omega = k_0 + \frac{1}{k_1 + \frac{1}{k_2 + \dots}},$$

co napiszemy w skróceniu tak :

$$\omega = (k_0, k_1, k_2, \dots).$$

Ilorazy niezupełne k powtarzają się w peryodzie, złożonym z parzystej liczby $2i$ elementów, tak że:

$$k_r = k_s, \text{ jeżeli } r \equiv s \pmod{2i}.$$

Wprowadźmy parametr $h = 1, 2, \dots$, i połóżmy:

$$\frac{\gamma}{\alpha} = [k_0, k_1, \dots, k_{2hi-2}], \quad \frac{\delta}{\beta} = [k_0, k_1, \dots, k_{2hi-2}, k_{2hi-1}].$$

a następnie weźmy za $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ odpowiednio liczniki i mianowniki tych ułamków ciągłych skończonych.

Liczby $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, w ten sposób obliczone, są wszystkie dodatnie i stanowią współczynniki

podstawienia, które przekształca formę o pierwiastku ω na samą siebie. Wszystkie takie podstawienia otrzymujemy, kładąc za h kolejno 1, 2, 3

Mając cztery współczynniki $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, znajdujemy przy pomocy wzorów:

$$\alpha = \frac{t-bu}{\sigma}, \quad \beta = -\frac{cu}{\sigma}, \quad \gamma = \frac{au}{\sigma}, \quad \delta = \frac{t+bu}{\sigma}$$

wartości dodatnie ilości t, u , czyniących zadość równaniu Pella. Nieskończenie wiele rozwiązań tego równania (gdy $D > 1$) otrzymujemy, nadając liczbie h wszystkie możliwe wartości całkowite dodatnie. Nadawszy liczbie h wartość 1, otrzymujemy rozwiązanie **najmniejsze**, t. j. to, dla którego t i u mają wartości najmniejsze.

Oto, w jaki sposób należy postępować celem znalezienia rozwiązań równania Pella

$$t^2 - Du^2 = \sigma^2, \quad \text{gdy } D > 0.$$

Wyznaczamy formę zredukowaną o wyznaczniku D i o dzielniku σ , której pierwszy współczynnik jest dodatni, rozwijamy pierwiastek dodatni tego równania na ułamek ciągły, znajdujemy ilorazy niezupełne $k_0, k_1, \dots$, następnie stosujemy wzory powyższe.

Zwracamy uwagę na to, że w powyższych rozwiązaniach zakładamy, iż D nie jest kwadratem zupełnym.

Za pomocą metody powyższej można znaleźć wszystkie rozwiązania równania Pella; lecz istnieją też wzory, za pomocą których można rozwiązania te wyrazić przez rozwiązanie najmniejsze. Wzory te są:

$$t_n = \frac{1}{\sigma^n} \left\{ T^{(n)} + (n)_2 T^{n-2} U^2 D + (n)_4 T^{n-4} U^4 D^2 + \dots \right\},$$

$$u_n = \frac{1}{\sigma^n} \left\{ (n)_1 T^{n-1} U + (n)_3 T^{n-3} U^3 D + \dots \right\},$$

gdzie T , U należą do rozwiązania najmniejszego, zaś n przyjmuje wartości 1, 2, 3, ...

Dla uzupełnienia teorii równania Pella rozpatrzmy jeszcze przypadek, w którym D jest ujemne.

W tym przypadku równanie Pella ma skończoną liczbę rozwiązań.

Jeżeli $D \equiv 0 \pmod{\sigma^2}$, mamy dwa rozwiązania, gdy wartość bezwzględna wyznacznika D jest większa od σ^2 ; cztery rozwiązania, gdy $-D = \sigma^2$; są niemi:

$$t = \pm \sigma, \quad u = 0$$

i odpowiednio:

$$t = \pm \sigma, \quad u = 0; \quad t = 0, \quad u = \pm 1.$$

Jeżeli $4D \equiv \sigma^2 \pmod{4\sigma^2}$, mamy dwa rozwiązania:

$$t = \pm \sigma, \quad u = 0, \quad \text{gdy} \quad -4D > 3\sigma^2;$$

sześć rozwiązań:

$$t = \pm \sigma, \quad u = 0; \quad t = \pm \frac{1}{2} \sigma, \quad u = \pm 1; \quad t = \pm \frac{1}{2} \sigma, \quad u = \mp 1, \\ \text{gdy} \quad -4D = 3\sigma^2.$$

Równanie, zwane równaniem Pella, było zaproponowane przez Fermata i rozwiązane przez Pella. Półwieki zajmowali się nim: Euler, Lagrange (Oeuvres I, II) i Dirichlet (Berl. Monatsber. 1841, 42, 46; Comp. Rend. 1840).

Powyższy zarys teorii form kwadratowych ułożony został według dzieła Dirichleta - Dedekinda, w którym przedstawiono teorię, po raz pierwszy podaną przez Gaussa w „Disquis. arithm.“

Dodamy jeszcze niektóre twierdzenia, odnoszące się do teorii form kwadratowych.

Każda liczba pierwsza dodatnia postaci $4n+1$ może być zawsze i jednym tylko sposobem rozłożona na sumę kwadratów (Twierdzenie

F e r m a t a, dowiedzione po raz pierwszy przez E u l e r a, N o v i C o m m. P e t r o p. V, patrz też S m i t h, C r e l l e L). Wyznaczenie podstaw tych kwadratów zawdzięczamy G a u s s o w i (Theoria resid. biquadr. Werke II). Jeżeli wyznaczymy liczby a i b najmniejsze pod względem wartości liczebnej i czyniące zadość kongruencyom :

$$a \equiv (-1)^{\frac{p+3}{4}} \cdot \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{p-1}{2}\right)!}{\left(\frac{p-1}{4}\right)!} \pmod{p},$$

$$\pm 2b \left[\left(\frac{p-1}{4}\right)! \right]^2 \equiv (-1)^{\frac{p-1}{4}} \pmod{p},$$

to będzie: $p = a^2 + b^2$.

Każda liczba pierwsza p postaci $3n+1$ może być zawsze i to jednym tylko sposobem rozłożona na kwadrat i kwadrat potrójny.

Każda liczba pierwsza jednej z dwu postaci $20n+1$, $20n+9$ daje się zawsze i to jednym tylko sposobem rozłożyć na sumę kwadratu i pięciokrotnego kwadratu; każda zaś liczba pierwsza jednej z dwu postaci $20n+3$, $20n+7$ daje się zawsze czterema sposobami przedstawić jako forma (2,1,3).

Każda liczba pierwsza postaci $6n+1$ daje się zawsze przedstawić jako forma $x^2 - xy + y^2$.

Poczwórność liczby pierwszej postaci $6n+1$ daje się przedstawić w postaci sumy kwadratu i potrójnego kwadratu typu t.j. $4p = A^2 + 3B^2$, liczba A jest resztą sześcienną liczby p . Liczby A i B określają jako najmniejsze co do wartości bezwzględnej z pomiędzy czyniących zadość kongruencyom:

$$A \left[\left(\frac{p-1}{3}\right)! \right]^3 \equiv 1; \quad A + B \left(g^{\frac{p-1}{3}} - g^{2\frac{p-1}{3}} \right) \equiv 0 \pmod{p},$$

gdzie g jest pierwiastkiem pierwotnym liczby p .

Twierdzenie to znajdujemy najprzód u Jacobi'ego (Crelle II, De residuis cubicis etc), następnie u Cauchy'ego (Mém. sur la théorie des nombres), Lebesgue'a (Liouville II), Sterna (Crelle VII; IX), Clausena (tamże VIII).

Każda liczba pierwsza jednej z dwu postaci $8n+1$, $8n+3$ daje się zawsze i to jednym tylko sposobem rozłożyć na kwadrat i podwójny kwadrat (Jacobi, Crelle XXX; Stern, tamże XXXII).

§ 9.

Liczby zespolone całkowite Gaussa. Reszty dwukwadratowe.

Liczba postaci $a = a + bi$, gdzie $i = \sqrt{-1}$, a , b zaś są liczbami wymiernymi całkowitemi nazywa się liczbą całkowitą zespoloną Gaussa (porówn. Rozdział I, § 2), liczba zaś $+\sqrt{a^2+b^2}$ — jej modułem lub normą.

Jeżeli liczby a i b są obie parzyste, liczba zespolona nazywa się zespoloną parzystą; jeżeli jedna z nich jest parzystą, mamy liczbę zespoloną nieparzystą; jeżeli obie nieparzyste — liczbą zespoloną półparzystą.

Mówimy, że liczba całkowita a jest podzielna przez liczbę całkowitą β , jeżeli $a = \beta \cdot \gamma$, gdzie γ jest liczbą zespoloną całkowitą.

Jednością nazywa się każda liczba zespolona, której moduł jest jednością. Mamy cztery jedności: $+1$, -1 , $+i$, $-i$. Cztery liczby, które otrzymujemy, mnożąc jakąkolwiek liczbę zespoloną przez każdą z tych jedności, nazywają się stowarzyszonymi.

Liczba $a + bi$ nazywa się pierwotną, jeżeli $a - 1$ i b , podzielone przez 4, dają równocześnie resztę 0 lub resztę 2.

W każdej grupie czterech liczb stowarzyszonych istnieje zawsze liczba pierwotna.

Liczba $a+bi$ nazywa się pierwszą, jeżeli nie można jej rozłożyć na iloczyn dwu liczb zespolonych całkowitych, obu różnych od jedności.

Prawa zasadnicze (tak zwane euklidesowe) podzielności liczb całkowitych wymiernych utrzymują się bez zmiany i dla liczb zespolonych, pod warunkiem, że liczb stowarzyszonych nie będziemy uważali za zasadniczo różne.

Każda liczba zespolona całkowita daje się zawsze—i to jednym tylko sposobem—wyznać jako iloczyn skończonej liczby liczb pierwszych.

Jeżeli liczba a jest podzielna przez liczbę β . to norma liczby a jest podzielna przez normę liczby β .

Norma liczby jest podzielna przez samą liczbę.

Najmniejsza ze wszystkich liczb wymiernych, podzielnych przez liczbę pierwszą zespoloną, jest liczbą wymierną pierwszą; każda liczba pierwsza zespolona jest przeto dzielnikiem liczby pierwszej wymiernej i to jednej tylko.

Norma liczby pierwszej zespolonej jest równa albo liczbie pierwszej albo kwadratowi liczby pierwszej. W pierwszym przypadku mamy liczbę zespoloną pierwszą stopnia 1-go, w drugim takąż liczbę stopnia 2-go. W obu przypadkach norma jest zawsze postaci $4n+1$.

Liczba 2 jest stowarzyszona z kwadratem liczby pierwszej stopnia 1-go $1-i$.

Każda liczba pierwsza wymierna postaci $4n+3$ jest liczbą pierwszą zespoloną stopnia 2-go.

Każda liczba pierwsza dodatnia wymierna postaci $4n+1$ jest iloczynem dwu liczb pierwszych zespolonych stopnia 1-go, niestowarzyszonych.

Powiadamy, że dwie liczby całkowite zespolone α , β są przystającemi według pewnego modułu zespolonego ω , jeżeli $\alpha - \beta$ jest podzielne przez ω .

Łatwo rozciągnąć na liczby tu badane wszystkie twierdzenia (V, § 3 i 4) o kongruencyach z liczbami wymiernymi. Tak np. kongruencya:

$$x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_n \equiv 0 \pmod{m},$$

której współczynniki są liczbami zespolonemi całkowitemi, m —również liczbą zespoloną całkowitą, nie może mieć więcej niż n pierwiastków nieprzystających.

Każda liczba $a+bi$ jest przystająca według mod m do jednej tylko liczby $x+yi$, gdzie x, y wybrano z dwóch szeregów:

$$0, 1, 2, \dots \left(\frac{|m|}{d} - 1 \right); \quad 0, 1, 2, \dots (d-1);$$

tu $|m|$ oznacza normę liczby m , d zaś największy wspólny dzielnik dwu sprzężnych liczb m

Kombinując wszystkie wartości x z wartościami y , otrzymamy razem $|m|$ liczb zespolonych, z których każde dwie są nieprzystającemi; tworzą one układ zupełny reszt według modułu m .

Jeżeli m jest liczbą zespoloną pierwszą nieparzystą, μ —jej normą, n —liczbą przez nią niepodzielną, to

$$n^{\mu-1} \equiv 1 \pmod{m}.$$

Jest to uogólnione twierdzenie F e r m a t a.

Jest też $n^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv i^e \pmod{m}$, gdzie $e = 0, 1, 2, 3$.

Reszty dwukwadratowe. Liczba n nazywa się resztą dwukwadratową liczby zespolonej m , jeżeli jest możliwa kongruencya:

$$x^4 \equiv n \pmod{m}.$$

Liczba zespolona n jest resztą dwukwadratową liczby m (pierwszej zespolonej nieparzystej), jeżeli:

$$n^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv 1 \pmod{m},$$

gdzie μ jest normą liczby m .

Dla przedstawienia charakteru dwukwadratowego liczby n względem liczby m stosujemy symbol Jacobiego $\left(\left(\frac{n}{m}\right)\right)$, który oznacza liczbę i^e ; jeżeli to wyrażenie jest równe $+1$, n jest resztą kwadratową liczby m .

Dwie liczby, przystające według mod. m , mają ten sam charakter dwukwadratowy.

Charakter dwukwadratowy iloczynu dwóch liczb równa się iloczynowi charakterów dwukwadratowych ich czynników.

Jest :

$$\left(\left(\frac{i}{m}\right)\right) = i^{\frac{\mu-1}{4}}.$$

Jeżeli $m = a + bi$ jest liczbą zespoloną pierwotną i pierwszą, to:

$$\left(\left(\frac{1+i}{m}\right)\right) = i^{\frac{1}{4}(a-b-b^2-1)}.$$

Jeżeli m, n są dwie liczby zespolone pierwsze (bez dzielników wspólnych prócz jednośc), m zaś nieparzyste, to jest zawsze $\left(\left(\frac{n}{m}\right)\right) = +1$.

Twierdzenie o wzajemności dla reszt dwukwadratowych jest następujące.

Charaktery dwukwadratowe dwuliczb zespolonych pierwotnych i pierwszych są równe, jeżeli przynajmniej jedna z liczb $\equiv 1 \pmod{4}$; są równe i znaku przeciwnego, jeżeli obie liczby są $\equiv 3 + 2i \pmod{4}$.

Teorię reszt dwukwadratowych utworzył Gauss (Werke II, Theoria residuorum biquadraticorum); potem zajmowali się nią: Eisenstein (Crelle XXVIII), Lebesgue (Liouville IV) i t. d. Wykład jej prosty znajduje się w dziele Bachmanna („Kreistheilungslehre“).

§ 6.

Liczby zespolone sześciennie całkowite. Reszty sześciennie.

Nazywamy zespoloną sześcienną liczbę postaci $a+b\epsilon$, gdzie ϵ jest pierwiastkiem sześciennym z jednośc, t. j. $\epsilon = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, a a, b są liczbami całkowitymi wymiernymi. Liczba $a+b\epsilon^2$ nazywa się liczbą sprzężoną z poprzednią, a iloczyn obu jest normą.

Nie powtarzamy tu określeń podstawowych, które są podobne do określeń w paragrafach poprzedzających.

Liczba, której norma jest $+1$, jest jednością zespoloną. Jest tu sześć jedności zespolonych:

$$+1, -1, +\epsilon, -\epsilon, 1+\epsilon = -\epsilon^2, -1-\epsilon = +\epsilon^2.$$

Liczba 3 w tej teorii nie jest liczbą pierwszą lecz iloczynem liczby $1-\epsilon$ przez $1-\epsilon^2$.

Stosownie do tego, czy $a+b\epsilon$ jest lub nie jest podzielne przez 3, liczba $a+b\epsilon$ ma czynnik $1-\epsilon$ lub go nie ma.

Mnożąc liczbę daną przez sześć jedności, otrzymujemy liczby stowarzyszone.

Liczba nazywa się pierwotną, jeżeli współczynnik przy ϵ jest $\equiv 0 \pmod{3}$, a część pozostała jest $\equiv -1 \pmod{3}$.

W każdej grupie sześciu liczb stowarzyszonych istnieje zawsze liczba pierwotna.

W obszarze liczb całkowitych sześciennych istnieją trzy gatunki liczb pierwszych:

1. liczba $1-\varepsilon$, która jest dzielnikiem liczby 3.
2. liczby rzeczywiste pierwsze postaci $6n+5$; te liczby są też pierwotnymi.
3. liczby zespolone pierwsze, których norma jest postaci $6n+1$.

Jeżeli m jest liczbą zespoloną pierwszą (różną od $1-\varepsilon$) i nie podzielną przez m , wtedy otrzymujemy uogólnione twierdzenie **F e r m a t a**:

$$n^{\mu-1} \equiv 1 \pmod{m},$$

gdzie μ jest normą liczby n , lub

$$n^{\frac{\mu-1}{3}} \equiv \varepsilon^e \pmod{m},$$

gdzie $e = 0, 1, 2$.

Reszty sześciennie. Jeżeli $n^{\frac{\mu-1}{3}} \equiv 1 \pmod{m}$, to n jest resztą sześcienną liczby m (jeżeli n nie jest podzielne przez m). Charakter sześcienny liczby n względem m wyrażamy symbolem Eisensteina $\left[\frac{n}{m} \right]$.

Charakter sześcienny liczby $1-\varepsilon$ określa w ó r:

$$\left[\frac{1-\varepsilon}{a+b\varepsilon} \right] = \varepsilon^{\frac{2}{3}(a+1)}.$$

Twierdzenie o wzajemności dla reszt sześciennych jest następujące:

Jeżeli n, m są dwie liczby sześciennie pierwsze pierwotne, to charakter sześcienny liczby n względem m równa się charakterowi liczby m względem n .

Resztami sześciennymi zajmowali się: Jacobi (Crelle, II), Eisenstein (tamże XXVII, XXVIII), Lebesgue (Liouville, IV) i t. d. Porów. lekcye 14 i 15 w cytowanym dziele Bachmanna.

F e r m a t o w i zawdzięczamy zwrócenie uwagi analistów na ten gatunek problematów liczbowych, które, złączone później w jedno ciało doktryny, utworzyły to, co dziś nazywamy teorią liczb lub arytmetyką wyższą. Pierwsze wielce ważne odkrycia w tej teorii zawdzięczamy Eulerowi, który utworzył też pierwszy teorię tak zwanych skaźników (Comm. Petr. 1773) i reszt kwadratowych. Po Eulerze, Lagrange zajmował się wielce teorią liczb i pierwszy położył podstawy teorii ogólnej form kwadratowych. Później ukazały się dwa wielce ważne dzieła: „Théorie des nombres“ Legendre'a (kol. VI), które doczekało się za życia autora trzech wydań, ostatnie było w r. 1830—tu znajdujemy pierwszy dowód twierdzenia o wzajemności reszt kwadratowych—oraz „Disquisitiones arithmeticae“ Gaussa (Lipsk 1801), któremu zawdzięczamy, między innymi, teorię zupełną form kwadratowych, jak ją wyżej podaliśmy.

Dzieło Legendre'a, jest rzec można, repertoryum wszystkich badań, znanych wówczas o tym przedmiocie. Gaussowi zawdzięczamy pierwsze studium systematyczne o liczbach zespolonych i myśl pięknego wyzyskania jej celem uogólnienia, uzupełnienia i udowodnienia różnych twierdzeń z teorii liczb wymiernych.

Pomijając dla krótkości tytuły prac innych autorów: Cauchy'ego, Dirichleta, Kummera, Jacobi'ego, Eisensteina, Kroneckera, Liouville'a i t. d., którzy zajmowali się teorią liczb, powiemy tylko, że do najważniejszych traktatów nowoczesnych należą: „Vorlesungen über Zahlentheorie von Lejeune-Dirichlet“, wydane przez Dedekinda (wydanie czwarte, Brunświk 1894), gdzie zebrano i specjalne badania innych autorów; traktat Czebyszewa (przekład niemiecki Schapiry, Lipsk 1889, włoski Masserini'go, Rzym 1895); Theorie des nombres, Lucasa (Paryż 1891); wyborne dzieło „Zahlentheorie“ Bachmanna (Lipsk 1894). Kurs litografowany Kleina: „Ausgewählte Kapitel aus der Zahlentheorie“ (1896) ma głównie na celu badanie teorii form kwadratowych ze stanowiska geometrycznego.

Historię teorii liczb zawiera znana praca Smitha: „Report on the theory of numbers“ (Dzieła, Oxford, 1894).

ROZDZIAŁ XXI.

TEORIA LICZB ALGEBRAICZNYCH I LICZB PRZESTĘPNYCH

§ 1.

W i a d o m o ś c i o g ó l n e .

Każdy pierwiastek równania algebraicznego o współczynnikach wymiernych, nazywa się liczbą algebraiczną; liczba ta może być rzeczywistą lub zespoloną.

Jeżeli pierwszy współczynnik równania jest jednością, a pozostałe liczbami całkowitemi, mamy liczbę algebraiczną całkowitą; w innych przypadkach mamy liczbę algebraiczną niecałkowitą lub ułamkową.

Liczba zespolona $a + \beta i$, gdzie a i β są liczby wymierne, jest przypadkiem szczególnym liczby algebraicznej, obejmującym znów w sobie, jako przypadek szczególny, liczby wymierne.

Mówimy, że ogół liczb tworzy ciało, jeżeli odtwarza się przez cztery działania zasadnicze, które możemy nazwać działaniami wymiernymi.

Ogół wszystkich liczb wymiernych stanowi ciało liczbowe.

Ogół wszystkich liczb algebraicznych stanowi ciało.

Liczby wymierne całkowite odtwarzają się już przy pomocy trzech pierwszych działań wymiernych.

Każdy pierwiastek równania, mającego pierwszy współczynnik równy jedności i za inne współczynniki liczby całkowite algebraiczne, jest też liczbą całkowitą algebraiczną.

Pomiędzy nieskończenie wielu równaniami o współczynnikach wymiernych, których pierwiastkiem może być liczba algebraiczna, równanie stopnia najniższego jest nieprzywiedlnem, t. j. pierwsza strona jego nie ma dzielników o współczynnikach wymiernych.

Niechaj liczba algebraiczna θ będzie pierwiastkiem równania nieprzywiedlnego rzędu n -tego; utwórzmy ogół liczb typu

$$\varphi(\theta) = x_0 + x_1\theta + x_2\theta^2 + \dots + x_{n-1}\theta^{n-1},$$

gdzie $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ są jakimikolwiek liczbami wymiernymi. Liczby tak utworzone stanowią ciało Ω , które nie daje się wytworzyć w ten sam sposób z innego pierwiastka θ' innego równania nieprzywiedlnego stopnia różnego od n .

Takie ciało liczb nazywa się ciałem skończonym stopnia n -tego.

Można wybrać n liczb ciała Ω w ten sposób, by każda inna liczba tegoż ciała dała się przez nie wyrazić liniowo przy pomocy współczynników wymiernych. Mówimy, że te n liczb tworzy podstawę ciała Ω .

Ciała $\Omega, \Omega', \Omega'', \dots$, utworzone ze wszystkich pierwiastków $\theta, \theta', \theta'', \dots$, równania nieprzywiedlnego stopnia n -tego, nazywają się ciałami sprzężzonymi.

Jeżeli $\omega = \varphi(\theta)$ jest liczbą ciała Ω , to $\omega' = \varphi(\theta')$ należy do ciała Ω' , i liczby ω i ω' będą sprzężzonymi. Jeżeli wszystkie ciała sprzężzone z ciałem Ω są identyczne z tem ciałem (jak to np. ma miejsce, gdy θ jest pierwiastkiem równania dwumienne), wtedy Ω nazywa się ciałem normalnym lub ciałem

Galois'a. Nazwa ta, wprowadzona przez Dedekinda, przypomina teorię Galois'a rozwiązalności równań algebraicznych przez pierwiastniki (t.j. za pomocą równań dwumiennych).

Jeżeli $\omega = \varphi(\theta)$ jest liczbą ciała Ω , to iloczyn:

$$\omega \omega' \dots \omega^{(n-1)} = \varphi(\theta) \varphi(\theta') \dots \varphi(\theta^{(n-1)}),$$

gdzie $\theta, \theta', \dots, \theta^{(n-1)}$ są wszystkimi pierwiastkami danego równania nieprzywiedlnego, nazywa się *normą* liczby ω i oznacza się przez $N(\omega)$.

Norma liczby ω jest zawsze liczbą wymierną.

Jeżeli ω jest liczbą wymierną ciała Ω , to i jej sprzężone są równe ω i będzie $N(\omega) = \omega^n$.

Jeżeli ω_1, ω_2 są dwie liczby ciała Ω , to

$$N(\omega_1 \omega_2) = N(\omega_1) N(\omega_2).$$

Wyróżnikiem n liczb ciała Ω nazywa się wyznacznik, utworzony z tych liczb i ze wszystkich jej sprzężonych w każdym z ciał $\Omega', \Omega'', \dots, \Omega^{(n-1)}$.

Wyróżnik jest liczbą wymierną. Jeżeli mamy n liczb ciała Ω , to one tworzą podstawę tego ciała lub jej nie tworzą, stosownie do tego, czy ich wyróżnik nie jest lub jest zerem.

Każda liczba algebraiczna za pomocą mnożenia przez liczbę wymierną całkowitą, różną od zera, może być zamieniona na liczbę całkowitą algebraiczną.

Można znaleźć nieskończenie wielu sposobami podstawę ciała Ω , złożoną z samych liczb całkowitych i można jeszcze wybrać rzeczoną podstawę tak, aby wyróżnik liczb w niej zawarty był minimum. Taki wyróżnik minimum nazywa się liczbą zasadniczą ciała Ω lub wprost wyróżnikiem ciała Ω .

Jeżeli $n=2$, t. j. gdy równanie zasadnicze jest stopnia 2-go, mamy ciało kwadratowe. Liczby zespolone $a+bi$, gdzie

$i = \sqrt{-1}$, a i b są liczbami wymiernymi, stanowią przypadek szczególny tego ciała. Norma liczby $a + bi$ odpowiada iloczynowi $(a + bi)(a - bi)$, t. j. zwykłej normie lub modułowi liczby zespolonej.

Liczbą zasadniczą ciała kwadratowego, utworzonego z liczb zespolonych wymiernych, jest -4 .

§ 2.

Podzielność liczb całkowitych algebraicznych. Liczby idealne

K u m m e r a.

Liczba całkowita a nazywa się podzielną przez liczbę całkowitą β , gdy $a = \beta\gamma$, gdzie γ jest liczbą całkowitą.

Jeżeli α , β są liczby całkowite algebraiczne podzielne przez μ , to $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$ będą również podzielne przez μ .

Jeżeli a jest podzielne przez λ , λ podzielne przez μ , to a będzie także podzielne przez μ .

Jednością nazywa się każda liczba całkowita algebraiczna, będąca dzielnikiem liczby 1, a więc każdej liczby całkowitej algebraicznej. Każdy pierwiastek równania algebraicznego, którego współczynniki skrajne są równe 1, a pozostałe współczynniki są liczbami całkowitemi, jest jednością. Jedności jest nieskończenie wiele.

Jedności odtwarzają się za pomocą mnożenia, dzielenia i pierwiastkowania.

Jeżeli dwie liczby są podzielne wzajemnie jedna przez drugą, ich ilorazy są jednościami; dwie liczby nazywają się wtedy stowarzyszonymi.

Dwie liczby, stowarzyszone z trzecią, są stowarzyszone z względem siebie.

Jeżeli a jest podzielne przez β , każda stowarzyszona z liczbą a jest podzielna przez każdą stowarzyszoną z liczbą β .

Dwie liczby całkowite algebraiczne α, β nazywają się względnie pierwszymi, jeżeli istnieją dwie inne liczby całkowite algebraiczne ξ, η , takie, że:

$$\alpha \xi + \beta \eta = 1.$$

Jeżeli α jest pierwsze względem β , β pierwsze względem γ , to β jest pierwsze względem $\beta\gamma$.

Jeżeli każda z liczb $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ jest pierwsza względem każdej z liczb $\beta_1, \beta_2, \dots$, to dwa iloczyny $\alpha_1\alpha_2\dots, \beta_1\beta_2\dots$ są względnie pierwsze.

Każdy wspólny dzielnik dwóch liczb względnie pierwszych jest jednością.

Dwie liczby całkowite α, β mają zawsze wspólny dzielnik, który daje się przedstawić w postaci:

$$\delta = \alpha \xi + \beta \eta,$$

gdzie ξ, η są dwie liczby całkowite; nadto δ jest podzielne przez każdy wspólny dzielnik liczb α i β .

Jeżeli dwie liczby nie mają żadnego wspólnego dzielnika, prócz jedności, to będą względnie pierwszymi w znaczeniu powyższej wskazanej.

Norma liczby α , należącej do ciała Ω (patrz § poprzedzający), jest podzielna przez α , a iloraz jest liczbą całkowitą, należącą do ciała Ω .

Jeżeli α i β należą do ciała Ω , zaś α jest podzielne przez β , to $N(\alpha)$ jest podzielne przez $N(\beta)$.

Dwie liczby α, β nazywają się przystającymi (kongruentnymi) według modułu μ jeżeli ich różnica jest podzielna przez μ ; są nieprzystającymi (niekongruentnymi) w przypadku przeciwnym.

Liczba liczb ciała Ω , nieprzystających do siebie (po dwie biorąc) według modułu μ , równa się wartości bezwzględnej modułu μ , t. j. $N(\mu)$. Jeżeli μ jest jednością, wtedy wszystkie liczby ciała Ω przystają do zera według mod μ i jest $N(\mu) = \pm 1$.

Liczba algebraiczna μ nazywa się rozkładalną, jeżeli ma dzielniki różne od jedności i od liczb z sobą stowarzyszonych; w przeciwnym razie nazywa się nierozkładalną. Tych dwu definicij nie należy mieszać z następującemi:

Liczba całkowita μ , różna od zera, nazywa się pierwszą, jeżeli dwie jakiegokolwiek liczby ciała Ω niepodzielne przez μ , dają iloczyn również przez μ niepodzielny; gdy ten przypadek nie zachodzi, liczba μ nazywa się złożoną.

Tylko dla specjalnych ciał Ω obie definicje są równoważne, t. j. że każda liczba pierwsza jest także nierozkładalną i odwrotnie. Tak np. ma to miejsce dla ciała liczb wymiernych i dla ciała kwadratowego liczb zespolonych wymiernych.

W ogólności każda liczba rozkładalna jest złożona, lecz nie każda liczba złożona jest konieczniew rozkładalna.

Jeżeli dla ciała Ω oba pojęcia powyższe zlewają się, wtedy każda liczba rozkładalna może być przedstawiona i to jednym tylko sposobem jako iloczyn skończonej liczby czynników nierozkładalnych (w założeniu, że dwie liczby stowarzyszone nie są uważane za różne); w innych przypadkach rozkład liczby rozkładalnej na czynniki można uskuteczyć wielu sposobami.

Dla usunięcia tej osobliwości, skutkiem której prawa euklidesowe podzielności mogłyby stracić wszelkie znaczenie dla liczb ciała Ω , Kummer wprowadził pojęcie liczb idealnych, dzięki którym dawne prawa podzielności zostają przywrócone. Wyjaśnimy to nowe pojęcie na przykładzie szczególnym.

Niechaj będzie ciało kwadratowe Ω , któremu daje początek pierwiastek równania $6^2 + 5 = 0$ (Dedekind w dziele cytowanym). Cztery liczby całkowite

$$\alpha = 2, \quad \beta = 3, \quad \mu = 1 - \theta, \quad \nu = 1 + \theta$$

są nierozkładalne, lecz zachodzi pomiędzy niemi związek $\alpha\beta = \mu\nu$; stąd wynika, że α nie jest liczbą pierwszą, ponieważ iloczyn dwu liczb μ, ν jest podzielny przez α .

Gdyby α, β, μ, ν były wszystkie liczbami wymiernymi, wtedy z poprzedzającego związku wynikałoby:

$$\alpha = \alpha_1 \alpha_2, \quad \beta = \beta_1 \beta_2, \quad \mu = \alpha_1 \beta_2, \quad \nu = \alpha_2 \beta_1,$$

gdzie α_1, β_1 są względnie pierwsze, α_2 i β_2 również względnie pierwsze; każda zaś liczba ω podzielna przez α , czyniłaby zadość kongruencyi:

$$\alpha \omega = 0 \pmod{\mu}; \quad \nu \omega = 0 \pmod{\alpha}.$$

W przypadku, gdy powyższego rozkładu nie można istotnie wykonać, przypuścimy, że został on wykonany idealnie i wprowadźmy liczby idealne $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, określone w ten sposób, że każda liczba, podzielna przez α_1 , czyni zadość jednej z dwu poprzedzających kongruencyj. W naszym przypadku liczby idealne $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, których nie można faktycznie utworzyć, będą określone w powyższem znaczeniu przez kongruencye:

$$(1 + \theta) \omega = 0 \pmod{2}, \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha_1),$$

$$(1 - \theta) \omega = 0 \pmod{3}, \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha_2),$$

$$(1 - \theta) \omega = 0 \pmod{2}, \quad . \quad . \quad . \quad (\beta_1),$$

$$(1 + \theta) \omega = 0 \pmod{3}, \quad . \quad . \quad . \quad (\beta_2),$$

Wprowadziwszy liczby podobne, znajdziemy, że liczby poprzedzające α, β, μ, ν , występujące jako nierozkładalne, rozkładają się obecnie w ten sposób:

$$\alpha = 2 = \alpha_1^2; \quad \beta = 3 = \beta_1 \beta_2,$$

$$\mu = 1 - \theta = \alpha_1 \beta_2; \quad \nu = 1 + \theta = \alpha_1 \beta_1,$$

można następnie okazać, że liczby $\alpha_1, \beta_1, \beta_3$ nie są idealnymi pierwszymi.

Wprowadzenie liczb idealnych przywraca zupełnie, jak powiedziano, całości Ω wszystkie zwykłe prawa podzielności; wprowadzenie to jest przeto dogodnym do utworzenia teorii podzielności, służącej we wszystkich przypadkach.

Powiemy jeszcze, w jaki sposób rozumiał Kummer wprowadzenie tych nowych liczb.

Niechaj będą dwa przecinające się koła na płaszczyźnie; prosta, przechodząca przez ich punkty wspólne, nazywa się osią pierwiastną; jest ona miejscem punktów takich, że styczne do dwóch kół przez taki punkt przechodzące (aż do punktów styczności) są równe. Jeżeli koła nie przecinają się, wtedy nie stosuje się pierwsze określenie osi pierwiastnej, lecz można tę oś określić jako miejsce geometryczne punktów, dla których zachodzi własność druga.

Podobnie rzecz się ma z pojęciem liczb idealnych; wychodzimy z przypadku, w którym liczby $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ istnieją, znajdujemy własność tych liczb, wyrażoną za pomocą wyżej podanych kongruencyj i rozciągamy tę własność i na ten przypadek, w którym liczby nie istnieją. W ten sposób indywidualizujemy utwory, które można uważać za uogólnienie liczb, istniejących faktycznie w przypadku pierwszym.

Pojęcie liczb idealnych zostało wprowadzone przez Kummera w przypadku specjalnym równania podziału koła (Crelle XXXV, XL, LIII, Akad. Berl. 1856).

Liczbami algebraicznymi i ideałami zajmowali się: Dirichlet (Akad. Berlin. 1840, 1841, 1846), Dedekind (Ueber die Anzahl der Ideal-Classen, Brunświk 1877, „Ueber der Zusammenhang der Theorie der Ideale“ etc. Rozprawy getyngskie, XXIII, „Sur la théorie des nombres algébriques“, Bull. Darboux (I), XI, (2) I, 1877; Fuchs (Crelle LXV), Selling (Zeitschr. für Math. 1865); Zołotarew (Liouville, 1880); Sochocki (Prace mat. fiz. V, Warszawa, 1895). Wykład zupełny całej teorii w cytowanym dziele Dirichleta-Dedekinda i w rozdz. XVII dzieła „Kreistheilung“ Bachmanna. Ważny referat o teorii liczb algebraicznych, zawierający nadto wskazówki historyczne i bibliograficzne ogłosił Hilbert w tomie V Rocznika stowa-

rzyszenia niemieckiego matematyków. Wykład teorii liczb algebraicznych, funkcyjonałów i ideałów znajdujemy w *Algebrze* H. Webera t. II, Brunświk 1899.

§ 3.

L i c z b y p r z e s t ę p n e .

Jeżeli pomiędzy liczbami algebraicznymi rozważamy tylko rzeczywiste, to można zapytać, czy każda liczba rzeczywista, w ogóle niewymierna, jest liczbą algebraiczną, t. j. czy może być pierwiastkiem równania algebraicznego o współczynnikach wymiernych. Odpowiedź na to pytanie jest przecząca: istnieją liczby niealgebraiczne czyli przestępne. Pierwszy Liouville dowiódł istnienia liczb takich (*Comptes Rendus* 1844, *Journ. de Liouville* XVI, 1851); potem pytaniem tym zajmował się ponownie G. Cantor (*Crelle* LXXVII, 1873). Wykład dowodzenia Cantora znaleźć można w świeżem dziełku Kleina „*Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie*“, Lipsk, 1895.

W związku z teorią liczb przestępnych jest pytanie, czy liczba π (stosunek okręgu koła do średnicy) i liczba e (podstawa logarytmów naturalnych) dają się wykreślić za pomocą konstrukcyi geometrycznej elementarnej, t. j. za pomocą liniiki i cyrkla. Z pierwszym z tych pytań wiąże się sławne zagadnienie o kwadraturze koła.

Dowiedziano, że liczby π i e są nie tylko niewymiernymi, lecz są i przestępnymi, t. j. nie mogą być pierwiastkami równań algebraicznych o współczynnikach wymiernych, stąd już wypływa niemożliwość powyższej konstrukcyi geometrycznej.

Niewymierność liczby π udowodnił Lambert (*Vorläufige Kenntnisse für die so die Quadratur des Cirkels suchen*, 1770). Legendre wykazał, że liczba π^2 jest niewymierna. Hermite w sławnej rozprawie „*Sur la fonction exponentielle*“ (*Comptes rendus* 1873) do-

wiódł, że liczba e jest przestępną. Pod wpływem rozważań Hermite'a Lindemann w 1882 (Math. Ann. XX) udowodnił, że liczba π jest przestępna. Uproszczenie dowodów tych autorów zawdzięczamy Weierstrassowi (Berl. Berichte 1881), Bachmannowi (Vorlesungen über die Natur der Irrationalzahlen, Lipsk 1892), Hilbertowi, Hurwitzowi i Gordanowi (Gött. Nachr. 1893, Comptes rendus 1893, Math. Ann. XLIII, Prace mat.-fiz. V), Mertensowi (Prace mat.-fiz. IX).

§ 4.

L i c z b a π .

Liczba ta jest, jak wiemy, jest nie tylko niewymierna, lecz i przestępna. Nazywamy ją niekiedy ludolfiną (liczbą Ludolpha) od imienia matematyka (XVII wieku), który ją obliczył z 35 cyframi dziesiętnymi. Euler podał 100 cyfr (Introductio etc. 1748). De Lagny — 112, Richter — 330, Shanks kolejno: 440, 530, 707 (Proceed. Royal Society, XXI). Wartość liczby π z 40 cyframi dziesiętnymi jest:

$$\pi = 3, 14\ 159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288\ 41971 \dots$$

W papyrusie Rhinda (2000 lat przed Chr.) wartość π dana jest przez $\left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3, 16 \dots$ Wartościami przybliżonemi liczby π są ułamki:

$$\frac{22}{7}, \frac{333}{105}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102}, \frac{104348}{33215}, \frac{208341}{66317}, \frac{312689}{99632} \dots$$

Najważniejszymi wzorami do obliczania wartości liczby π są następujące:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \quad (\text{Wzór Wallisa}),$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots \quad (\text{Wzór Leibniza})$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \dots$$

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \dots$$

$$\frac{5\pi}{12} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$$

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \dots$$

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2 \cdot 4}\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 + \dots$$

Co do innych szeregów, utworzonych z kwadratów, sześciątów lub potęg wyższych odwrotności liczb naturalnych, a które wyrażają się przy pomocy liczby π , patrz Rozdz. IV, § 2.

O liczbie e , o liczbie Eulera, i t. d. patrz Rozdz. XVIII.

ROZDZIAŁ XXII.

RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA.

§ 1.

Wiadomości ogólne. Prawdopodobieństwo skutków i prawdopodobieństwo przyczyn.

Jeżeli nie są dane wszystkie przyczyny zachodzenia zjawiska, lecz niektóre z tych przyczyn są nieznane lub niemożliwe do wykrycia, wtedy oczekiwać można zajścia zjawiska raczej jednym niż innym sposobem. Każdy ze sposobów, w jaki zjawisko zachodzić może, nazywa się jednym z p r z y p a d k ó w m o ż l i w y c h, a liczba wszystkich tych przypadków może być skończona i mała, skończona i bardzo wielka, wreszcie nieskończona.

Wszystkie te przypadki możliwe można łączyć w grupy, zbierając w każdej grupie wszystkie te, które dla pewnego powodu chcemy lub możemy uważać za r ó w n o w a ż n e. Ogół wszystkich przypadków, objętych w grupie, uważamy za j e d n o z j a w i s k o. A więc każda grupa charakteryzuje zjawisko. Jeżeli np. z urny, zawierającej gałki białe i gałki czarne, wyciągamy jedną gałkę, to jest rzeczą naturalną uważać za równoważne dwa zdarzenia wyciągnięcia po gałce białej, chociażby za każdym razem innej. Mówimy wtedy, że w obu przypadkach zachodzi to samo zjawisko.

Liczba wszystkich przypadków, zawartych w grupie, stanowi liczbę przypadków sprzyjających zdarzeniu zjawiska, scharakteryzowanego przez tę grupę. Jeżeli w urnie poprzedzającej są 4 gałki białe i jest 10 czarnych, to liczba przypadków sprzyjających wyciągnięciu gałki białej jest 4.

Nazywamy prawdopodobieństwem matematycznym zdarzenia zjawiska stosunek liczby przypadków sprzyjających do liczby wszystkich przypadków możliwych, w założeniu, że wszystkie przypadki możliwe uważamy za równomierne.

Przez to ostatnie zastrzeżenie rozumiemy, że w zdarzeniu zjawiska nie uczestniczą przyczyny zakłócające, albo—inaczej mówiąc—że przyczyny działające są takie, iż nie możemy znaleźć żadnego powodu, dla którego zjawisko miałoby zachodzić raczej według jednego przypadku możliwego niż według drugiego. Tak np. jeżeli w poprzedzającym przykładzie jedna z gałek ma rozmiary inne niż pozostałe, to rzecz jasna, iż stanowi to nie małą przyczynę zakłócającą, z powodu której nie możemy już stosować wzorów prawdopodobieństwa matematycznego.

Z powyższego określenia wynika, że prawdopodobieństwo przedstawia się zawsze jako ułamek, zawarty między 0 a 1 (włączając granice). Jeżeli prawdopodobieństwo jest zerem, mamy wtedy niemożliwość zjawiska; jeżeli jest równem 1, mamy pewność zachodzenia zjawiska,

Jeżeli podzielimy grupę wszystkich przypadków sprzyjających na pewną liczbę podgrup $A, B, \dots$, to jest oczywiście, że toż zjawisko zdarzy się bez względu na to, czy zachodzi który z przypadków sprzyjających grupy A , czy który z przypadków grupy B i t. d. Prawdopodobieństwa zachodzenia zjawisk w podgrupie A lub B i t. p., nazywają się prawdopodobieństwami cząstkowymi, a prawdopodobieństwo samego zjawiska nazywa się wtedy prawdopodobieństwem całkowitem.

Prawdopodobieństwo całkowite jest sumą prawdopodobieństw cząstkowych.

Niechaj będzie dwa lub więcej zjawisk (niezależnych) zachodzących równocześnie. Np. niechaj będą dwie urny: jedna z gałkami białymi i czarnymi, druga z gałkami czerwonymi i zielonymi; mamy wyciągnąć jedną gałkę z urny pierwszej i jedną z urny drugiej. Zjawisko, wynikające z kombinacji pierwszego i drugiego zjawiska, nazywa się *zjawiskiem złożonym*.

Prawdopodobieństwo złożone równa się iloczynowi prawdopodobieństw pojedynczych zjawisk składowych.

Zagadnienia o prawdopodobieństwach dzielą się na dwie kategorie: zagadnienia o prawdopodobieństwie skutków i zagadnienia o prawdopodobieństwie przyczyn; albo inaczej, zagadnienia o prawdopodobieństwie a posteriori i zagadnienia o prawdopodobieństwie a priori. W zagadnieniach pierwszej kategorii rozważamy tylko prawdopodobieństwa tego, czy zachodzą lub nie skutki przyczyn ustalonych. W zagadnieniach drugiej kategorii wiemy, że zaszło w pewien sposób jedno zjawisko lub więcej zjawisk, które można uważać jako zależne od tej samej przyczyny, i pytamy, w jaki sposób wyznacza się prawdopodobieństwo, że przyczyna tego zjawiska jest raczej ta niż inna pomiędzy przyczynami, określonymi jako możliwie, oraz jaka pomiędzy temi przyczynami jest najprawdopodobniejsza.

Najprostszy tego przykład jest następujący: Niechaj będzie n urn, zawierających gałki białe i gałki czarne; pierwsza niechaj zawiera a_1 gałek białych i b_1 czarnych, druga a_2 białych i b_2 czarnych i t. d. Wyciągnięto gałkę białą i niewiadomo z jakiej urny. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wyciągnięto ją z urny pierwszej; jakie, że wyciągnięto ją z drugiej?

Do zagadnień o prawdopodobieństwie przyczyn należy tak nazwana *teorya błędów*. Pewną wielkość wymierzono pewną liczbę razy i otrzymano tyleż różnych rezultatów: jaka jest najprawdopodobniejsza, t. j. mająca największe prawdopodobieństwo miara tej wielkości?

Objaśnimy jeszcze pojęcie *nadziei matematycznej* i *wartości prawdopodobnej*.

Jeżeli gracz wygrywając, może pozyskać sumę A i jeżeli prawdopodobieństwo jego wygranej wynosi p , wtedy mówimy, że iloczyn pA jest jego nadzieją matematyczną. Jeżeli może wygrać sumę A' i jeżeli prawdopodobieństwo tego zdarzenia jest p' , sumę A'' z prawdopodobieństwem wygranej p'' i t. d., wtedy jego nadzieją matematyczną będzie $p'A + p''A'' + \dots$. Aby gra była sprawiedliwą, jest koniecznem, by nadzieje matematyczne wszystkich graczy były równe. Nadzieja matematyczna gracza równa się jego stawce, t. j. sumie, którą on do gry wkłada.

Wartością prawdopodobną wielkości A jest nadzieja matematyczna gracza, który mając prawdopodobieństwo p wygranej, ma pozyskać sumę równą A ; jeżeli wielkość A może przyjmować wartości $A', A'', \dots$, wtedy wartością prawdopodobną ilości A jest $p'A' + p''A'' + \dots$.

W przedmiocie nadziei matematycznej sławnem jest zagadnienie, zwane paradoksem petersburskim, podane przez Daniela Bernoulli'ego. Dwaj gracze A i B grają na następujących warunkach: A wyrzuca w powietrze monetę: jeśli ta padnie na ziemię stroną z góry umówioną, to B płaci mu sumę 1 fr. i gra jest skończona; jeżeli przeciwnie moneta padnie stroną przeciwną, wtedy gra trwa dalej. Jeżeli po powtórny raz rzuceniu moneta padnie na ziemię stroną umówioną, B płaci 2 fr. a jeżeli padnie stroną przeciwną, gra trwa dalej. Za trzecim razem osoba B zapłaci 4 fr. jeżeli moneta padnie na ziemię stroną umówioną i t. d. W dalszym przebiegu gry pod temi warunkami B płacić będzie odpowiednio 8, 16, . . . fr. Zachodzi pytanie, jaką stawkę powinna osoba A postawić, aby gra była sprawiedliwą, albo inaczej, jaka jest nadzieja matematyczna gracza A . Rachunek, według powyższej zasady wykonany, prowadzi do wyniku, że nadzieja matematyczna osoby A jest nieskończona.

§ 2.

*Prawdopodobieństwo skutków. Twierdzenie Jakóba Bernoulli'ego.
Prawo wielkich liczb.*

Jeżeli prawdopodobieństwem pewnego zdarzenia jest p , a prawdopodobieństwem zdarzenia przeciwnego jest q i jeżeli robimy μ prób w tych samych warunkach, to prawdopodobieństwo, aby zdarzenie pierwsze powtórzyło się n razy (niezależnie od porządku) wynosi:

$$\frac{\mu!}{n!(\mu-n)!} p^n q^{\mu-n},$$

Jeżeli wyznaczymy n tak, aby to prawdopodobieństwo było maximum, znajdziemy:

Wartością najprawdopodobniejszą liczby n jest liczba całkowita, zawarta pomiędzy $\mu p - q$ i $\mu p + p$; wartością najprawdopodobniejszą liczby $\mu - n$ liczbą całkowitą, zawartą pomiędzy $\mu q - q$ i $\mu q + q$. To prowadzi do wniosku: Kombinacja, mającą największe prawdopodobieństwo, jest ta, w której zdarzenia ukazują się w liczbie proporcjonalnej do ich prawdopodobieństw.

Otóż twierdzenie Bernoulli'ego orzeka, że powiększając liczbę prób, dojdziemy do tego, iż zachodząca kombinacja zbliża się do tej właśnie, która ma największe prawdopodobieństwo. Jeżeli zastosujemy wzór Stirlinga:

$$\lim_{r=\infty} \frac{r!}{e^{-r} r^r \sqrt{2\pi r}} = 1,$$

znajdziemy, że prawdopodobieństwo, aby zdarzenie o prawdopodobieństwie p powtórzyło się μp razy w μ próbach (prawdopodobieństwo maximum) wynosi:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu p q}}.$$

To prawdopodobieństwo maximum dąży zatem do zera, gdy liczba μ prób rośnie nieograniczenie. Tem bardziej zatem dążyć będzie do zera dla rosnącego μ prawdopodobieństwa, aby liczba n (t. j. liczba razy powtórzenia się zdarzenia) była pewną liczbą oznaczoną, różną od μp .

Nazywamy odchyleniem bezwzględnem różnicę pomiędzy wartością liczby n a wartością najprawdopodobniejszą tej liczby, t. j. μp , i kładziemy $h = \mu p - n$; odchyleniem względnem nazywamy stosunek $\frac{h}{\mu}$.

Prawdopodobieństwo, aby zdarzenie sprzyjające zachodziło n razy, t. j., aby odchylenie równało się h , wynosi przybliżenie:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu p q}} e^{-\frac{h^2}{2\mu p q}},$$

jeżeli założymy, że $\frac{h}{\mu}$, $\frac{h}{\sqrt{\mu}}$ są jest dostatecznie małe. Liczba h z natury swej jest liczbą całkowitą, dodatnią lub ujemną; w rachunkach wszakże bywa dogodnem zastępować ją przez zmienną ciągłą, mogącą przyjmować wszelkie wartości możliwe. Mamy wtedy: prawdopodobieństwo odchylenia, zawartego pomiędzy $-a$ i $+a$ daje wzór:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu p q}} \int_{-a}^{+a} e^{-\frac{h^2}{2\mu p q}} dh,$$

które—mu kładąc $\frac{h}{\sqrt{2\mu p q}} = t$ — można nadać postać:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\alpha}{\sqrt{2\mu pq}}} e^{-t^2} dt.$$

Jeżeli powiększamy liczbę μ prób i pozostawiamy stałą liczbę α (granice wyższą odchylenia), wtedy prawdopodobieństwo, aby odchylenie było mniejsze od α , dąży do zera; jest to więc dążenie do pewności, że odchylenie powinno przewyższać jakąkolwiek liczbę α ; innymi słowy, przy powiększaniu liczby μ zwiększa się bez granic odchylenie bezwzględne. Powiększając się, powiększa się wszakże tak, że jego stosunek do μ , t. j. $\frac{h}{\mu}$, czyli odchylenie względne dąży do zera. Twierdzenie to w poniższej łatwiejszej postaci nazywa się twierdzeniem Bernoulli'ego.

Gdy μ rośnie nieograniczenie, t. j. gdy powiększamy nieograniczenie liczbę prób, stosunek $\frac{n}{\mu}$, gdzie n jest liczbą przypadków, w których zachodzi zdarzenie o prawdopodobieństwie p , dąży do zlania się z samem prawdopodobieństwem p , t. j. $\lim \frac{n}{\mu} = p$.

Tak np. gdy wyciągamy gałkę z urny, zawierającej gałkę czarną i dwie białe, kładziemy do urny gałkę wyciągniętą i znowu powtarzamy toż samo wielką liczbę razy, to liczba razy, w których wyciągnięto gałkę białą, jest przybliżeniem równa podwójnej liczbie razy, w których wyciągnięto gałkę białą.

Twierdzeniem, które można uważać za ogólniejsze od twierdzenia Bernoulli'ego i z którego to ostatnie wypływa jako wniosek, jest t. zw. twierdzenie o średniej arytmetycznej. Niechaj pewna wielkość może mieć wartości $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ i niechaj prawdopodobieństwami tych wartości możliwych będą $p_1, p_2, \dots, p_r$. Według definicyi (§ 1), wartością prawdopodobną tej wielkości jest $p_1 \lambda_1 + p_2 \lambda_2 + \dots + p_r \lambda_r = V$. Czynimy μ prób i otrzymujemy raz wartość z_1 (która jest jedną z wartości λ) potem wartość z_2 (która jest znowu jedną z wartości λ) i t. d. Średnia arytmetyczna tych wartości, t. j. :

$$\frac{z_1 + z_2 + \dots + z_\mu}{\mu} = M,$$

gdy μ rośnie, dąży do wartości prawdopodobnej V , t. j. $\lim_{\mu \rightarrow \infty} (M - V)^2 = 0$.

Załóżmy w szczególności, że $r = 2$; dla ustalenia myśli przyjmijmy nadto, że stajemy w warunkach twierdzenia Bernoulli'ego, t. j. wyobrażamy sobie zdarzenie o prawdopodobieństwie p i zdarzenie przeciwne o prawdopodobieństwie q , tak że $p + q = 1$ (biorąc przykład zwykły, wyobrażamy sobie, że w urnie jest a kul białych i b kul czarnych, tak że $a:b = p:q$). Tu wartości możliwych jest dwie: zdarzenie zachodzi lub nie zachodzi, t. j. zachodzi zdarzenie przeciwne. Aby wyrazić zadanie w liczbach, musimy mieć wartości na λ_1 i λ_2 , t. j. ustalić, która liczba odnosi się do zdarzenia o prawdopodobieństwie p , która do zdarzenia przeciwnego. Gdyby szło np. o gracza, to liczba λ_1 odpowiadałaby stawce gracza, który wygrywa, gdy zachodzi zjawisko o prawdopodobieństwie q , i odwrotnie. Wartością tedy prawdopodobną jest $p\lambda_1 + q\lambda_2$. Dla prostoty przyjmijmy ją za zero, t. j. weźmy $\lambda_1 = q$, $\lambda_2 = -p$. Wtedy wzór twierdzenia poprzedzającego staje się wprost: $\lim_{\mu \rightarrow \infty} M^2 = 0$ i należy tylko

wyznaczyć M . Niechaj w μ próbach powtarza się n razy zdarzenie o prawdopodobieństwie p , a więc $\mu - n$ razy zdarzenie przeciwne. Ponieważ nadajemy wartość liczebną q każdemu zdarzeniu pierwszej kategorii, wartość liczebną $-p$ każdemu zdarzeniu drugiej, to średnia arytmetyczna otrzymanych wartości będzie:

$$M = \frac{nq - (\mu - n)p}{\mu} = \frac{n - \mu p}{\mu} = \frac{h}{\mu};$$

a więc średnia staje się tem, co nazywamy odchyleniem względnem i na tem właśnie polega twierdzenie Bernoulli'ego.

To rozważanie ustanawia związek pomiędzy teorią twierdzenia Bernoulli'ego a teorią błędów, którą podajemy w paragrafie następnym.

Nazywamy wartością prawdopodobną odchylenia lub kwadratu odchylenia sumę iloczynów wartości bezwzględnej każdego odchylenia lub jego kwadratu przez prawdopodobieństwo samego odchylenia. Te wartości prawdopodobne przedstawiają od powiednie całki:

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi\mu pq}} \int_0^{\infty} h e^{-\frac{h^2}{2\mu pq}} dh; \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}} \int_{-\infty}^{+\infty} h^2 e^{-\frac{h^2}{2\mu pq}} dh.$$

Wartość prawdopodobna kwadratu odchylenia po μ próbach wynosi μpq ; wartość prawdopodobna samego odchylenia wynosi:

$$\frac{\sqrt{2\mu pq}}{\sqrt{\pi}} = 0,79789 \sqrt{\mu pq},$$

wielkość tę nazywamy odchyleniem średnim, Wynika stąd :

Stosunek wartości prawdopodobnej kwadratu zboczenia do kwadratu wartości prawdopodobnej samego zboczenia bezwzględnego równa się $\pi:2$.

Jeżeli wartość powyższej całki uczynimy równą $\frac{1}{2}$, znajdziemy wartość odchylenia $0,4760363\sqrt{2\mu pq}$, o prawdopodobieństwie $\frac{1}{2}$; nazywamy je odchyleniem prawdopodobnem. Stosunek odchylenia prawdopodobnego do średniego jest stały i równy 0,8463. Odchylenia tak prawdopodobne jak i średnie, są proporcjonalne do pierwiastku kwadratowego z liczby prób. Prawdopodobieństwo, aby w μ próbach odchylenie było mniejsze od a , wyraża się całką określoną, której granicą niższą jest zero, wyższą zaś zależy od $\frac{a}{\sqrt{\mu}}$; jeżeli granicę wyższą oznaczymy

przez t , otrzymamy całkę, którą Gauss oznacza symbolem $\theta(t)$. Jest przeto niezbędnem utworzenie tablicy wartości tej całki określonej, tak, aby można było dla danych wartości a i μ obliczać prawdopodobieństwo. Dajemy tę tablicę na końcu roz-

działu. Jeżeli powiększamy $\frac{a}{\sqrt{\mu}}$, to wartość całki szybko dąży do jedności.

Prawo wielkich liczb Poissona (Comptes rendus 1835) jest próbą uogólnienia prawa Bernoulli'ego w przypadku, gdy prawdopodobieństwo p w ciągu prób jest zmiennem.

§ 3.

Prawdopodobieństwo przyczyn. Teorya błędów.

Najważniejszym zagadnieniem w teorii prawdopodobieństwa jest zagadnienie teorii błędów lub metody najmniejszych kwadratów, utworzone przez Gaussa (Theoria motus 1809), jakkolwiek ślady tegoż znajdujemy już u Legendre'a (Nouv. méth. pour la déterm. des orbites des comètes Paryż 1806).

Jeżeli uskuteczniamy pomiary jednej i tej samej wielkości w tych samych warunkach, to można przyjąć zasadę, że najodpowiedniejszą wartością jest wartość t. z. średnia, która jest funkcją symetryczną wartości i ma tę własność, iż staje się równą k , gdy wszystkie wartości uczynimy równymi k . Średnich jest nieskończenie wiele; najprostszą z nich jest średnia arytmetyczna, t. j. stosunek sumy wielkości do ich liczby. Gauss przyjął postulat następujący:

Jeżeli uskuteczniamy pomiary jednej i tej samej wielkości w tych samych warunkach, to wartością najprawdopodobniejszą mierzonej wielkości jest średnia arytmetyczna wartości, otrzymanych z pomiarów.

Niektórzy matematycy starali się udowodnić postulat Gaussa, przyjmując inne postulaty bardziej bezpośrednie, lecz nie zdaje się, by te różne dowody (Encke, Schiaparelli it.d.) były wolne od zarzutów; zresztą nie twierdzimy bynajmniej, że postulat powyższy należy przyjąć za matematycznie pewny. Patrz

np. dyskusye o tym przedmiocie w najnowszych traktatach Bertranda i Poincarégo oraz uwagi, zawarte w cytowanych niżej rozprawach Wł. Gosiewskiego i w pracy Czubera. Niektórzy (jak Bessel inni) usiłowali uzasadnić doświadczalnie zasadę Gaussa.

Godnem jest uwagi, że jeżeli założymy, iż błędy obserwacyi są dostatecznie małe, to wszelka średnia da zawsze wartość, zawartą pomiędzy granicami obserwacyi, a wartości wszystkich średnich nie wiele wzajemnie się różnią.

Średnia arytmetyczna ma własność osobliwą: Jeżeli $x_1, x_2, \dots, x_\mu$ są wartości, otrzymane z μ pomiarów i jeżeli $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_\mu$ oznaczają błędy, t. j. różnice pomiędzy temi wartościami a średnią $x = \frac{1}{\mu} (x_1 + x_2 + \dots + x_\mu)$, to suma kwadratów błędów jest minimum. Jeżeli zamiast x weźmiemy inną jakąkolwiek liczbę, to suma będzie miała zawsze wartość większą. Ta własność charakteryzuje średnią arytmetyczną.

Jeżeli przyjmiemy zasadę średniej arytmetycznej, t. j. że ona przedstawia wartość najprawdopodobniejszą wartości prawdziwej wielkości mierzonej, to znajdziemy, iż prawdopodobieństwo, aby różnica pomiędzy tą wartością a wartością prawdziwą wielkości zawierała się pomiędzy h_0 i h_1 , wyraża się przez całkę:

$$\frac{k}{\sqrt{\pi}} \int_{h_0}^{h_1} e^{-k^2 h^2} dh,$$

gdzie k jest pewną stałą. Podobnież wartość całki

$$\frac{2k}{\sqrt{\pi}} \int_0^\alpha e^{-k^2 h^2} dh = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{k\alpha} e^{-t^2} dt = \theta(k, \alpha)$$

wyraża prawdopodobieństwo, że ta sama różnica (t. j. błąd, który popełniamy, przyjmując wartość średnią arytmetyczną), jest co do wartości bezwzględnej mniejsza od α .

Prawo, przedstawione przez ten wzór, nazywa się prawem błędów. Gdybyśmy za wartość najprawdopodobniejszą przyjęli wartość różną od średniej arytmetycznej, mielibyśmy inne prawo błędów.

W teoryi błędów znajduje tedy, jak widzimy, zastosowanie funkcyi θ , o której była mowa w § poprzedzającym.

Błędem prawdopodobnym jest ten, którego prawdopodobieństwo jest $\frac{1}{2}$.

Stała k jest odwrotnie proporcjonalna do błędu prawdopodobnego λ , jest mianowicie $k\lambda = 0,476936 \dots$. Stała k nazywa się zwykle miarą dokładności obserwacyi. Dokładność jest wprost proporcjonalna do pierwiastku kwadratowego z liczby obserwacyj.

Po ustanowieniu prawa błędów, określamy, podobnie jak w §§ 1 i 2, wartość prawdopodobną błędu jako sumę iloczynu wszystkich możliwych wartości błędów przez odpowiednie prawdopodobieństwo; wartość tę prawdopodobną błędu (której nie należy mieszać z błędem prawdopodobnym λ) przedstawia całka:

$$\frac{2k}{V\pi} \int_0^{\infty} h e^{-k^2 h^2} dh = \frac{1}{k V \pi},$$

a wartości prawdopodobne kwadratu, sześcianu i t. p. błędu przedstawiają odpowiednio całki:

$$\frac{2k}{V\pi} \int_0^{\infty} h^2 e^{-k^2 h^2} dh = \frac{1}{2k^2}; \quad \frac{2k}{V\pi} \int_0^{\infty} h^3 e^{-k^2 h^2} dh = \frac{1}{k^3 V \pi};$$

$$\frac{2k}{V\pi} \int_0^{\infty} h^4 e^{-k^2 h^2} dh = \frac{3}{4k^4}, \quad \dots$$

Wzory te są bardzo ważne, albowiem przy ich pomocy oraz przy pomocy twierdzenia o średniej, podanego w § poprzedzającym, możemy obliczać wartość k i równocześnie sprawdzać dokład-

ność obserwacyj. W samej rzeczy, jeżeli przypomnimy sobie, że przy wielkiej liczbie μ prób średnia otrzymanych wartości dąży do wartości prawdopodobnej i jeżeli przez s_1, s_2, s_3, s_4 oznaczymy odpowiednio sumę wartości bezwzględnych błędów $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_\mu$, ich kwadratów, sześciątów i potęg czwartych, otrzymamy wzory przybliżone:

$$\frac{s_1}{\mu} = \frac{1}{k\sqrt{\pi}}, \quad \frac{s_2}{\mu} = \frac{1}{2k^2}, \quad \frac{s_3}{\mu} = \frac{1}{k^3\sqrt{\pi}}, \quad \frac{s_4}{\mu} = \frac{3}{4k^4},$$

które mogą służyć do wyznaczenia liczby k i do wzajemnej kontroli. Z wzorów tych otrzymują się następujące:

$$\frac{\frac{s_2}{n}}{\left(\frac{s_1}{n}\right)^2} = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\frac{s_3}{n}}{\left(\frac{s_1}{n}\right)^3} = \pi, \quad \frac{\frac{s_4}{n}}{\left(\frac{s_1}{n}\right)^4} = \frac{3\pi^2}{4},$$

które doświadczalnie winny sprawdzać się dokładnie. Jeżeli tedy przy danych obserwacjach nie spełniają się, to pozostawiają słuszną wątpliwość co do czynionych obserwacyj i ich wyników. Pierwszy z tych wzorów wyraża twierdzenie następujące: Stosunek średniej kwadratów błędów do kwadratu ich średniej dąży przy wzrastaniu liczby obserwacji do połowy liczby π .

Osobliwym jest fakt, że podobne prawo zdaje się rządzić zachodzeniem zdarzeń, których nie można uważać za przypadkowe. Tak np. pomiędzy 10000 logarytmami tablic o 10 cyfrach dziesiętnych, znaleziono, że siódma cyfra dziesiętna jest zerem 990 razy, jednostka 997 razy, dwójka 993, czwórka 1012 i t. p. Jeżeli do tych liczb zastosujemy w pewien sposób pierwszy z powyższych wzorów znajdziemy 1, 561..., t. j. liczbę bardzo bliską liczby $\frac{\pi}{2} = 1, 570\dots$. Przykład ten podaje Bertrand (Probab. Paryż 189).

Podamy jeszcze jedno ważne twierdzenie:

Uskuteczniamy pewien pomiar, dzielimy go na r części i zmierzmy każdą z nich, uwzględniając odpowiednie poprawki, następ-

nie dodajemy do siebie wyniki. Jest oczywiste, że im większe będzie r , tem mniejsza będzie dokładność miary całkowitej; zachodzi tu twierdzenie, przewidziane przez Fouriera.

Dokładność pomiaru całkowitego, złożonego z r pomiarów cząstkowych, jest odwrotnie proporcjonalna do pierwiastka kwadratowego liczby r .

Tablica wartości całki $\theta(t)$ Gaussa.

t	$\theta(t)$	t	$\theta(t)$
0,0	0,0000000	2,0	0,9953223
0,1	0,1124630	2,1	0,9970205
0,2	0,2227025	2,2	0,9981372
0,3	0,3286267	2,3	0,9988568
0,4	0,4283922	2,4	0,9993115
0,5	0,5204999	2,5	0,9995930
0,6	0,6038531	2,6	0,9997640
0,7	0,6778010	2,7	0,9999657
0,8	0,7421010	2,8	0,9999250
0,9	0,7969082	2,9	0,9999589
1,0	0,842708	3,0	0,9999779
1,1	0,8802050	3,1	0,9999884
1,2	0,9103140	3,2	0,9999940
1,3	0,9340080	3,3	0,9999969
1,4	0,9522851	3,4	0,9999985
1,5	0,9661052	3,5	0,99999925691
1,6	0,9763484	3,6	0,99999964414
1,7	0,9837904	3,7	0,99999983285
1,8	0,9890905	3,8	0,99999992200
1,9	0,9927904	3,9	0,99999996522
		4,0	0,99999998459

K ä m p f e (Phil. Stud. IX, 1893) ułożył tablicę czterocyfrową, postępującą od tysięcznej do tysięcznej części ilości t w przedziale od 0.000 do 1.509.

Zagadnieniami, należącemi do rachunku prawdopodobieństwa, zajmowali się pierwsi: B. P a s c a l, F e r m a t, H u y g e n s, M o i v r e, D a n i e l, J a n, M i k o ł a j i J a k ó b B e r n o u l l i'owie, E u l e r, L a g r a n g e. Najważniejszym traktatem systematycznym o teorii analitycznej prawdopodobieństwa jest dzieło L a p l a c e'a: *Traité analytique du calcul des probabilités* (Paryż 1812, 1814, 1820, 1847); w nim zebrał autor wszystkie badania dawniejsze własne i innych matematyków. Prawie równocześnie rachunek prawdopodobieństwa uczynił postęp w innym kierunku, dzięki G a u s s o w i (*Theoria motus* 1809, *Theoria combinationis observationum* i t. d., Tow. Getyngskie 1821—1826 i t. d.), który utworzył teorię najmniejszych kwadratów; teoria ta szybko przeniosła się na pole praktycznej i uczyniła tam znaczne postępy. Istnieje bardzo wiele rozpraw L a p l a c e'a, C a u c h y'ego, F o u r i e r a, E n c k e g o, B e s s e l a, B i e n a y m e'go, P o i s s o n a, P u i s s a n t a, C z e b y s z e w a i innych z teorii prawdopodobieństwa i najmniejszych kwadratów. Po wskazówki o tych pracach odsyłamy czytelnika do książki T o d h u n t e r a „*A history of the mathematical theory of the probability*“ (Londyn 1865), albo do listy, załączonej na końcu traktatu L a u r e n t a, Paryż 1873, wreszcie do najnowszej pracy E. C z u b e r a: „*Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer Anwendungen*“, ogłoszonej w VII tomie Sprawozdań niemieckiego Stowarzyszenia matematyków (Berlin 1899). Z traktatów systematycznych o rachunku prawdopodobieństwa i najmniejszych kwadratów, prócz klasycznego traktatu L a p l a c e'a, wymienić należy dzieła L a c r o i x'a (1806), P o i s s o n a (1837), G a l l o w a y a (Edynburg 1832), J a h n a (Lipsk 1839), Q u e t e l e t a (Bruksela 1845, 1853), L a u r e n t a (Paryż 1873), F e r r e r o (O najmniejszych kwadratach, Florency 1876), B e r t r a n d a (Paryż 1889), P o i n c a r é g o (Paryż 1896). Z rozpraw o teorii błędów i metodzie najmniejszych kwadratów wymieniamy nadto artykuły oryginalne Wł. G o s i e w s k i e g o w tomach II, III, V, IX „*Prac matem.-fizycz.*“ O metodzie najnowszych kwadratów patrz pracę Br. G u s t a w i c z a „*Rachunek wyrównania błędów etc.*“ (Kraków 1896).

ROZDZIAŁ XXIII.

NARZĘDZIA I PRZYRZĄDY ANALITYCZNE.

W rozdziale tym pragniemy podać niektóre wiadomości o różnych narzędziach, wymyślonych do wykonywania działań analitycznych sposobem mechanicznym. Nie możemy opisywać ich tu szczegółowo i dla tego ograniczamy się na krótkim opisie niektórych tylko; o integracji powiemy nieco szczegółowiej.

Podzielimy ten rozdział na trzy części: w pierwszej podajemy zarys wiadomości o narzędziach, służących do rachunków elementarnych, i dla tego nazwanych narzędziami arytmetycznymi; w drugiej mówimy o narzędziach, służących do rachunków, które nazwać możemy przeważnie algebraicznymi, np. szukanie pierwiastków rzeczywistych równania i układu równań; wreszcie w części trzeciej pomówimy o narzędziach rachunku całkowego, t. j. o narzędziach, służących do obliczania całek określonych lub do kreślenia krzywej całkowej (całki nieokreślonej).

§ 1.

Narzędzia arytmetyczne. Działania elementarne. Abaki

Dwie są kategorie narzędzi arytmetycznych. Do jednej zaliczamy narzędzia, dające rezultaty ścisłe działań arytmetycznych.

tycznych zasadniczych; do drugiej narzędzia—zwane narzędziami o skali logarytmowej—dające rezultaty z przybliżeniem w praktyce wystarczającym.

Narzędzia kategorii pierwszej bywają dwóch rodzajów. W jednych otrzymujemy wyniki, kombinując ze sobą rozmaitemi sposobami opatrzone podziałami liniały, których ruchy są wzajem niezależne. W innych narzędziach części składowe są tak z sobą połączone, iż tworzą machinę we właściwym znaczeniu tego wyrazu, tak że ruch jednych części określa już w sposób jedyny ruch pozostałych.

Neper w r. 1617 zbudował po raz pierwszy przybór pierwszego rodzaju i opisał go w swoim dziele: „*Rhabdologia sive numerationis per virgulas libri duo*“. Jest to w zasadzie tablica pytagorasowa, na dziesięć podzielona kolumn, złożona mianowicie z dziesięciu ruchomych liniałów (listewek), z wypisanemi na nich liczbami tablicy pytagorasowej i przysuwanych do siebie po odpowiednim przestawieniu. Forma narzędzia usprawiedliwia nazwę *laseczek Nepera*. Zadanie ich polega na otrzymywaniu iloczynów i ilorazów liczb wielocyfrowych przy pomocy samych dodawań i odejmowań.

Pierwszą modyfikację tego narzędzia wykonał Gaspar Schott, umieściwszy listewki z liczbami na walcach ruchomych około ich osi. Inne zmiany i ulepszenia zawdzięczamy: Petittowi (1678), Poetiusowi (1728), Méanowi (1731), Roussainowi (1738, *Hist. de l'Acad.*), Prahlowi (1789), i Rothowi (1841). Najnowszego i najważniejszego udoskonalenia w najnowszych czasach dokonali Genaille i Lucas (1885).

Pierwsze narzędzie, należące do kategorii arytmetycznych właściwych, w których za pomocą ruchów mechanicznych odpowiednio skombinowanych wykonywać można cztery działania arytmetyczne, zbudował po wielu zmudnych usiłowaniach Błażej Pascal w r. 1642; następnie Leibniz w r. 1673 przedstawił inne podobne narzędzie Towarzystwu królewskiemu w Londynie i wkrótce potem Akademii paryskiej. Wspominamy dalej o machinie Rotha i o arytmetrze Thoma-

sa (1820), praktycznym i doskonałym. Pomiedzy narzędziami rachunkowymi bardziej złożonemi i pomysłowemi wymienić należy narzędzie Scheutza, urzeczywistniające pomysł Babbage'a; było ono wystawione w Paryżu w r. 1855. Czebyszew zbudował inną maszynę taką o ruchu ciągłym.

Opis szczegółowy wszystkich tych narzędzi znaleźć można w dziele d'Ocagne'a: „Le calcul simplifié etc.“ (Paryż 1894). Opis innych narzędzi rachunkowych, przedstawionych na zjeździe Stowarzyszenia niemieckiego matematyków w r. 1893 w Monachium, znaleźć można w dziele W. Dycka „Katalog mathematischer Modelle, Apparate und Instrumente“ (Monachium 1892, -1893). Porówn. art. Mehmkego: „Przyczynek do historii maszyn rachunkowych“ (Prace mat.-fiz. t. VI, 1895).

Przechodząc do narzędzi kategorii drugiej powiemy przede wszystkim, że typem ich jest t. zw. linijka rachunkowa o podziałce logarytmowej, pomysłana po raz pierwszy przez Edmunda Günthera w r. 1624, wkrótce po wynalezieniu logarytmów. Narzędzie to ulegało kolejno znacznym modyfikacyom: przez umieszczenie skali, która w narzędziu pierwotnem była prosto-liniową, na kole (Boucher. Wronski), na elipsie (Fuller) i t. d., lub przez zagięcie samej skali i zmniejszenie tym sposobem rozmiarów narzędzia (Mannheim). Stopień dokładności rachunków przy pomocy tych linijek zależy głównie od dokładności ich konstrukcyi, gdyż zasadą w nich jest, że linijka ruchoma przesuwana się po linijce stałej, na której wypisane są tak zwane skale logarytmowe, t. j. podziały odpowiadające logarytmom liczb. Wprowadzenie logarytmów na linijce daje te same uproszczenia, co w rachunku zwykłym; mamy tu więc niejako narzędzie, które należy postawić obok poprzednio wspomnianego narzędzia Nepera, tylko że zamiast liczb mamy tu ich logarytmy. Prócz rachunków zwykłych możemy za pomocą linijki rozwiązywać też równania stopnia 2-go i 3-go.

Opis szczegółowy linijki rachunkowej znajdzie czytelnik w dziełach: Lalanne'a (Paryż 1851), Benoita (Paryż 1851) Elliota

(A treatise on the slide rule, London), G u y ' a (Paryż 1855), V o g l e r a (Anleitung zum Entwerfen graphischer Tateln etc., Berlin 1877), S e l l i (Regola calcolatore, 1886, przekład francuski Montefiorego-Leviego). Historię i klasyfikację różnych rodzajów linijek o podziałce logarytmowej podał A. F a v a r o (Ist. Veneto (5) V, 1879).

A b a k i e m lub tablicą graficzną nazywamy w ogóle narzędzie, służące już to do wykonywania rozmaitych rachunków elementarnych, już to do rozwiązywania równań, do rachunków trygonometrycznych i t. p. Abak jest w istocie rzeczy tablicą, na której oznaczone są punkty proste i krzywe, z odpowiedniami liczbami; jeżeli mamy dane wielkości pewnych zmiennych i połączymy na tablicy prostymi punkty, tym wartościom odpowiadające lub punkty spotkania prostych z nakreślonymi krzywymi, otrzymamy wartość szukanej niewiadomej. Już zwyczajna tablica mnożenia jest jednym z najprostszych abaków. Teorya konstrukcyi takich abaków stanowi naukę, zwaną n o m o g r a f i ą.

Pierwsze prace, odnoszące się do tego przedmiotu, zawdzięczamy L a l a n n e ' o w i (1843), M a s s a u ' o w i (1884), L a l l e m a n d o w i (1886), a rozwinięcie i udoskonalenie d' O c a g n e ' o w i, którego najnowszy traktat o tym przedmiocie wyszedł świeżo p. t.: „*Traité de nomographie* (Paryż 1899). Tamże podana jest dawniejsza i najnowsza literatura tego przedmiotu.

Za pomocą metody nomograficznej rozwiązywać można równania stopnia 3-go i 4-go, zagadnienia trygonometryczne i t. p., nie mówiąc już o ważnych zastosowaniach tej metody do zagadnień technicznych.

§ 2.

Przyrządy algebraiczne. Rozwiązywanie równań.

Do rozwiązywania równań, oprócz wspomnianych już abaków, istnieje bardzo wiele przyrządów d'O c a g n e'a, M e h m k e g o i innych, których opis znajduje się we wspomnianym wyżej „Katalogu“ D y c k a. Możemy też rozwiązywać równanie stopnia 2-go i 3-go, a nawet równania trójmienne stopnia 5-go za pomocą linijki rachunkowej. I n t e g r a f, o którym mówimy w § następnym, daje metodę graficznego rozwiązywania równań przy pomocy całek.

Prócz tego zbudowano narzędzia mechaniczne do rozwiązywania układu równań liniowych. Opis jednego z nich, pomyślnego przez V e l t m a n n a, znajdujesię w „Katalogu“ D y c k a; inne zbudował W. T h o m s o n (lord K e l v i n: por. Proc. of Roy. Soc. XXVIII, 1878; Natural. Philosophy, 1886, I, str. 482). Narzędzie V e l t m a n n a zbudowane jest na zasadach hydrostatyki, a mianowicie na zasadzie naczyń połączonych; składa się z drażków, stykających się z naczyniami napełnionemi cieczą; wszystko zaś mieści się w naczyniu napełnionem wodą. Każdy drażek odpowiada równaniu liniowemu, a walec na każdym drażku odpowiada jednej niewiadomej. Z wartości słupów cieczy otrzymujemy wartości przybliżone niewiadomych, a powtarzając działania, możemy także obliczać poprawki. Przyrząd T h o m s o n a nie zawiera cieczy i składa się z drażków kółek i nici nawiniętych na kółka.

§ 3.

Narzędzia całkowe. Integrafy. Analizatory.

Do narzędzi całkowych należą następujące:

1. Narzędzia do mierzenia pól krzywych płaskich, a więc dające wartość określonej całki funkcji, graficznie wykreślonej

Narzędzia takie nazywają się w ogóle *planimetrami*. Jest ich wiele rodzajów; najlepiej znanym jest *planimetr Amslera* (pierwsza konstrukcja w 1854).

2. Narzędzia, służące do kreślenia krzywej całkowej, a które dają to, co daje rachunek całki nieokreślonej funkcji, graficznie nakreślonej. Są to *integratory* lub *integratory*; mogą one służyć do tego samego celu co i planimetry, i do wielu innych celów.

3. Narzędzia, służące do całkowania pewnych typów równań różniczkowych.

4. Narzędzia, służące do wyznaczenia długości łuku linii krzywej (krzywomierze). Takie narzędzia buduje *Coradi* w Zurychu.

5. *Analizatory harmoniczne*, które są w istocie rzeczy integratorami do obliczania całek określonych, występujących jako współczynniki szeregu *Fouriera*, a mianowicie całek:

$$\int_0^{2\pi} \cos nt f(t) dt, \quad \int_0^{2\pi} \sin nt \cdot f(t) dt.$$

Do narzędzi tego rodzaju należą narzędzia *Thomsona*, *Henriciego*, *Sharpa*; wiadomość o nich podaje artykuł *Henriciego* w cytowanej książce *Dycka*.

Zajmiemy się tu tylko opisem integratorów. Pierwsze narzędzia tego rodzaju zawdzięczamy *Žmurce* (1861), *Thomsonowi* (1876). *Cayley'owi* (1877); najbardziej wszakże godnym uwagi jest *integrator Abdanki-Abakanowicza* (1882, pierwszy model wykonano w 1878; patrz Sprawozdania Akademii krakowskiej, marzec 1880, *Comptes rend.* 21 lutego i 7 marca 1881), którego wykonanie do znacznej doskonałości podniósł *G. Coradi* w Zurychu. O wynalazku swoim napisał *Abakanowicz* dzieło p. t. „*Les intégrateurs et la courbe intégrale*“, Paryż 1886 (przekład niemiecki *Bitterli'ego*, Lipsk 1889).

Zasada, na której opiera się to narzędzie, jest najprostsza. Wyobraźmy sobie nakreśloną krzywą, której równaniem jest

równoległa do boku NN , druga przechodzi przez punkt, w którym znajduje się ostrze F wtedy, gdy wózek ruchomy GG znajduje się w swem położeniu początkowym (położenie to otrzymujemy łatwo, przez przytwierdzenie śrubki w otworze oznaczonym na boku A). Wózek GG może przesuwać się wzdłuż boku NN , a ruch ten, skombinowany z ruchem całego narzędzia w kierunku prostopadłym, sprawia, że ostrze f może opisywać ślad krzywej dowolnej (różniczkowej); stąd nazwa ostrza i wózka różniczkowego. Przy pomocy pewnego systemu połączeń stawowych sprawiamy, że sztabka F jest w każdym położeniu równoległa do płaszczyzny krążka R i z drugiej strony równoległa do przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego, o którym wyżej była mowa. Stąd wynika, że w każdym położeniu płaszczyzna pionowa krążka R jest zawsze równoległa do tej przeciwprostokątnej; z drugiej strony krążek R ściśle przywiera do papieru rysunkowego pod naciskiem ciężaru wózka VV (wózek całkowego). Ten krążek tedy poruszać się będzie we własnej płaszczyźnie i przenosić będzie wraz z sobą wzdłuż boku NN' wózek całkowity, a z nim ołówek Z i nie będzie zmieniał kierunku swego ruchu, o ile nie zmienia go sztabka F ; ta zaś nie może go zmieniać, jeżeli wózek różniczkowy nie schodzi z boku NN . Z wózkiem całkowym połączony jest noniusz, przesuwany się po skali $N'N'$, podzielonej na centymetry i milimetry, tak że w położeniu początkowym zero noniusza schodzi się z zerem podziałki, a po przebieżeniu łuku krzywej przez ostrze F , możemy odczytać liczbę, wyrażającą wielkość pola pomiędzy tym łukiem osią x i dwiema skrajnemi rzędnymi. W ten sposób ołówek Z opisuje krzywą całkową krzywej danej. Tu własność pozwala nam na wielokrotne zastosowania narzędzia.

Ze sztabką L jest złączony czop stały, około którego obraca się sztabka ruchoma F , odległość pomiędzy tym czopem a środkiem boku A przedstawia jednostkę miary narzędzia, a prosta, łącząca dwa takie punkty stałe, jest w każdym położeniu podstawą trójkąta prostokątnego, o którym mówiliśmy. Narzędzie jest zbudowane w ten sposób, że ten czop stały można umieszczać w różnych miejscach, jeżeli chcemy zmie-

niać jednostkę miary narzędzia od minimum 7 cm. do maximum $12\frac{1}{2}$ cm.

Liczby, które otrzymujemy na skali N' , należy mnożyć przez jednostkę miary narzędzia. Na skali mamy centymetry, milimetry i dziesiątą część milimetra; jeżeli więc miara narzędzia jest 10 cm., to otrzymamy wyniki w centymetrach kwadratowych i milimetrach kwadratowych. Jeżeli na skali N' czytamy np. 7,26 cm., to mnożąc przez 10, mamy 72,6 i otrzymujemy 72 cm. kw. i 60 mm. kw.

Różnica modelu większego od mniejszego jest między innymi ta, że ostrze różniczkowe i ostrze całkowite znajdują się na jednym boku, a nie na bokach przeciwległych.

Związki wzajemne osobliwości krzywej całkowitej i krzywej różniczkowej są następujące: jeżeli krzywa różniczkowa ma maximum lub minimum, to krzywa całkowita ma punkt przegięcia; jeżeli krzywa różniczkowa spotyka oś x , to krzywa całkowita ma maximum lub minimum; jeżeli krzywa różniczkowa zmienia nagle kierunek, to krzywa całkowita ma ostrze. Aby otrzymać styczną do krzywej całkowitej w punkcie danym, dość nadać ostrzu różniczkowemu ruch po prostej równoległej do osi x , t. j. puścić ręką wózek i pozwolić narzędziu przesuwając się na jego kółkach. Jeżeli wózek różniczkowy przebiega prostą prostopadłą do osi x , t. j. przesuwając się po narzędziu, które samo pozostaje nieruchomem, wtedy ostrze całkowite pozostaje stałe.

Pożytki narzędzia tego są następujące: 1° Służy ono do mierzenia pól, t. j. spełnia usługi planimetru; ślad krzywej należy wtedy opisywać w zwrocie ruchu wskazówek zegara. 2° Może służyć do opisywania ruchem ciągłym paraboli; dość bowiem, by ostrze różniczkowe przebiegało jakąkolwiek prostą. Stosownie do nachylenia prostej, otrzymujemy parabole o różnych parametrach. 3° Można dzielić dane pole zamknięte na części proporcjonalne do wielkości danych przy pomocy prostej danego kierunku; dość w tym celu obrócić ten kierunek za oś y , zbudować krzywą całkowitą, odpowiadającą całkowitemu obwodowi krzywej, podzielić na części proporcjo-

cyonalne odległość pomiędzy punktem początkowym i punktem końcowym krzywej (te punkty będą na jednej i tej samej rzędnej) i powtórzyć działanie tak, aby punkt początkowy krzywej całkowej był jednym z punktów podziału. Nowa krzywa całkową przetnie poprzednią w punkcie, którego odcięta będzie odciętą prostej równoległej do osi x i przecinającej pole w sposób żądany. 4^o Można obliczać momenty statyczne pola względem prostej danej. Dość w tym celu wybrać oś g równoległą do tej prostej, jednemu z punktów przecięcia prostej i obwodu krzywej pozwolić opisać krzywą całą i wrócić do tego punktu; otrzymamy krzywą całkową, poczem ostrzem różniczkowym opisać tę ostatnią krzywą i otrzymać nową krzywą całkową. Odległość pomiędzy punktem początkowym i punktem końcowym tej ostatniej, dająca się odczytać na skali, stanowi moment szukany. Liczbę milimetrów i dziesiętnych części milimetra, odczytywanych na skali, należy oczywiście pomnożyć przez jednostkę miary narzędzia. Gdyby prosta nie przecinała pola, to dość byłoby połączyć jakąkolwiek linią jeden z jej punktów z punktem obwodu krzywej, przesunąć ostrze różniczkowe najprzód wzdłuż tej linii, następnie wzdłuż obwodu pola (w zwrocie ruchu wskazówek zegara) i wreszcie znów po linii w zwrocie przeciwnym. 5^o Powtarzając wskazane działania na ostatniej krzywej, otrzymujemy wartość momentu drugiego rzędu pola względem prostej; w tenże sposób możemy otrzymywać momenty różnych rzędów. 6^o Przyjmijmy, że krzywa całkową obwodu pola danego została opisana przez punkt, położony najbardziej na lewo na obwodzie, i że punkt początkowy krzywej całkowej leży na osi x ; całkujemy tę krzywą całkową w przypuszczeniu, że punkt początkowy nowej krzywej jest na osi x . Skończywszy to całkowanie, puszcmy ręką wózek różniczkowy i pozwólmy narzędziu przesunąć się na kółkach; wtedy krzywa całkową opisać będzie styczną do krzywej w punkcie końcowym. Styczna ta przetnie oś x w punkcie, którego odcięta równa się odciętej prostej równoległej osi y i przechodzi przez środek ciężkości pola danego; mamy tym sposobem, powtarzając działania przeciwnym kierunku osi, sposób znajdowania środka

ciężkości pola. 7^o Możemy wykreślać graficznie pierwiastki równania algebraicznego $f(x)=0$. Połóżmy w tym celu $y=f(x)$ i utwórzmy pochodne kolejne $y'=f'(x)$, $y''=f''(x)$, póki nie dojdziemy do ilości stałej. Nakreślmy następnie prostą równoległą do osi i mającą rzędną równą tej stałej i całkujemy; otrzymamy prostą, która, przy odpowiednim doborze osi, może przedstawiać przedostatnią pochodną. Całkujemy powtórnie, znajdziemy pochodną poprzedzającą i tak dalej postępując, wykreslimy graficznie krzywą $y=f(x)$. Pierwiastki równania $f(x)=0$ odpowiadać będą punktom spotkania tej krzywej z osią x ; będą nimi mianowicie odległości tych punktów od początku, podzielone przez jednostkę miary narzędzia. Jednostki, które obrać należy do kreslenia prostej równoległej do osi x i inne kolejne stałe całkowania są niezależne od jednostki miary narzędzia i mogą być obrane dowolnie. Uwaga ta jest ważna, gdyż mogłoby się zdarzyć, że chcąc utrzymać jedną i tę samą jednostkę miary, moglibyśmy nie znaleźć miejsca w obszarze działań narzędzia. 8^o Możemy rozwiązać graficznie sławne zagadnienia o kwadraturze koła i o podwojeniu sześcianu. Dla rozwiązania pierwszego zadania dość wykreślić graficznie długość π , t. j. krzywą całkową koła o promieniu 1 (jedność miary narzędzia); otrzymamy wtedy krzywą zygzatową, a odległość pomiędzy dwoma kolejnymi ostrzami krzywej daje nam π . Dla rozwiązania drugiego zadania dość zcałkować dwa razy równanie $y=6x$; otrzymamy w ten sposób krzywą $y=x^3$; odcięta tej krzywej, odpowiadająca rzędnej równej 2 (t. j. dwom jednostkom miary niezależnej od jednostki miary narzędzia), przedstawia $\sqrt[3]{2}$ (w jednostkach miary narzędzia). Można też rozwiązać graficznie zagadnienie o podziale kąta na trzy równe części; szczegóły pomijamy. 9^o Prócz tego integral znajduje liczne zastosowania w mechanice, w teorii krzywej sprężystej, w nauce o elektryczności i t. d. Szczegóły znaleźć można w cytowanym dziele A b a k a n ó w i c z a.

Biblioteka
matematyczno-fizyczna
⇒ ANTONIEGO WILKA. ⇐
Liczba:

DOPEŁNIENIA I SPROSTOWANIA.

ROZDZIAŁ I.

- § 1, str. 1, w wierszu 15-ym od dołu powinno być *z a w s z e*, zam.
z a w s z z e.
- § 2, str. 7. Tytuł dzieła *W e s s e l a* jest; „Essai sur la représentation analytique de la direction“.
- § 3, str. 9. Do literatury w tym paragrafie podanej dołączyć należy: *S t u d y* (Leipz. Ber. 1881); *S c h e f f e r s*, *M o l l i e n* (Math. Ann. 1891, 1893); *Encyclopädie der math. Wissensch.* 1899, artykuł *Study'ego*: „Theorie der gemeinen und höheren complexen Zahlen“.
- § 5, str. 13, wiersz 18 od dołu, powinno być *l o g a r y t m o w e*, zam. *l a g o r y t m o w e*.

ROZDZIAŁ II.

- § 1, str. 34. Twierdzenie tu podane udowodnił *H ö l d e r* (Math. Ann. XXXIV, 1889).
- § 6. Do literatury tego przedmiotu należy dołączyć: „Algebrę“ *W e b e r a* (wyd. 2-gie 1898, 1899), w której tomie 2-gim wyłożona jest ogólna teoria grup; nowsze prace *H o y e r a* (Math.

Ann. 50; 51, 52); dzieło o teorii grup Burnside'a (Londyn 1897) oraz prace amerykańskich matematyków Colego i Millera; (Quarterly Journ., Bull. of Am. Soc. i. d.), wreszcie najnowsze prace Frobeniusa w Sprawozdaniach Akademii berlińskiej.

ROZDZIAŁ III.

- § 2, str. 53. Co do literatury ostatniego równania na tej stronie patrz Clebsch - Lindemann „Vorlesungen über Geometrie“ II, s. 168.
- § 3, str. 59. Do literatury dołączamy: Frobenius (Crelle LXXIV), Voss (Bayr. Akad. 1890), Stieltjes (Acta mat. VI).
- § 5, str. 63. Do literatury jakobianów: Jacobi (Crelle XXVII), Neumann (Math. Ann. I).
- § 6. Wyznacznikami rzędu nieskończonego zajmowali się: Hill, Poincaré i Helge v. Koch; prace tego ostatniego ogłoszone w Acta mat. XV. XVI.

ROZDZIAŁ IV.

- § 5. Do literatury o ułamkach ciągłych należy dołączyć najnowsze prace Padégo (Journ. de math. (4), X, 1894, Comptes rendus 1899); porów. artykuł Pringsheima w Encyclopädie der math. Wissenschaften I, 2 (1899).

ROZDZIAŁ V.

- § 3, str. 96. Twierdzenia, w tym paragrafie podane, brzmieć powinny tak:

Spółczynniki równania odwrotnego stopnia parzystego, równooddalone od wyrazów skrajnych, są równe (i jednego znaku).

Jeżeli równanie odwrotne jest stopnia nieparzystego, wtedy współczynniki równooddalone od wyrazów skrajnych są albo równe i tego samego znaku, albo równe i znaku przeciwnego; wtedy równanie ma pierwiastek $x = -1$ w przypadku pierwszym, $x = +1$ w drugim. Podzieliwszy pierwszą stronę tego równania przez $x+1$ lub odp. przez $x-1$, sprowadzamy je do równania odwrotnego stopnia parzystego.

- § 3, str. 97. Do literatury tego przedmiotu należy dodać: podręczniki algebry: Webera, Netto (Lipsk 1898, 1899) oraz prace Kroneckera (Akad. Berl. 1853, 1856, 1879, Crelle, XCII).
- § 6, str. 107. O równaniach stopnia 3-go i 4-go patrz najnowszą pracę J. Sochockiego (Prace mat.-fiz. X, 1899—1900, oraz „Wiadomości matematyczne“ III, 1899).
- § 9, str. 113. Twierdzenie Budana przypisują także Jouriénowi (Analyse des équat. déterm., Paryż 1831), który stosował je w swoich wykładach przeł Budanem.
- § 12, str. 119. O teorii Galois'a patrz także „Algebrę“ Webera.

ROZDZIAŁ VI.

- § 2, str. 127. Co do twierdzenia o zmianie porządku brania pochodnych patrz prace Blancheta (Liouville VI, 1841), Lindelöfa (Acta Soc. Fen. VIII), Genocchi'ego (Akad. Turyńska IV, 1869), Schwarza (Abhandlungen t. II, s. 275), Peano (Math. Ann. 1890), Stolz'a (Grundzüge der Diff. und Int. Rechnung, Lipsk 1899), E. Pascala (Note critique).
- § 7, str. 142. Do literatury o maximum i minimum funkcyi należy dołączyć Genocchi-Peano (Differential und Integralrechn. Lipsk 1899, s. 177—189).

ROZDZIAŁ VII.

- § 4, str. 163. Tablice Bierens de Haana (zawierające 8339 wzorów) były drukowane poprzednio w r. 1858 w tomie IV

Pamiętników Akademii nauk w Amsterdamie. W r. 1862 tenże autor wydał dzieło; „Exposé de la théorie des transformations et des méthodes d'évaluation des intégrales définies. Do literatury dołączamy nadto: Meyer, Vorlesungen über die Theorie bestimmter Integrale (Lipsk 1871), K r o n e c k e r, Vorlesungen I, B r u n e l, art. w „Encyclopädie der math. Wissenschaften“ (Lipsk 1899).

§ 4, str. 166. Redukcyą całki eliptycznej do kombinacyi trzech całek zasadniczych zajmowali się: Legendre (Fonct. ellip. I, rozdz. 4 i 5) Richelot (Crelle XXXIV), Plana (tamże XXXIV).

§ 4, str. 106. Funkcyę p (wiersz 3) są funkcyami Weierstrasa.

Całki eliptyczne są szczególnym przypadkiem całek abelowych (p. Rozdz. XV). Charakterystyczne ich własności są następujące: Jeżeli zmienną niezależną przyjmiemy jako zespoloną, to całka gatunku 1-go nigdzie nie staje się nieskończoną; całka gatunku 2-go staje się nieskończoną algebraicznie; to jest granica stosunku jej do pewnej funkcyi algebraicznej nieskończonej w punkcie jest skończona; całka gatunku 3-go ma nieskończoność logarytmową, t. j. granica stosunku jej do logarytmu funkcyi algebraicznej nieskończonej w punkcie jest skończona.

Ważną własność całek eliptycznych wyraża twierdzenie o dodawaniu, stanowiące przypadek szczególny takiego twierdzenia dla całek abelowych.

Twierdzenie o dodawaniu dla całek gatunku 1-go brzmi:

$$\int_0^x \frac{dx}{V(1-x^2)(1-k^2z^2)} + \int_0^z \frac{dz}{V(1-z^2)(1-k^2z^2)} = \int_0^t \frac{dt}{V(1-t^2)(1-k^2t^2)},$$

gdy pomiędzy x, y, t zachodzi związek algebraiczny:

$$t = \frac{xV(1-z^2)(1-k^2z^2) + zV(1-x^2)(1-k^2x^2)}{1-k^2x^2z^2},$$

Twierdzenie o dodawaniu dla całek eliptycznych gatunku 2-go ustanowił Legendre (Fonct. ellipt. I); ma ono postać:

$$E(k, \varphi) + E(k, \psi) - E(k, \chi) = k^2 \sin \varphi \sin^2 \psi \sin \chi,$$

gdzie pomiędzy φ, ψ, χ zachodzi związek, który otrzymujemy z wyżej podanego, kładąc $x = \sin \varphi, z = \sin \psi, t = \sin \chi$.

I dla całek gatunku 3-go Legendre podał twierdzenie następujące ;

$$\begin{aligned} & \Pi(n, k, \varphi) + \Pi(n, k, \psi) - \Pi(n, k, \chi) \\ &= \int \frac{n}{(1+n)(k^2+n)} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin \varphi \sin \psi \sin \chi \sqrt{n(1+n)(k^2+n)}}{1-n \sin^2 \chi - n \sin \varphi \sin \psi \cos \chi \Delta \chi} \right), \end{aligned}$$

gdzie $\Delta \chi = \sqrt{1-k^2 \sin^2 \chi}$. Jeżeli pozostajemy w dziedzinie zmiennej rzeczywistej, to wzór ten musi być zmieniony, gdy n jest ujemne i mniejsze od jedności. Można wtedy otrzymać wzór, w którym po stronie prawej występuje wprost logarytm. Jeżeli zaś wprowadzamy liczby urojone, to wyrażamy arctg przez logarytm za pomocą wzoru

$$\omega = \frac{1}{2i} \log \frac{i - \omega}{i + \omega}.$$

Twierdzenie to jest właściwie tylko inną postacią twierdzenia o dodawaniu funkcji eliptycznych $\sin am, \cos am, \Delta am$ (patrz Rozdz. XVI) oraz twierdzenia o całkowaniu równania Eulera (patrz Rozdz. VIII, § 2).

Dla całek gatunku 1-go w postaci Weierstrassowej twierdzenie o dodawaniu ma postać;

$$\int_{\infty}^p \frac{dp}{\sqrt{4p^3 - g_2 p - g_3}} + \int_{\infty}^q \frac{dq}{\sqrt{4q^3 - g_2 q - g_3}} = \int_{\infty}^r \frac{dr}{\sqrt{4r^3 - g_2 r - g_3}},$$

gdy pomiędzy p, q, r zachodzi związek;

$$\begin{vmatrix} p & q & r \\ 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{4p^3 - g_2 p - g_3} & \sqrt{4q^3 - g_2 q - g_3} & \sqrt{4r^3 - g_2 r - g_3} \end{vmatrix} = 0.$$

Pierwsze badania nad tym przedmiotem zawdzięczamy Eulerowi (Novi. Comm. Petr. 1761, VI, VII); później ukazała się praca Lagrange'a (Misc. Taur. IV, 1766, 1769) i druga Eulera (Acad. Imp. 1778). Wymieniamy nadto: Richelot (Crelle XXIII,

XLIV), Liouville (Comptes rend. 1856), gdzie podana jest wytworna metoda całkowania równania różniczkowego eliptycznego; Schellbach (Crelle, LIV). Wiadomości historyczne podaje Genocchi (Bull. Boncompagni, III, 1870).

Wyrażenia $F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$, $F\left(k', \frac{\pi}{2}\right)$, gdzie $k' = \sqrt{1-k^2}$, gdy droga całkowania jest prostoliniowa, nazywają się całkami zupełnemi; Legendre oznaczał całki zupełne gatunku 1-go przez K , K' . Podobnie $E\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$, $E\left(k', \frac{\pi}{2}\right)$ nazywają się całkami zupełnemi gatunku 2-go i oznaczają się przez E i E' . Jest:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log \sin \varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi = \int_0^K \log \sin am \cdot v dv = \frac{1}{2} K \log \frac{1}{k} - \frac{\pi}{4} K',$$

$$\int_0^K \log \cos am v dv = K \log \sqrt{\frac{k'}{k}} - \frac{1}{4} \pi K',$$

$$\int_0^K \log \Delta am v dv = \frac{1}{2} K \log k'.$$

Przedmiotem tym zajmowali się: Roberts (Liouville (1), XIX, 1854, Schlöm. Ztschrif. II, 1857), Genocchi i Sylvester (Phil. Mag. 1860), Brioschi (Annali di mat. (1), III, 1860), Wangerin (Schlöm. Ztschrif. XXXIV).

Na rozwinięcie K i E podajemy wzory:

$$K = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 k^6 + \dots \right\},$$

$$E = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{k^2}{1} - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{k^4}{3} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \frac{k^6}{5} - \dots \right\},$$

Inne rozwinięcia, gdy K bliskie jedności, znajdujemy u Legendre'a (Mém. de Paris 1780, Fonct. ellipt. I) i Schlämleha (Zeitschrif. f. Math. und Phys. II, s. 49).

Pomiędzy K , K' , E , E' zachodzą związki:

$$\frac{\partial K}{\partial k} = -\frac{K}{k} + \frac{E}{kk'^2}, \quad \frac{\partial K'}{\partial k} = \frac{kK'}{k'^2} - \frac{E'}{kk'^2},$$

$$\frac{\partial E}{\partial k} = -\frac{k}{k'} + \frac{E}{k'}, \quad \frac{\partial E'}{\partial k} = \frac{kK'^2}{k'^2} - \frac{kE'}{k'^2},$$

$$KE' + K'E - KK'^2 = \frac{\pi}{2} \text{ (związek Legendre'a).}$$

Teorię zupełną ilości K , K' , E , E' znajdujemy u *Glais-hora* (Quarterly Journ. 1885); porówn. Rozdz. XVI,

Całki gatunku 2-go i 3-go dają się wyrazić przez funkcyę ϑ lub σ , jeżeli całkę gatunku 1-go przyjmujemy za argument. Jeżeli położymy:

$$u = \int_{\infty}^p \frac{dp}{\sqrt{4p^3 - g_2p - g_3}},$$

będzie (patrz Rozdz. XVII, § 5)

$$Z = -\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}, \quad H_q = \log \frac{\sigma(u)}{\sigma(u-u_2)} - \frac{\sigma'(u_1)}{\sigma(u_1)} u,$$

$$Q = \log \frac{\sigma(u-u_1)}{\sigma(u-u_2)}, \quad \text{gdzie } q = p(u_1), \quad q_1 = p(u_2).$$

§ 4, str. 168. O przekształceniu Gaussa pisał *Borchardt* (Crelle LVIII, Berliner Ber. 1876).

§ 5, str. 179. O całkach wielokrotnych patrz pracę *Jacobiego* (De determ. funct., Crelle XII, Werke 3). Przypadek $n=2$ rozważał *Euler*, $n=3$ *Lagrange*. Porówn. *Kronecker* (Crelle LXXII, „Vorlesungen etc.“, Lipsk 1894, s. 225).

Twierdzenie *Stokesa* o przekształceniu całki potrójnej rozciągniętej na objętość na całkę podwójną, rozciągniętą na powierzchnię, ogłoszone zostało w *Cambr. Univ. Cal.* 1854 r. O całkach podwójnych patrz najnowsze dzieło *Stolza*: „Vorlesungen über Doppelintegrale“, (Lipsk 1899).

- § 6, str. 172. Całkowaniem różniczek zupełnych zajmował się pierwszy Euler: po nim: Morgan (Quest. J. 1858), Natani (Crelle LXIII), Du Bois-Reymond (Crelle LXX, Math. Ann. XII), Collet (Annales de l'École norm. (1), VII, 1875), Bertrand (Comptes rend. LXXXIII, 1876). Porówn. Forsyth Theorie on diff. equ. (Przekład niemiecki, Lipsk 1893).

ROZDZIAŁ VIII.

- § 6, str. 195. Jeżeli równaniu różniczkowemu nadamy postać $dy_i - f_i dx = 0 (i=1, 2, \dots, n)$, to będziemy mieli układ równań zupełnych lub Pfaffa, całkowalny nieograniczenie, t. j. za pomocą n równań, co znaczy, że daje się wyznaczyć n układów mnożników $\mu_1, \dots, \mu_n (i=1, 2, \dots, n)$, przy pomocy którego dochodzimy do n różniczek zupełnych, Mnożnik μ czyni zadość równania:

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial f_1}{\partial y_1} + \frac{\partial f_2}{\partial y_2} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \right) = 0.$$

- § 7, str. 201, wiersz 8 od góry, powinno być drgających zamiast dźwięczących.

- § 7, str. 202, wiersz 12 od góry, do literatury dodać. Serret, Compt. rend. LXXIV.

- § 7, étr. 204. Do literatury nauki o równaniach różniczkowych dodajemy: L. Heffter „Einleitung in die Theorie der linearen Differentialgleichungen“ Lipsk 1894, L. Koenigsbeeger „Lehrbuch der Theorie der Differentialgleichungen“ Lipsk 1889, C. Jordan Cours d'analyse, t. III; Picard Traité d'analyse; Helge v. Koch w nowej pracy (Akad. Sztokholmska 1899) rozważa układy nieskończenie wielkiego rzędu równań różniczkowych zwyczajnych.

Do literatury teorii równań różniczkowych zupełnych i równania Pfaffa dodajemy: 1) Dla równań całkowalnych nieograniczenie: Deahna (Crelle XX), Natani (Crelle LXIII, s. 314), Meyer (Math. Ann. V), Frobenius (Crelle LXXXII); 2) Dla układów niecałkowalnych nieograniczenie: Pfaff (Berl. Ak. 1814, 1715), Gauss (1815), Jacobi (Crelle II,

XVII), N a t a n i (Crelle LVIII), C l e b s c h (Crelle LX, LXI), G r a s s m a n n (Ausdehnungslehre 1862), L i e (Archiv für Math. II, 1887), F r o b e n i u s (Crelle LXXXII), D a r b o u x (Bull. Darboux (2), VI), F o r s y t h (Theoris on diff. equ.), V i v a n t i (Rend. Palermo XII), E n g e l (Leipz. Berichte), R u s j a n (Prace mat.-fiz. VIII, IX) i t. d. G u l d b e r g (Akad. w Chrystianii 1898, 1899, Comptes rendus 1899).

ROZDZIAŁ IX.

- § 1, str. 209. Można wykazać, że istnieją grupy, nie zawierające przekształcenia tożsamościowego; przykład podał E n g e l w r. 1894 (patrz str. 163 i 165 t. I dzieła L i e g o - E n g e l a, Theorie der Transformationsgruppen).
- § 3, str. 213. Pojęcie przekształcenia stycznościowego daje się rozciągnąć na przypadek wielu zmiennych.
- § 4, str. 217. Niezmiennikiem całkowym nazywamy wyrażenie postaci :

$$I = \iint \dots \int \Phi dx_1 dx_2 \dots dx_n,$$

gdzie Φ jest taką funkcją zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_n, z_1, z_2, \dots, z_m$ i pochodnych ilości z względem ilości x , że wartość całki nie ulega zmianie przy przekształceniach grupy. Niezmiennikami całkowymi zajmowali się: L i e (Leipz. Ber. 1886), P o i n c a r é (Acta mat. XII, str. 52, 1890), Ż o r a w s k i (Rozp. Ak. krakowskiej 1895), K o e n i g s (Compt. rend 1895), C a r t a n (Bull. Soc. Math. 1896), H u r w i t z (Gött. Nachr. 1897), L i e (Leipz. Ber. 1897).

ROZDZIAŁ X.

- § 4, str. 231. Do literatury teorii interpolacyi dodajemy jeszcze: G a u s s (Werke III), L a g r a n g e (Oeuvres VII), C z e b y s z e w (Akad. Peters. 1859), H e r m i t e (Crelle LXXXIV),

Frobenius (tamże LXXIII), Méray (Ann. de l'Ec. norm. 1884), Teixeira (Crelle CX), Bendixson (tamże CI, Acta IX), Pincherle (Akad. bolońska 1893), Netto (Math. Ann. XLH).

Z literatury o kwadraturach przytaczamy: Jacobi (Crelle I), Christoffel (tamże LV), Czebyszew (Liouville (2) XIX), Markoff (Math. Ann. XXI), Stieltjes (Éc. norm (3) I, Compt. rend. XCIX).

Do literatury rachunku odwrotnego różnic: Thomae (Zeitschr. f. M. XVI), Le Paige (Nouv. Corr. II, III), Sylvester (Phil. Mag. 1879, Am. J. IV, Messenger (2) XVIII), Cesàro (Nouv. Ann. (3) V), Pincherle (Ist. Lomb. 1886, 1894, Acc. Bol. 1895, 1896).

ROZDZIAŁ XII.

§ 1, str. 249. Ostatnie dwa wzory w tym paragrafie brzmieć powinny

$$\Delta a_2 = A_{22}a'_1 - A_{21}a'_2; \quad \Delta a_1 = -A_{12}a'_1 + A_{11}a'_2.$$

§ 4, str. 257. Po wzorach na końcu Nr. 5 należy dodać: współczynniki tego przekształcenia otrzymujemy, podstawiając, zamiast współczynników podstawienia danego, ich dopełnienia algebraiczne w wyznaczniku Δ .

§ 4, str. 259, wiersz 1 u góry: zamiast katalektanty, powinno być kanonizanty. Dla form rzędu parzystego $2m$ istnieje związek pomiędzy współczynnikami postaci:

$$\begin{vmatrix} a_0, & . & . & . & . & . & , & a_m \\ a_1, & . & . & . & . & . & , & a_{m+2} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_m, & . & . & . & . & . & , & a_{2m} \end{vmatrix} = 0,$$

który nazywa się katalektantem wyznacznika.

§ 4, str. 259, wiersz 13 od góry, zamiast półzmiennik powinno być półniezmiennik,

§ 4, str. 259, w wierszu ostatnim, zamiast a_{m-2} napisać a_m , zamiast a_{2m} napisać a_{2m-1} ; wyrazy w wierszu tuż pod wyznacznikiem należy przekreślić.

ROZDZIAŁ XIV.

§ 4, str. 321, wiersz 4 od góry: zamiast *w y m i e r n y* powinno być *n i e w y m i e r n y*.

SKOROWIDZ ALFABETYCZNY

rzeczy.

Abaki, 530. *)
Agregaty punktów, 10.
Analizatory harmoniczne, 533.
Arytmometr Thomasa, 531.
Argument liczby zespolonej, 4.
 " w funkcyjach eliptycznych, 390.

Bieguny funkcyj analitycznej, 282, 283.
Błąd prawdopodobny spostrzeżenia, 525.
Brachystochrona, 241.

Całkowalność, 142.

Całka ogólna równania różniczkowego, 174.
 " osobliwa równania różniczkowego, 174.
 " szczególna równania różniczkowego, 174.
 " zupełna równania różniczkowego o pochodnych cząstkowych, 199.

Całki abelowe, 342.

 " gatunku 1-go, 344.
 " " 2-go, 346
 " " 3-go, 356.
 " eliptyczne, 163, 342.
 " " zupełne, 345.
 " hypereliptyczne, 343.
 " nieokreślone, 150, 157.
 " pojedyncze,
 " niewłaściwe osobliwe, 144.
 " określone, 144.
 " różnicowe, 230.
 " wielokrotne, 169.

Całkowanie równań różniczkowych, 173—205.

 " różniczek zupełnych, 170.
 " równań różniczkowych przez szeregi 190—194.

Charakterystyka macierzy, 48.

Ciało liczb algebraicznych, 503.

 " " " normalne (Galois), 504.

Ciągłość i nieciągłość funkcyj, 23.

Cięcia na powierzchni Riemanna, 335.

Cyklojda, 241.

Czynnik całkujący, 175.

Czynnikowe (faktoryalne), 82.

Dopełnienie algebraiczne wyznacznika, 49.

Emananty, 218.

Ewektanty, 258.

Faktoryalne, patrz Czynniki.

Fakultety analityczne, 81.

Fałdowanie (formy), 253.

Formy dwójkowe, 247.

 " kwadratowe (Teoria liczb), 487.

 " zredukowane, 490.

 " pośrednie, 258.

 " skośne, 259.

 " stowarzyszone, 275.

Funkcje abelowe, 397.

 " alef Wrońskiego, 93.

*) Liczby oznaczają stronicę.

- „ algebraiczne, 2, 282, 330.
 „ analityczne, 289.
 „ automorficzne, 328.
 „ Bernoulli'ego, 240.
 „ beta, 424.
 „ całkowite, 282.
 „ całkowite wymierne, 14.
 „ ciągłe, 21.
 „ eliptyczne, 364.
Funkcya liczbowa $E(x)$, 474.
Funkcye Eulera, 428.
 „ gamma, 422.
 „ harmoniczne, 283.
 „ holomorficzne, 295.
 „ hypergeometryczne, 436.
 „ hyperboliczne, 416.
 „ hypereliptyczne, 397.
Funkcye interpolacyjne, 222.
 „ jednorodne, 14.
 „ jednowartościowe 282,
 „ Kleina, 407.
 „ kołowe, 416.
 „ kuliste, 441, 447.
 „ Lamégo, 469.
 „ liniowe nieciągłe, 25.
Funkcya logarytmowa, 413.
Funkcye malejące, 140.
Funkcya meromorficzne, 295.
Funkcye Mertensa, 473.
 „ modułowe, 324.
 „ monodromiczne, 295.
 „ monogeniczne, 295.
 „ należące do grup podsta-
 wień, 41.
 „ naprzemiennie, 140.
 „ niewyraźne, patrz uwikłane.
 „ odwrotne, 13.
Funkcya p Weierstrassa.
Funkcye peryodyczne, 320.
 „ pochodne, 123.
 „ podwójnie peryodyczne, 320.
 „ politropiczne, 245.
 „ przestępne, 13.
 „ punktowo-nieciągłe, 25.
 „ regularne, 282.
 „ rosnące, 140.
 „ różniczkowalne, 130.
 „ równociągłe, 23.
 „ symetryczne, 41.
 „ σ Weierstrassa, 368.
 „ $\mathcal{H}$ (hypereliptyczne),
 „ $\mathfrak{H}$ Jacobi'ego, 357.
 „ uwikłane, 12.
 „ walcowe, 450.
 „ wielościanowe, 317.
 „ wielowartościowe, 282.
 „ wykładnicze, 412.
 „ wymierne, 13, 14.
 „ wyraźne, 12.
 „ zmiennej zespolonej, 281.
Geminant, 101.
Granica funkcyj, 17.
 „ wyższa i niższa, 21.
Granice całki określonej, 144.
Grupa abelowa, 45.
 „ anharmoniczna, 316.
 „ arytmetyczna, 44.
 „ ciągła, 313.
 „ cykliczna, 317.
 „ czworościanowa, 38.
 „ doskonała, 11.
 „ dwuścianowa (diedralna), 317.
Grupa dwudziestścianowa (ikozaedral-
 na), 319.
 „ funkcyj modułowej, 327.
 „ izomorficzna, 40.
 „ liniowa, 44.
 „ naprzemienna, 34.
 „ nieciągła, 313.
 „ niepierwotna, 39.
 „ odliczalna, 11.
 „ pochodna, 10.
 „ podstawień liniowych, 313.
 „ przechodnia pojedynczo, 38.
 „ „ wielokrotnie, 34.
 „ przekształceń, 207.
 „ przekształceń jednoparametro-
 wa, 207.
 „ przekształceń wieloparametro-
 wa, 207.
 „ równania, 117.
 „ symetryczna, 34.
 „ wszędzie gęsta, 11.
 „ wyróżniona (podstawień), 36.
 „ złożona, 37.
Hesyan, 64.
Iloczyn nieskończone, 79.
Indeks, patrz Skaźnik.
Integralfy, integratory, 533.
Interpolacja, 222.
Izomorfizm grupy, 40.
Jakobiany, patrz Wyznaczniki funk-
 cyjne.
Katalektytant, 259.
Katenoida, 245.

Kombinacye, 26.
 Kombinanty, 258.
 Kongruencye, 475.
 " stopnia 1-go, 478.
 " " 2-go, 479.
 " stopni wyższych, 483.
 " dwumienne 483.
 " wykładnicze, 484.
 Konkomitanty, 257.
 Kontrawaryant, patrz Przeciwniennik
 Kryteria Cauchy'ego i Pringsheima
 (s szeregi), 71.
 " Seidela i Sterna (ułamki cią-
 głe), 87.
 Kwadratury przybliżone, 225 549.
 Kwaterniony, 8.
Liczby algebraiczne, 4, 503.
 " Bernoulli'ego, 420.
 " doskonałe, 471.
 Liczba e , 413, 511.
 Liczby Eulera, 423.
 " figuryczne, 29.
 " idealne Kummera, 509.
 " nierozkładalne, 508.
 " niewymierne, 1.
 Liczba π , 512.
 Liczby pierwsze 469.
 " przestępne, 4, 511.
 " przystające (kongruentne), 498,
 507.
 " rozkładalne, 508.
 " rzeczywiste, 1.
 " stowarzyszone, 507.
 " wielokątowe, 30.
 " wielościanowe, 30.
 " wymierne, 1.
 " względnie pierwsze, 469, 507.
 " zespolone, 4.
 " " sprzężone, 5.
 " " całkowite Gaussa, 496.
 " złożone, 469.
 Linia łańcuchowa, 243.
 Linie poziome, 284.
 " przepływu, 11.
 " spójności (na powierzchni Rie-
 manna), 335.
 Linijka rachunkowa, 531.
Macierz wyznacznika, 48.
 Maxima i minima całek, 236.
 " " funkcji, 140.
 Metoda najmniejszych kwadratów,
 patrz Teorya błędów.
 Minor, patrz Wyznacznik.

Mnożenie zespolone (w teoryi funkcji
 eliptycznych), 390.
 Moduł kongruencji, 475.
 " kwaternionu, 8.
 " liczby zespolonej, 4.
 " peryodyczności całek, 344.
Nadwyznaczniki, 258.
 Nadzieja matematyczna, 519.
 Nasunięcie (formy), 254.
 Narzędzia arytmetyczne, 530.
 " całkowite, 533.
 Niepierwotność grupy, 39.
 Nieskończoności, 120.
 Nieskończoności, 120.
 Niezmiennik bezwzględny funkcji elip-
 tycznych, 325.
 Niezmienniki algebraiczne, 249.
 Niezmienniki różniczkowe, 209.
 " całkowite, 568
 Nomografia, 532.
 Norma liczby algebraicznej, 505.
Odechylenie (teorya błędów), 519.
 Odtworzenie, patrz Odzworowanie.
 Odzworowanie funkcji, 283.
 " " podobne, 283, 341.
 Oseylaça funkcji, 21.
Parametry różniczkowe, 214.
 Peryody całek, 342, 343, 348.
 " form zredukowanych, 491.
 " funkcji, 320.
 " funkcji gamma, 433.
 Pfaffiany, 52.
 Pierwiastki pierwotne (teorya liczb), 484
 " " równania, 15.
 " " rzeczywiste, 111.
 " " pojedyncze,
 " wielokrotne, 110.
 " " wymierne, 114.
 " " zespolone, 111.
 Pierwiastkowanie, 3.
 Pierwotność grupy, 39.
 Planimetria, 534.
 Pochodne funkcji, 123.
 " " cząstkowe, 126.
 " " złożonej, 124.
 " " uwikłanej, 128.
 Podstawa ciała liczbowego, 505.
 " układu skądników, 485.
 Podstawienia, 32.
 " abelowe, 45.
 " eliptyczne, 308.

- Podstawienia hyperboliczne, 308.
 " kołowe, 32.
 " liniowe, 308.
 " loksodromiczne, 308.
 " paraboliczne, 32.
 " przemienne, 32.
 " przez odbicie, 310.
 " odwrotne, 32.
 " tożsamościowe, 32.
 Podwyznacznik, patrz wyznacznik.
 Podzielność liczb, 497, 506.
 Półniezmienniki, 259.
 Postępy, 73.
 Potęgowanie, 3.
 Powierzchnie Riemanna, 334.
 Pozostałość funkcyj, 296.
 Prawdopodobieństwo błędów, 423.
 " matematyczne, 514.
 " przyczyn lub a priori, 423.
 " skutków lub a posteriori, 518.
 Prawidło Bineta, 50.
 Prawo wielkich liczb, 423.
 Prawo wzajemności liczb pierwszych, 481, 499, 501.
 Proces Aronholda, 252.
 " biegunowy, 253.
 Przechodność grupy, 38.
 Przeciwpodstawieniowość, 258.
 Przeciwnieznik, 257.
 Przedstawialność liczb przez formy kwadratowe, 487.
 Przedstawienie analityczne podstawień, 43.
 " typowe form, 25.
 " kanoniczne, 277.
 " analityczne funkcyj, 456.
 " geometryczne funkcyj, 12, 123.
 Przekształcenie całki, 149.
 " funkcyj eliptycznych, 380.
 " Gaussa (całki eliptycznej), 168.
 " punktowe, 206.
 " równania, 99.
 " stycznościowe, 206.
 Przemiany, 25.
 Przetawienia, 33.
 Przyrzędy algebraiczne, 533.
 Punkty graniczne, 10.
 " osobliwe funkcyj, 300.
 " " istotne funkcyj, 301.
 " " nieistotne funkcyj, 301.
 Rachunek całkowy, 143—172.
 Rachunek kwipolencji, 4.
 " prawdopodobieństwa, 514—528.
 " różnicowy, 218—231.
 " różniczkowy, 120—142.
 " wariacyjny, 232—246.
 Reszta Cauchyego, 132.
 " Lagrange'a, 132.
 Reszty dwukwadratowe, 479.
 " kwadratowe, 479.
 " potęgowe, 484.
 " sześciennie, 484, 501.
 Rezyduum funkcyj, patrz Pozostałość.
 Rodzaj funkcyj analitycznej, 303.
 Rozkład funkcyj wymiernych, 15.
 Równania abelowe, 119.
 " algebraiczne, 91.
 " " dwumienne, 108.
 Równanie Pella (teoria liczb), 489, 493.
 Równania algebraiczne odwrotne, 96, 541.
 " " stopnia 3-go, 104.
 " " " 4-go, 106.
 " " " 5-go i 6-go, 107.
 " różniczkowe Bessela, 193.
 " " Clairauta, 182.
 " " Eulera, 180.
 " " Jacobi'ego, 179.
 " " Laplace'a, 201.
 " " Riccati'ego, 178.
 " " cząstkowe, 197.
 " " liniowe, 183.
 " " zwyczajne, 173.
 Równoważność form kwadratowych, 488.
 Rozmieszczenia, 26.
 Rozwiązanie równania różniczkowego, patrz Całka.
 Rozwijalność funkcyj na szeregi, nieskończone, 132.
 Rowinięcia na szeregi: Fouriera, 458.
 " " funkcyj kulistych, 462, 464.
 " " waleowych, 462.
 Rozwiązująca równania, 118.
 Różnice skończone, 218.
 Różniczki, 129.
 Różniczkowanie i całkowanie w obszarze zespolonym, 295.
 Rząd podstawienia, 33.
 Rugowniki, patrz Wypadkowe.
 Skalar kwaternionu, 8.
 Skażniki (teoria liczb), 484.
 Spółczynniki dwumianowe, 27.
 Spółpodstawieniowość, 258.

Spółzmienniki, 249.
 Średnia arytmetyczno-geometryczna, 21
 Stała Eulera 426.
 „ harmoniczna, 426.
 Symbol Eisensteina, 501.
 „ Jacobi'ego, 482, 400.
 „ Legendre'a, 480.
 Szeregi: Bürmanna, 457.
 „ cyklometryczne, 136.
 „ Fouriera, 458.
 „ funkcyj Bessela,
 „ funkcyj kulistych.
 „ harmoniczne, 74.
 „ Lagrange'a, 457.
 „ Lamberta, 77.
 „ logarytmowe, 136.
 „ nieoznaczone, 166.
 „ potęgowe, 285.
 „ rozbieżne, 66.
 „ Sturma, 113.
 „ Taylora-Maclaurina, 457.
 „ Wronskiego, 457.
 „ zbieżne bezwzględnie, 67.
 „ „ zwyczajnie, 67.

Teoria Galois'a (równania algebraiczne), 114.

Teoria błędów, 523.

Trójkąt arytmetyczny Pascala, 29.

Twierdzenie Abela, 353

„ **Ampère'a**, 222.
 „ **Bernoulli'ego**, 518.
 „ **Budana**, 113.
 „ **Cauchy'ego** (grupy), 35.
 „ **Cauchy'ego**, 297.
 „ **Czebyszewa**, 472.
 „ **Descartes'a**, 112.
 „ **Dirichleta**, 459.
 „ **Fermata**, 476, 498 501.
 „ **Gaussa** (o średniej arytm. geom.), 21.
 „ **Gaussa** lub d'Alemberta, 91.
 „ **Jacobi'ego** o odwróceniu całek, 396.
 „ **Mittag-Lefflera**, 304i
 „ o całkowaniu i różniczkowaniu pod znakiem, 150.
 „ o dodawaniu funkcyj abelowych, 400.
 „ o dodawaniu funkcyj eliptycznych, 376.
 „ **Picarda**, 301.

„ **Riemanna** (całkowalność), 145.
 „ **Riemanna-Rocha**, 339.
 „ **Rollego**, 130.
 „ **v. Staudta i Clausena**, 422.
 „ **Stieltjesa**, 59.
 „ **Stokesa**, 546.
 „ **Sturma**, 113.
 „ **Weierstrassa** o funkcyjach 302.
 „ **Wilsona**, 476.

Układy równań liniowych, 101,

„ „ różniczkowych jedno-
 czesnych, 194.
 „ „ zupełne form niezmienniczych, 259.
 „ „ układu form liniowych, 261.
 „ „ jednej lub więcej form układu form rzędu 3-go 203,
 „ „ układu formy kwadratowej i sześcienniej, 264.
 „ „ układu formy dwójkowej i dwukwadratowej, 267
 „ „ układu formy kwadratowej i dwukwadratowej, 269.

Ułamki ciągłe, 13.

Wartość prawdopodobna, 517.

Warunki całkowalności, 172.

Waryacja całki pierwszej, 232.

„ „ druga, 234.

Wektor kwaternionu, 8.

Wronskiany, 60.

Wypadkowe, 98.

Wyróżniki równania, 1.

„ formy kwadratowej, 487.

„ ciała liczbowego, 505.

Wyznaczniki, 47.

„ **Cauchy'ego**, 55.
 „ cząstkowe (minory, podwyznaczniki), 49.
 „ dołączone, 51.
 „ formy kwadratowej, 487.
 „ funkcyjne, 62.
 „ kołujące, 55.
 „ ortogonalne, 58.
 „ perysymetryczne, 54.
 „ półsymetryczne, 52
 „ skośne, 52.
 „ **Smitha**, 58.

Wyznacznik Sterna, 57.
 „ symetryczne, 52.
 „ układu dołączonego, 51.

Wzór Catalana,
 „ Clebscha-Gordana, 255.
 „ Leibniza, 513
 „ Newtona-Gerarda, 92.
 „ Simpsona, 225.
 „ Taylora-Maclaurina, 132, 456.
 „ Wallisa, 81
 „ Waringa, 93

Wzory nieoznaczone, 134.

Zagadnienie o brachystochronie, 247.
 „ interpolacyjne, 225.

„ izoperymetryczne, 236.
 „ o kwadraturze koła, 549.
 „ o podwojeniu sześciannu, 549

Zagadnienia rachunku wariacyjnego,
 241—246,

Zera i bieguny funkcji analitycznych, 283

Zbieżność szeregów, 23.

Związki dwuliniowe pomiędzy modu-
 łami peryodyczności, 344.

Związek Legendre'a (funkcje eliptycz-
 ne), 546.

