LEON STANIEWICZ

TEORIA PRĄDÓW ZMIENNYCH

BIBLIOTEKA PODRĘCZNIKÓW AKADEMICKICH

»CZYTELNIK«

LEON STANIEWICZ

TEORIA PRĄDÓW ZMIENNYCH

DR INŻ. L E O N S T A N I E W I C Z
PROFESOR POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ, B. PROFESOR POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

TEORIA PRĄDÓW ZMIENNYCH

WYDANIE DRUGIE UZUPEŁNIONE

1 9 5 1
• C Z Y T E L N I K •
S P Ó Ł D Z I E L N I A W Y D A W N I C Z O - O Ś W I A T O W A

Redaktor: Jadwiga Dianni

Spółdzielnia Wydawniczo-Oświatowa „Czytelnik"
Printed in Poland
Składano i tłoczono w Drukarni Nr 3 „Czytelnika" w Krakowie
Zam. Nr 377, 19. IV. 1950 r. Papier druk. sat. 70 × 100–80 g.
Nakł. 10.270. Druk uk. 24. XII. 1951 r.
M-1-11311

P R Z E D M O W A

DO DRUGIEGO WYDANIA

W zniszczonej przez wojnę Polsce dawał się odczuwać brak wszelkich podręczników, a w szczególności podręczników dla szkół akademickich; należało więc jak najprędzej przystąpić do przygotowania odpowiednich dzieł, pomimo trudności uzyskania potrzebnych do tego źródeł.

Autor niniejszej książki, prof. dr Leon Staniewicz, prace wstępne do drugiego wydania rozpoczął zaraz po zakończeniu wojny, w r. 1945, początkowe jednak powojenne trudności wydawnicze uniemożliwiły wcześniejsze jej wydanie.

Doceniając potrzeby młodzieży akademickiej studiującej elektrotechnikę teoretyczną na Politechnice Gdańskiej, prof. dr Leon Staniewicz, niezależnie od prac związanych z przygotowaniem drugiego wydania książkowego, wydał tymczasem dwukrotnie swoją książkę w postaci skryptu.

Obecne wydanie wykazuje znaczne różnice w porównaniu z pierwszym, które trzeba było opracować i uzupełnić, dostosowując je do obecnego stanu nauki, z zachowaniem jednakże pewnych ram, zakreślonych programami szkół akademickich. Szczególnie uległa zmianie teoria czwórników, linii łańcuchowych oraz zastosowania metody składowych symetrycznych do obliczania prądów zwarcia; poza tym usunięto szereg błędów, które się wkradły do pierwszego wydania.

Drugiego wydania książki autor niestety już nie doczekał, zmarł bowiem nagle przy pracy nad pierwszą korektą niniejszej książki.

Korektę książki po śmierci autora przeprowadzili pracownicy naukowi Katedry Elektrotechniki Teoretycznej Politechniki Gdańskiej: adiunkt mgr inż. Piotr Ciechanowicz i st. asyst. mgr inż. Jerzy Dziedzic. Rysunki wykonał st. asyst. mgr inż. J. Dziedzic. Poza wymienionymi w końcowej korekcie wzięli udział pracownicy naukowi Katedry: st. asyst. mgr inż. T. Mazurkiewicz i st. asyst. mgr inż. J. Cimoszko.

E. KENIG

KIEROWNIK ZESPOŁU KATEDR ELEKTROTECHNIKI
TEORETYCZNEJ I MIERNICTWA ELEKTRYCZNEGO
POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ

SPIS TREŚCI

Str.

OZNACZENIA 13

ROZDZIAŁ I

Prąd zmienny sinusoidalny

§ 1. Określenie prądu zmiennego. Prąd sinusoidalny 15
§ 2. Okres. Częstotliwość. Pulsacja 19
§ 3. Faza. Przesunięcie fazy. 21
§ 4. Wartość średnia i wartość skuteczna 22
§ 5. Moc prądu zmiennego. Współczynnik mocy 26
§ 6. Dodawanie funkcji sinusoidalnych 29

ROZDZIAŁ II

Obwody prądu zmiennego ze skupionymi opornościami

§ 7. Obwód z opornością rzeczywistą 31
§ 8. Obwód z opornością rzeczywistą i indukcyjnością w połączeniu szeregowym 33
§ 9. Obwód z opornością rzeczywistą i pojemnością w połączeniu szeregowym 39
§ 10. Obwód z opornością rzeczywistą, indukcyjnością i pojemnością w połączeniu szeregowym 43
§ 11. Rezonans napięć 48
§ 12. Zależność oporności pozornej od częstotliwości 49

ROZDZIAŁ III

Metody rozważania prądów zmiennych

§ 13. Metoda wykreślna 52
§ 14. Metoda symboliczna 59
§ 15. Wykresy zmienności wektorów 69
§ 16. Napięcia i oporności pozorne w szeregowym połączeniu 74
§ 17. Spadek napięcia i strata napięcia w obwodach prądu zmiennego 76
§ 18. Prawa Kirchhoffa w zastosowaniu do prądów zmiennych . . . 77
§ 19. Oporności pozorne połączone równolegle 81
§ 20. Rezonans prądów 84
§ 21. Przykłady na równoległe połączenie oporności pozornych . . . 86

ROZDZIAŁ IV

Prądy wielofazowe

Str.
§ 22. Określenie i powstawanie prądu wielofazowego 93
§ 23. Twierdzenie matematyczne o sumie wartości chwilowych wielkości układu wielofazowego symetrycznego 95
§ 24. Układy wielofazowe 96
§ 25. Moc prądów wielofazowych 100
§ 26. Prąd trójfazowy 102
§ 27. Rozkład układów niesymetrycznych na układy symetryczne prądu trójfazowego 105
§ 28. Moc prądu trójfazowego 108
§ 29. Wyznaczanie prądów w układach prądu trójfazowego 112
§ 30. Prąd dwufazowy 117
§ 31. Wpływ względów ekonomicznych na rozwój prądów zmiennych wielofazowych 120
§ 32. Pola wirujące 124

ROZDZIAŁ V

Zjawiska magnetyczne przy prądach zmiennych

§ 33. Histereza magnetyczna 129
§ 34. Prądy wirowe 136
§ 35. Obwody magnetycznie sprzężone. Transformator powietrzny . 141
§ 36. Transformator z rdzeniem żelaznym 145
§ 37. Praktyczne znaczenie transformatorów 149
§ 38. Układ Scotta 150

ROZDZIAŁ VI

Zjawiska zachodzące w przewodach i w dielektrykach przy prądzie zmiennym

§ 39. Zjawisko naskórkowości 152
§ 40. Straty w dielektrykach 162

ROZDZIAŁ VII

Prostowniki

§ 41. Prostownik rtęciowy 167
§ 42. Prostownik elektrolityczny 170
§ 43. Prostownik elektronowy 171
§ 44. Prostownik tlenkowy 172

ROZDZIAŁ VIII

Prądy odkształcone

§ 45. Szereg Fouriera 173
§ 46. Przypadki szczególne 176
§ 47. Przykłady 179

Str.
§ 48. Analiza krzywych 185
§ 49. Nakładanie się prądów odkształconych 196
§ 50. Współczynnik kształtu i współczynnik szczytu 199
§ 51. Wartość skuteczna prądu odkształconego 202
§ 52. Obwód prądu odkształconego 204
§ 53. Moc prądu odkształconego 206
§ 54. Wpływ prądu odkształconego przy pomiarach indukcyjności i pojemności 210
§ 55. Wielofazowe prądy odkształcone 211

ROZDZIAŁ IX

Czwórniki, równania i wykresy obwodów prądu zmiennego oparte na badaniach w stanie jałowym i w stanie zwarcia

§ 56. Pojęcia ogólne o czwórnikach. 215
§ 57. Wyznaczenie stałych czwórnika drogą pomiarów 219
§ 58. Czwórnik typu T 222
§ 59. Czwórnik typu Π 225
§ 60. Czwórniki równoważne 228
§ 61. Czwórnik krzyżowy 229
§ 62. Określenie wielkości $\hat{S}_0$ i $\hat{S}_z$ za pomocą pomiarów 232
§ 63. Łączenie czwórników 234
§ 64. Warunki osiągnięcia największej mocy na odbiorniku 235
§ 65. Wykres pracy obwodu prądu zmiennego 239

ROZDZIAŁ X

Obliczanie pojemności i indukcyjności w liniach elektrycznych

§ 66. Rozkład potencjału w polu elektrycznym 251
§ 67. Pojemność kabla jednożyłowego obołowionego 256
§ 68. Pojemność kabla jednożyłowego opancerzonego 257
§ 69. Rozkład napięć na okładzinach metalowych kabla opancerzonego 259
§ 70. Pojemność kabla dwużyłowego koncentrycznego 260
§ 71. Pojemność kabla dwużyłowego skręconego 261
§ 72. Pojemność kabla trójżyłowego skręconego prądu trójfazowego. . 266
§ 73. Pojemność przewodu napowietrznego pojedynczego (drugi przewód ziemia) 271
§ 74. Pojemność dwóch równoległych do siebie przewodów napowietrznych 272
§ 75. Pojemność trzech równoległych przewodów napowietrznych prądu trójfazowego 274
§ 76. Pojemność cząstkowa i pojemność robocza w liniach elektrycznych 276
§ 77. Indukcyjność 280
§ 78. Indukcyjność linii dwuprzewodowej 280
§ 79. Indukcyjność linii jednoprzewodowej (drugi przewód ziemia). . 283
§ 80. Indukcyjność linii trójprzewodowej prądu trójfazowego 283
§ 81. Indukcyjność kabla dwużyłowego koncentrycznego 284
§ 82. Rozszerzenie działu o prądach wielofazowych. 287

Str.
§ 83. Zasilanie niesymetryczne 289
§ 84. Zastosowanie praw Kirchhoffa do składowych symetrycznych . . 292
§ 85. Wyznaczenie składowych symetrycznych napięcia na odbiorniku niesymetrycznym 295
§ 86. Wyznaczenie składowych symetrycznych prądów I_0, I_1, I_2, dla odbiornika trójfazowego niesymetrycznego 297
§ 87. Moc w niesymetrycznych układach prądu trójfazowego wyrażona przy pomocy składowych symetrycznych 298
§ 88. Zastosowanie metody składowych symetrycznych do obliczania prądów zwarcia 300

ROZDZIAŁ XI

Przewody długie

§ 89. Wielkości charakterystyczne 307
§ 90. Równania zasadnicze 308
§ 91. Rozwiązanie metodą symboliczną 309
§ 92. Stałe całkowania 312
§ 93. Fale napięcia i prądu 314
§ 94. Linia bez strat 317
§ 95. Linia bez strat w stanie jałowym i w stanie zwarcia 323
§ 96. Linia nieodkształcająca 325
§ 97. Przypadek ogólny 333
§ 98. Obliczenie stałych linii na podstawie pomiarów dokonanych w stanie jałowym i w stanie zwarcia 335
§ 99. Wzory dla napięć i prądów, oparte na własnościach linii w stanie jałowym i w stanie zwarcia. Współczynnik liniowy 338

ROZDZIAŁ XII

Sztuczne linie elektryczne

§ 100. Układy zastępujące długą linię 343
§ 101. Linie łańcuchowe 347
§ 102. Filtry elektryczne 358
§ 103. Łańcuch izolatorów wiszących 373

ROZDZIAŁ XIII

Stany nieustalone w obwodach ze skupionymi: opornością rzeczywistą, indukcyjnością i pojemnością

§ 104. Stany ustalone i nieustalone 378
§ 105. Powstawanie i zanikanie prądu stałego w obwodzie z opornością i indukcyjnością 379
§ 106. Zmiana oporności w obwodzie prądu stałego 383
§ 107. Powstawanie i zanikanie prądu zmiennego w obwodzie z opornością rzeczywistą i indukcyjnością 384
§ 108. Przerywanie obwodu z uwzględnieniem zmiany oporności na wyłączniku 389

Str.

§ 109. Ładowanie kondensatora prądem stałym przez oporność rzeczywistą 394
§ 110. Powstawanie prądu zmiennego w obwodzie z opornością rzeczywistą i pojemnością 396
§ 111. Wyładowanie kondensatora przez oporność rzeczywistą . . . 400
§ 112. Obwód z opornością rzeczywistą, indukcyjnością i pojemnością 401
§ 113. Wyładowanie kondensatora aperiodyczne 404
§ 114. Wyładowanie kondensatora oscylacyjne. Wzór Thomsona . . 409
§ 115. Ładowanie kondensatora prądem stałym przez oporność rzeczywistą i indukcyjność 416
§ 116. Powstawanie prądu zmiennego w obwodzie z opornością rzeczywistą, indukcyjnością i pojemnością 423
§ 117. Przerywanie obwodu, w którym indukcyjność i pojemność są połączone równolegle 431

ROZDZIAŁ XIV

Obwody sprzężone magnetycznie

§ 118. Wyładowanie kondensatora w jednym z dwóch obwodów sprzężonych magnetycznie 433
§ 119. Wyładowanie kondensatora w przypadku, gdy oba obwody są ze sobą w rezonansie 438

ROZDZIAŁ XV

Stany nieustalone w liniach długich

§ 120. Równania różniczkowe dla wartości chwilowych napięć i prądów. Całki ogólne tych równań 443
§ 121. Przyłączanie linii w końcu otwartej do źródła prądu stałego . 450
§ 122. Przyłączanie linii w końcu zwartej do źródła prądu stałego . 455
§ 123. Przyłączanie linii w końcu otwartej do źródła prądu zmiennego 455
§ 124. Przyłączanie linii w końcu zwartej do źródła prądu zmiennego 457
§ 125. Linia nieodkształcająca. Wyrażenie wartości chwilowych napięć i prądów w postaci dwóch fal 458
§ 126. Przyłączanie linii nieodkształcającej do oporności rzeczywistej 461
§ 127. Przyłączanie linii nieodkształcającej do innej oporności falowej 465

Skorowidz alfabetyczny . . . .
Literatura . . . .

OZNACZENIA

A	Upływność
B	Indukcja magnetyczna
B	Przewodność bierna
C	Pojemność elektryczna
D	Indukcja elektryczna
d	Średnica
E	Siła elektromotoryczna SEM — wartość skuteczna
E_m	„ „ „ „ maksymalna
e	„ „ „ „ chwilowa
e	Podstawa logarytmów naturalnych
ε	Przenikalność elektryczna, stała dielektryczna
f	Częstotliwość prądu zmiennego
Φ	Strumień magnetyczny (indukcji magnetycznej)
Φ_m	„ „ — wartość maksymalna
Φ_t	„ „ „ chwilowa
φ	Kąt przesunięcia fazy między napięciem i natężeniem prądu
G	Przewodność rzeczywista, czynna
γ	„ właściwa
H	Natężenie pola magnetycznego
h	Wysokość
I	Natężenie prądu — wartość skuteczna
I_m	„ „ „ maksymalna
i	„ „ „ chwilowa
i_u	„ „ „ „ w stanie ustalonym
i_p	„ „ „ „ przejściowa
j	$\sqrt{-1}$
K	Natężenie pola elektrycznego
L	Indukcyjność własna
l	Długość, odległość

λ	Długość fali
M	Indukcyjność wzajemna
μ	Przenikalność magnetyczna
ω	Pulsacja
P	Moc czynna
P_x	Moc bierna
P_z	Moc pozorna
Q	Ładunek elektryczny
R	Oporność rzeczywista, czynna
r	Promień
ρ	Oporność właściwa
S	Współczynnik liniowy
s	Pole, pole przekroju
σ	Gęstość powierzchniowa ładunku elektrycznego
T	Okres
t	Czas
τ	Stała czasu
U	Napięcie — wartość skuteczna
U_m	„ „ maksymalna
u	„ „ chwilowa
u_u	„ „ „ w stanie ustalonym
u_p	„ „ „ przejściowa
V	Potencjał
v	Objętość
W	Energia
X	Oporność bierna
X_L	„ indukcyjna
X_c	„ pojemnościowa
Y	Przewodność pozorna
Z	Oporność pozorna, oporność falowa
z	Liczba zwojów

Daszek nad literą np. $\hat{E}$, $\hat{U}$, $\hat{I}$, $\hat{Z}$ oznacza symboliczne ujęcie rozpatrywanych wielkości.

ROZDZIAŁ PIERWSZY

PRĄD ZMIENNY SINUSOIDALNY

§ 1

OKREŚLENIE PRĄDU ZMIENNEGO. PRĄD SINUSOIDALNY

Prądem zmiennym nazywamy prąd elektryczny, którego wielkości charakterystyczne: napięcie, natężenie itp., zmieniają z biegiem czasu swe wartości oraz kierunki. W elektrotechnice mamy do czynienia przeważnie z prądami zmieniającymi się okresowo, czyli z takimi prądami, które po upływie określonego czasu przybierają te same wartości i te same kierunki. Najprawidłowszą postacią prądu zmiennego jest prąd o przebiegu sinusoidalnym, który będziemy w skróceniu nazywali *prądem sinusoidalnym*.

Przebieg sinusoidalny określamy funkcją

$$y = A \sin x.$$

Dla tej funkcji na wykresie (rys. 1) otrzymujemy krzywą, zwaną *sinusoidą*.

$$\text{Dla } x = 0 \qquad y = 0;$$

$$\text{,,} \quad x = \frac{\pi}{2} \qquad y = A.$$

A stanowi wartość szczytową lub maksymalną sinusoidy, zaś x jej argument.

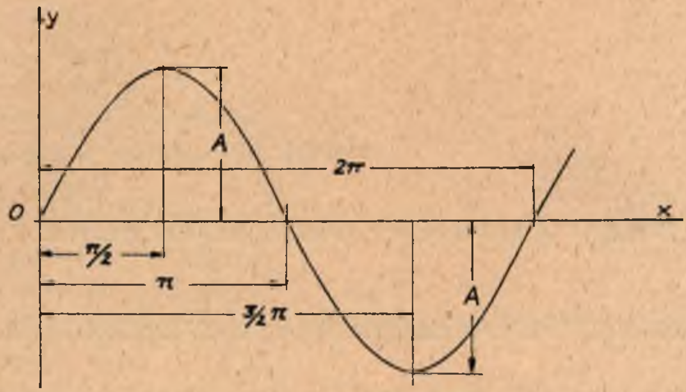
$$\text{Dla } x = \pi \qquad y = 0,$$

$$\text{,,} \quad x = \frac{3}{2}\pi \qquad y = -A,$$

$$\text{,,} \quad x = 2\pi \qquad y = 0.$$

Całkowity przebieg sinusoidy dla wartości x od 0 do 2π będziemy nazywali falą sinusoidy.

Prąd sinusoidalny może powstać, gdy istnieje siła elektromotoryczna o przebiegu sinusoidalnym. Siłę elektromotoryczną będziemy nadal oznaczali przez *S E M*.



Rys. 1

Gdy przewodnik porusza się w polu magnetycznym, przecinając strumień magnetyczny, powstaje w tym przewodniku *S E M* indukcji, której wartość e w chwili t otrzymujemy ze wzoru

$$e = -\frac{d\Phi_t}{dt} \text{ jedn. } cgs$$

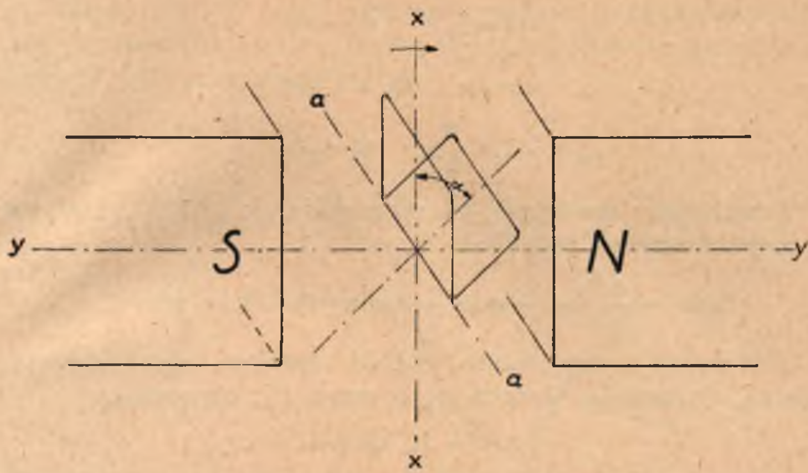
lub

$$e = -\frac{d\Phi_t}{dt} 10^{-8} \text{ woltów,}$$

gdzie Φ_t oznacza wyrażoną w makswelach wartość strumienia magnetycznego przez powierzchnię ograniczoną przewodnikiem, t czas w sekundach.

Najprostszy przypadek mamy, gdy przewodnik obraca się z jednakową szybkością w jednostajnym polu magnetycznym, gdzie natężenie pola ma wartość stałą. Przypuśćmy, że mamy takie pole między dwoma biegunami N i S magnesu lub elektromagnesu (rys. 2); rozpatrzmy przewodnik np. w postaci prostokątnej ramki z drutu, która może się obracać naokoło osi $a - a$. Gdy ramka znajduje się w położeniu $x - x$, strumień magnetyczny przez powierzchnię ograniczoną ramką będzie miał największą wartość i kierunek prostopadły do powierzchni. Jeżeli oznaczymy przez B indukcję magnetyczną w rozpatrywanym polu, zaś przez s pole powierzchni ograniczonej ramką, wówczas strumień Φ_m, objęty ramką w położeniu $x-x$, będzie równy

$$\Phi_m = Bs.$$



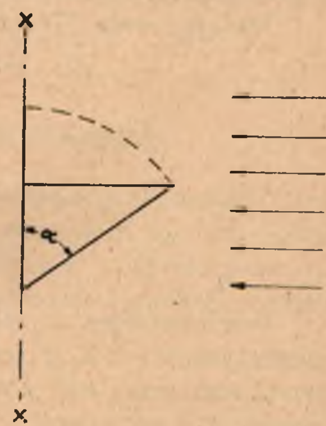
Rys. 2

Gdy ramka obróci się o kąt $\frac{\pi}{2}$ i zajmie położenie $y-y$, wtedy objęty przez nią strumień magnetyczny będzie równy 0. W położeniu pośrednim, gdy ramka tworzy z osią $x-x$ kąt α (rys. 2 lub rys. 3), strumień objęty przez ramkę będzie równy

$$B\,s\cos\alpha = \Phi_m \cos\alpha.$$

Załóżmy, że ramka, obracając się ze stałą prędkością kątową ω, obróciła się o kąt α po upływie czasu t, tak iż $\alpha = \omega\,t$, wówczas powyższy wzór możemy napisać w sposób następujący:

$$B\,s\cos\alpha = \Phi_m \cos\omega\,t.$$



Rys. 3

Widzimy stąd, że strumień magnetyczny objęty przez ramkę jest funkcją czasu okresowo zmienną. Rozpoczynając liczenie czasu od chwili, gdy strumień ma swoją największą wartość, będziemy mieli dla wartości strumienia w chwili t wzór

$$\Phi_t = \Phi_m \cos\omega\,t. \tag{1}$$

Badając ten wzór widzimy, że:

$$\left.\begin{array}{llll} \text{dla} & \omega t = 0 & \Phi_t = \Phi_m, \\ \text{,,} & \omega t = \frac{\pi}{2} & \Phi_t = 0. \\ \text{,,} & \omega t = \pi & \Phi_t = -\Phi_m, \\ \text{,,} & \omega t = \frac{3}{2}\pi & \Phi_t = 0. \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Przechodząc następnie od strumienia do *S E M*, otrzymamy dla rozpatrywanego przykładu

$$e = -\frac{d\Phi_t}{dt} = -\Phi_m \cdot (-\omega \sin \omega t) = \Phi_m \omega \sin \omega t.$$

Jak widać z tego wzoru, *S E M* określona jest funkcją sinusoidalną. Oznaczając iloczyn $\Phi_m \omega$ przez E_m, otrzymamy

$$e = E_m \sin \omega t. \qquad (3)$$

Otrzymaliśmy w ten sposób w obwodzie *S E M* sinusoidalną. Widzimy, że jest ona wynikiem obracania się przewodnika z prędkością stałą w jednostajnym polu magnetycznym. E_m ma wartość stałą i nazywa się *wartością szczytową* albo *maksymalną S E M*; e jest funkcją czasu i nazywa się *wartością chwilową S E M*.

Badając wzór (3) widzimy, że

$$\left.\begin{array}{llll} \text{dla} & \omega t = 0 & e = 0, \\ \text{,,} & \omega t = \frac{\pi}{2} & e = E_m, \\ \text{,,} & \omega t = \pi & e = 0, \\ \text{,,} & \omega t = \frac{3}{2}\pi & e = -E_m. \end{array}\right\} \qquad (4)$$

Porównywając ze sobą wyniki (2) i (4) widzimy, że strumień magnetyczny i *S E M* zmieniają się w ten sposób, że gdy strumień przechodzi przez swą wartość największą, *S E M* przechodzi przez wartość 0 i na odwrót.

Analogicznie do przebiegu sinusoidalnego *S E M* możemy rozpatrywać sinusoidalny przebieg natężenia prądu według wzoru

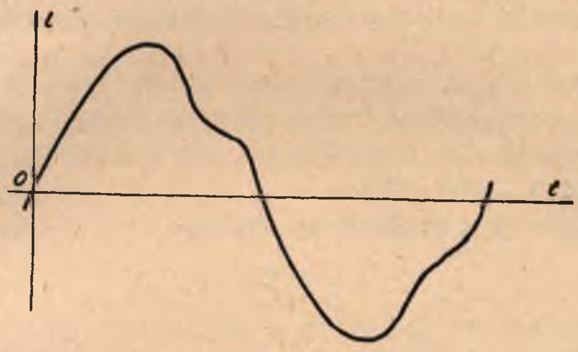
$$i = I_m \sin \omega t, \qquad (5)$$

gdzie i oznacza wartość chwilową, zaś I_m wartość szczytową lub maksymalną natężenia prądu.

Tak samo otrzymamy wzór dla napięcia sinusoidalnego

$$u = U_m \sin \omega t. \tag{6}$$

Wzory (3), (5) i (6) wyrażają przebiegi rozpatrywanych wielkości w obwodzie elektrycznym, w którym pewien kierunek został przyjęty jako kierunek dodatni.



Rys. 4

Prądy zmienne, które nie mają przebiegu sinusoidalnego, nazywamy prądami *odkształconymi*, jak wskazuje to np. rys. 4.

W dalszych rozważaniach będziemy rozpatrywali najpierw prądy sinusoidalne.

§ 2
OKRES. CZĘSTOTLIWOŚĆ. PULSACJA

W rozpatrywanych przebiegach sinusoidalnych wartości funkcji czasu powtarzają się dla argumentów różniących się o $2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą. Oznaczając przez T najkrótszy czas, po upływie którego następuje powtórzenie wartości funkcji, będziemy mieli

$$\omega T = 2\pi,$$

skąd

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \tag{7}$$

Czas T nazywamy czasem okresu lub w skróceniu *okresem* prądu zmiennego. W ciągu jednego okresu T funkcja przybiera wszelkie wartości fali. Przebieg zmian wartości rozpatrywanej wielkości okresowej w ciągu jednego jej okresu nazywa się również *cyklem*. Po upływie czasu T rozpoczyna się druga fala itd.

2*

Liczba okresów na sekundę stanowi wielkość zwaną *częstotliwością* prądu zmiennego; oznaczamy ją literą f; mamy więc

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}. \tag{8}$$

Częstotliwości nie należy mieszać z liczbą zmian kierunku prądu na sekundę; ta liczba zmian jest dwa razy większa od częstotliwości.

Częstotliwość ma wymiar odwrotności czasu; wyrażamy ją w okresach na sekundę; na terenie międzynarodowym jest tendencja do nadania jednostce częstotliwości, czyli jednemu okresowi na sekundę, nazwy „*herc*“ (*Hz*).

Ze wzorów (7) i (8) możemy napisać

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{9}$$

lub

$$\omega = 2\pi f. \tag{10}$$

Wielkość ω, która w poprzednich wzorach stanowiła prędkość kątową podczas obrotu ramki w polu magnetycznym, nazywamy *pulsacją* prądu zmiennego.

W zależności od tego, którą z trzech wielkości: pulsację, okres lub częstotliwość chcemy wprowadzić do wzorów na wartości chwilowe funkcji sinusoidalnych czasu, możemy wzory te napisać w trzech równoznacznych postaciach, korzystając z zależności (9) i (10), np. wzór (3)

$$e = E_m \sin \omega t;$$

$$e = E_m \sin \frac{2\pi}{T} t;$$

$$e = E_m \sin 2\pi f t.$$

W urządzeniach prądu silnego dla siły i światła częstotliwość wynosi najczęściej 50 *Hz*: $f = 50$, $T = \frac{1}{50}$; w trakcji elektrycznej spotykamy częstotliwość $16^2/_3$ *Hz*; w urządzeniach telekomunikacji np. w urządzeniach telefonicznych, częstotliwość dochodzi do kilkunastu tysięcy *Hz*, w radiotechnice zaś mamy nawet miliony *Hz*.

§ 3

FAZA. PRZESUNIĘCIE FAZY

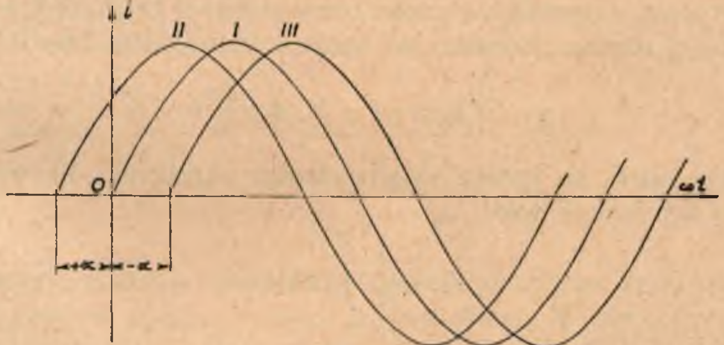
Argument funkcji sinusoidalnej wzrasta w miarę wzrostu zmiennej niezależnej. Wartość argumentu, zawartą w granicach jednego okresu, czyli pomiędzy 0 i 2π lub $-\pi$ i $+\pi$, nazywamy *fazą* tej funkcji. Rozpatrując funkcję sinusoidalną czasu powiemy, że faza jej w pewnej chwili wynosi α, gdy w chwili tej $\omega t = \alpha$, przy czym $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$ lub $-\pi \leqslant \alpha \leqslant +\pi$. Gdyby wartość argumentu ωt przekraczała podane granice, należy dla otrzymania fazy odjąć lub dodać wielokrotność okresu 2π, tak aby rezultat był zawarty w wyżej przytoczonych granicach.

Gdy piszemy wzór na wartość chwilową, np. natężenia prądu w postaci

$$i = I_m \sin \omega t\,,$$

widzimy, że w tym przypadku, w chwili gdy rozpoczynamy liczenie czasu, prąd przechodzi przez fazę 0. Jeżeli rozpoczynamy liczenie czasu w chwili, gdy sinusoida posiada inną fazę, wtedy do argumentu ωt musimy dodać lub odjąć odpowiedni kąt fazowy.

Sinusoidę, która w chwili $t = 0$ przechodzi przez fazę 0, będziemy nazywali *sinusoidą normalną*.



Rys. 5

Zestawmy 3 sinusoidy (rys. 5): I, normalną, której równanie jest $i = I_m \sin \omega t$, oraz II i III, o tej samej wartości maksymalnej, lecz przesunięte względem sinusoidy normalnej w lewo i w prawo o kąt α. Rozpatrując sinusoidę II widzimy, że w chwili $t = 0$ przechodzi ona przez fazę $+\alpha$; jej równanie będzie

$$i = I_m \sin (\omega t + \alpha)\,.$$

Rozumując analogicznie, napiszemy dla sinusoidy III równanie

$$i = I_m \sin(\omega t - \alpha)\,.$$

Porównywając obie te sinusoidy z normalną, widzimy, że sinusoida II wyprzedza ją ze swoją fazą, a więc wcześniej przechodzi przez wartość maksymalną i zero. Z tego samego względu sinusoida III jest opóźniona pod względem fazy w stosunku do sinusoidy I — normalnej. Możemy dla tych sinusoid napisać ogólne równanie

$$i = I_m \sin(\omega t + \alpha)\,,$$

jeżeli kątowi α będziemy nadawali znaki + lub — w zależności od tego czy rozpatrywana sinusoida będzie wyprzedzona, czy też opóźniona w fazie względem sinusoidy normalnej.

Dla $\alpha = 0$ otrzymamy sinusoidę normalną. Kąt α nazywamy *kątem przesunięcia fazy.*

§ 4
WARTOŚĆ ŚREDNIA I WARTOŚĆ SKUTECZNA

Wartością średnią funkcji sinusoidalnej nazywamy średnią arytmetyczną wszystkich wartości bezwzględnych tej funkcji w ciągu jednego jej okresu. Rozpatrując funkcję sinusoidalną czasu

$$y = Y_m \sin \omega t = Y_m \sin \frac{2\pi}{T} t \tag{11}$$

będziemy mieli, na podstawie powyższego określenia, dla wartości średniej tej funkcji wzór

$$Y_{śr} = \frac{1}{T} \int_0^T |Y| dt,$$

gdzie $|Y|$ stanowi wartość bezwzględną rozpatrywanej funkcji. Ponieważ wartości bezwzględne funkcji sinusoidalnej w drugiej połowie okresu są zupełnie takie same jak w pierwszej połowie, przeto dla takiej funkcji możemy dla obliczenia średniej wartości ograniczyć się do połowy okresu i napisać

$$Y_{śr} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} y\, dt. \tag{12}$$

Podstawiając wartość y z (11) i wykonując całkowanie, otrzymamy

$$Y_{śr} = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} Y_m \sin\frac{2\pi}{T}t\,dt = \frac{2Y_m}{T}\cdot\frac{T}{2\pi}\left|-\cos\frac{2\pi}{T}t\right|_0^{T/2} = \frac{2}{\pi}Y_m. \qquad (13)$$

Wyraz $\frac{2}{\pi}$ w przybliżeniu równa się 0,64, możemy więc napisać przybliżony wzór

$$Y_{śr} \cong 0{,}64\,Y_m\,.$$

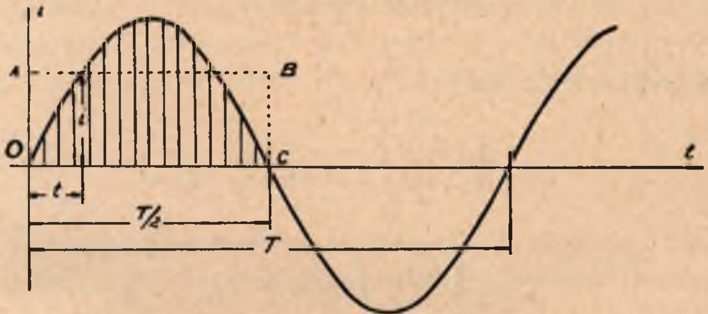
Rozpatrując na przykład przebieg natężenia prądu przedstawiony na rys. 6, określony wzorem

$$i = I_m \sin\omega t\,,$$

otrzymamy dla wartości średniej tego prądu

$$I_{śr} = \frac{2}{\pi}I_m \cong 0{,}64\,I_m;$$

wartość ta na rysunku odpowiada rzędnej OA.



Rys. 6

Obliczmy ładunek elektryczny Q, który przepływa przez obwód z rozpatrywanym prądem w ciągu połowy okresu. W pewnej chwili t natężenie prądu ma wartość i; w ciągu nieskończenie małego czasu dt ładunek elektryczny przepływający w obwodzie będzie

$$dq = i\,dt\,.$$

Ładunek elektryczny, jaki przepłynie przez obwód w ciągu połowy okresu, wyrazi się wzorem

$$Q = \int_0^{T/2} i\,dt\,.$$

Całka ta stanowi pole ograniczone połową fali sinusoidy i osią odciętych, z drugiej strony pole to jest równe polu prostokąta $OABC$, którego jeden bok stanowi połowę okresu, drugi zaś bok równy jest wartości średniej natężenia prądu, czyli

$$Q = I_{śr}\frac{T}{2}.$$

Możemy więc określić średnią wartość natężenia prądu zmiennego jako natężenie takiego prądu stałego, przy którym ładunek elektryczny przepływający w ciągu połowy okresu będzie ten sam co i przy rozpatrywanym prądzie zmiennym. Na rysunku pole $OABC$ odpowiada wartości Q.

Wartością skuteczną funkcji sinusoidalnej nazywamy pierwiastek kwadratowy ze średniej arytmetycznej kwadratów jej wartości, obliczonej dla całego okresu. Dla funkcji przedstawionej wzorem (11) wartość skuteczna Y będzie określona wzorem

$$Y = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T y^2\,dt} \tag{14}$$

lub, po podstawieniu wartości y,

$$Y = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T Y_m{}^2 \sin^2\frac{2\pi}{T}t\,dt} =$$

$$= Y_m\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \sin^2\frac{2\pi}{T}t\,dt}.$$

Całka pod pierwiastkiem, którą możemy łatwo rozwiązać, zakładając $\sin^2\frac{2\pi}{T}t = \frac{1-\cos\frac{4\pi}{T}t}{2}$, równa się $\frac{T}{2}$; wobec tego otrzymujemy

$$Y = \frac{1}{\sqrt{2}}Y_m. \tag{15}$$

Wyraz $\frac{1}{\sqrt{2}}$ w przybliżeniu równa się 0,707, więc dla wartości skutecznej możemy napisać przybliżony wzór:

$$Y \cong 0{,}707\, Y_m.$$

Wartości skutecznej natężenia prądu możemy nadać pewne znaczenie fizyczne, rozumując w sposób następujący. Rozpatrując obwód elektryczny, przez który przepływa prąd stały o natężeniu I, wyrazimy energię W_s przetwarzającą się na ciepło w ciągu czasu T wzorem

$$W_s = I^2 R T, \tag{16}$$

gdzie R oznacza oporność obwodu. Gdy przez ten sam obwód przepływać będzie prąd zmienny, energię W_z w ciągu okresu T obliczymy rozpatrując nieskończenie mały przeciąg czasu dt po chwili t, gdy natężenie prądu ma wartość i; w tym czasie energia $d\,W_z$ wyrazi się wzorem

$$d\,W_z = i^2 R\,d\,t;$$

całkując w granicach od 0 do T, znajdziemy wartość energii W_z; więc

$$W_z = \int_0^T i^2 R\,d\,t. \tag{17}$$

Dobierzmy teraz taką wartość natężenia prądu stałego I, który by w okresie T dał energię taką samą co i rozpatrywany prąd zmienny; w tym celu przyrównamy do siebie wzory (16) i (17), wtedy

$$I^2 R\,T = \int_0^T i^2 R\,d\,t.$$

W przypadku, gdy oporność R obwodu pozostaje taka sama jak przy prądzie stałym, obie strony ostatniej równości możemy podzielić przez R, wtedy

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt}.$$

Wyraz z prawej strony stanowi wartość skuteczną natężenia prądu zmiennego, możemy więc dać następujące określenie: wartość skuteczna natężenia prądu zmiennego jest to taki umyślony prąd stały, który, płynąc w obwodzie ze stałą opornością, wytworzyłby w ciągu okresu T taką samą energię, jaką w rzeczywistości wytwarza w tym samym czasie prąd zmienny.

Wartości skuteczne mają wielkie znaczenie przy rozważaniu prądów zmiennych. Gdy podajemy wartości natężenia lub napięcia prądu zmiennego, zwykle mamy na myśli wartości skuteczne tych wielkości. Przyrządy pomiarowe używane w technice do mierzenia napięć i natężeń prądu zmiennego wskazują najczęściej wartości skuteczne.

Wartości skuteczne przyjęto oznaczać dużymi literami bez wskaźników, piszemy więc, uwzględniając wzór (15),

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}; \quad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}; \quad E = \frac{E_m}{\sqrt{2}} \text{ itd.}$$

Wprowadzając do wzorów na wartości chwilowe — zamiast wartości szczytowych, czyli maksymalnych — wartości skuteczne, możemy napisać

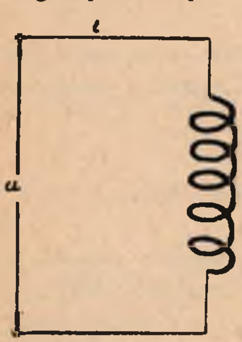
$$i = I\sqrt{2} \sin \omega t; \quad u = U\sqrt{2} \sin \omega t; \quad e = E\sqrt{2} \sin \omega t \text{ itd.}$$

§ 5
MOC PRĄDU ZMIENNEGO. WSPÓŁCZYNNIK MOCY

Rozpatrzmy część obwodu elektrycznego (rys. 7), na końcówkach którego działa napięcie o wartości chwilowej

$$u = U_m \sin \omega t \tag{18}$$

i przepływa prąd o wartości chwilowej i. W obwodach prądu zmiennego, jak o tym niejednokrotnie się przekonamy, natężenie prądu na ogół nie jest w fazie z napięciem; pomiędzy tymi wielkościami zachodzi przesunięcie fazy; oznaczając kąt przesunięcia fazy pomiędzy natężeniem i napięciem prądu przez φ, przy czym φ może mieć znak zarówno dodatni jak i ujemny, otrzymamy dla wartości chwilowej natężenia prądu wzór



Rys. 7

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi). \tag{19}$$

Przy prądzie stałym moc pobierana w rozpatrywanej części obwodu byłaby określona iloczynem napięcia przez natężenie prądu i miałaby wartość stałą w ciągu czasu, w którym napięcie i natężenie prądu pozostają bez zmiany. Przy prądzie zmiennym iloczyn wartości chwilowych napięcia i natężenia prądu daje nam wartość mocy w określonej chwili; oznaczając wartość chwilową mocy przez p, możemy napisać

$$p = ui;$$

podstawiając na miejsce u oraz i wartości ich ze wzorów (18) i (19), otrzymamy

$$p = U_m I_m \sin \omega t \sin (\omega t + \varphi).$$

Iloczyn sinusów możemy przekształcić na zasadzie wzoru trygonometrycznego:

$$\sin m \sin n = \frac{1}{2} [\cos (m - n) - \cos (m + n)],$$

wtedy

$$p = \frac{1}{2} U_m I_m [\cos \varphi - \cos (2 \omega t + \varphi)]. \tag{20}$$

Jak widać z tego wzoru, wartość chwilowa mocy składa się z dwóch części, z których pierwsza

$$\frac{1}{2} U_m I_m \cos \varphi$$

jest wielkością stałą w czasie, natomiast część druga

$$-\frac{1}{2} U_m I_m \cos (2 \omega t + \varphi) = \frac{1}{2} U_m I_m \sin \left(2 \omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

stanowi funkcję sinusoidalną czasu z pulsacją, a więc i z częstotliwością dwa razy większą od tej, jaką mają napięcie i natężenie prądu. Okres tej funkcji jest dwa razy mniejszy od okresu napięcia lub natężenia prądu, czyli wynosi $T/2$. Znak wartości chwilowej mocy może być na ogół dodatni lub ujemny, co oznacza, że w pierwszym przypadku moc jest pobierana, w drugim zaś oddawana przez rozpatrywaną część obwodu. W szczególnym przypadku, gdy $\cos \varphi = 1$, $\varphi = 0$, tzn. gdy prąd jest w fazie z napięciem, wartość chwilowa mocy stale jest dodatnia, czyli stale jest pobierana.

W praktyce chodzi nam zwykle o wartość średnią mocy, obliczoną dla całego okresu przebiegu mocy, czyli dla czasu $\frac{T}{2}$; tę średnią moc nazywamy *mocą czynną*, pospolicie często się mówi wprost moc prądu zmiennego, rozumiejąc pod tym moc czynną.

Oznaczając moc czynną przez P, napiszemy na podstawie powyższego określenia następujący wzór

$$P = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} p\,dt;$$

podstawiając wartość p ze wzoru (20), otrzymamy

$$P = \frac{1}{2} U_m I_m \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \left[\cos\varphi - \cos(2\omega t + \varphi) \right] dt =$$

$$= \frac{1}{2} U_m I_m \frac{2}{T} \left\{ \frac{T}{2} \cos\varphi - \frac{1}{2\omega} \left[\sin(\omega T + \varphi) - \sin\varphi \right] \right\},$$

a ponieważ $\omega T = 2\pi$,

$$P = \frac{1}{2} U_m I_m \cos\varphi;$$

wprowadzając wartości skuteczne napięcia i prądu, czyli zakładając $U_m = U\sqrt{2}$, $I_m = I\sqrt{2}$, otrzymamy ostatecznie

$$P = UI\cos\varphi. \tag{21}$$

Cos φ nazywamy *współczynnikiem mocy* prądu zmiennego. Gdy $\varphi = 0$, $\cos\varphi = 1$, czyli gdy prąd jest w fazie z napięciem, moc czynna prądu zmiennego jest taka, jak gdybyśmy mieli prąd stały o napięciu U i natężeniu I. Gdy natężenie prądu jest przesunięte w fazie względem napięcia o kąt prosty, czyli $\varphi = \frac{\pi}{2}$, spółczynnik mocy staje się równym zeru i moc czynna będzie równa zeru.

Iloczyn napięcia przez natężenie prądu zmiennego nazywamy *mocą pozorną;* oznaczając ją przez P_z, mamy

$$P_z = UI. \tag{22}$$

Współczynnik mocy $\cos\varphi$ możemy określić jako stosunek mocy czynnej do mocy pozornej

$$\cos\varphi = \frac{P}{UI} = \frac{P}{P_z}. \tag{23}$$

Oprócz tego wprowadzamy pojęcie *mocy biernej* określając ją jako pierwiastek kwadratowy z różnicy kwadratów mocy pozornej i mocy czynnej. Oznaczając moc bierną przez P_x napiszemy:

$$P_x = \sqrt{P_z^2 - P^2} = P_z \sqrt{1 - \left(\frac{P}{P_z}\right)^2}. \tag{24}$$

Uwzględniając (23) będziemy mieli:

$$P_x = P_z \sqrt{1 - \cos^2\varphi} = P_z \sin\varphi = UI\sin\varphi. \tag{25}$$

Dla odróżnienia rozpatrywanych mocy przyjęto wyrażać moc czynną w *watach,* moc pozorną w *woltoamperach,* zaś moc bierną w *warach* (*volt-amper-reactif*), oznaczając odpowiednie jednostki przez *W*, *VA* i *VAr*. Tak np., gdy w części obwodu działa napięcie prądu zmiennego o wartości skutecznej 220 woltów i płynie prąd o natężeniu 10 amperów, zaś współczynnik mocy $\cos\varphi = 0{,}8$ ($\sin\varphi = 0{,}6$), będziemy mieli:

$$
\begin{aligned}
&\text{moc czynną} \quad P = 220.10.0{,}8 = 1760\ W,\\
&\text{moc pozorną} \quad P_z = 220.10 = 2200\ VA,\\
&\text{moc bierną} \quad P_x = 220.10.0{,}6 = 1320\ VAr.
\end{aligned}
$$

§ 6
DODAWANIE FUNKCJI SINUSOIDALNYCH

Przy badaniu prądów zmiennych często będziemy się powoływali na następujące twierdzenie: jeżeli mamy szereg funkcji sinusoidalnych czasu o jednakowej częstotliwości, np.

$$
\begin{aligned}
y_1 &= A_1 \sin(\omega t + \alpha_1),\\
y_2 &= A_2 \sin(\omega t + \alpha_2),\\
&\ldots\ldots\ldots\\
y_n &= A_n \sin(\omega t + \alpha_n),
\end{aligned}
$$

wtedy algebraiczna suma tych funkcji będzie również funkcją sinusoidalną o tej samej częstotliwości; więc

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n = A \sin(\omega t + \alpha).$$

Aby tego dowieść, przepisujemy dane funkcje w sposób następujący:

$$
\left.
\begin{aligned}
A_1 \cos\alpha_1 \sin\omega t + A_1 \sin\alpha_1 \cos\omega t +\\
+A_2 \cos\alpha_2 \sin\omega t + A_2 \sin\alpha_2 \cos\omega t +\\
+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +\\
+A_n \cos\alpha_n \sin\omega t + A_n \sin\alpha_n \cos\omega t
\end{aligned}
\right\} = A\cos\alpha \sin\omega t + A \sin\alpha \cos\omega t
$$

Wyrażenia te muszą stanowić tożsamość, wobec czego współczynniki przy $\sin\omega t$ i przy $\cos\omega t$ z lewej i z prawej strony muszą być sobie równe.

Mamy więc:

$$
\left.
\begin{aligned}
A_1 \cos\alpha_1 + A_2 \cos\alpha_2 + \ldots + A_n \cos\alpha_n = A\cos\alpha\\
A_1 \sin\alpha_1 + A_2 \sin\alpha_2 + \ldots + A_n \sin\alpha_n = A\sin\alpha
\end{aligned}
\right\}.
$$

Podnosząc oba równania do kwadratu i dodając, otrzymamy

$$A = \sqrt{(A_1 \cos \alpha_1 + \ldots + A_n \cos \alpha_n)^2 + (A_1 \sin \alpha_1 + \ldots + A_n \sin \alpha_n)^2}, \quad (26)$$

dzieląc zaś drugie równanie przez pierwsze, będziemy mieli:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2 + \ldots + A_n \sin \alpha_n}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2 + \ldots + A_n \cos \alpha_n}. \quad (27)$$

W ten sposób zagadnienie nasze zostało rozwiązane.

W szczególności, gdy mamy dwie funkcje sinusoidalne przesunięte o kąt prosty, czyli

$$y_1 = A_1 \sin \omega t,$$

$$y_2 = A_2 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = A_2 \cos \omega t,$$

wówczas suma tych funkcji może być przedstawiona w postaci

$$y_1 + y_2 = A \sin (\omega t + \alpha),$$

to znaczy

$$A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t = A \sin (\omega t + \alpha). \quad (28)$$

W myśl rozumowań powyższych winno być

$$A \cos \alpha = A_1,$$

$$A \sin \alpha = A_2,$$

skąd wyznaczamy

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}, \quad (29)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{A_2}{A_1}. \quad (30)$$

Co do znaków A_1 i A_2, to mogą one być jednakowe lub różne; w pierwszym przypadku kąt α jest dodatni, czyli wypadkowa sinusoida wyprzedza sinusoidę normalną o kąt α; jeżeli zaś znaki A_1 i A_2 są różne, wówczas α ma wartość ujemną, co wskazuje, że sinusoida wypadkowa opóźnia się o kąt α względem sinusoidy normalnej.

R O Z D Z I A Ł D R U G I

OBWODY PRĄDU ZMIENNEGO ZE SKUPIONYMI OPORNOŚCIAMI

§ 7

OBWÓD Z OPORNOŚCIĄ RZECZYWISTĄ

Każde ciało posiada własność przeciwstawiania się przepływowi elektryczności w większym lub mniejszym stopniu, przy czym w ciele zachodzi przemiana energii elektrycznej w ciepło. Własność tę nazywamy oporem elektrycznym. Wielkość fizyczną charakteryzującą tę własność będziemy nazywali *opornością;* jest ona zależna od oporności właściwej rozpatrywanego ciała oraz od jego kształtu i rozmiarów.

Przy prądzie stałym oporność stanowi iloraz różnicy potencjałów pomiędzy końcami przewodnika przez natężenie prądu, gdy w tym przewodniku nie występuje siła elektromotoryczna; wynika to bezpośrednio z prawa Ohma.

Moc P prądu I, wydzielana w postaci ciepła w części obwodu z opornością R, wyraża się wzorem

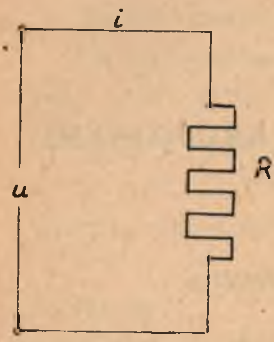
$$P = I^2 R;$$

wobec tego oporność można określić jako iloraz mocy wydzielonej w postaci ciepła przez kwadrat natężenia prądu przepływającego przez rozpatrywaną część obwodu.

Przy prądzie zmiennym, w samym przewodniku, o czym później będzie mowa, zachodzi zjawisko naskórkowości, powodujące pozorne zwiększenie oporności. Wobec tego iloraz mocy wydzielonej w postaci ciepła w samym przewodniku przez kwadrat natężenia prądu jest na ogół większy przy prądzie zmiennym niż przy prądzie stałym.

Nazwijmy tego rodzaju oporność przy prądzie zmiennym *opornością rzeczywistą*.

Poza tym przy prądzie zmiennym zachodzą jeszcze zjawiska w otoczeniu przewodnika (w izolacji, w masach żelaznych), o których również później będzie mowa, a które powodują wytwarzanie się ciepła w tym otoczeniu; w tych warunkach ogólna ilość wytworzonego przez prąd ciepła jest większa niż ilość ciepła wytworzonego w samym przewodniku. Nazwijmy iloraz mocy wydzielonej w postaci ciepła z uwzględnieniem wszystkich zjawisk, przez kwadrat natężenia prądu, *opornością czynną*,



Rys. 8

W przypadku, gdy w przewodniku zjawisko naskórkowości wpływa bardzo mało na zwiększenie oporności, możemy oporność rzeczywistą założyć równą oporności, jaką mielibyśmy przy prądzie stałym; wówczas oporność rzeczywistą nazywa się jeszcze *opornością omową*.

Rozpatrzmy część obwodu z opornością rzeczywistą o stałej wartości R (rys. 8). Niech napięcie działające na tę oporność będzie

$$u = U_m \sin \omega t.$$

Wartość natężenia prądu w każdej chwili na zasadzie prawa Ohma będzie

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_m}{R} \sin \omega t,$$

a więc w danym przypadku prąd i ma również przebieg sinusoidalny *i jest w fazie z napięciem*. Jak widać z ostatniego wzoru,

$$\frac{U_m}{R} = I_m,$$

czyli

$$i = I_m \sin \omega t;$$

wartość skuteczna natężenia prądu będzie

$$I = \frac{U}{R},$$

taka sama, jak gdybyśmy mieli prąd stały.

§ 8

OBWÓD Z OPORNOŚCIĄ RZECZYWISTĄ I INDUKCYJNOŚCIĄ W POŁĄCZENIU SZEREGOWYM

Prąd płynący w obwodzie powoduje powstanie pola magnetycznego, a więc i strumienia magnetycznego. Strumień ten zależy od natężenia prądu płynącego w obwodzie i zmienia się jednocześnie ze zmianą prądu.

Gdy strumień magnetyczny objęty przez obwód podlega zmianom, powstaje w obwodzie *S E M* indukcji, którą możemy określić z ogólnego wzoru

$$e_i = -\frac{d\Phi_t}{dt},$$

gdzie e_i oznacza wartość *S E M* w chwili t, Φ_t — wartość strumienia magnetycznego w tejże chwili; gdy obwód zawiera wiele zwojów, tworząc cewkę o z zwojach, należy we wzorze powyższym pomnożyć strumień magnetyczny przez liczbę zwojów.

Stosunek strumienia magnetycznego Φ, objętego przez obwód, do natężenia prądu i, płynącego w obwodzie i wytwarzającego ten strumień, stanowi indukcyjność własną danego obwodu. W ten sposób indukcyjność własna L określona jest wzorem

$$L = \frac{\Phi}{i},$$

skąd

$$\Phi = Li.$$

Wartość indukcyjności zależy od kształtu i rozmiarów geometrycznych obwodu; dla próżni oraz praktycznie dla środowiska magnetycznie obojętnego ma ona wartość stałą, w przypadku zaś, gdy środowisko ma zmienną przenikalność magnetyczną, indukcyjność będzie funkcją prądu i.

Podstawiając wartość Φ do wzoru na *S E M* indukcji, otrzymamy

$$e_i = -\frac{d(Li)}{dt};$$

w przypadku szczególnym, gdy mamy środowisko o stałej przenikalności magnetycznej, a więc praktycznie i dla powietrza,

$$e_i = -L\frac{di}{dt}.$$

Rozpatrzmy obwód, w którym oprócz *S E M* o wartości chwilowej e powstaje *S E M* indukcji o wartości chwilowej e_i. Oznaczając przez R oporność tego obwodu, otrzymamy, według prawa O h m a, dla wartości chwilowej prądu i płynącego w obwodzie

$$i = \frac{e + e_i}{R}$$

lub na podstawie poprzedniego wzoru

$$i = \frac{e - L\frac{di}{dt}}{R},$$

skąd

$$e = Ri + L\frac{di}{dt}.$$

Iloczyn Ri stanowi napięcie na oporności rzeczywistej. Drugi wyraz $L\frac{di}{dt}$ stanowi wartość SEM indukcji, wziętą ze znakiem przeciwnym, można go więc traktować jako napięcie idące na przeciwdziałanie, czyli pokonanie SEM indukcji; nazywamy ten wyraz napięciem indukcyjnym. Oznaczając to ostatnie napięcie przez u_i i rozpatrując prąd o przebiegu sinusoidalnym

$$i = I_m \sin \omega t,$$

otrzymamy

$$u_i = L\frac{di}{dt} = \omega L I_m \cos \omega t = \omega L I_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Z tego wzoru widać, że napięcie indukcyjne wyprzedza w fazie natężenie prądu o kąt $\frac{\pi}{2}$; odwrotnie, możemy powiedzieć, że prąd opóźnia się w fazie względem napięcia indukcyjnego o kąt $\frac{\pi}{2}$. Wartość skuteczna tego napięcia będzie

$$U_i = \omega L I.$$

Jak łatwo zauważyć, ωL, stanowiące stosunek napięcia do natężenia prądu, ma wymiar oporności, a więc może być wyrażone w omach; wyraz ten nazywamy *opornością indukcyjną.*

Oporność indukcyjna $\omega L = 2\pi f L$ zależy, jak widzimy, od częstotliwości prądu zmiennego i jest proporcjonalna do częstotliwości.

Rozpatrzmy teraz obwód zawierający oprócz oporności rzeczywistej jeszcze indukcyjność, np. w postaci cewki w szeregowym połączeniu.

Schemat takiego obwodu mamy na rys. 9. Działa napięcie

$$u = U_m \sin \omega t.$$

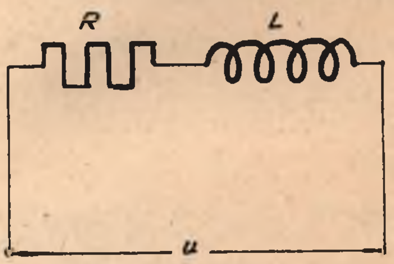
W każdej chwili powinno być

$$u = Ri + L\frac{di}{dt},$$

czyli

$$Ri + L\frac{di}{dt} = U_m \sin \omega t. \tag{1}$$

Jest to równanie różniczkowe liniowe o współczynnikach stałych.



Rys. 9

Rozwiązujemy najpierw równanie uproszczone:

$$L\frac{di}{dt} + Ri = 0;$$

rozdzielamy zmienne

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L}dt;$$

po scałkowaniu, oznaczając przez A stałą dowolną, którą możemy napisać również w postaci $ln A$, otrzymamy

$$ln\, i = -\frac{R}{L}t + ln\, A \qquad \text{lub} \qquad ln\frac{i}{A} = -\frac{R}{L}t,$$

skąd

$$i = Ae^{-\frac{R}{L}t}. \tag{2}$$

Aby otrzymać całkę ogólną rozpatrywanego równania (1), musimy do znalezionej wartości i dodać całkę szczególną równania. Szukamy jej w postaci ogólnej $i = M \sin \omega t + N \cos \omega t$ lub, zastępując sumę tych dwóch funkcji jedną funkcją na podstawie wzoru (28) z § 6,

$$i = P \sin(\omega t + a), \tag{3}$$

gdzie P i a są stałe do znalezienia. Wtedy

$$\frac{di}{dt} = P\omega \cos(\omega t + a).$$

Po podstawieniu tych wartości do równania (1) otrzymujemy

$$PR \sin(\omega t + a) + P\omega L \cos(\omega t + a) = U_m \sin \omega t.$$

Rozkładając $\sin(\omega t + a)$ i $\cos(\omega t + a)$, otrzymujemy po zgrupowaniu i przyrównaniu współczynników przy $\sin \omega t$ i $\cos \omega t$

z lewej i z prawej strony

$$PR\cos\alpha - P\omega L\sin\alpha = U_m,$$
$$PR\sin\alpha + P\omega L\cos\alpha = 0.$$

Podnosząc oba równania do kwadratu i dodając otrzymujemy

$$P = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}},$$

z drugiego równania mamy zaś

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\omega L}{R}.$$

Wyraz $\frac{\omega L}{R}$ zawsze jest większy od 0, tg α jest mniejszy od 0, wobec tego $\alpha < 0$. Załóżmy $\varphi = -\alpha$, tak iż $\varphi > 0$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L}{R}.$$

Podstawiając wartość P do równania (3) oraz zamieniając α na $-\varphi$ otrzymujemy

$$i = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}\sin(\omega t - \varphi),$$

zaś całka ogólna równania naszego będzie miała postać

$$i = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}\sin(\omega t - \varphi) + A e^{-\frac{R}{L}t}. \qquad (4)$$

Zbadajmy wyraz

$$A e^{-\frac{R}{L}t}.$$

W miarę wzrastania czasu funkcja ta maleje dążąc do 0. Teoretycznie staje się ona równą 0 przy $\frac{R}{L}t = \infty$; może to być: 1) przy $R = \infty$ (przerwa w obwodzie), lecz wtedy znika prąd i, 2) przy $L = 0$ — przypadek ten już rozpatrywaliśmy w § 7, wreszcie 3) przy $t = \infty$. W rzeczywistości, po upływie bardzo krótkiego czasu wyraz $A e^{-\frac{R}{L}t}$ otrzymuje zwykle wartość bardzo małą, czyli praktycznie równą zeru. Mamy wtedy tak zwany stan ustalony prądu. Obecnie będziemy rozpatrywali wyłącznie stany ustalone. W tym przypadku wzór (4) upraszcza się, mianowicie

$$i = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}\sin(\omega t - \varphi). \qquad (5)$$

Porównywając ten wzór ze wzorem na napięcie i mając na względzie, że $\varphi > 0$, widzimy, że *natężenie prądu jest opóźnione w fazie względem napięcia,* przy czym

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R}. \tag{6}$$

Wartość maksymalna tego natężenia prądu wynosi

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}.$$

Wobec tego wartość skuteczna będzie

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}. \tag{7}$$

Przy prądzie stałym mielibyśmy według prawa Ohma

$$I = \frac{U}{R},$$

gdyż nie występowałoby zjawisko indukcji własnej.

Chcąc zastosować prawo Ohma do prądu zmiennego, musimy zamiast oporności R wprowadzić wyraz

$$\sqrt{R^2 + (\omega L)^2} > R.$$

Wyraz ten nazywamy *opornością pozorną* i oznaczamy przez Z,

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}. \tag{8}$$

W ten sposób możemy napisać

$$I = \frac{U}{Z}. \tag{9}$$

Oporność pozorną mierzymy w omach.

Ze wzoru

$$i = I_m \sin(\omega t - \varphi)$$

mamy

$$i = I_m \cos\varphi \sin\omega t - I_m \sin\varphi \cos\omega t.$$

Ponieważ

$$\cos\omega t = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \omega t\right),$$

$$-\cos\omega t = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \omega t\right) = \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right),$$

możemy napisać

$$i = I_m \cos\varphi \sin\omega t + I_m \sin\varphi \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right);$$

otrzymaliśmy wartość chwilową prądu w postaci dwu funkcji sinusoidalnych. Załóżmy

$$I_m \cos\varphi \sin\omega t = i_1,$$

$$I_m \sin\varphi \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = i_2,$$

czyli

$$i = i_1 + i_2,$$

następnie, oznaczając

$$I_m \cos\varphi = I_{1m}, \quad I_m \sin\varphi = I_{2m},$$

otrzymamy

$$i_1 = I_{1m} \sin\omega t,$$

$$i_2 = I_{2m} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Pierwszy z tych prądów jest w fazie z napięciem, drugi zaś opóźniony względem napięcia o kąt $\frac{\pi}{2}$.

Wartość skuteczna prądu pierwszego wynosi

$$I_1 = I\cos\varphi,$$

zaś prądu drugiego

$$I_2 = I\sin\varphi.$$

Moc czynna rozpatrywanego prądu zmiennego równa jest

$$P = UI\cos\varphi.$$

Tę właśnie moc daje prąd pierwszy, gdyż jest on w fazie z napięciem i moc jego równa się

$$UI_1 = UI\cos\varphi.$$

Moc prądu drugiego, wobec przesunięcia jego fazy względem fazy napięcia o kąt $\frac{\pi}{2}$, będzie

$$UI_2 \cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

Z tego powodu nazywamy pierwszy prąd o wartości skutecznej $I\cos\varphi$ prądem *czynnym*, prąd zaś drugi o wartości skutecznej $I\sin\varphi$ prądem *biernym*. Dawniej były w użyciu jeszcze terminy: prąd watowy i prąd bezwatowy.

§ 9

OBWÓD Z R i C W POŁĄCZENIU SZEREGOWYM

Każdy przewodnik posiada pewną pojemność elektryczną, określoną stosunkiem ładunku elektrycznego, znajdującego się na przewodniku, do potencjału tego przewodnika. Oznaczając pojemność przez C, ładunek przez Q i potencjał przez V, mamy

$$C = \frac{Q}{V}.$$

Większe skupienie ładunków elektrycznych otrzymujemy w kondensatorach elektrycznych, których pojemność określamy jako stosunek ładunku do napięcia istniejącego między okładzinami kondensatora, czyli

$$C = \frac{Q}{U_c},$$

gdzie przez U_c oznaczyliśmy to napięcie.

Gdy kondensator w pewnej chwili t włączymy do napięcia prądu zmiennego

$$u = U_m \sin \omega t,$$

otrzyma on w ciągu nieskończenie małego czasu dt ładunek

$$dq = i\,dt,$$

gdzie i oznacza wartość natężenia prądu w rozpatrywanej chwili, idącego na ładowanie kondensatora; ten ładunek dq spowoduje powstanie napięcia du_c pomiędzy okładzinami kondensatora, przy czym

$$C = \frac{dq}{du_c} = \frac{i\,dt}{du_c},$$

skąd

$$\frac{du_c}{dt} = \frac{i}{C} \tag{10}$$

lub

$$i = C\frac{du_c}{dt}.$$

Napięcie na kondensatorze, spowodowane napięciem z zewnątrz przyłożonym, ma przebieg również sinusoidalny, czyli

$$u_c = U_{cm} \sin \omega t,$$

wobec czego

$$i = C\omega U_{cm} \cos \omega t = \omega C U_{cm} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Z wzoru tego widać, że prąd ładujący kondensator wyprzedza napięcie na kondensatorze w fazie o kąt $\frac{\pi}{2}$. Wartość skuteczna tego prądu wynosi

$$I = \omega C U_c,$$

skąd

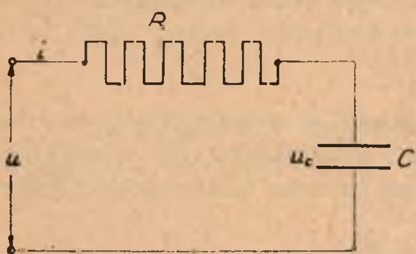
$$\frac{U_c}{I} = \frac{1}{\omega C}.$$

Ostatni wyraz, jako stosunek napięcia do natężenia prądu ma wymiar oporności, nazywamy go *opornością pojemnościową*.

Oporność pojemnościowa $\frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C}$ jest odwrotnie proporcjonalna do częstotliwości prądu zmiennego, a więc maleje przy wzroście częstotliwości.

Rozpatrzmy teraz obwód zawierający oporność rzeczywistą i pojemność w postaci kondensatora w szeregowym połączeniu.

Schemat takiego obwodu mamy na rys. 10, gdzie C oznacza pojemność włączonego kondensatora.



Rys. 10

Przy prądzie stałym prąd płynąłby w obwodzie tylko do chwili, gdy kondensator zostanie naładowany, co zwykle następuje bardzo prędko po zamknięciu obwodu.

Przy prądzie zmiennym kondensator podlega ciągłym ładowaniom i wyładowaniom, powstaje prąd przesunięcia, wobec czego prąd stale będzie płynął w takim obwodzie. W każdej chwili napięcie przyłożone z zewnątrz równać się musi sumie napięć powstałych w rozpatrywanym obwodzie. Napięć tych mamy w danym przypadku dwa: jedno na oporności R równe Ri, napięcie zaś drugie — na kondensatorze, zmienne w czasie; oznaczamy to napięcie przez u_c.

Wtedy

$$Ri + u_c = u. \tag{11}$$

Biorąc w równaniu (11) pochodne względem czasu i uwzględniając wzór (10), otrzymujemy

$$R\frac{di}{dt}+\frac{du_c}{dt}=\frac{du}{dt};$$

ponieważ

$$u = U_m \sin \omega t,$$

otrzymamy

$$R\frac{di}{dt}+\frac{i}{C} = U_m\,\omega \cos \omega t. \tag{12}$$

Stosując przy całkowaniu tego równania tę samą metodę co w § 8, znajdujemy najpierw całkę ogólną równania uproszczonego w postaci

$$i = A e^{-\frac{1}{RC}t},$$

gdzie A jest stałą dowolną.

Całki szczególnej szukamy w postaci

$$i = P \sin(\omega t + \alpha),$$

gdzie P i α są stałe, które należy znaleźć.

Różniczkując ostatnią funkcję, będziemy mieli

$$\frac{di}{dt} = P\omega \cos(\omega t + \alpha);$$

po podstawieniu tych wartości do (12) będziemy mieli

$$\omega R P \cos(\omega t + \alpha) + \frac{P}{C}\sin(\omega t + \alpha) = U_m\,\omega \cos \omega t.$$

Rozkładając $\cos(\omega t + \alpha)$ i $\sin(\omega t + \alpha)$ i przyrównując następnie współczynniki przy $\cos \omega t$ i $\sin \omega t$ z lewej i z prawej strony, otrzymujemy dwa następujące równania:

$$\omega R P \cos \alpha + \frac{P}{C}\sin \alpha = U_m \omega,$$

$$-\omega R P \sin \alpha + \frac{P}{C}\cos \alpha = 0.$$

Podnosząc oba równania do kwadratu i dodając, otrzymujemy

$$R^2P^2 + \frac{P^2}{(\omega C)^2} = U_m^2,$$

stąd

$$P = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}};$$

następnie z drugiego równania

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{1}{\omega C}}{R}.$$

Zamieniając α na φ, gdzie $\varphi > 0$, otrzymamy dla całki ogólnej równania (12)

$$i = A e^{-\frac{1}{RC} t} + \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} \sin(\omega t + \varphi).$$

Funkcja $A e^{-\frac{1}{RC} t}$ maleje ze wzrostem czasu i zwykle po upływie bardzo krótkiego czasu staje się praktycznie równą zeru. Dla stanu ustalonego natężenie prądu ma wartość

$$i = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} \sin(\omega t + \varphi), \tag{13}$$

przy czym

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{1}{\omega C}}{R}. \tag{14}$$

Widzimy, że *natężenie prądu wyprzedza napięcie* w fazie.

Ze wzoru (13) wynika, że

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}},$$

więc wartość skuteczna natężenia prądu wynosi

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \tag{15}$$

Mianownik $\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$ stanowi oporność pozorną rozpatrywanego obwodu.

Ze wzoru (13) mamy

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi),$$

skąd otrzymujemy

$$i = I_m \cos\varphi \sin\omega t + I_m \sin\varphi \cos\omega t =$$

$$= I_m \cos\varphi \sin\omega t + I_m \sin\varphi \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

W ten sposób prąd i rozłożyliśmy na dwa prądy sinusoidalne o amplitudach $I_m \cos\varphi$ oraz $I_m \sin\varphi$. Pierwszy, o wartości skutecznej $I\cos\varphi$, jest w fazie z napięciem, a więc jest to prąd czynny; drugi jest przyspieszony względem napięcia w fazie o kąt $\frac{\pi}{2}$, jest to więc prąd, który czynnej mocy nie daje, czyli prąd bierny.

§ 10
OBWÓD Z OPORNOŚCIĄ RZECZYWISTĄ, INDUKCYJNOŚCIĄ I POJEMNOŚCIĄ W POŁĄCZENIU SZEREGOWYM

Na rys. 11 podany jest schemat obwodu zawierającego w szeregowym połączeniu oporność rzeczywistą R, indukcyjność L oraz pojemność C. Oznaczając przez u napięcie przyłożone z zewnątrz do rozpatrywanej części obwodu, przez u_c zaś napięcie na pojemności C powstające przy prądzie i, będziemy mieli w każdej chwili

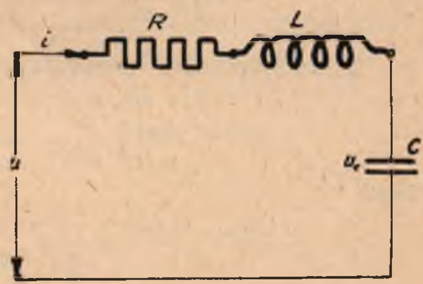
$$Ri + L\frac{di}{dt} + u_c = u = U_m \sin\omega t. \tag{16}$$

Biorąc pochodną względem t i zamieniając na podstawie wzoru (10) $\frac{du_c}{dt}$ na $\frac{i}{C}$, otrzymamy

$$L\frac{d^2 i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \omega U_m \cos\omega t. \tag{17}$$

Całka ogólna tego równania stanowi sumę całki ogólnej równania uproszczonego

$$L\frac{d^2 i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0$$



Rys. 11

oraz całki szczególnej rozpatrywanego równania (17). Pierwsza całka zawiera funkcje wykładnicze zmiennej niezależnej t z ujemnym wykładnikiem potęgi, a więc funkcje malejące z biegiem czasu. Rozpatrując stan ustalony prądu, który następuje zwykle po upływie bardzo krótkiego czasu, odrzucimy te funkcje, czyli całkę ogólną równania uproszczonego. Pozostaje więc do znalezienia całka szczególna danego równania; szukamy jej, jak i w poprzednich przypadkach, w postaci

$$i = P \sin(\omega t + \alpha), \tag{18}$$

gdzie P i α są stałe do znalezienia.

Wtedy

$$\frac{di}{dt} = \omega P \cos(\omega t + \alpha),$$

$$\frac{d^2 i}{dt^2} = -\omega^2 P \sin(\omega t + \alpha).$$

Podstawiając te wartości do równania (17), będziemy mieli

$$-\omega^2 LP \sin(\omega t + \alpha) + \omega RP \cos(\omega t + \alpha) + \frac{P}{C} \sin(\omega t + \alpha) =$$
$$= \omega U_m \cos \omega t.$$

Dzieląc obie strony przez ω i grupując odpowiednie wyrazy, otrzymamy

$$P\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right) \sin(\omega t + \alpha) + PR \cos(\omega t + \alpha) = U_m \cos \omega t;$$

$$P \cos \alpha \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right) \sin \omega t + P \sin \alpha \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right) \cos \omega t -$$
$$- P \sin \alpha R \sin \omega t + P \cos \alpha R \cos \omega t = U_m \cos \omega t;,$$

skąd

$$P\left[\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right) \cos \alpha - R \sin \alpha\right] = 0,$$

$$P\left[\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right) \sin \alpha + R \cos \alpha\right] = U_m.$$

Podnosząc oba równania do kwadratu i dodając, znajdziemy

$$P^2\left[\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2 + R^2\right] = U_m^2,$$

skąd

$$P = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

Z pierwszego z powyższych równań po skróceniu przez P bezpośrednio otrzymujemy

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{R}.$$

Załóżmy $\varphi = -\alpha$, wtedy

$$\operatorname{tg} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \tag{19}$$

W ten sposób dla wartości chwilowej natężenia prądu w stanie ustalonym otrzymujemy

$$i = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \sin(\omega t - \varphi), \tag{20}$$

skąd wartość skuteczna I natężenia prądu będzie określona wzorem

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \tag{21}$$

Wyraz w mianowniku we wzorze (21) stanowi *oporność pozorną* obwodu, którą przyjęto oznaczać przez Z, więc

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}. \tag{22}$$

Różnicę oporności indukcyjnej i pojemnościowej nazywamy *opornością bierną* i oznaczamy literą X. W skróceniu przyjęto oznaczać oporność indukcyjną przez X_L oraz oporność pojemnościową przez X_C; w ten sposób

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C} \tag{23}$$

lub

$$X = X_L - X_C. \tag{24}$$

Czasami spotykamy w literaturze polskiej jeszcze następujące terminy międzynarodowe odpowiadające terminom polskim:

impedancja — oporność pozorna,
rezystancja — „ rzeczywista,
reaktancja — „ bierna,
induktancja lub reaktancja indukcyjna — „ indukcyjna,
kapacitancja lub reaktancja pojemnościowa — „ pojemnościowa.

Rozpatrując oporność bierną: $X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$, widzimy, że gdy

$$\omega L > \frac{1}{\omega C}, \quad \operatorname{tg}\varphi > 0, \quad \varphi > 0;$$

ponieważ we wzorze (20) przed φ pozostanie wtedy znak —, będziemy mieli opóźnienie natężenia prądu względem napięcia; gdy

$$\omega L < \frac{1}{\omega C}, \quad \varphi < 0,$$

otrzymamy we wzorze na natężenie prądu przed φ znak +, czyli przyśpieszenie natężenia prądu względem napięcia.

Wreszcie, gdy

$$\omega L = \frac{1}{\omega C},$$

$$I = \frac{U}{R}, \quad \operatorname{tg} \varphi = 0, \quad \varphi = 0.$$

W tym przypadku natężenie prądu jest w fazie z napięciem, a wartość skuteczna natężenia prądu będzie taka sama jak i przy prądzie stałym.

Ze wzorów (19) i (21) możemy wyprowadzić wszystkie już poprzednio otrzymane wzory, dotyczące poszczególnych obwodów. Więc gdy obwód zawiera tylko oporność rzeczywistą, wtedy

$$L = 0, \quad \omega L = 0$$

oraz

$$C^* = \infty, \quad \frac{1}{\omega C} = 0.$$

Podstawiając powyższe wartości L i C do wzoru (21) otrzymamy

$$I = \frac{U}{R}.$$

Jeżeli obwód zawiera tylko indukcyjność, wtedy

$$R = 0,$$

$$C = \infty, \quad \frac{1}{\omega C} = 0,$$

---

* UWAGA. Brak pojemności w obwodzie zamkniętym w szeregowym połączeniu odpowiada $C = \infty$; prąd nie napotyka przeszkód ze strony kondensatora, oporność pojemnościowa staje się równą zeru. Możemy to łatwo udowodnić matematycznie, rozpatrując np. kondensator płaski, dla którego

$$C = \frac{\varepsilon S}{d},$$

gdzie S — pole powierzchni każdej okładziny, ε — przenikalność dielektryczna, d — odległość pomiędzy okładzinami. Jeżeli będziemy zbliżali okładziny do siebie, wtedy d będzie malało, C będzie wzrastało i dla $d = 0$, tj. wtedy gdy kondensator przestaje odgrywać swoją rolę, stając się wprost przewodnikiem, C równa się ∞.

wzór powyższy daje

$$I = \frac{U}{\omega L};$$

wreszcie, gdy obwód zawiera tylko pojemność,

$$R = 0,$$

$$L = 0, \quad \omega L = 0,$$

otrzymujemy

$$I = U\omega C.$$

Co się tyczy kąta przesunięcia fazy φ, to ze wzoru (19) otrzymujemy

$$\begin{aligned} &\text{dla } L = 0 \\ &\;\;,,\;\; C = \infty \end{aligned} \Bigg\} \varphi = 0,$$

$$\begin{aligned} &,,\;\; R = 0 \\ &,,\;\; C = 0 \end{aligned} \Bigg\} \varphi = \frac{\pi}{2},$$

$$\begin{aligned} &,,\;\; R = 0 \\ &,,\;\; L = 0 \end{aligned} \Bigg\} \varphi = -\frac{\pi}{2}.$$

Ponieważ kąt φ wzięty jest we wzorze (20) ze znakiem ujemnym, więc w pierwszym przypadku prąd jest w fazie z napięciem, w drugim — prąd jest opóźniony o kąt 90°, w trzecim przypadku zaś przyśpieszony o kąt 90° względem napięcia.

Na odwrót, jeżeli określamy napięcie mając wartość natężenia prądu oraz odpowiednie oporności, będziemy mieli dla wyżej rozpatrzonych przypadków: napięcie na oporności rzeczywistej

$$U_R = IR; \tag{25}$$

jest ono w fazie z natężeniem prądu; napięcie indukcyjne

$$U_L = I\omega L; \tag{26}$$

jest ono przyśpieszone w fazie o kąt 90° względem natężenia prądu; napięcie na kondensatorze

$$U_c = I\,\frac{1}{\omega C}; \tag{27}$$

jest ono opóźnione w fazie o kąt 90° względem natężenia prądu.

Jak widzimy, dla otrzymania napięcia musimy natężenie prądu pomnożyć przez odpowiednią oporność bądź czynną, bądź bierną.

§ 11

REZONANS NAPIĘĆ

Rozpatrując obwód z opornością rzeczywistą R, indukcyjnością L i pojemnością C, połączonych w szereg, wyprowadziliśmy wzory (21) i (19), które nam dają wartość skuteczną natężenia prądu oraz kąt przesunięcia fazy natężenia prądu względem napięcia. Z wzorów tych widzimy, że w przypadku szczególnym, gdy oporność indukcyjna ma taką samą wartosć co i oporność pojemnościowa, czyli gdy

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}, \tag{28}$$

otrzymujemy w obwodzie prąd

$$I = \frac{U}{R}, \tag{29}$$

przy czym $\varphi = 0$.

W tym przypadku, jak to można zauważyć ze wzorów (26) i (27),

$$U_L = U_C,$$

czyli napięcie indukcyjne staje się równe napięciu na kondensatorze. Zjawisko takie nazywamy *rezonansem napięć.*

Każde z tych napięć może w znacznym stopniu przekroczyć z zewnątrz przyłożone napięcie U.

Rzeczywiście, według tychże wzorów, z uwzględnieniem (29), otrzymamy

$$U_L = U_C = I\omega L = U\frac{\omega L}{R} = U\frac{\frac{1}{\omega C}}{R};$$

w przypadku więc rezonansu napięć napięcie indukcyjne oraz równe mu napięcie na kondensatorze będzie tyle razy większe od napięcia z zewnątrz przyłożonego, ile razy oporność indukcyjna lub oporność pojemnościowa większa jest od oporności czynnej.

Warunek, przy którym powstaje rezonans napięć ujęty we wzorze (28), możemy wyrazić jeszcze w sposób następujący:

$$\omega^2 = \frac{1}{LC};$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \tag{30}$$

Ponieważ $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$, więc przy rezonansie napięć

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}, \tag{31}$$

$$T = 2\pi\sqrt{LC}. \tag{32}$$

Przykład. Obwód zawierający cewkę o oporności $R = 20$ omów oraz indukcyjności $L = 0{,}7$ henra jest przyłączony do sieci prądu zmiennego o napięciu $U = 120$ woltów oraz częstotliwości $f = 50$ herców.

Wówczas

$$\omega = 2\pi f = 314,$$

$$\omega L = 314 \cdot 0{,}7 \cong 220 \text{ omów}.$$

Podstawiając wartości te do wzoru (7) otrzymujemy

$$I = \frac{120}{\sqrt{400 + 48400}} \cong \frac{120}{220} \cong 0{,}5 \text{ ampera}.$$

Jeżeli w obwód ten włączymy jeszcze w szereg kondensator o pojemności C, czyniącej zadość warunkowi rezonansu napięć, czyli

$$\frac{1}{\omega C} = \omega L,$$

będziemy mieli

$$\frac{1}{\omega C} = \omega L = 220 \text{ omów},$$

skąd

$$C = \frac{1}{314 \cdot 220} \cong 14 \text{ mikrofaradów}.$$

Po podstawieniu tych wartości do wzoru (29) otrzymujemy

$$I = \frac{120}{20} = 6 \text{ amperów}.$$

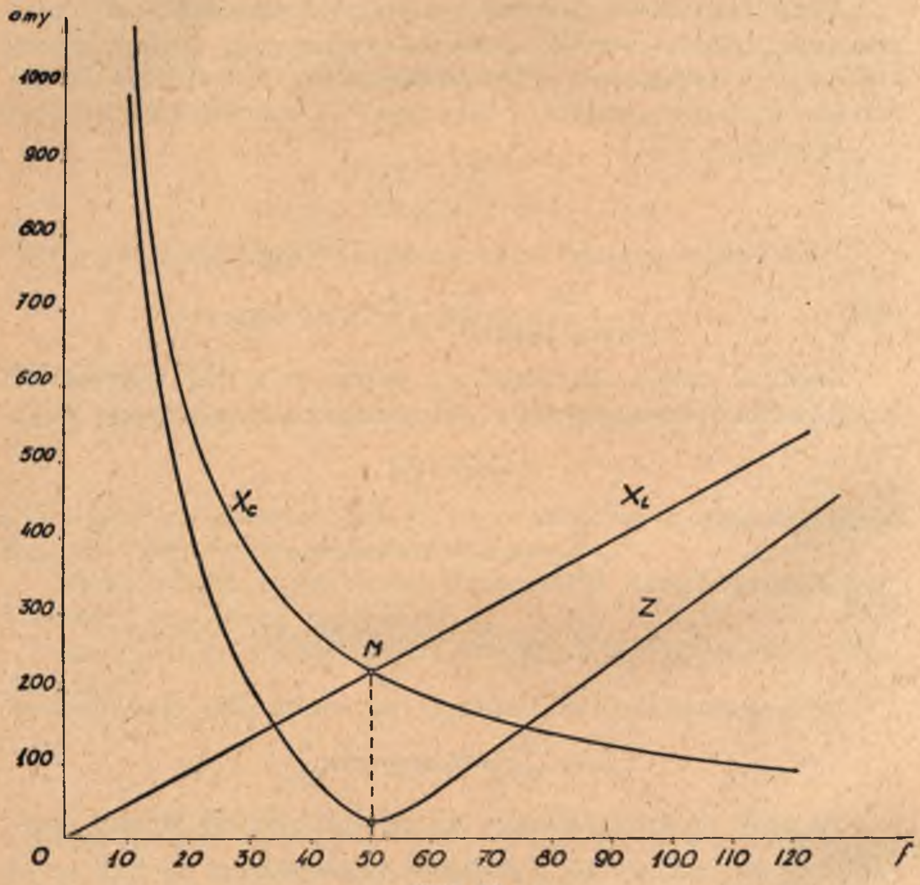
Napięcie na kondensatorze lub na cewce będzie w tym przypadku

$$U_C = U_L = 6 \cdot 220 = 1320 \text{ woltów}.$$

§ 12

ZALEŻNOŚĆ OPORNOŚCI POZORNEJ OD CZĘSTOTLIWOŚCI

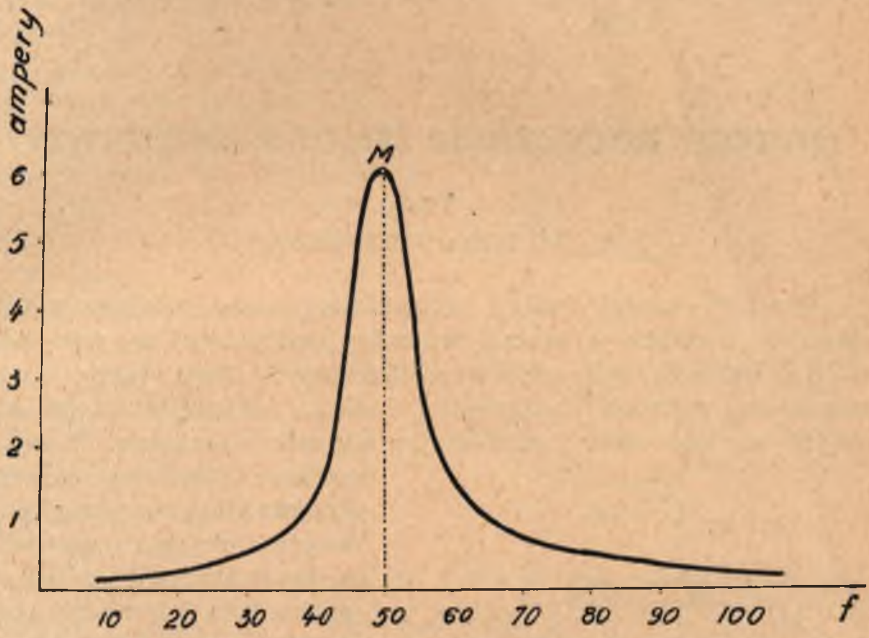
W poprzednich paragrafach wprowadziliśmy określenia nowych pojęć, dotyczących różnego rodzaju oporności. Mamy więc oprócz oporności rzeczywistej, względnie czynnej, oporność pozorną i oporność bierną; ta ostatnia składa się na ogół z oporności indukcyjnej i oporności pojemnościowej, stanowiąc ich różnicę. Rozpatrując poszczególne oporności widzimy, że z wyjątkiem oporności rzeczywistej, którą zakładaliśmy w poprzednich rozważaniach jako wielkość stałą, wszystkie inne oporności są zależne od częstotliwości prądu zmiennego; we wzory na te oporności wchodzi pulsacja ω,



Rys. 12

która, jak wiadomo, jest proporcjonalna do częstotliwości, gdyż $\omega = 2\pi f$.

W urządzeniach prądu silnego dla siły i światła pobieranego z elektrowni — częstotliwość prądu zmiennego stanowi wielkość stałą, wobec czego i omawiane wyżej oporności nie podlegają zmianom, natomiast w urządzeniach telekomunikacyjnych, a więc telefonicznych lub radiowych, częstotliwość podlega znacznym wahaniom, o czym już wspominaliśmy w § 2; w tych urządzeniach oporności bierne i pozorne zmieniają się bardzo znacznie w zależności od częstotliwości. Należy tu zaznaczyć, że przy wielkich częstotliwościach, czyli przy prądach szybkozmiennych, występują jeszcze inne zjawiska, które powodują zmianę wartości indukcyjności i pojemności,



Rys. 13

a także wpływają na wartość oporności rzeczywistej i czynnej O tych zjawiskach będzie mowa później; na razie ograniczamy się do rozpatrzenia takich urządzeń, w których R, L i C możemy założyć jako wielkości stałe, niezależne od częstotliwości.

Na rys. 12 podane są wykresy oporności indukcyjnej $X_L = \omega L$, oporności pojemnościowej $X_C = \frac{1}{\omega C}$ oraz oporności pozornej $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ w zależności od częstotliwości; liczby są wzięte z przykładu rozpatrzonego w § 11.

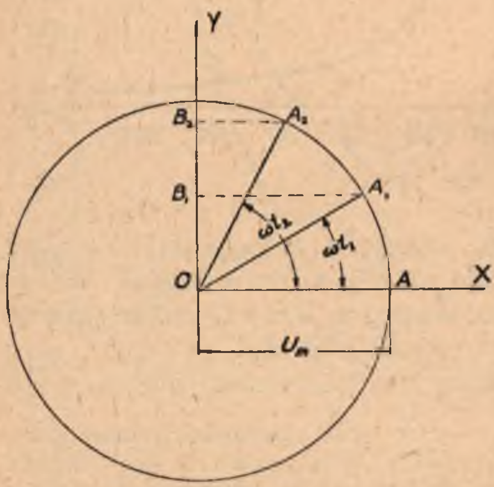
Na rys. 13 podany jest wykres natężenia prądu w zależności od częstotliwości. Punkt M na tych wykresach odpowiada zjawisku rezonansu napięć.

METODY ROZWAŻANIA PRĄDÓW ZMIENNYCH

§ 13

METODA WYKREŚLNA

Przebieg każdej funkcji sinusoidalnej czasu możemy przedstawić na rysunku w postaci sinusoidy wykreślonej we właściwej skali w układzie spółrzędnych prostokątnych. Mając taki wykres, znajdujemy wartości chwilowe tej funkcji, odkładając na osi odciętych wartość czasu i odmierzając odpowiednią rzędną. Te same wartości chwilowe możemy otrzymać łatwiej, przeprowadzając z początku osi spółrzędnych O (rys. 14), jako ze środka, koło o promieniu OA, równym wartości maksymalnej rozpatrywanej funkcji sinusoidalnej, np. napięcia U_m. Wyobraźmy sobie, że promień OA od kierunku osi X obraca się w płaszczyźnie XY równomiernie naokoło punktu O w kierunku odwrotnym do ruchu wskazówki zegara z prędkością kątową ω. Po upływie czasu t_1, t_2... promień będzie w położeniach OA_1, OA_2... Łatwo zauważyć, że rzuty promienia w tych położeniach na oś Y: OB_1, OB_2... będą odpowiednio równe:



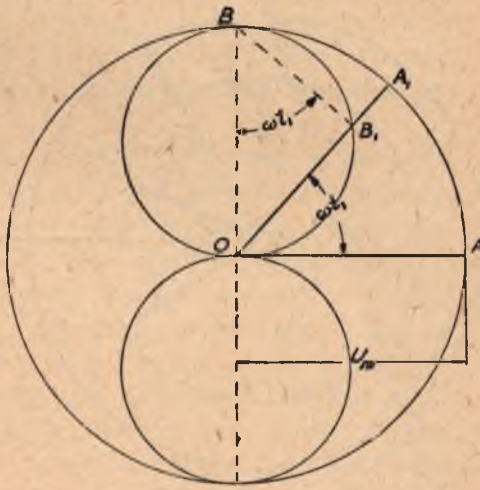
Rys. 14

$$OB_1 = OA_1 \sin \omega t_1,$$
$$OB_2 = OA_2 \sin w t_2 \text{ itd.}$$

Ponieważ $OA_1 = OA_2 = OA = U_m$, więc rzuty te wyrażać będą wartości chwilowe funkcji

$$u = U_m \sin \omega t.$$

Innego rodzaju jest następujący wykres: kreślimy koło o promieniu równym amplitudzie (rys. 15) danej sinusoidy, np. $OA = U_m$, i przez środek tego koła prowadzimy dwa koła o średnicach równych jego promieniowi. Prowadząc promień OA_1 pod danym kątem ωt_1, otrzymujemy punkt B_1 przecięcia się OA_1 z kołem górnym. Wielkość $OB_1 = OB \sin \omega t_1 = U_m \sin \omega t_1$. W ten sposób możemy znaleźć wartości chwilowe funkcji $U = U_m \sin \omega t$ dla dowolnej wartości t. Górne koło służy dla wartości ωt zawartych w pierwszej połowie okresu, czyli od 0 do π, drugie koło dla wartości ωt od π do 2π.



Rys. 15

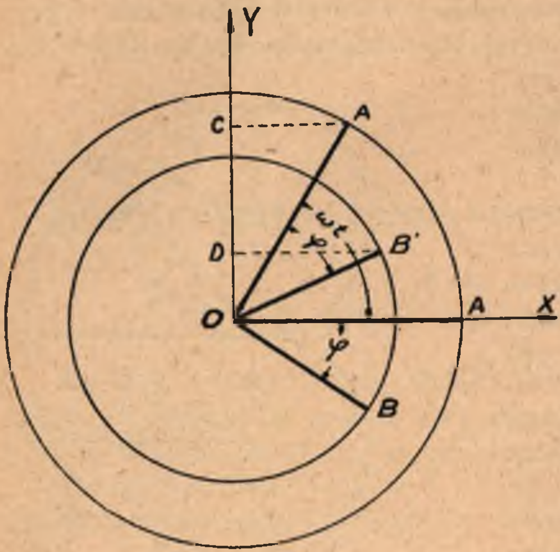
Mając dane funkcje sinusoidalne przesunięte względem siebie w fazie o kąt φ, np.

napięcie $$u = U_m \sin \omega t$$
i prąd $$i = I_m \sin (\omega t - \varphi),$$

musielibyśmy, stosując powyższe wykresy, przeprowadzić dla każdej z tych funkcji koło o promieniu równym odpowiednio U_m i I_m. Ponieważ w chwili $t = 0$, gdy napięcie przechodzi przez wartość 0, prąd przechodzi przez fazę φ, więc na wykresie musimy promień prądu przesunąć względem promienia napięcia o odpowiedni kąt φ. Na rys. 16 mamy przypadek, gdy prąd opóźnia się względem napięcia $OA = U_m$, $OB = I_m$.

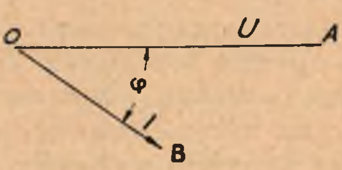
Obracając oba promienie z tą samą prędkością kątową ω w płaszczyźnie XY i rozpatrując rzuty tych promieni na oś Y, określimy odpowiednie wartości chwilowe napięcia i prądu, np. $OC = U_m \sin \omega t_1$; $OD = I_m \sin (\omega t_1 - \varphi)$.

W praktyce elektrotechnicznej rzadko kiedy potrzebujemy rozpatrywać wartości chwilowe napięć i prądów, przeważnie mamy do czynienia z wartościami skutecznymi. W tym przypadku możemy się ograniczyć do przeprowadzenia na wykresie samych tylko promieni o długości odpowiadającej wartościom skutecznym rozpatrywanych wielkości, np. napięcia i prądu, z uwzględnieniem jednakże kątów przesunięcia fazy, więc zamiast rys. 16 będziemy mieli rys. 17, gdzie w odpowiednich skalach napięcia i natężenia prądu $OA = U$, $OB = I$.

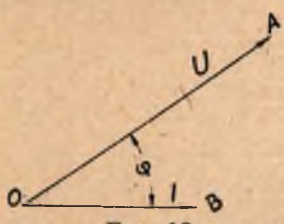


Rys. 16

W ten sam sposób moglibyśmy rozpatrywać jednocześnie dowolną ilość wielkości stanowiących sinusoidalne funkcje czasu o tej samej pulsacji, czyli o tej samej częstotliwości. Każdą taką wielkość oznaczylibyśmy na wykresie odcinkiem prostej przeprowadzonej z określonego punktu jako początku; długość odcinka w przyjętej skali odpowiadałaby wartości, np. skutecznej, rozpatrywanej wielkości; kierunek odcinka byłby zależny od kąta przesunięcia fazy omawianej wielkości względem innej, dla której obieramy dowolny kierunek, najczęściej poziomy lub pionowy, jako podstawowy.



Rys. 17



Rys. 18

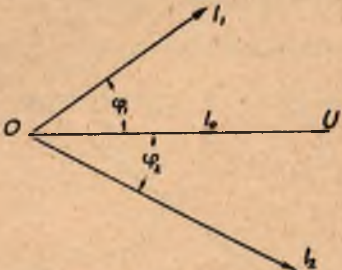
W wykresie na rys. 17 za podstawowy kierunek wzięty jest kierunek napięcia; moglibyśmy również wziąć za podstawowy, kierunek natężenia prądu, jak np. na rys. 18.

Jeżeli jeden z dwóch krańców odcinka obieramy jako jego początek, drugi zaś jako jego koniec, to otrzymamy twór, który w geometrii nazywają *wektorem,* a kierunek prowadzący od obranego początku do obranego końca — *kierunkiem wektora.* Takie odcinki na płaszczyźnie stanowią wektory *płaszczyznowe* w odróżnieniu od wektorów *przestrzennych.* W elektrotechnice znalazły szerokie zastosowanie wektory płaszczyznowe, które dla uproszczenia nazywane są wprost wektorami.

Z tego powodu *przyjęło w elektrotechnice nazywać wektorami wielkości, które na wykresie przedstawiamy odcinkiem prostej określonej długości i określonego kierunku;* mówimy więc: wektor napięcia, wektor natężenia prądu *itd., wykres zaś, na którym mamy takie wektory, nazywamy wykresem wektorowym.*

Na wykresie wektorowym *kąty dodatnie odkładamy w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówki zegara; w tym też kierunku wyobrażamy sobie ruch wektorów;* jeżeli więc jakiś wektor jest przeprowadzony na wykresie pod kątem dodatnim względem wektora podstawowego, oznacza to, że ten pierwszy wektor *wyprzedza* wektor podstawowy w *fazie*, i odwrotnie, gdy jakiś wektor jest odłożony pod kątem ujemnym (w kierunku ruchu wskazówki zegara), wówczas wektor ten *opóźnia się w fazie* względem wektora podstawowego.

Na rys. 17 i 18 widać, że wektor $OB = I$ jest cofnięty względem wektora $OA = U$, czyli że natężenie prądu jest opóźnione w fazie względem napięcia. Nie jest jednakże rzeczą obojętną, od jakiego z dwóch wektorów odmierzać kąt przesunięcia fazy φ, od tego bowiem zależy znak tego kąta. Jeżeli w rozpatrywanym przypadku (rys. 17 lub 18) będziemy odmierzali kąt φ od wektora napięcia, wówczas powiemy, że kąt jest ujemny; natomiast jeżeli tenże sam kąt będziemy odmierzali od wektora natężenia prądu, wówczas kąt φ wypadnie dodatni.



Rys. 19

Jeżeli mamy kilka prądów do rozpatrzenia i bierzemy pod uwagę przesunięcia fazowe tych prądów względem określonego napięcia, wówczas wektor napięcia bierzemy jako wektor podstawowy, wektory zaś natężeń poszczególnych prądów przeprowadzamy pod właściwymi kątami. Tak np. na rys. 19 widzimy, że prąd I_0 jest w fazie z napięciem U, prąd I_1 wyprzedza napięcie, wreszcie prąd I_2 opóźnia się w fazie względem napięcia.

Wykresy wektorowe są bardzo dogodne i znacznie ułatwiają orientowanie się w zawiłych często zjawiskach zachodzących w obwodach prądów zmiennych. Za pomocą takich wykresów możemy również często znacznie prędzej uskuteczniać obliczenia, zwłaszcza gdy nie chodzi nam o większą ścisłość rachunków.

Pokażemy to na przykładach.

Rozpatrzmy wykresy znanych już nam obwodów. Jeżeli dany obwód posiada oporność rzeczywistą R i indukcyjność L, wówczas napięcie na oporności R

$$U_R = IR$$

jest w fazie z prądem I; napięcie zaś indukcyjne

$$U_L = I\omega L$$

jest przyśpieszone o kąt $\frac{\pi}{2}$ względem prądu. Zróbmy wykres wektorowy. Jako podstawowy wektor weźmiemy wektor prądu I (rys. 20); na tym wektorze odmierzamy odcinek OA jako wektor IR. Od punktu A odkładamy pod kątem $\frac{\pi}{2}$ dodatnim odcinek AB jako wektor $I\omega L$. Napięcie U z zewnątrz przyłożone jest sumą wektorów U_R i U_L, otrzymamy je dodając geometrycznie te wektory jako odcinek OB. Z trójkąta OAB otrzymujemy

$$U^2 = I^2R^2 + I^2(\omega L)^2,$$

stąd

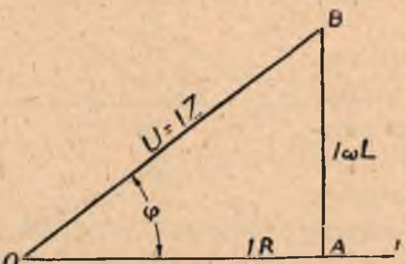
$$I^2 = \frac{U^2}{R^2 + (\omega L)^2},$$

wreszcie

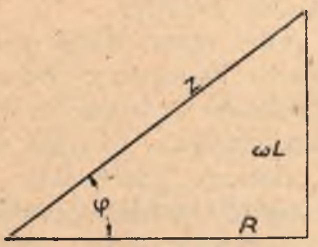
$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

oraz

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L}{R}.$$



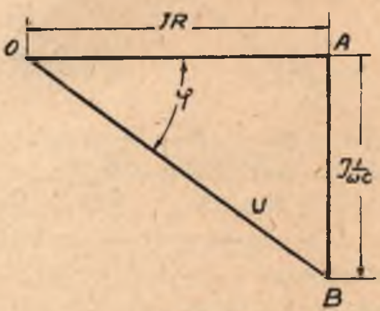
Rys. 20



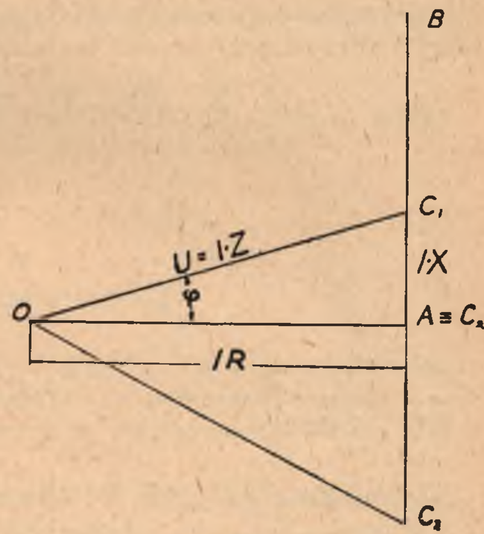
Rys. 21

Widzimy, że w sposób znacznie prostszy doszliśmy do otrzymanych już inną drogą wyników. Trójkąt OAB nazywamy *trójkątem napięć*. Dzieląc każdy bok tego trójkąta przez I, otrzymamy tak zwany *trójkąt oporności* (rys. 21).

Jeżeli obwód zawiera oporność rzeczywistą R i pojemność C, wtedy, postępując analogicznie, możemy również zbudować trójkąt napięć; odcinek AB (rys. 22), oznaczający napięcie na kondensatorze $I\frac{1}{\omega C}$, należy odłożyć na dół, ponieważ w danym przypadku mamy napięcie opóźnione względem prądu o kąt prosty. Wektor zamykający OB wyraża napięcie U, przyłożone z zewnątrz.



Rys. 22



Rys. 23

W przypadku, gdy obwód zawiera oporność R, indukcyjność L i pojemność C, postępujemy tak: na linii OA odkładamy wektor równy napięciu na oporności rzeczywistej IR (rys. 23). Następnie od punktu A odkładamy w górę wektor $AB = I\omega L$ i od punktu B na dół wektor BC wyobrażający napięcie $I\frac{1}{\omega C}$ na kondensatorze. Tu, zależnie od wartości napięcia pojemnościowego, możemy otrzymać punkty C_1, C_2 lub C_3:

C_1 w przypadku gdy $\frac{1}{\omega C} < \omega L$;

C_2 „ „ „ $\frac{1}{\omega C} = \omega L$;

C_3 „ „ „ $\frac{1}{\omega C} > \omega L$.

Biorąc np. przypadek pierwszy, gdy przewagę ma oporność indukcyjna nad opornością pojemnościową, łączymy punkt O z punktem C_1. Wektor $OC_1 = U$ wyobraża napięcie przyłożone z zewnątrz

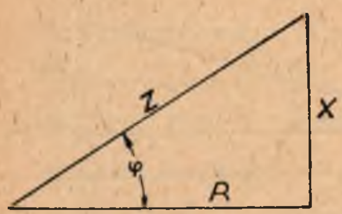
Odcinek $AC_1 = IX$, gdzie

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C},$$

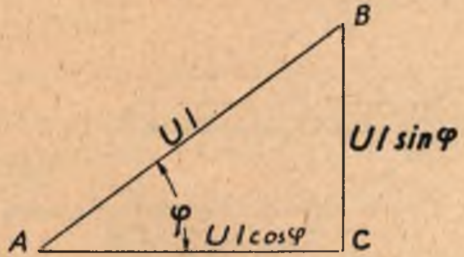
stanowi oporność bierną.

Dzieląc bok trójkąta przez I otrzymamy w odpowiedniej skali trójkąt oporności danego obwodu (rys. 24) z bokami R, X i Z; z tego trójkąta otrzymujemy znane już wzory:

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R}.$$



Rys. 24



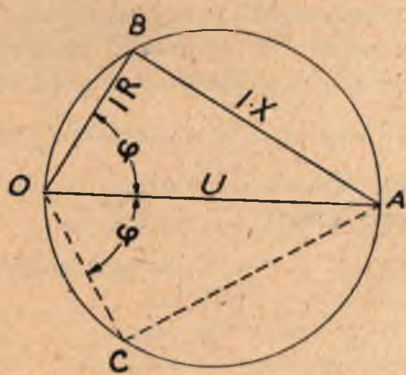
Rys. 25

Z trójkąta OAC_1 (rys. 23) otrzymujemy

$$U \cos \varphi = IR,$$
$$U \sin \varphi = IX.$$

Każde zatem napięcie w obwodzie prądu zmiennego można rozłożyć na 2 składowe. Przez analogię do składowych prądu możemy nazwać napięcie $U \cos \varphi$ *napięciem czynnym,* napięcie zaś $U \sin \varphi$ *napięciem biernym.*

Rozpatrując moc pozorną prądu zmiennego UI jako wektor, możemy zbudować trójkąt mocy ABC (rys. 25), w którym $AB = UI$ będzie mocą pozorną, $AC = UI \cos \varphi$ stanowi moc czynną, zaś $BC = UI \sin \varphi$ moc bierną.



Rys. 26

Jeżeli oprócz wielkości R i X wiadome jest napięcie U i trzeba znaleźć prąd I, wówczas zadanie takie można rozwiązać wykreślnie w sposób następujący: na dowolnej linii prostej odkładamy odcinek

$OA = U$ (rys. 26); na tym odcinku, jako na średnicy, przeprowadzamy koło. Z punktu O odmierzamy względem odcinka OA kąt φ, obliczony ze wzoru $\operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R}$ i przeprowadzamy pod tym kątem prostą do przecięcia z kołem w punkcie B.

Wtedy $OB = IR$, $BA = IX$; mierząc więc odcinek OB w skali napięć i dzieląc przez R, otrzymamy I.

Odcinek OB został przeprowadzony pod kątem φ naprzód, czyli w przypuszczeniu, że $X < O$ (przewaga pojemności); gdyby przeważała indukcyjność, otrzymalibyśmy trójkąt OAC.

§ 14
METODA SYMBOLICZNA

Położenie dowolnego punktu M (rys. 27) na płaszczyźnie możemy określić w układzie współrzędnych za pomocą promienia wodzącego $OM = r$ i kąta biegunowego α, odmierzonego od osi biegunowej OX z początkiem O.

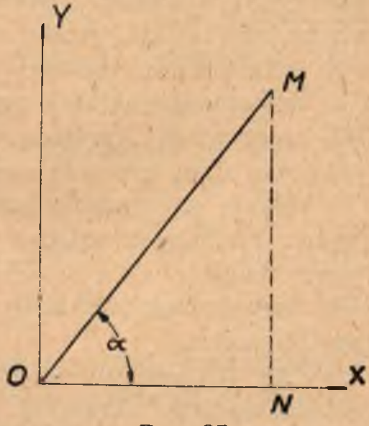
Oznaczając współrzędne punktu M w układzie prostokątnym osi X i Y, czyli rzuty promienia wodzącego r na te osi przez a i b, będziemy mieli

$$a = r \cos \alpha, \quad (1)$$

$$b = r \sin \alpha, \quad (2)$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad (3)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a} \cdot \quad 4)$$



Rys. 27

Rozpatrując na płaszczyźnie odcinek prostej, któremu nadajemy pewien kierunek, np. OM, możemy go w zupełności określić w sposób dwojaki: albo podając długość tego odcinka r i kąt α pomiędzy tym odcinkiem i obraną osią, przechodzącą przez jego początek, albo za pomocą rzutów tego odcinka a i b na dwie prostopadłe do siebie osie, przechodzące przez jego początek. Odcinek OM stanowi geometryczną sumę rzutów a i b. Z matematyki wiadomo, że taką geometryczną sumę można przedstawić w postaci liczby zespolonej $a + jb$, gdzie

$j = \sqrt{-1}$, a jest rzutem na oś rzeczywistą, zaś b rzutem na oś urojoną. Moglibyśmy więc napisać $OM = a + jb$, ale wtedy nie widzielibyśmy różnicy pomiędzy odcinkiem mającym określony kierunek a długością tego odcinka. Aby zaznaczyć, że w rozpatrywanym odcinku uwzględniamy nie tylko jego długość, lecz również i jego kierunek, będziemy dawali u góry daszek; więc pisać będziemy $\hat{OM} = a + jb$ lub

$$\hat{r} = a + jb. \tag{5}$$

Wprowadzając zamiast rzutów a i b ich wartości ze wzorów (1) i (2), możemy napisać

$$\hat{r} = r(\cos \alpha + j \sin \alpha); \tag{6}$$

r nazywamy *modułem*, zaś α *argumentem liczby zespolonej* wyrażonej symbolem $\hat{r}$.

Gdy argument $\alpha = 0$, to znaczy, gdy rozpatrywany odcinek znajduje się na obranej osi, wówczas

$$\hat{r} = r,$$

czyli zamiast liczby zespolonej otrzymujemy dla naszego odcinka liczbę rzeczywistą.

Przy rozważaniu prądów zmiennych, jak to już widzieliśmy, mamy do czynienia z wielkościami, które na wykresie przedstawiamy jako odcinki prostej z uwzględnieniem ich kierunków. Każdą więc taką wielkość możemy wyrazić symbolicznie jako liczbę zespoloną za pomocą modułu i argumentu lub też za pomocą rzutów na osie rzeczywistą i urojoną. Wprowadzenie takich symboli i działania nad nimi nazwano *metodą symboliczną*.

Metoda ta znalazła szerokie zastosowanie w elektrotechnice prądów zmiennych, gdyż w znacznym stopniu upraszcza matematyczne działania nad rozpatrywanymi wielkościami; daje ona możność przeprowadzania ścisłych obliczeń, często w bardzo zawiłych zagadnieniach.

Przy stosowaniu metody symbolicznej będziemy się spotykali z zagadnieniem obracania wektorów naprzód lub wstecz o kąt prosty; działanie takie sprowadza się do mnożenia lub dzielenia przez j. Rzeczywiście, niech OM_1 (rys. 28) oznacza wektor r_1 z rzutami a i b, czyli

$$\hat{r}_1 = a + jb; \tag{7}$$

gdy obrócimy ten wektor w kierunku dodatnim, o kąt $\frac{\pi}{2}$, otrzymamy nowy wektor $OM_2 = r_2$, przy czym

$$\dot{r}_2 = -b + ja; \tag{8}$$

obracając następnie ten wektor naprzód o kąt $\frac{\pi}{2}$, otrzymamy wektor $OM_3 = r_3$, przy czym

$$\dot{r}_3 = -a - jb, \tag{9}$$

wreszcie obracając ostatni wektor o kąt $\frac{\pi}{2}$, otrzymamy wektor $OM_4 = r_4$, dla którego

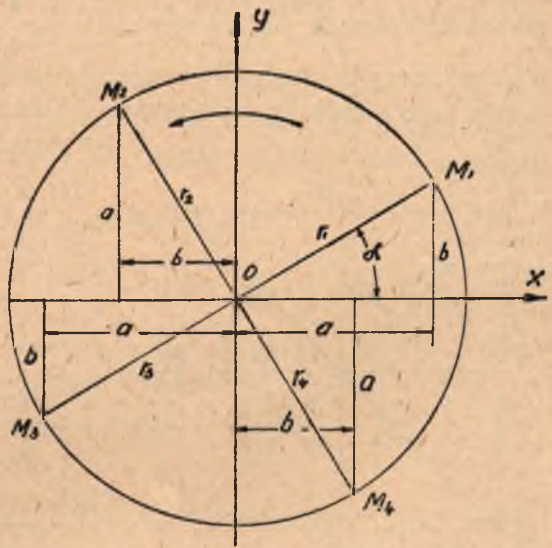
$$\dot{r}_4 = b - ja. \tag{10}$$

Łatwo jest sprawdzić, że mnożąc wzór (7) przez j otrzymamy wzór (8), mnożąc wzór (8) przez j otrzymamy wzór (9), wreszcie mnożąc wzór (9) przez j otrzymamy wzór (10), czyli

$$\dot{r}_2 = j\,\dot{r}_1,$$
$$\dot{r}_3 = j\,\dot{r}_2 = j^2\,\dot{r}_1 = -\dot{r}_1,$$
$$\dot{r}_4 = j\,\dot{r}_3 = j^3\,\dot{r}_1 = -j\,\dot{r}_1;$$

odwrotnie, możemy napisać

$$\dot{r}_1 = \frac{\dot{r}_2}{j} = -j\dot{r}_2,$$
$$\dot{r}_2 = \frac{\dot{r}_3}{j} = -j\dot{r}_3,$$
$$\dot{r}_3 = \frac{\dot{r}_4}{j} = -j\dot{r}_4,$$
$$\dot{r}_4 = -j\,\dot{r}_1.$$



Rys. 28

Z zestawienia tego wynika, że pomnożenie wektora przez j daje w rezultacie wektor obrócony naprzód o kąt prosty, natomiast podzielenie przez j lub, co jest jedno i to samo, pomnożenie przez $-j$, daje nam wektor obrócony o kąt prosty wstecz.

Na zasadzie znanego wzoru Eulera

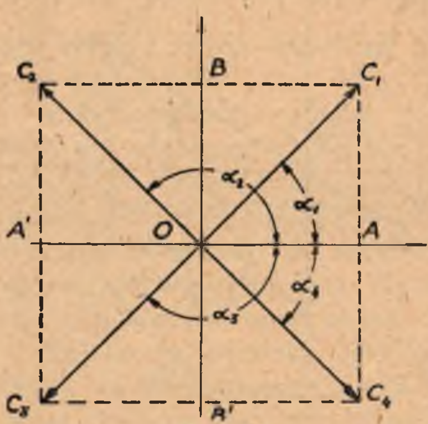
$$e^{\pm j\alpha} = \cos\alpha \pm j\sin\alpha,$$

gdzie e jest podstawą logarytmów naturalnych, możemy wzór (6) przepisać w postaci

$$\dot{r} = re^{j\alpha}. \tag{11}$$

Argument a stanowi pewien kąt, który należy odłożyć od obranej osi podstawowej, by na wykresie otrzymać kierunek odcinka wyobrażającego symbol $\hat{r}$. Kąty dodatnie odkładamy w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówki zegara; mogą się one na ogół zmieniać w granicach od 0° do 360°, czyli od 0 do 2π; jednakże w elektrotechnice prądów zmiennych dogodniej jest odmierzać kąty w dwóch kierunkach: jako dodatnie i jako ujemne; wówczas kąty te będą miały wartości w granicach od —180° do +180°, każdy kąt ponad +180° może być rozpatrywany jako kąt ujemny, stanowiący dopełnienie do 360°, jak również każdy kąt ujemny mniejszy od — 180° będzie stanowił kąt dodatni, stanowiący dopełnienie wartości bezwzględnej tego kąta do 360°.

Jak widzieliśmy (wzór 4), argument a w zależności od liczby zespolonej określa się wzorem $\operatorname{tg} a = \frac{b}{a}$, jeżeli symbol $\hat{r} = a + jb$; ale znaki przy liczbach a i b mogą być zarówno dodatnie jak i ujemne, wobec tego i znak tg a może wypaść dwojaki. Rozpatrzmy możliwe przypadki



Rys. 29

1) $\hat{r} = a + jb, \quad \operatorname{tg} a_1 = \frac{b}{a}$;

2) $\hat{r} = -a + jb, \quad \operatorname{tg} a_2 = -\frac{b}{a}$;

3) $\hat{r} = -a - jb, \quad \operatorname{tg} a_3 = \frac{b}{a}$;

4) $\hat{r} = a - jb, \quad \operatorname{tg} a_4 = -\frac{b}{a}$.

Na wykresie (rys. 29) $OA = a$, $OA' = -a$, $OB = b$, $OB' = -b$; rozpatrywane symbole będą przedstawione odcinkami OC_1, OC_2, OC_3, OC_4.

Gdybyśmy określali argumenty a_1, a_2, a_3, a_4 tylko na podstawie wartości ich tangensów, mielibyśmy dwoistość, gdyż, jak łatwo zauważyć,

$$\operatorname{tg} a_1 = \operatorname{tg} a_3 = \frac{b}{a}; \quad \operatorname{tg} a_2 = \operatorname{tg} a_4 = -\frac{b}{a}.$$

Dla określenia więc kąta a musimy wiedzieć, w jakiej ćwiartce powinien się on znajdować, a to możemy stwierdzić tylko na podstawie znaków stojących przed a i przed b, przy czym, stosownie do umowy, kąty w pierwszej i drugiej ćwiartce a_1 i a_2 będą dodatnie, zaś kąty w trzeciej i czwartej ćwiartce α_3 i α_4 będą ujemne i ich bezwzględne wartości nie przekraczają 180°.

Działania nad symbolami sprowadza się do działań nad liczbami zespolonymi; tak np. mając dwa symbole

$$\hat{r}_1 = a_1 + jb_1 = r_1 (\cos \alpha_1 + j \sin \alpha_1) = r_1 e^{j\alpha_1},$$
$$\hat{r}_2 = a_2 + jb_2 = r_2 (\cos \alpha_2 + j \sin \alpha_2) = r_2 e^{j\alpha_2}$$

i dodając je, czyli określając ich sumę geometryczną r, otrzymamy

$$\hat{r} = \hat{r}_1 + \hat{r}_2 = a_1 + a_2 + j (b_1 + b_2) = r (\cos \alpha + j \sin \alpha),$$

gdzie

$$r = \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{b_1 + b_2}{a_1 + a_2}.$$

W celu otrzymania iloczynu symboli napiszemy

$$\hat{r}_1 \hat{r}_2 = r_1 e^{j\alpha_1} \, . \, r_2 e^{j\alpha_2} = r_1 r_2 e^{j(\alpha_1 + \alpha_2)} =$$
$$= r_1 r_2 [\cos (\alpha_1 + \alpha_2) + j \sin (\alpha_1 + \alpha_2)],$$

skąd widać, że moduł iloczynu symboli równa się iloczynowi modułów, argument zaś równa się sumie argumentów mnożonych symboli.

Przy dzieleniu symboli będziemy mieli

$$\frac{\hat{r}_1}{\hat{r}_2} = \frac{r_1 e^{j\alpha_1}}{r_2 e^{j\alpha_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\alpha_1 - \alpha_2)} = \frac{r_1}{r_2} \Big[\cos (\alpha_1 - \alpha_2) + j \sin (\alpha_1 - \alpha_2)\Big],$$

czyli moduły się dzieli, argumenty się odejmuje.

Przy podnoszeniu do potęgi symbolu

$$\hat{r} = r (\cos \alpha + j \sin \alpha) = r e^{j\alpha}$$

będziemy mieli

$$\hat{r}^n = r^n e^{jn\alpha} = r^n (\cos n\alpha + j \sin n\alpha),$$

moduł jest podniesiony do potęgi, argument zaś jest pomnożony przez wykładnik potęgi; przy wyciąganiu pierwiastka

$$\sqrt[n]{\hat{r}} = \sqrt[n]{r e^{j\frac{\alpha}{n}}} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\alpha}{n} + j \sin \frac{\alpha}{n}\right)$$

należy wyciągnąć pierwiastek z modułu, argument zaś podzielić przez wykładnik pierwiastka.

Łatwo też jest zauważyć, że mnożenie wektora przedstawionego liczbą zespoloną przez $e^{j\varphi}$ powoduje obrót tego wektora o kąt φ. Np. gdy rozpatrujemy wektor $\hat{r} = r (\cos \alpha + j \sin \alpha) = r e^{j\alpha}$ i pomnożymy go przez $e^{j\varphi}$, czyli przez $\cos \varphi + j \sin \varphi$, otrzymamy nowy wektor $\dot{r}_1 = re^{j\alpha} e^{j\varphi} = re^{j(\alpha+\varphi)} = r[\cos(\alpha+\varphi) + j\sin(\alpha+\varphi)]$, którego moduł jest ten sam, lecz argument jest zwiększony o kąt φ; inaczej mówiąc, nowy wektor jest obrócony względem poprzedniego o kąt φ.

Mnożenie wektora przez $e^{j\omega t}$ przy zmianie czasu t daje obrót z prędkością kątową ω.

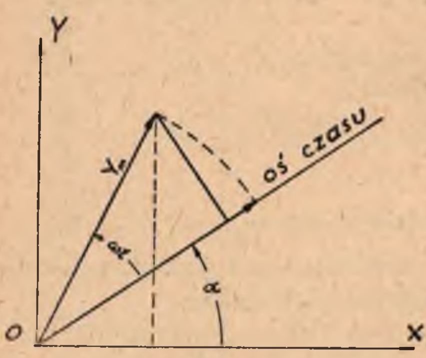
Na tej podstawie możemy symbolicznie ująć również wartości chwilowe funkcji sinusoidalnej czasu; rozpatrzmy np. funkcję

$$y = Y_m \sin \omega t.$$

W § 13 widzieliśmy, że wartości chwilowe rozpatrywanej funkcji możemy otrzymać obracając z prędkością kątową ω promień odpowiadający największej wartości Y_m tej funkcji i biorąc rzuty na oś OY. Gdybyśmy brali rzuty na oś OX, otrzymalibyśmy również wartości chwilowe w postaci

$$y = Y_m \cos \omega t,$$

z tą tylko różnicą, że moment, od którego rozpoczynamy liczenie czasu ($t = 0$), w tym drugim przypadku odpowiadałby przejściu danej funkcji przez wartość największą, nie zaś przez wartość 0, jak to ma miejsce w pierwszym przypadku. Oczywiście wartości chwilowe można otrzymywać biorąc rzuty na dowolnie przeprowadzoną oś; nazwijmy tę oś — osią czasu. Tak np., gdy oś czasu jest przeprowadzona pod kątem α do osi OX (rys. 30) i obrót Y_m rozpoczniemy od tej osi czasu, wówczas wartości chwilowe możemy otrzymać jako rzuty na tę oś w postaci $Y_m \cos \omega t$ albo też jako rzuty na osi OX lub OY w postaci $Y_m \cos(\omega t + \alpha)$ lub $Y_m \sin(\omega t + \alpha)$. Często dogodniej jest brać za oś czasu jedną z osi współrzędnych.



Rys. 30

W założeniu, że wartości chwilowe będziemy traktowali jako rzuty na określoną stałą oś promienia obracającego się z prędkością kątową ω i odpowiadającego największej wartości rozpatrywanej funkcji sinusoidalnej czasu, możemy pisać symbolicznie równanie wirującego promienia

$$\dot{y} = Y_m e^{j\omega t} = Y_m(\cos \omega t + j \sin \omega t)$$

lub ogólniej

$$\hat{y} = Y_m e^{j(\omega t + \alpha)} = Y_m [\cos(\omega t + \alpha) + j \sin(\omega t + \alpha)].$$

Czasami zachodzi potrzeba rozpatrywania pochodnej lub całki wektora względem czasu. W ogólnym przypadku będziemy mieli

$$\frac{d\hat{y}}{dt} = j\omega\, Y_m e^{j(\omega t + \alpha)} = j\omega\, \hat{y};$$

widzimy więc, że pochodna wektora względem czasu stanowi nowy wektor, którego moduł jest zwiększony ω razy i który jest obrócony o kąt prosty naprzód względem poprzedniego.

Następnie

$$\int \hat{y}\, dt = \int Y_m e^{j(\omega t + \alpha)}\, dt = \frac{Y_m e^{j(\omega t + \alpha)}}{j\omega} + C,$$

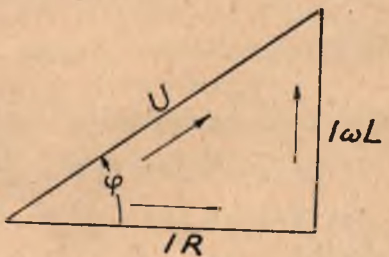
gdzie C stała dowolna, czyli

$$\int y\, dt = \frac{\hat{Y}}{j\omega} + C;$$

znaczy to, że pomijając stałą dowolną, która w zależności od warunków granicznych może mieć taką lub inną wartość, otrzymujemy po scałkowaniu nowy wektor z modułem zmniejszonym ω razy, obrócony o kąt prosty wstecz względem poprzedniego.

Rozpatrzymy teraz kilka przykładów zastosowania metody symbolicznej do rozpatrzonych już poprzednio obwodów prądu.

Jeżeli mamy oporność rzeczywistą i indukcyjność (rys. 31), wówczas, biorąc wektor natężenia prądu jako podstawowy, będziemy mieli



Rys. 31

$$\hat{U} = IR + jI\omega L = I(R + j\omega L),$$

przy dowolnej zaś osi podstawowej zamiast I musimy wprowadzić $\hat{I}$

$$\hat{U} = \hat{I}(R + j\omega L);$$

$$IR = U \cos\varphi; \quad I\omega L = U \sin\varphi; \quad \hat{U} = U(\cos\varphi + j \sin\varphi).$$

Jeżeli zamiast trójkąta napięć weźmiemy trójkąt oporności (rys. 32), wówczas

$$\hat{Z} = R + j\omega L;$$

$$R = Z \cos\varphi; \quad \omega L = Z \sin\varphi;$$

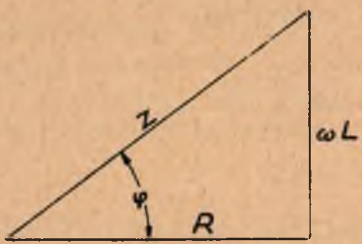
$$\hat{Z} = Z(\cos\varphi + j \sin\varphi).$$

Jeżeli w obwodzie mamy oprócz oporności rzeczywistej kondensator (rys. 33), wówczas

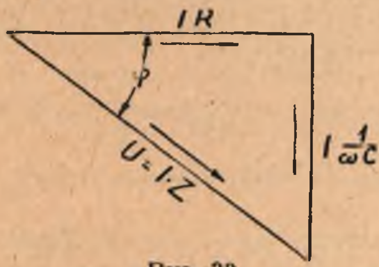
$$\hat{U} = IR - jI\frac{1}{\omega C} = I\left(R - j\frac{1}{\omega C}\right),$$

$$IR = U\cos\varphi; \quad I\frac{1}{\omega C} = U\sin\varphi; \quad \hat{U} = U(\cos\varphi - j\sin\varphi);$$

$$\dot{Z} = R - j\frac{1}{\omega C}.$$



Rys. 32



Rys. 33

W przypadku zaś najogólniejszym, gdy obwód zawiera R, L i C w szeregowym połączeniu, będziemy mieli przy dowolnej osi podstawowej

$$\hat{U} = \hat{I}(R + jX), \tag{12}$$

gdzie

$$X = X_L - X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

może mieć znak dodatni lub ujemny.

Ponieważ znak $\operatorname{tg}\varphi = \frac{X}{R}$ zależny jest wyłącznie od znaku X, gdyż R zawsze jest > 0, przeto kąt φ może się zmieniać tylko w granicach

$$-90° \leqslant \varphi \leqslant +90°,$$

przy czym skrajne wartości φ otrzymujemy teoretycznie dla $R = 0$, praktycznie dla bardzo małych wartości oporności rzeczywistej.

Następnie mamy

$$\dot{Z} = R + jX, \tag{13}$$
$$R = Z\cos\varphi, \tag{14}$$
$$X = Z\sin\varphi, \tag{15}$$
$$\hat{U} = \hat{I}\dot{Z}. \tag{16}$$

Mocy prądu zmiennego w symbolicznym ujęciu na ogół nie otrzymamy przez pomnożenie wektorów napięcia i natężenia prądu.

Jeżeli bowiem napięcie jest przesunięte w fazie względem dowolnie wybranego kierunku podstawowego o kąt α, prąd zaś względem napięcia o kąt φ, będziemy mieli:

$$\hat{U} = U e^{j\alpha}, \qquad \hat{I} = I e^{j(\alpha+\varphi)},$$

$$\hat{U}\hat{I} = UI e^{j(2\alpha+\varphi)} = UI \cos(2\alpha+\varphi) + jUI \sin(2\alpha+\varphi).$$

Dla otrzymania właściwego wzoru mocy musimy wziąć albo jeden z dwu wektorów napięcia lub prądu za podstawowy, wtedy bowiem $\alpha = 0$ lub $\alpha = -\varphi$, albo też jeden z tych wektorów w postaci liczby zespolonej sprzężonej, czyli

$$\hat{U}_s = U e^{-j\alpha}$$

lub

$$\hat{I}_s = I e^{-j(\alpha+\varphi)}.$$

W pierwszym przypadku

$$\hat{U}\hat{I} = UI \cos\varphi \pm jUI \sin\varphi,$$

w drugim przypadku

$$\hat{U}_s\hat{I} = UI \cos\varphi + jUI \sin\varphi,$$

$$\hat{U}\hat{I}_s = UI \cos\varphi - jUI \sin\varphi.$$

Część rzeczywista odpowiada mocy czynnej, część zaś urojona mocy biernej; ta ostatnia może mieć dwa znaki w zależności od znaku kąta φ. Z powyższych wzorów wynika, że moc pozorna równa się sumie geometrycznej mocy czynnej i mocy biernej.

Zamiast oporności dogodniej jest czasami posługiwać się przewodnością. Jeżeli Z oznacza oporność pozorną, wówczas

$$\frac{1}{Z} = Y$$

nazywamy *przewodnością pozorną.*

Zobaczymy, jakie będą jej składowe. Stosując metodę symboliczną otrzymujemy

$$\dot{Z} = R + jX, \qquad \dot{Y} = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R+jX},$$

$$\frac{1}{R+jX} = \frac{R-jX}{R^2+X^2} = \frac{R-jX}{Z^2} = \frac{R}{Z^2} - j\frac{X}{Z^2},$$

$$\dot{Y} = \frac{R}{Z^2} - j\frac{X}{Z^2}, \qquad (Z = \sqrt{R^2+X^2}).$$

Biorąc pod uwagę, że $Z = \frac{U}{I}$, a także wzory (14) i (15), możemy napisać:

$$\frac{R}{Z^2} = \frac{1}{Z} \cdot \frac{R}{Z} = \frac{I \cos \varphi}{U},$$

$$\frac{X}{Z^2} = \frac{1}{Z} \cdot \frac{X}{Z} = \frac{I \sin \varphi}{U}.$$

Z prawej strony ostatnich wzorów mamy ilorazy prądu przez napięcie, czyli pewne przewodności. Pierwsza z tych odpowiada prądowi czynnemu, nazywamy ją *przewodnością rzeczywistą* lub *czynną* i oznaczamy literą G. Druga przewodność odpowiada prądowi biernemu i nazywać ją będziemy *przewodnością bierną* oznaczając literą B; w terminologii międzynarodowej, rzadko spotykanej w literaturze polskiej, przewodność rzeczywista nosi nazwę *konduktancji*, przewodność bierna — *susceptancji*, zaś przewodność pozorna — *admitancji*. W ten sposób:

$$G = \frac{R}{Z^2},$$

$$B = \frac{X}{Z^2},$$

$$\hat{Y} = G - jB,$$

skąd

$$Y = \sqrt{G^2 + B^2},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{B}{G}.$$

Znak B we wzorze symbolicznym na przewodność pozorną, jak widzimy, jest przeciwny do znaku X, jaki występuje w oporności pozornej, więc gdy przeważa oporność indukcyjna $X > 0$, $B < 0$; gdy przeważa oporność pojemnościowa $X < 0$, $B > 0$.

Zestawienie rozpatrzonych wielkości i najważniejszych wzorów

Moc

czynna $P = UI \cos \varphi$

bierna $P_x = UI \sin \varphi$

pozorna $P_z = UI$

Napięcie U

czynne $U \cos \varphi = IR$

bierne $U \sin \varphi = IX$

$$\hat{U} = \hat{I}\hat{Z}$$

Prąd I

czynny $I \cos \varphi = UG$

bierny $I \sin \varphi = UB$

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}}{\hat{Z}} = \hat{U}\hat{Y}.$$

Oporność

czynna (rzeczywista, omowa, rezistancja) $R = \frac{U \cos \varphi}{I}$

bierna (reaktancja) $X = \frac{U \sin \varphi}{I}$

indukcyjna (reaktancja indukcyjna, induktancja) $X_L = \omega L$

pojemnościowa (reaktancja pojemnościowa, kapacitancja) $X_C = \frac{1}{\omega C}$

$$X = X_L - X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

pozorna (impedancja) $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$

$$\hat{Z} = R + j X; \qquad \operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R}$$

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z}; \qquad \sin \varphi = \frac{X}{Z}.$$

Przewodność

czynna (rzeczywista, konduktancja) $G = \frac{R}{Z^2} = \frac{I \cos \varphi}{U}$

bierna (susceptancja) $B = \frac{X}{Z^2} = \frac{I \sin \varphi}{U}$

pozorna (admitancja) $Y = \frac{1}{Z}$

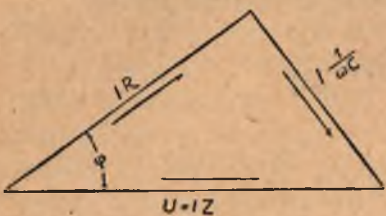
$$\hat{Y} = G - jB$$

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{B}{G}; \quad \cos \varphi = \frac{G}{Y}; \quad \operatorname{Sin} \varphi = -\frac{B}{Y}.$$

§ 15
WYKRESY ZMIENNOŚCI WEKTORÓW

Przy rozpatrywaniu wzajemnych zależności wielkości charakterystycznych w obwodach prądu zmiennego, może zajść potrzeba sporządzenia wykresów, gdy jednej lub kilku z tych wielkości chcemy nadawać dowolne wartości zmienne. Jako przykład mogą służyć zmiany napięć lub prądów przy zmiennych R, L, C lub częstotliwości f. Na takich wykresach otrzymujemy więc zmienne wektory, których końce stanowią różne geometryczne miejsca w postaci albo linii prostej, albo linii krzywych. Wykres tego rodzaju można nazwać wykresem zmienności wektorów. Najczęściej w obwodach prądu zmiennego mamy do czynienia z wykresami w postaci linii prostej albo koła.

Poprzednio (rys. 26) podany był już przykład takiego wykresu, gdzie dla określonego napięcia przy dowolnych wartościach kąta przesunięcia fazy φ między napięciem i natężeniem prądu, czyli przy zmiennym $\operatorname{tg}\varphi = \frac{X}{R}$, poszukiwane jest natężenie prądu I. Geometryczne miejsce końców wektora I, czyli wykres zmienności wektora I, stanowi koło o średnicy U.

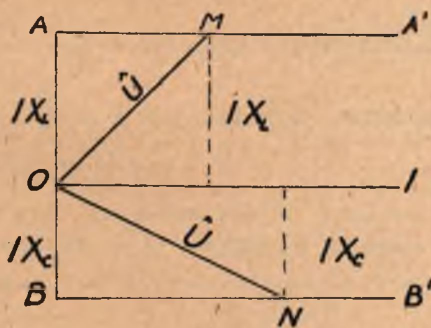


Rys. 34

Rozpatrzmy wzór (12)

$$\hat{U} = \hat{I}R + j\hat{I}X$$

Niech I i R mają stałe wartości, zaś $X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$ jest zmienne. Biorąc za podstawowy wektor — natężenie prądu (rys. 34), odkładamy na nim w odpowiedniej skali $IR = OA$, następnie przeprowadzamy w punkcie A prostopadłą BC do OI. Łącząc O z dowolnym punktem prostej BC, otrzymamy wektor napięcia U, przy czym dla $X > 0$, gdy jest przewaga oporności indukcyjnej nad opornością pojemnościową, odkładamy dla odpowiedniej wartości $X = X_L$ wartość IX_L w górę, natomiast dla $X < 0$ odkładamy dla wartości $X = X_C$ wartość IX_C w dół. Wykresem zmienności wektora U jest w tym przypadku prosta BC. Gdy R jest zmienne, X stałe, bierzemy również za wektor podstawowy natężenie prądu I (rys. 35), odkładamy od punktu O stałą wartość IX, w razie przewagi oporności indukcyjnej $IX_L = OA$ w górę, zaś przy przewadze oporności pojemnościowej $IX_C = OB$ w dół, i przeprowadzamy z punktów A i B równoległe AA' i BB' do osi OI. Łatwo zauważyć, że obie te proste stanowią wykres zmienności wektora U, np. dla $IR = AM$



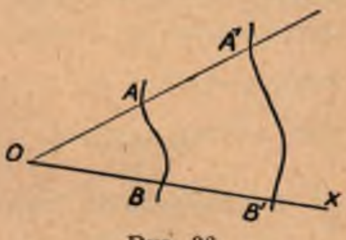
Rys. 35

$\hat{U} = OM$ w przypadku $X > 0$; dla $IR = BN$

$\hat{U} = ON$ w przypadku $X < 0$.

Czasami zachodzi potrzeba przejścia od wykresu pewnej wielkości do wykresu innej, która jest odwrotnie proporcjonalna do pierwszej, np. oporność pozorna i przewodność pozorna, oporność pozorna i natężenie prądu przy stałej wartości napięcia itp. Tego rodzaju przekształcenia dokonać można za pomocą tak zwanej inwersji.

Rozpatrzmy na płaszczyźnie dwie krzywe AB i $A'B'$ (rys. 36), które mają następujące własności: iloczyn promieni wodzących, przeprowadzonych do tych krzywych z początku O w tym samym kierunku, jest wielkością stałą, a więc



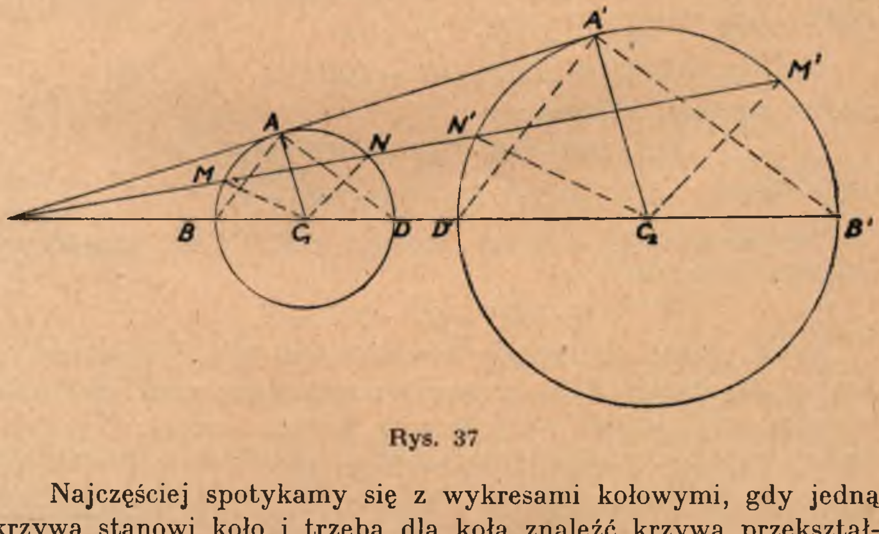
Rys. 36

$$OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = \ldots = k$$

lub

$$OA' = \frac{k}{OA}; \; OB' = \frac{k}{OB}.$$

Znajdowanie jednej z tych krzywych, gdy druga jest dana, nazywamy *inwersją* lub *przekształceniem przez promienie odwrotne.* Punkt O nazywamy *środkiem inwersji* zaś k *stopniem inwersji* lub *współczynnikiem przekształcenia przez promienie odwrotne.* Każdemu punktowi jednej krzywej np. punktowi A odpowiada punkt A' na drugiej krzywej lub odwrotnie.



Rys. 37

Najczęściej spotykamy się z wykresami kołowymi, gdy jedną krzywą stanowi koło i trzeba dla koła znaleźć krzywą przekształconą przez promienie odwrotne. Tu należy rozpatrzyć 2 przypadki, w zależności od tego, gdzie się znajduje środek inwersji: 1) poza danym kołem; 2) na danym kole.

W pierwszym przypadku, gdy środek inwersji O (rys. 37) znajduje się poza danym kołem ze środkiem C_1, przeprowadzamy i przedłużamy prostą OC_1 oraz styczną OA; następnie budujemy drugie koło, podobne do danego, ze środkiem C_2 na przedłużeniu OC_1, ze wspólną styczną OAA', tak aby $OA' = \frac{k}{OA}$, gdzie k stanowi stopień inwersji, czyli

$$OA \cdot OA' = k.$$

Z podobieństwa trójkątów

$$\triangle OAB \backsim \triangle OA'D'$$

mamy

$$\frac{OB}{OD'} = \frac{OA}{OA'},$$

z podobieństwa zaś

$$\triangle OAD \backsim \triangle OA'B'$$

$$\frac{OD}{OB'} = \frac{OA}{OA'};$$

z tych proporcji wynika, że

$$\frac{OB}{OD'} = \frac{OD}{OB'},$$

skąd

$$OB \cdot OB' = OD \cdot OD'.$$

Ale

$$OB \cdot OD = OA^2,$$

$$OD' \cdot OB' = OA'^2;$$

mnożąc stronami, otrzymamy

$$OB \cdot OB' \cdot OD \cdot OD' = OA^2 \cdot OA'^2 = k^2$$

i ostatecznie

$$OB \cdot OB' = OD \cdot OD' = k.$$

Przeprowadzając dowolny promień $OMNN'M'$, znajdziemy w sposób analogiczny, że

$$OM \cdot OM' = ON \cdot ON' = k.$$

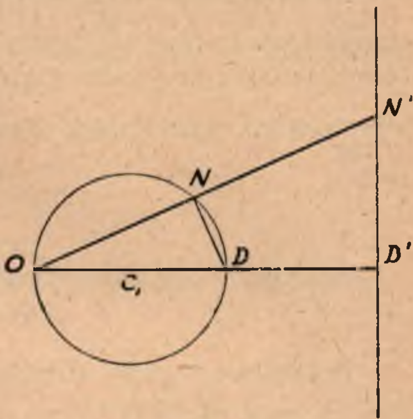
W ten sposób dochodzimy do wniosku, że koło ze środkiem C_2 stanowi dla danego koła krzywą przekształconą przez promienie odwrotne, czyli krzywą otrzymaną za pomocą inwersji. Przy konstrukcji tego koła prościej jest znaleźć na przedłużeniu prostej OC_1 punkty D' i B' ze wzorów $OD' = \frac{k}{OD}$, $OB' = \frac{k}{OB}$, a następnie znaleźć środek koła C_2, dzieląc odcinek $D'B'$ na połowę.

Łatwo zauważyć, że gdy na danym kole przechodzimy od jednego punktu do drugiego, idąc według ruchu wskazówki zegara, np. od B do M, na kole przekształconym odpowiednie punkty otrzymamy idąc w kierunku przeciwnym: od B' do M'.

Gdy środek inwersji znajduje się na samym kole (rys. 38), wtedy w porównaniu do poprzedniego przypadku (rys. 37) $OB = 0$, wobec czego

$$OB' = \frac{k}{OB} = \infty;$$

$$OD' = \frac{k}{OD}; \quad OD = \frac{k}{OD'}$$

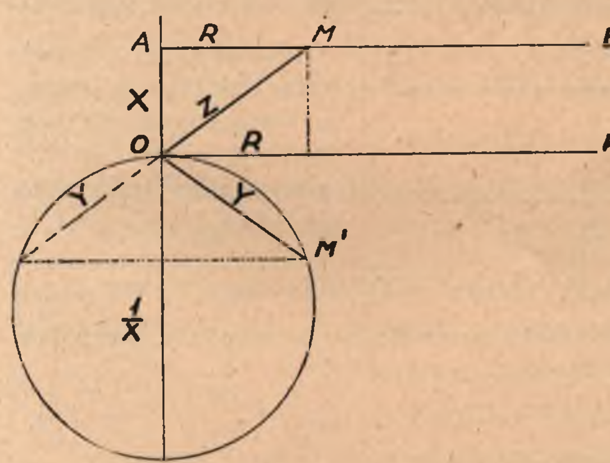


Rys. 38

średnica drugiego koła $OB' - OD'$ staje się nieskończenie wielką; inaczej mówiąc, zamiast koła otrzymujemy prostą przechodzącą przez punkt D' w odległości $\frac{k}{OD}$ od środka inwersji O, skierowaną prostopadle do średnicy danego koła OD. Z podobieństwa trójkątów OND i $ON'D'$ mamy

$$\frac{ON}{OD} = \frac{OD'}{ON'}, \text{ czyli}$$

$$ON \cdot ON' = OD \cdot OD' = k.$$



Rys. 39

Oczywiście, odwrotnie, przez inwersję linii prostej otrzymamy koło przechodzące przez środek inwersji.

Jako przykład rozpatrzmy obwód, w którym oporność bierna X jest stała, zmienia się natomiast oporność czynna R. Biorąc dowolną oś OK jako podstawową (rys. 39) i odkładając stałą wartość $X = X_L - X_C$ w górę lub w dół w zależności od znaku X (na rys. $X > 0$), otrzymamy dla zmiennej oporności pozornej OM wykres w postaci linii prostej AB równoległej do osi odciętych, przeprowadzonej w odległości X od tej osi.

Dla otrzymania wykresu przewodności pozornej $Y = \frac{1}{Z}$ stosujemy metodę inwersji. Środkiem inwersji będzie punkt O, stopień inwersji w tym przypadku będzie 1. Otrzymujemy dla Y (OM') koło przechodzące przez środek inwersji, średnica tego koła wynosi $\frac{1}{X}\cdot$

§ 16

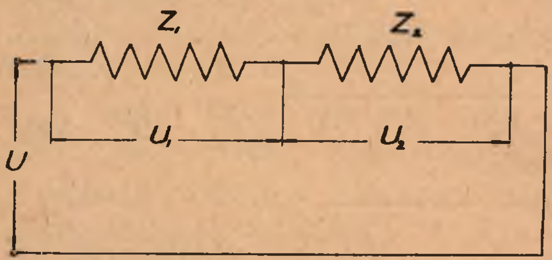
NAPIĘCIA ORAZ OPORNOŚCI POZORNE W SZEREGOWYM POŁĄCZENIU

Rozpatrzmy część obwodu, w której mamy dwie oporności pozorne Z_1 i Z_2 połączone w szereg (rys. 40).

Gdy włączymy taki układ do napięcia o chwilowej wartości u, popłynie prąd o chwilowej wartości i.

Na opornościach Z_1 i Z_2 powstaną napięcia o chwilowych wartościach u_1 i u_2, przy czym

$$u = u_1 + u_2.$$



Rys. 40

Przechodząc od wartości chwilowych napięć do wartości skutecznych, posiłkując się metodą symboliczną i mając na względzie,

że $\quad \hat{u} = U_m e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t} \quad \hat{u}_1 = U_{1m} e^{j\varphi_1} e^{j\omega t}; \quad \hat{u}_2 = U_{2m} e^{j\varphi_2} \cdot e^{j\omega t},$

gdzie φ, φ_1 i φ_2 oznaczają kąty przesunięcia faz prądu i, względem napięć, otrzymamy po skróceniu przez $e^{j\omega t}$

$$U_m e^{j\varphi} = U_{1m} e^{j\varphi_1} + U_{2m} e^{j\varphi_2}$$

lub wprowadzając wartości skuteczne

$$U e^{j\varphi} = U_1 e^{j\varphi_1} + U_2 e^{j\varphi_2},$$

albo symbolicznie

$$\hat{U} = \hat{U}_1 + \hat{U}_2. \tag{17}$$

Czyli napięcie przyłożone z zewnątrz równa się sumie geometrycznej napięć w rozpatrywanej części obwodu.

Na rys. (41) $OA = U_1$, $AB = U_2$, $OB = U$.

Łatwo zauważyć, że na ogół suma geometryczna napięć poszczególnych części obwodu jest większa od napięcia z zewnątrz przyłożonego ($OA + AB > OB$). Wyjątek będziemy mieli w przypadku, gdy w obwodzie mamy do czynienia tylko z opornością rzeczywistą oraz gdy zachodzą rezonansy napięć, to znaczy gdy

$$\varphi = \varphi_1 = \varphi_2$$

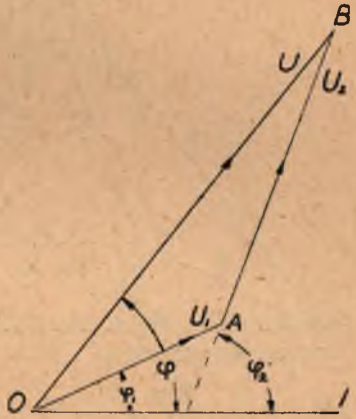
w szczególności, gdy $\varphi = 0$.

Dzieląc obie strony wzoru (17) przez wartość skuteczną I natężenia prądu płynącego w rozpatrywanym obwodzie, będziemy mieli

$$\frac{\hat{U}}{\hat{I}} = \frac{\hat{U}_1}{\hat{I}} + \frac{\hat{U}_2}{\hat{I}},$$

ale

$$\frac{\hat{U}_1}{\hat{I}} = \hat{Z}_1, \quad \frac{\hat{U}_2}{\hat{I}} = \hat{Z}_2,$$



Rys. 41

zaś iloraz $\frac{\hat{U}}{\hat{I}}$ stanowi oporność pozorną całej rozpatrywanej części obwodu, czyli oporność wypadkową, zastępującą dwie oporności pozorne Z_1 i Z_2 połączone szeregowo; oznaczając tę oporność pozorną przez Z, otrzymamy

$$\hat{Z} = \hat{Z}_1 + \hat{Z}_2;$$

a więc przy szeregowym łączeniu oporności pozornych należy je dodawać geometrycznie, aby otrzymać oporność pozorną wypadkową. Oczywiście, rozumowanie, które zastosowaliśmy do dwóch oporności pozornych i do dwóch napięć, możemy zastosować do dowolnej liczby tych wielkości, czyli ogólnie możemy napisać

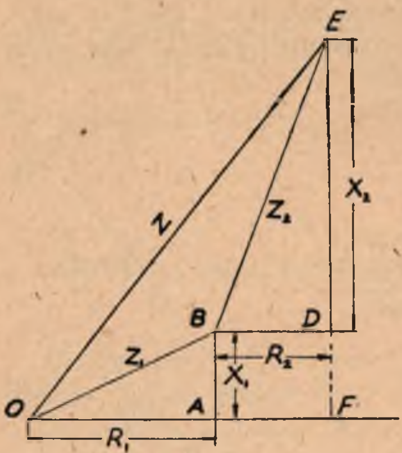
$$\hat{U} = \hat{U}_1 + \hat{U}_2 + \ldots\ldots + \hat{U}_n;$$
$$Z = Z_1 + Z_2 + \ldots\ldots + Z_n;$$
$$\hat{I} = \frac{\hat{U}}{Z} = \frac{\hat{U}_1}{Z_1} = \ldots\ldots = \frac{\hat{U}_n}{Z_n}.$$

Stosując do oporności pozornych metodę symboliczną, będziemy mieli

$$\hat{Z}_1 = R_1 + jX_1,$$
$$\hat{Z}_2 = R_2 + jX_2,$$
$$\hat{Z} = \hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 = (R_1 + R_2) + j(X_1 + X_2).$$

$R_1 + R_2$ stanowi oporność czynną, $X_1 + X_2$ oporność bierną wypadkowej oporności pozornej Z.

Na rys. 42 podane jest geometryczne zestawienie rozpatrywanych oporności, przy czym oporności X_1 i X_2 na tym wykresie mają wartości dodatnie, to znaczy, że założona jest tutaj przewaga oporności indukcyjnej nad opornością pojemnościową.

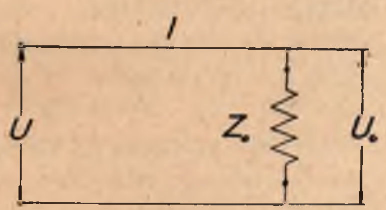


Rys. 42

§ 17

SPADEK NAPIĘCIA I STRATA NAPIĘCIA W OBWODACH PRĄDU ZMIENNEGO

W poprzednim paragrafie wyjaśniliśmy, że przy prądzie zmiennym napięcie z zewnątrz przyłożone na ogół jest równe sumie geometrycznej napięć w poszczególnych częściach obwodu. Rozpatrzmy obwód składający się ze źródła prądu, na zaciskach którego mamy napięcie U, z odbiornika i przewodów łączących (rys. 43). Oznaczmy oporność pozorną odbiornika przez Z_o, a oporność pozorną obu przewodów łączących przez Z_p; natężenie prądu płynącego ze źródła przez odbiornik niech będzie I; wówczas



Rys. 43

$$\hat{U} = \hat{I}(\hat{Z}_o + \hat{Z}_p) = \hat{I}\hat{Z}_o + \hat{I}\hat{Z}_p,$$

ale $$\hat{I}\hat{Z}_o = \hat{U}_o,$$

więc $$\hat{U} = \hat{U}_o + \hat{I}\hat{Z}_p.$$

Na wykresie (rys. 44), gdzie za podstawową oś wzięty jest kierunek wektora natężenia prądu,

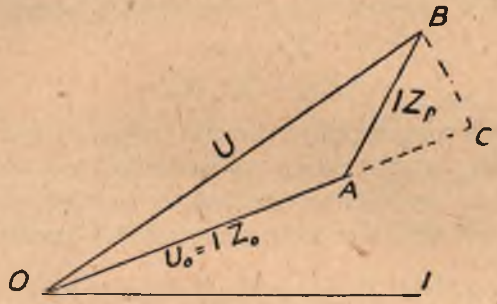
$$OA = IZ_o = U_o, \quad AB = IZ_p, \quad OB = U, \quad OC = OB.$$

Różnicę geometryczną napięcia u źródła i napięcia na odbiorniku nazywamy spadkiem napięcia w przewodach, natomiast *różnicę algebraiczną tych napięć nazywamy stratą napięcia*. Tak więc spadek napięcia

$$\triangle \hat{U} = \hat{U} - \hat{U}_o,$$

zaś strata napięcia $$\triangle U = U - U_o.$$

Na wykresie strata napięcia stanowi odcinek AC, spadek zaś napięcia odpowiada odcinkowi AB. Jak widać z wykresu $OA + AB > OB$, $OA + AC = OB$, czyli $AB > AC$, zatem spadek napięcia na ogół jest większy od straty napięcia.



Rys 44

Jeżeli oporności czynne i bierne oznaczymy dla odbiornika przez R_o i X_o, dla przewodów zaś przez R_p i X_p, wówczas będziemy mieli

$$\hat{Z}_o = R_o + jX_o,$$
$$\hat{Z}_p = R_p + jX_p.$$

$$\hat{U}_o = I(R_o + jX_o),$$
$$\hat{U} = I[(R_o + R_p) + j(X_o + X_p)],$$
$$U_o = I\sqrt{R_o^2 + X_o^2},$$
$$U = I\sqrt{(R_o + R_p)^2 + (X_o + X_p)^2},$$
$$\Delta U = U - U_o = I[\sqrt{(R_o + R_p)^2 + (X_o + X_p)^2} - \sqrt{R_o^2 + X_o^2}],$$
$$\Delta\hat{U} = \hat{U} - \hat{U}_o = I(R_p + jX_p),$$

mod. $\Delta\hat{U} = I\sqrt{R_p^2 + X_p^2}.$

W szczególnym przypadku, gdy $\frac{X_o}{R_o} = \frac{X_p}{R_p}$,

względnie
$$X_o = X_p = 0, \quad \Delta\hat{U} = \Delta U.$$

§ 18

PRAWA KIRCHHOFFA W ZASTOSOWANIU DO PRĄDÓW ZMIENNYCH

Jak wiadomo, przy prądzie stałym stosujemy prawa Kirchhoffa, gdy zachodzi rozgałęzienie prądów. Przy prądzie zmiennym możemy również stosować prawa Kirchhoffa, wyrażone takimi samymi wzorami, gdy chodzi o wartości chwilowe; przy tym należy zaznaczyć z góry, jakie kierunki na przewodach przyjmujemy za dodatnie. Więc w dowolnej chwili algebraiczna suma prądów powinna się równać zeru, jak również algebraiczna suma *S E M*, działających w zamkniętym obwodzie, powinna się równać algebraicznej sumie iloczynów natężeń prądów przez odpowiednie oporności; czyli

$$\Sigma i_k = 0,$$

$$\Sigma e_k = \Sigma i_k R_k.$$

W obwodach rozgałęzionych każda gałąź posiada na ogół inną oporność pozorną, wobec czego przesunięcia fazy prądu względem wspólnego wektora podstawowego będą w każdej gałęzi inne. Oznaczając te kąty przesunięcia fazy odpowiednio przez φ_1, φ_2, ..., φ_k, będziemy mieli

$$i_1 = I_{1m} \sin(\omega t + \varphi_1)$$

$$i_2 = I_{2m} \sin(\omega t + \varphi_2)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$i_k = I_{km} \sin(\omega t + \varphi_k).$$

Przechodząc do wartości skutecznych tych prądów i biorąc za podstawową oś kierunek wspólnego napięcia, będziemy mieli

$$\hat{I}_1 = I_1 e^{j\varphi_1}; \ \hat{I}_2 = I_2 e^{j\varphi_2}; \ \dots \hat{I}_k = I_k e^{j\varphi_k}.$$

Jeżeli więc zechcemy stosować prawa Kirchhoffa do wartości skutecznych, musimy rozpatrywać omawiane wielkości symbolicznie jako wektory. Wtedy warunkiem istnienia zależności wyżej podanych dla wartości chwilowych będą następujące wzory dla wartości skutecznych

$$\Sigma \hat{I}_k = 0, \tag{18}$$

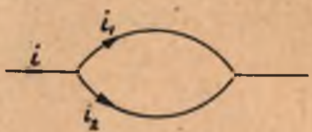
$$\Sigma \hat{E}_k = \Sigma \hat{I}_k \hat{Z}_k, \tag{19}$$

czyli zamiast algebraicznych sum mamy sumy geometryczne.

Przy stosowaniu tych wzorów należy ustalić, jakie kierunki nadajemy chwilowym wartościom dodatnim *S E M* oraz prądów, od tego bowiem zależeć będzie, z jakim znakiem, dodatnim czy ujemnym, wejdzie każda z omawianych wielkości do równań układanych na podstawie rozszerzonych praw Kirchhoffa. Przy prądzie stałym działanie *S E M* w obwodzie zewnętrznym przyjęto oznaczać w kierunku od bieguna dodatniego do bieguna ujemnego, czyli w kierunku ruchu dodatniej elektryczności; takiż sam kierunek dajemy prądowi. Przy rozważaniu wartości chwilowych prądów zmiennych możemy również zastosować te same oznaczenia kierunków odpowiadających biegunowości *S E M* w pewnej określonej chwili.

W ten sposób przy prądzie zmiennym strzałki będą odpowiadały dodatnim wartościom chwilowym*.

Tak np. na rys. (45) strzałki wskazują kierunek prądów i_1 oraz i_2 w chwili, gdy prądy te mają wartości dodatnie; według pierwszego prawa Kirchhoffa
$$\dot{i} = \dot{i}_1 + \dot{i}_2;$$

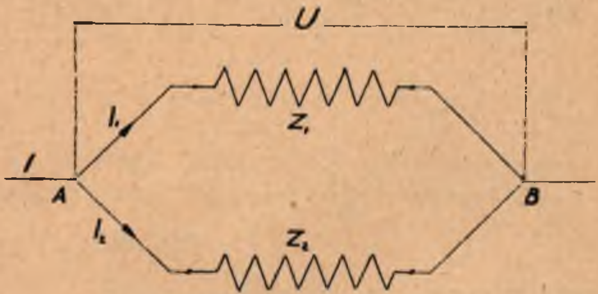


Rys. 45

Rys. 46

przechodząc zaś do wartości skutecznych, będziemy mieli (rys. 46)
$$\hat{I} = \hat{I}_1 + \hat{I}_2,$$
przy czym znaki przy wektorach I, I_1 i I_2 bierzemy według dodatnich kierunków, założonych dla wartości chwilowych.

Rozpatrzmy dwie gałęzie (rys. 47) między węzłami A i B. Strzałki odpowiadają kierunkowi dodatnich wielkości chwilowych; oznaczając przez U napięcie między tymi węzłami, będziemy mieli
$$\hat{I} = \hat{I}_1 + \hat{I}_2;$$
$$\hat{I}_1\dot{Z}_1 - \hat{I}_2\dot{Z}_2 = 0$$
lub $\hat{I}_1\dot{Z}_1 = \hat{I}_2\dot{Z}_2 = \hat{U}$.



Rys. 47

Na wykresie (rys. 48), gdzie φ, φ_1 i φ_2 oznaczają kąty przesunięcia faz względem napięcia U prądów I, I_1 i I_2,
$$OA = I_1, \quad OB = AC = I_2, \quad OC = I.$$

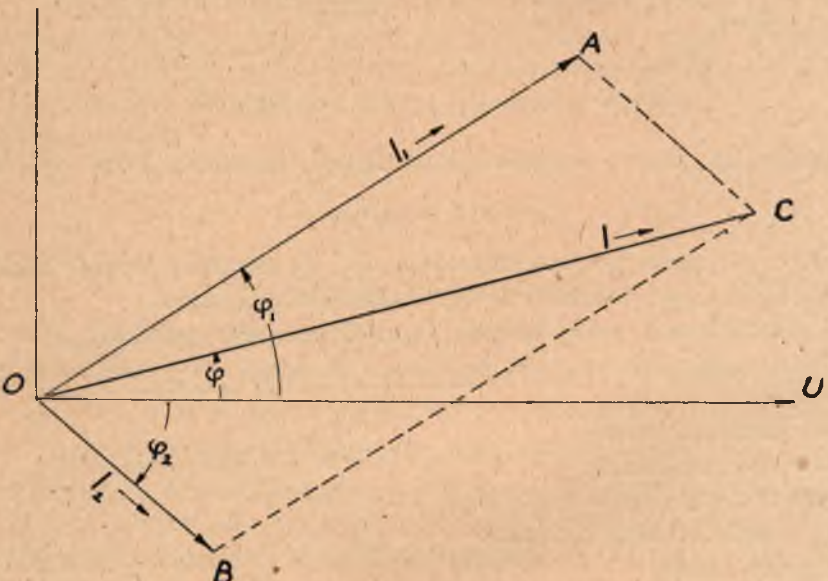
*Prof. S. Fryze wprowadza obok strzałek kierunkowych, wskazujących kierunek wartości chwilowych, strzałki kierunkowości. Dla zrozumienia tego terminu zwróćmy uwagę, że dla funkcji okresowo zmiennej w czasie wartości chwilowe mają znak dodatni w ciągu części okresu, w szczególności dla funkcji sinusoidalnej znak pozostaje bez zmiany w ciągu połowy okresu. Strzałki kierunkowości, niezależne od czasu, wskazują kierunek działania lub przebiegu w obwodzie rozpatrywanych wielkości dla dodatnich wartości chwilowych tych wielkości.

Biorąc rzuty prądów na podstawową oś OU oraz na oś do niej prostopadłą, otrzymamy

$$I \cos \varphi = I_1 \cos \varphi_1 + I_2 \cos \varphi_2,$$

$$I \sin \varphi = I_1 \sin \varphi_1 + I_2 \sin \varphi_2,$$

co oznacza, że składowe czynne i składowe bierne prądów dodają się do siebie algebraicznie. Podnosząc ostatnie wzory stronami do kwa-



Rys. 48

dratu i dodając do siebie, otrzymamy

$$I^2 = I_1^2 + I_2^2 + 2 I_1 I_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2),$$

skąd

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + 2 I_1 I_2 \cos (\varphi_1 - \varphi_2)}; \tag{20}$$

następnie, dzieląc stronami drugi wzór przez pierwszy, będziemy mieli

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{I_1 \sin \varphi_1 + I_2 \sin \varphi_2}{I_1 \cos \varphi_1 + I_2 \cos \varphi_2}. \tag{21}$$

§ 19
OPORNOŚCI POZORNE POŁĄCZONE RÓWNOLEGLE

Rozpatrzmy najpierw dwie oporności pozorne Z_1 i Z_2, połączone równolegle, jak na rys. 47. Jak widać z tego rysunku,

$$\hat{I}_1 = \frac{\hat{U}}{\hat{Z}_1}, \qquad \hat{I}_2 = \frac{\hat{U}}{\hat{Z}_2};$$

ponieważ

$$\hat{I} = \hat{I}_1 + \hat{I}_2,$$

przeto

$$\hat{I} = \hat{U}\left(\frac{1}{\hat{Z}_1} + \frac{1}{\hat{Z}_2}\right); \qquad \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = \frac{1}{\frac{1}{\hat{Z}_1} + \frac{1}{\hat{Z}_2}} = \frac{\hat{Z}_1 \hat{Z}_2}{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2}.$$

Stosunek $\frac{\hat{U}}{\hat{I}}$ stanowi pewną oporność pozorną, którą możemy rozpatrywać jako oporność równoważną dwóm danym opornościom; oznaczając tę równoważną oporność przez $\hat{Z}$, będziemy mieli

$$\hat{Z} = \frac{\hat{Z}_1 \hat{Z}_2}{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2} \tag{22}$$

lub

$$\frac{1}{\hat{Z}} = \frac{1}{\hat{Z}_1} + \frac{1}{\hat{Z}_2}. \tag{23}$$

Przy dowolnej ilości równolegle połączonych oporności pozornych $\hat{Z}_1$, $\hat{Z}_2$, ..., $\hat{Z}_k$, otrzymalibyśmy dla oporności $\hat{Z}$, równoważnej danym, wzór

$$\frac{1}{\hat{Z}} = \frac{1}{\hat{Z}_1} + \frac{1}{\hat{Z}_2} + \ldots + \frac{1}{\hat{Z}_k}.$$

Odwrotności oporności pozornych stanowią przewodności pozorne; oznaczając przewodności pozorne poszczególnych gałęzi przez Y_1, Y_2, ..., Y_k, a równoważną przewodność pozorną przez Y, otrzymamy

$$\hat{Y} = \hat{Y}_1 + \hat{Y}_2 + \ldots + \hat{Y}_k.$$

Widzimy stąd, że przy równoległym połączeniu oporności pozornych równoważna przewodność pozorna równa się geometrycznej sumie przewodności pozornych poszczególnych gałęzi.

Zbadajmy bardziej szczegółowo dwie równolegle połączone oporności pozorne; każda z nich składa się z oporności czynnej i oporności biernej; równoważna oporność pozorna będzie też zawierała obie te oporności: czynną i bierną. Podstawiając do wzoru (22) zamiast

$\dot{Z}$, $\dot{Z}_1$ i $\dot{Z}_2$ ich wartości $R+jX$, R_1+jX_1, R_2+jX_2, będziemy mieli

$$R + jX = \frac{(R_1 + jX_1)(R_2 + jX_2)}{(R_1 + R_2) + j(X_1 + X_2)} =$$

$$= \frac{[R_1R_2 - X_1X_2 + j(R_1X_2 + R_2X_1)]\,[(R_1 + R_2) - j(X_1 + X_2)]}{(R_1 + R_2{}^2 + (X_1 + X_2)^2} =$$

$$= \frac{R_1{}^2R_2 + R_1R_2{}^2 - R_1X_1X_2 - R_2X_1X_2 + R_1X_1X_2 + R_2X_1X_2 + R_1X_2{}^2 + R_2X_1{}^2}{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2} +$$

$$+ j\frac{R_1{}^2X_2 + R_2{}^2X_1 + R_1R_2X_1 + R_1R_2X_2 - R_1R_2X_1 - R_1R_2X_2 + X_1{}^2X_2 + X_2{}^2X_1}{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2} =$$

$$= \frac{R_1Z_2{}^2 + R_2Z_1{}^2}{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2} + j\frac{X_1Z_2{}^2 + X_2Z_1{}^2}{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2},$$

skąd

$$R = \frac{R_1Z_2{}^2 + R_2Z_1{}^2}{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2}, \tag{24}$$

$$X = \frac{X_1Z_2{}^2 + X_2Z_1{}^2}{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2}. \tag{25}$$

Równoważną oporność pozorną $\dot{Z}$ znajdziemy ze wzoru $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$, co, po podstawieniu wartości R i X i odpowiednich skrótach, daje

$$Z = \sqrt{\frac{(R_1{}^2 + X_1{}^2)(R_2{}^2 + X_2{}^2)}{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2}} = \frac{Z_1 Z_2}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2}}; \tag{26}$$

argument równoważnej oporności pozornej, czyli kąt φ przesunięcia fazy prądu I względem napięcia U, znajdujemy dzieląc wzory (25) przez (24):

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R} = \frac{X_1Z_2{}^2 + X_2Z_1{}^2}{R_1Z_2{}^2 + R_2Z_1{}^2}. \tag{27}$$

W wyrażeniu tym mianownik zawsze jest większy od zera, w liczniku zaś mamy oporności bierne, które mogą mieć znaki dodatnie lub ujemne, w szczególności równać się zeru.

Równoważną oporność pozorną Z dla dwóch równolegle połączonych oporności pozornych Z_1 i Z_2 można również znaleźć wykreślnie. W tym celu, biorąc dowolną oś OX jako podstawową, przeprowadzamy odcinki wyrażające oporności pozorne $Z_1 = OA$ i $Z_2 = OB$ (rys. 49). Dodając je geometrycznie, otrzymamy $OC = Z'$.

Wzór (22) możemy przepisać w sposób następujący:

$$\frac{\dot{Z}}{\dot{Z}_2} = \frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}'}.$$

Oznaczając kąty, które tworzą z osią OX oporności pozorne Z, Z_1, Z_2 i Z' odpowiednio przez α, α_1, α_2 i α', możemy ostatni wzór napisać w postaci

$$\frac{Ze^{j\alpha}}{Z_2 e^{j\alpha_2}} = \frac{Z_1 e^{j\alpha_1}}{Z' e^{j\alpha'}}$$

lub

$$\frac{Z}{Z_2} e^{j(\alpha-\alpha_2)} = \frac{Z_1}{Z'} e^{j(\alpha_1-\alpha')},$$

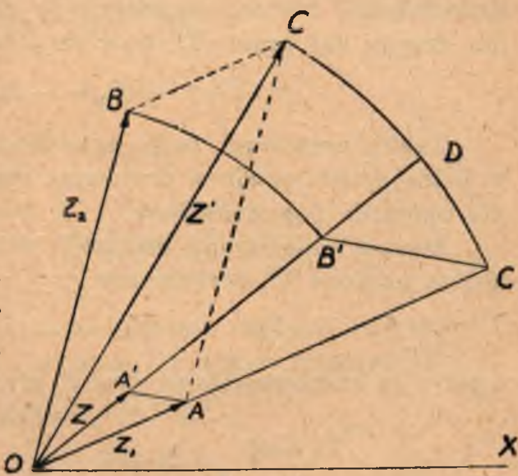
skąd

$$\frac{Z}{Z_2} = \frac{Z_1}{Z'},$$

$$\alpha - \alpha_2 = \alpha_1 - \alpha'.$$

Widzimy stąd, że $\hat{Z}$ musi tworzyć z $\hat{Z}_2$ taki sam kąt, jak $\hat{Z}_1$ tworzy z $\hat{Z}'$. Wobec tego odkładamy od OB wstecz (ponieważ $\hat{Z}_1$ przesunięte jest wstecz względem $\hat{Z}'$) kąt BOD równy kątowi COA; szukana oporność $\hat{Z}$ powinna leżeć na prostej OD, znamy więc jej argument. W celu znalezienia jej modułu budujemy $\triangle\, OAA'$ podobny $\triangle OBC$, np. z punktu O łukiem koła o promieniu OC odcinamy na przedłużeniu prostej OA odcinek OC'; w podobny sposób łukiem OB odcinamy na prostej OD odcinek OB', mamy zatem:

$$OC' = OC = Z',$$
$$OB' = OB = Z_2;$$



Rys. 49

łączymy następnie punkty B' i C' i z punktu A prowadzimy prostą równoległą do prostej $B'C'$ aż do przecięcia się z prostą OD w punkcie A'. Z podobieństwa trójkątów widzimy, że

$$\frac{OA'}{OB'} = \frac{OA}{OC'}.$$

Podstawiając tu wartości powyższe, otrzymujemy

$$\frac{OA'}{Z_2} = \frac{Z_1}{Z'}.$$

Porównując proporcję tę z poprzednią, widzimy, że odcinek $OA' = \hat{Z}$.

§ 20

REZONANS PRĄDÓW

Rozpatrując dwie oporności równolegle połączone, stwierdziliśmy (wzór 27), że kąt przesunięcia fazy prądu I, dopływającego do węzła, względem napięcia U między węzłami może się równać zeru, czyli że prąd I będzie w fazie z tym napięciem.

Jak widać z tego wzoru, ten szczególny przypadek będzie miał miejsce wówczas, gdy

$$X_1 Z_2^2 + X_2 Z_1^2 = 0,$$

czyli inaczej, gdy

$$\frac{X_1}{Z^2_1} = -\frac{X_2}{Z^2_2}. \tag{28}$$

Wyrazy stojące po obu stronach ostatniego wzoru stanowią przewodności bierne; oznaczając je dla pierwszej gałęzi przez B_1, dla drugiej zaś przez B_2, będziemy mieli warunek

$$B_1 = -B_2.$$

Znaki przeciwne tych przewodności biernych wskazują, że w jednej gałęzi powinna przeważać oporność indukcyjna, w drugiej zaś oporność pojemnościowa.

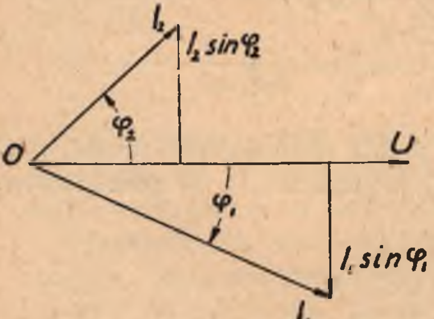
Mnożąc obie strony ostatniej równości przez wspólne obu gałęziom napięcie U, otrzymamy

$$UB_1 = -UB_2;$$

wyrazy te stanowią bierne prądy, płynące w rozpatrywanych gałęziach, czyli

$$I_1 \sin \varphi_1 = -I_2 \sin \varphi_2. \tag{29}$$

A więc *prąd dopływający do rozgałęzienia będzie w fazie z napięciem istniejącym między węzłami rozgałęzienia, gdy prądy bierne, płynące w obu gałęziach, będą sobie równe, lecz będą miały znaki przeciwne; zjawisko to nazywamy rezonansem prądów.*



Rys. 50

Na rys. 50 przedstawiony jest przypadek rezonansu prądów. Prądy bierne $I_1 \sin \varphi_1$ i $I_2 \sin \varphi_2$ są sobie równe, lecz mają znaki przeciwne.

Rozpatrzmy bardziej szczegółowo warunki możliwości powstawania rezonansu prądów. Przypuśćmy, że w pierwszej gałęzi mamy przewagę oporności indukcyjnej: $\omega L_1 > \frac{1}{\omega C_1}$, w drugiej zaś $\omega L_2 < \frac{1}{\omega C_2}$ mamy przewagę oporności pojemnościowej, czyli że w pierwszej gałęzi oporność bierna jest dodatnia, a w drugiej ujemna; wtedy, oznaczając

$$X_1 = \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} = X_L,$$

$$X_2 = \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} = -X_C,$$

możemy warunek rezonansu prądów na podstawie wzoru (28) przepisać w sposób następujący:

$$\frac{X_L}{R_1^2 + X_L^2} = \frac{X_C}{R_2^2 + X_C^2}$$

stąd

$$X_L (R_2^2 + X_C^2) - X_C (R_1^2 + X_L^2) = 0;$$

$$X_L^2 - \frac{R_2^2 + X_C^2}{X_C} X_L + R_1^2 = 0;$$

rozwiązując równanie względem X_L, otrzymamy

$$X_L = \frac{R_2^2 + X_C^2 \pm \sqrt{R_2^4 + 2 R_2^2 X_C{}^2 + X_C^4 - 4 R_1^2 X_C}}{2X_C} \tag{30}$$

Jak widać z tego wzoru, nie zawsze można dobrać oporność X zależnie od X_C lub odwrotnie; możliwe to będzie w przypadku

$$(R_2^2 + X_C^2)^2 \geqslant 4 R_1^2 X_C^2,$$

czyli

$$R_2^2 + X_C^2 \geqslant 2 R_1 X_C.$$

Jako przypadek szczególny rozpatrzmy dwie gałęzie, w których oporności rzeczywiste są jednakowe, a więc w jednej mamy dane wielkości R i L, w drugiej zaś R i C; wtedy ze wzoru (30) będziemy mieli

$$X_L = \frac{(R^2 + X_C^2) \pm (R^2 - X_C^2)}{2X_C},$$

skąd

1) $$X_L = X_C,$$

2) $$X_L = \frac{R^2}{X_C} \quad \text{lub} \quad R = \sqrt{X_L X_C}.$$

Pierwsza równość odpowiada warunkowi, gdy oporność indukcyjna i oporność pojemnościowa są sobie równe, podobnie jak przy rezonansie napięć. Druga równość wskazuje, że oporność rzeczywista stanowi średnią geometryczną oporności indukcyjnej i pojemnościowej. W pierwszym przypadku na podstawie wzoru (26), gdzie $X_1 = X_L$, $X_2 = -X_C$

$$Z = \sqrt{\frac{(R^2 + X_L{}^2) \cdot (R^2 + X_L{}^2)}{4R^2}} = \frac{R^2 + X_L{}^2}{2R},$$

wobec czego

$$I = \frac{2R}{R^2 + X_L{}^2} \cdot U.$$

W drugim przypadku

$$Z = \sqrt{\frac{\left(R^2 + \frac{R^4}{X_C{}^2}\right)(R^2 + X_C{}^2)}{4R^2 + \left(\frac{R^2}{X_C} - X_C\right)^2}} = \sqrt{\frac{(R^2X_C{}^2 + R^4)(R^2 + X_C{}^2)}{(R^2 + X^2{}_C)}} = R,$$

$$I = \frac{U}{R}$$

czyli prąd jest taki, jak gdybyśmy mieli prąd stały z opornością R.

§ 21

PRZYKŁADY NA RÓWNOLEGŁE POŁĄCZENIE OPORNOŚCI POZORNYCH

I. R i L połączone równolegle.

Mamy
$$\hat{Z}_1 = Z_1 = R,$$
$$\hat{Z}_2 = j\omega L.$$

Równoważna oporność pozorna będzie

$$\hat{Z} = \frac{\hat{Z}_1 \hat{Z}_2}{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2} = \frac{jR\omega L}{R + j\omega L} = \frac{jR\omega L\,(R - j\omega L)}{R^2 + (\omega L)^2} =$$
$$= \frac{R\,(\omega L)^2 + jR^2\omega L}{R^2 + (\omega L)^2},$$

skąd

$$Z = \frac{R\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{R}{\omega L}.$$

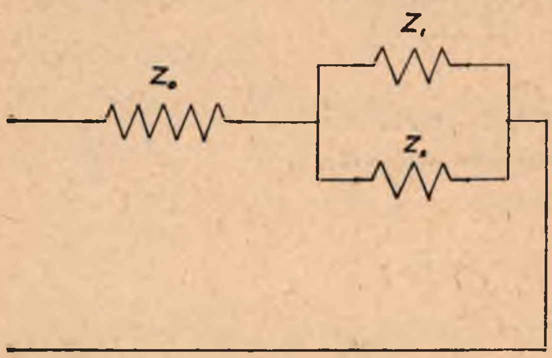
II. R i C połączone równolegle.

Mamy
$$\dot{Z}_1 = Z_1 = R,$$
$$\dot{Z}_2 = -j\frac{1}{\omega C},$$
$$\dot{Z} = \frac{-j\dfrac{R}{\omega C}}{R - j\dfrac{1}{\omega C}} = \frac{-jR}{R\omega C - j} = \frac{-jR(R\omega C + j)}{(R\omega C)^2 + 1} =$$
$$= \frac{R - jR^2\omega C}{(R\omega C)^2 + 1},$$
skąd
$$Z = \frac{R}{\sqrt{(R\omega C)^2 + 1}};$$
$$\operatorname{tg}\varphi = -R\omega C.$$

III. L i C połączone równolegle.

Mamy
$$\dot{Z}_1 = j\omega L,$$
$$\dot{Z}_2 = -j\frac{1}{\omega C} = \frac{1}{j\omega C},$$
$$\dot{Z} = \frac{\dfrac{L}{C}}{j\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)} = -j\frac{\dfrac{L}{C}}{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}} = j\frac{\dfrac{L}{C}}{\dfrac{1}{\omega C} - \omega L};$$
gdy
$$\omega L > \frac{1}{\omega C}, \quad Z = \frac{\dfrac{L}{C}}{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}},$$
$$\operatorname{tg}\varphi = -\infty, \quad \varphi = -\frac{\pi}{2};$$
gdy
$$\omega L < \frac{1}{\omega C}, \quad Z = \frac{\dfrac{L}{C}}{\dfrac{1}{\omega C} - \omega L},$$
$$\operatorname{tg}\varphi = +\infty, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

IV. Dwie oporności pozorne Z_1 i Z_2 są połączone równolegle, trzecia oporność pozorna Z_0 jest połączona w szereg do pierwszych dwóch (rys. 51). Jaka powinna być zależność pomiędzy tymi opornościami przy spełnieniu następującego warunku: prąd przepływający przez taki układ powinien zachować swoją wartość, gdy jedna z dwóch równoległych gałęzi, np. z opornością Z_1, zostanie przerwana? Tego rodzaju przypadek mamy np. wtedy, gdy przy prądzie zmiennym łączymy szeregowo żarówki i gdy w razie przepalenia się jednej z żarówek chcemy, aby inne żarówki nie zgasły i aby natężenie prądu przy tym nie uległo zmianie. W tym zagadnieniu chodzi o to, by wartość oporności pozornej układu zawierającego Z_1, Z_2 i Z_0 pozostała bez zmiany, gdy zostaną tylko oporności Z_2 i Z_0. W pierwszym przypadku całkowita oporność wynosi $\hat{Z}_0 + \hat{Z}$ gdzie $\hat{Z}$ stanowi oporność równoważną opornościom Z_1 i Z_2 połączonym równolegle; w drugim przypadku całkowita oporność wyniesie $\hat{Z}_0 + \hat{Z}_2$. Aby natężenie prądu w obu przypadkach pozostało bez zmiany (napięcie z zewnątrz przyłożone przyjmujemy jako stałe), trzeba, żeby moduły tych całkowitych oporności pozornych były równe sobie; argumenty w tym zagadnieniu roli nie odgrywają.



Rys. 51

Wobec tego otrzymujemy warunek

$$\mathrm{mod}\,(\hat{Z}_0 + \hat{Z}) = \mathrm{mod}\,(\hat{Z}_0 + \hat{Z}_2). \tag{31}$$

Niech

$$\hat{Z}_0 = R_0 + jX_0,$$

$$\hat{Z}_1 = R_1 + jX_1,$$

$$\hat{Z}_2 = R_2 + jX_2,$$

wtedy na podstawie wzorów (24) i (25) równoważna oporność $\hat{Z}$ będzie się równała

$$\hat{Z} = \frac{R_1 Z_2^2 + R_2 Z_1^2}{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2} + j\frac{X_1 Z_2^2 + X_2 Z_1^2}{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2},$$

gdzie

$$Z_1 = \sqrt{R_1^2 + X_1^2}, \quad Z_2 = \sqrt{R_2^2 + X_2^2}.$$

Podstawiając symboliczne wartości $\hat{Z}_0$, $\hat{Z}$ i $\hat{Z}_2$ do wyżej podanego warunku (31), będziemy mieli

$$\operatorname{mod}\left\{R_0 + \frac{R_1 Z_2^2 + R_2 Z_1^2}{(R_1+R_2)^2+(X_1+X_2)^2} + j\left[X_0 + \frac{X_1 Z_2^2 + X_2 Z_1^2}{(R_1+R_2)^2+(X_1+X_2)^2}\right]\right\} =$$
$$= \operatorname{mod}\left[R_0 + R_2 + j\,(X_0 + X_2)\right],$$

skąd

$$\left[R_0 + \frac{R_1 Z_2^2 + R_2 Z_1^2}{(R_1+R_2)^2+(X_1+X_2)^2}\right]^2 + \left[X_0 + \frac{X_1 Z_2^2 + X_2 Z_1^2}{(R_1+R_2)^2+(X_1+X_2)^2}\right]^2 =$$
$$= (R_0 + R_2)^2 + (X_0 + X_2)^2. \qquad (32)$$

Taka więc powinna być zależność pomiędzy trzema rozpatrywanymi opornościami. Jeżeli wiadome są dwie oporności pozorne, dla znalezienia trzeciej będziemy mieli równanie nieokreślone, gdyż każda oporność pozorna ma dwie składowe. Otrzymamy więc w rezultacie równanie z dwiema niewiadomymi, czyli nieskończoną ilość rozwiązań. Zwykle się zakłada z góry, jaki ma być stosunek oporności biernej do oporności czynnej w poszukiwanej oporności pozornej, i wtedy otrzymuje się równanie z jedną niewiadomą. Najłatwiej rozwiązuje się takie zagadnienie, gdy wiadome są oporności Z_1 i Z_2, szukamy zaś oporności Z_0 z jej składowymi R_0 i X_0; zakładając z góry $\frac{X_0}{R_0} = k$ i oznaczając we wzorze (32) w skróceniu

$$\frac{R_1 Z_2^2 + R_2 Z_1^2}{(R_1+R_2)^2+(X_1+X_2)^2} = M,$$

$$\frac{X_1 Z_2^2 + X_2 Z_1^2}{(R_1+R_2)^2+(X_1+X_2)^2} = N,$$

przy czym M i N oblicza się na podstawie danych wielkości; otrzymamy z tego wzoru

$$(R_0 + M)^2 + (kR_0 + N)^2 = (R_0 + R_2)^2 + (kR_0 + X_2)^2,$$

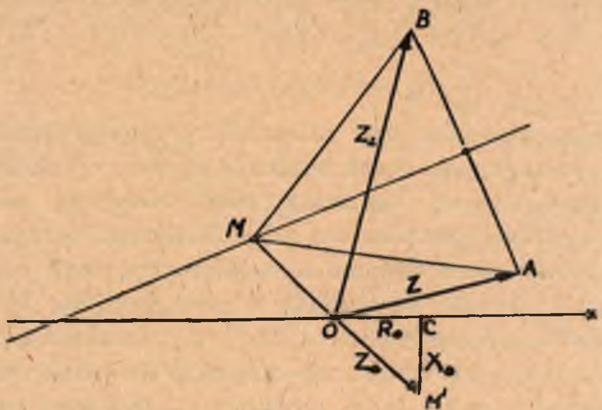
skąd po odpowiednich skrótach pozostanie równanie pierwszego stopnia, z którego ostatecznie znajdujemy

$$R_0 = \frac{R_2^2 + X_2^2 - M^2 - N^2}{2\,(M + kN - R_2 - kX_2)}.$$

Ponieważ sens mają tylko dodatnie wartości R_0, przeto w razie otrzymania $R_0 < 0$ należy zmienić założoną z góry wartość k i dobrać ją tak, aby R_0 wypadło dodatnie.

Ostatnie zagadnienie łatwo można rozwiązać wykreślnie. W tym celu najpierw znajdujemy wykreślnie równoważną oporność pozorną Z sposobem wskazanym w § 19 i podanym na rys. 49. Po znalezieniu Z wykreślamy względem dowolnej osi OX (rys. 52) oporności pozorne Z i Z_2; na rysunku $OA = Z$, $OB = Z_2$.

Łączymy A z B i ze środka odcinka AB przeprowadzamy prostopadłą do tego odcinka. Rozpatrzmy dowolny punkt M na tej prosto-



Rys. 52

padłej i połączmy go z początkiem O. Łatwo jest zauważyć dodając geometrycznie, że

$$\widehat{MO} + \widehat{OA} = \widehat{MA},$$
$$\widehat{MO} + \widehat{OB} = \widehat{MB}$$

albo

$$\widehat{MO} + \hat{Z} = \widehat{MA},$$
$$\widehat{MO} + \dot{Z} = \widehat{MB}$$

ale wartości MA i MB są równe sobie, więc

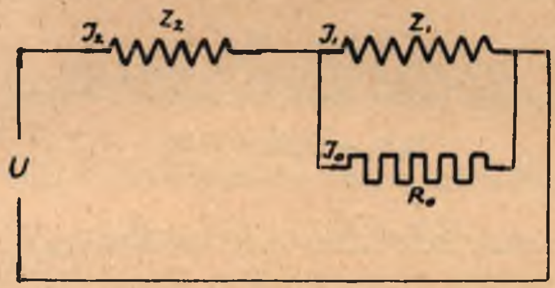
$$\mathrm{mod}\ (\widehat{MO} + \hat{Z}) = \mathrm{mod}\ (\widehat{MO} + \hat{Z}_2);$$

porównując otrzymamy rezultat ze wzorem (31) stwierdzamy, że $MO = Z_0$.

Składowe $\widehat{MO}$, czyli, tym samym składowe $\widehat{OM'}$ będą $R_0 = OC$ i $X_0 = CM'$. Otrzymujemy więc nieskończoną ilość punktów M, czyli rozwiązań, ale te tylko będą miały sens, które dają dodatnią składową R_0.

V. Otrzymywanie przesunięcia fazy o kąt prosty pomiędzy prądem i napięciem.

Nieraz zachodzi potrzeba otrzymania w pewnej części obwodu prądu, który względem napięcia z zewnątrz przyłożonego przesunięty jest w fazie o kąt prosty. Można to osiągnąć włączając równolegle do tej części obwodu pewną oporność czynną. Na rys. 53 mamy dwie oporności pozorne Z_1 i Z_2 szeregowo połączone; równolegle do oporności Z_1 przyłączona jest oporność rzeczywista R_0. Postaramy się określić R_0 tak, aby prąd I_1 płynący przez część obwodu



Rys. 53

z opornością Z_1 był przesunięty w fazie o kąt prosty względem napięcia U z zewnątrz przyłożonego. Oznaczając przez I_2 prąd płynący przez Z_2 oraz przez I_0 prąd płynący przez R_0, będziemy mieli

$$\hat{I}_2 = \hat{I}_1 + \hat{I}_0,$$

$$\hat{I}_1 \hat{Z}_1 = \hat{I}_0 R_0,$$

$$\hat{U} = \hat{I}_2 \hat{Z}_2 + \hat{I}_1 \hat{Z}_1;$$

z drugiego wzoru określamy

$$\hat{I}_0 = \frac{\hat{I}_1 \hat{Z}_1}{R_0}$$

i podstawiamy do pierwszego, wtedy

$$\hat{I}_2 = \hat{I}_1 + \frac{\hat{I}_1 \hat{Z}_1}{R_0} = \hat{I}_1 \left(\frac{R_0 + \hat{Z}_1}{R_0} \right).$$

Podstawiając to do wartości $\hat{U}$, otrzymujemy

$$\hat{U} = \hat{I}_1 \left(\frac{R_0 \hat{Z}_2 + \hat{Z}_1 \hat{Z}_2}{R_0} \right) + \hat{I}_1 \hat{Z}_1 =$$

$$= \hat{I}_1 \left\{ \frac{R_0 \hat{Z}_1 + R_0 \hat{Z}_2 + \hat{Z}_1 \hat{Z}_2}{R_0} \right\}.$$

Każdą z oporności $\hat{Z}_1$ i $\hat{Z}_2$ możemy wyrazić tak:

$$\hat{Z}_1 = R_1 + jX_1,$$
$$\hat{Z}_2 = R_2 + jX_2.$$

Podstawiając wartości te do wzoru poprzedniego, otrzymamy

$$\hat{U} = \frac{\hat{I}_1}{R_0}\left\{ R_0R_1 + jR_0X_1 + R_0R_2 + jR_0X_2 + R_1R_2 - X_1X_2 + \right.$$
$$\left. + jR_1X_2 + jR_2X_1 \right\}.$$

Grupując w tym wzorze części rzeczywiste i urojone, otrzymamy

$$\hat{U} = \hat{I}_1\left\{ \frac{R_0R_1 + R_0R_2 + R_1R_2 - X_1X_2}{R_0} + \right.$$
$$\left. + j\frac{R_1X_2 + R_2X_1 + R_0X_2 + R_0X_1}{R_0} \right\}.$$

Jeżeli wzór ten napiszemy pod postacią

$$\hat{U} = \hat{I}_1(R + jX),$$

wtedy przesunięcie fazy pomiędzy prądem I_1 i napięciem U otrzymamy ze wzoru

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{X}{R},$$

gdzie φ oznacza kąt przesunięcia fazy prądu I_1 względem napięcia U.

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \text{ dla } R = O.$$

Warunek zagadnienia będzie więc spełniony, jeżeli

$$\frac{R_0R_1 + R_0R_2 + R_1R_2 - X_1X_2}{R_0} = 0,$$

czyli

$$R_0R_1 + R_0R_2 + R_1R_2 - X_1X_2 = 0,$$

skąd

$$R_0 = \frac{X_1X_2 - R_1R_2}{R_1 + R_2}.$$

Oczywiście, że tylko wtedy można znaleźć realną wartość na R_0, gdy $X_1X_2 > R_1R_2$.

R O Z D Z I A Ł   C Z W A R T Y

PRĄDY WIELOFAZOWE

§ 22

OKREŚLENIE I POWSTAWANIE PRĄDU WIELOFAZOWEGO

W § 1 rozpatrzyliśmy powstawanie siły elektromotorycznej o przebiegu sinusoidalnym w czasie; ma to miejsce, gdy przewodnik, np. w postaci ramki z drutu, obraca się ze stałą prędkością w jednostajnym polu magnetycznym, przecinając przy tym strumień magnetyczny. Jeżeli zamiast jednego przewodnika będziemy w taki sam sposób obracali dowolną ich ilość, powstanie wówczas szereg *S E M* o przebiegach sinusoidalnych w czasie, które, w zależności od rozmieszczenia przewodników, będą się różniły między sobą w fazie. Układ, w którym działają *S E M* przesunięte w fazie, nazywamy *układem wielofazowym*.

Jeżeli przewodniki tworzą układ taki, że są rozmieszczone symetrycznie naokoło osi i układ ten obraca się w polu magnetycznym, wówczas taki układ wielofazowy nazywamy *symetrycznym*.

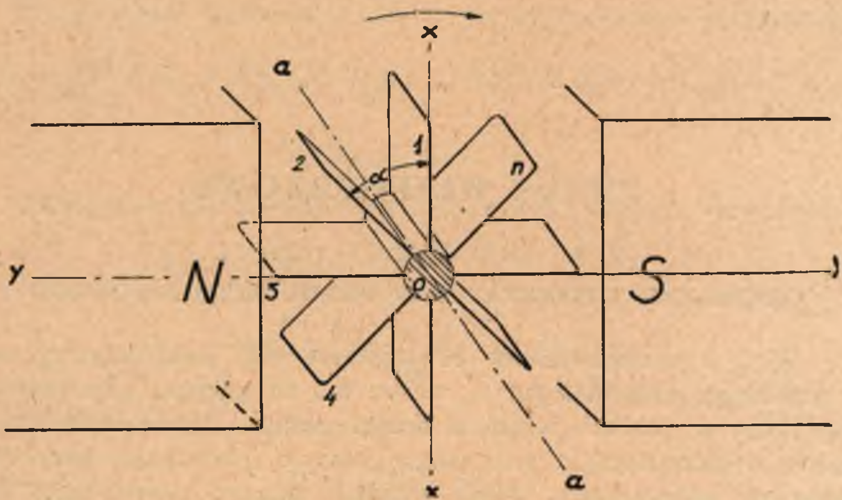
Na rys. 54 mamy symetryczny układ n przewodników, np. w postaci ramek rozmieszczonych naokoło osi w jednakowych odstępach. Kąt pomiędzy dwiema sąsiednimi ramkami będzie miał wartość

$$\alpha = \frac{2\pi}{n}.$$

Załóżmy, że cały ten układ obraca się ze stałą prędkością kątową w jednostajnym polu magnetycznym w kierunku wskazanym przez strzałkę i że rozpoczynamy liczenie czasu, gdy układ znajduje się w położeniu podanym na rysunku. W chwili $t = 0$ *S E M* w pierwszej ramce będzie $= 0$, jej wartość chwilowa e_1 w chwili t będzie wyrażona wzorem

$$e_1 = E_m \sin \omega t.$$

Łatwo zauważyć, że *S E M* powstające w następnych kolejnych ramkach będą opóźnione w fazie względem pierwszej odpowiednio o kąty a, $2a, \ldots, (n-1)\,a$; zakładając, że wszystkie przewodniki (ramki) są jednakowe i że wobec tego największe wartości powsta-



Rys. 54

jących w nich *S E M* będą również jednakowe, otrzymamy dla wartości chwilowych następujące wzory:

$$
\begin{aligned}
e_1 &= E_m \sin \omega t, \\
e_2 &= E_m \sin (\omega t - a), \\
e_3 &= E_m \sin (\omega t - 2\,a), \qquad (1) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
e_n &= E_m \sin [\omega t - (n-1)\,a].
\end{aligned}
$$

Gdybyśmy obracali nasz układ w przeciwnym kierunku, mielibyśmy nie opóźnienia, lecz przyspieszenia w fazie wszystkich następnych *S E M* i w naszych wzorach musielibyśmy postawić przed a, $2a$ itd. znak $+$.

Taki sam rezultat otrzymalibyśmy niezależnie od rodzaju przewodników, np. gdyby to były całe uzwojenia. Poszczególne przewodniki lub uzwojenia w takim układzie przyjęto nazywać w skróceniu fazami. Mówimy więc: *S E M*, napięcie, natężenie prądu pierwszej, drugiej itd. fazy, odnosząc te terminy nie tylko do źródła prądu, lecz również i do odbiorników połączonych z poszczególnymi uzwojeniami prądnicy dającej prądy wielofazowe.

§ 23

TWIERDZENIE MATEMATYCZNE O SUMIE WARTOŚCI CHWILOWYCH WIELKOŚCI UKŁADU WIELOFAZOWEGO SYMETRYCZNEGO

W dalszych rozważaniach powoływać się będziemy często na twierdzenie następujące: jeżeli $\alpha = \frac{2\pi}{n}$, gdzie n jest liczbą całkowitą większą od 1, wtedy

$$\sin x + \sin(x \pm \alpha) + \sin(x \pm 2\alpha) + \ldots + \sin[x \pm (n-1)\alpha] = 0.$$

Opierając się na wzorach Eulera, możemy napisać

$$\sin z = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j}$$

oraz

$$\cos z = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2},$$

gdzie

$$j = \sqrt{-1}.$$

Powyższą sumę możemy wobec tego napisać tak:

$$\frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} + \frac{e^{j(x\pm\alpha)} - e^{-j(x\pm\alpha)}}{2j} + \ldots + \frac{e^{j[x\pm(n-1)\alpha]} - e^{-j[x\pm(n-1)\alpha]}}{2j}.$$

Po uporządkowaniu wyrazów otrzymamy

$$\left\{\frac{e^{jx} + e^{j(x\pm\alpha)} + \ldots + e^{j[x\pm(n-1)\alpha]}}{2j}\right\} - \\ - \left\{\frac{e^{-jx} + e^{-j(x\pm\alpha)} + \ldots + e^{-j[x\pm(n-1)\alpha]}}{2j}\right\}.$$

Widzimy, że wyrazy w licznikach tworzą postępy geometryczne. Suma w liczniku w pierwszym nawiasie

$$S_1 = \frac{e^{j(x\pm n\alpha)} - e^{jx}}{e^{\pm j\alpha} - 1},$$

suma zaś w liczniku w drugim nawiasie

$$S_2 = \frac{e^{-j(x\pm n\alpha)} - e^{-jx}}{e^{\pm j\alpha} - 1}.$$

Wobec tego rozpatrywany wzór po sprowadzeniu do wspólnego mianownika przyjmie postać

$$\frac{e^{j[x\pm(n-1)\alpha]} - e^{-j(x\pm n\alpha)} - e^{j(x\pm\alpha)} + e^{jx} - e^{-j[x\pm(n-1)\alpha]} + e^{-j(x\pm n\alpha)} + e^{-j(x\pm\alpha)} - e^{-jx}}{(2 - e^{\pm j\alpha} - e^{\pm j\alpha})\,2j}.$$

Grupując wyrazy w liczniku, otrzymamy

$$\frac{\sin[x \pm (n-1)\,a] - \sin(x \pm n\,a) - \sin(x \pm a) + \sin x}{2 - 2\cos a}.$$

Biorąc pod uwagę, że $a = \frac{2\pi}{n}$, $(n-1)\,a = n\,a - a = 2\pi - a$ i że wobec tego pierwszy wyraz licznika skraca się z trzecim, drugi skraca się z czwartym, otrzymujemy w rezultacie, że licznik = 0. Mianownik nie jest równy zeru dla $n > 1$, wobec tego rozpatrywana suma sinusów zawsze będzie równa zeru dla całkowitego $n > 1$.

Zupełnie tak samo można dowieść, że

$$\cos x + \cos(x \pm a) + \cos(x \pm 2a) + \ldots + \cos[x + (n-1)\,a] = 0,$$

gdzie

$$a = \frac{2\pi}{n};\quad n > 1.$$

Rozpatrując wartości chwilowe *SEM* w symetrycznym układzie wielofazowym, podane we wzorze (1), widzimy, że na podstawie dowiedzionego twierdzenia suma ich równa się zeru.

§ 24

UKŁADY WIELOFAZOWE

Rozpatrując ogólny wzór (1) dla wartości chwilowych *SEM* wielofazowego układu symetrycznego, widzimy, że dla $n = 1$ otrzymujemy zwykły prąd sinusoidalny jednofazowy; dla $n = 2$ otrzymamy dwie *SEM* równe sobie, lecz znaków przeciwnych, czyli przeciwnie skierowane, gdyż

$$e_1 = E_m \sin \omega t,$$

$$e_2 = E_m \sin(\omega t - \pi) = -e_1.$$

Schematycznie układ taki mamy na rys. 55 w postaci dwóch uzwojeń — faz.

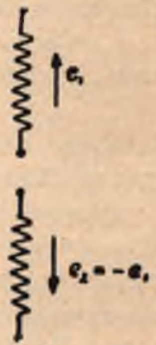
Dla $n = 3$ otrzymamy układ trójfazowy. Będziemy mieli w tym przypadku następujące wartości *SEM*:

$$e_1 = E_m \sin \omega t,$$

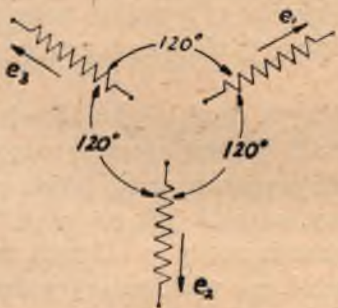
$$e_2 = E_m \sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right),$$

$$e_3 = E_m \sin\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi\right) = E_m \sin\left(\omega t + \frac{2}{3}\pi\right).$$

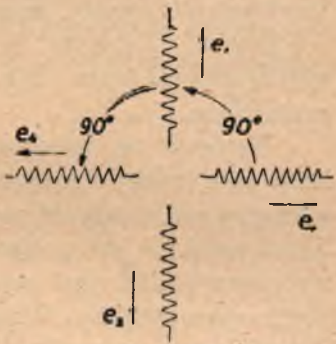
Schematycznie układ trójfazowy przedstawiony jest na rys. 56. Dla $n = 4$ otrzymujemy układ czterofazowy. Dla *SEM* w poszczególnych fazach wartości chwilowe będą następujące (rys. 57):



Rys. 55



Rys. 56



Rys. 57

$$e_1 = E_m \sin \omega t,$$

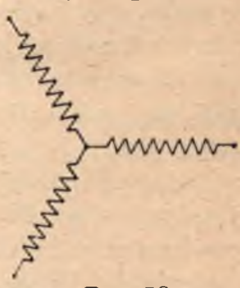
$$e_2 = E_m \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$e_3 = E_m \sin (\omega t - \pi) = - e_1,$$

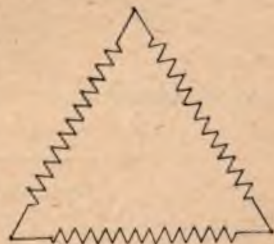
$$e_4 = E_m \sin \left(\omega t - \frac{3}{2} \pi\right) = - e_2.$$

Układ, w którym fazy działają samodzielnie, nazywamy układem *nieskojarzonym*. W przeciwnym razie otrzymujemy układ *skojarzony*. Skojarzenia, czyli połączenia faz, bywają następujące:

1) w gwiazdę, czyli *gwiazdowe*, kiedy początki wszystkich faz łączymy w jednym punkcie (rys. 58); 2) *wielobokowe* (rys. 59), kiedy początek pierwszej fazy łączymy z końcem drugiej, początek drugiej z końcem trzeciej itd., wreszcie początek ostatniej z końcem pierwszej. Drugie połączenie stanowi układ zamknięty, pierwsze — układ otwarty. Połączeń gwiazdowych i wielobokowych możemy dokonać nie tylko na uzwojeniach źródła prądu, np. prądnicy, lecz również na odbiornikach, do których doprowadzamy prądy idące od poszczególnych faz prądnicy i które odpowiednio ze sobą łączymy.



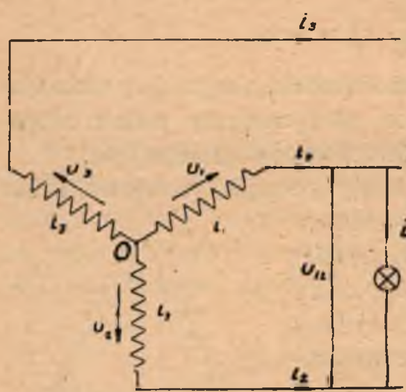
Rys 58



Rys 59

Rozpatrując napięcia i prądy w układach wielofazowych, musimy odróżniać te wielkości w poszczególnych fazach oraz między fazami i w przewodach łączących fazy źródła prądu z odbiornikami. Pierwsze nazywamy *fazowymi*, mówimy więc o napięciu fazowym i o prądzie fazowym; w drugim przypadku mówimy o napięciu *międzyprzewodowym*. Tak samo odróżniamy *prądy fazowe* i *prądy przewodowe*.

Napięcia na poszczególnych fazach układu wielofazowego zależne są z jednej strony od *SEM*, działającej w rozpatrywanej fazie, z drugiej zaś strony od prądu płynącego w tej fazie i od jej oporności. Jeżeli prąd nie jest pobierany, napięcie jest równe *SEM*, w przeciwnym przypadku jest ono zmniejszone o iloczyn natężenia prądu przez oporność fazy. W prądnicach wielofazowych zwykle uzwojenia stanowiące poszczególne fazy są jednakowe, wobec czego i *SEM* powstające we wszystkich fazach różnią się tylko kątami przesunięcia faz; natomiast napięcia na poszczególnych fazach będą miały jednakowe wartości i będą różniły się tylko kątami przesunięcia faz w dwóch przypadkach: albo gdy prąd w żadnej fazie nie jest pobierany, albo gdy we wszystkich fazach będą pobierane jednakowe prądy, czyli, jak mówimy, gdy wszystkie fazy będą jednakowo obciążone i gdy uzwojenia mają jednakowe oporności pozorne.



Rys. 60

W następnych rozumowaniach będziemy mieli na względzie najpierw te przypadki, gdy napięcia na poszczególnych fazach mają te same wartości największe lub skuteczne, różnią się zaś tylko kątami przesunięcia faz.

Rozpatrzmy układ gwiazdowy np. prądu trójfazowego (rys. 60). Wartości chwilowe napięć w trzech fazach wynoszą u_1, u_2, u_3. Między końcami faz pierwszej i drugiej istnieje napięcie międzyfazowe

$$u_{12} = u_1 - u_2 .$$

Przez odbiornik, włączony pomiędzy tymi fazami, popłynie prąd i_{12}. W chwili gdy $u_1 > u_2$, prąd płynie tak, jak wskazuje rysunek, zaś w chwili gdy $u_2 > u_1$, prąd płynie w kierunku przeciwnym.

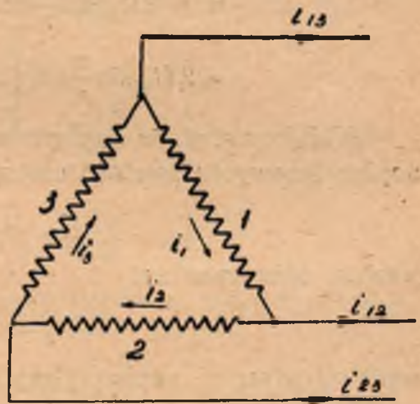
Natężenie prądu w obu fazach w tym przypadku będzie takie same jak i w odbiorniku:

$$\dot{i}_{12} = \dot{i}_1 = \dot{i}_2.$$

Widzimy stąd, że w układzie gwiazdowym różnią się pomiędzy sobą tylko napięcia międzyfazowe i fazowe. Napięcie międzyfazowe nazywamy w tym przypadku *skojarzonym*.

Gdy mamy układ wielobokowy, w tym przypadku trójkątowy (rys. 61), wówczas, jak to łatwo zauważyć, napięcie międzyfazowe równe jest napięciu fazowemu; natomiast prąd przewodowy równy jest różnicy odpowiednich prądów fazowych, np.

$$\dot{i}_{12} = \dot{i}_1 - \dot{i}_2.$$



Rys 61

Rozpatrzmy wielofazowy układ symetryczny z napięciami na fazach różniącymi się tylko kątami przesunięcia faz, a więc

$$u_1 = U_m \sin \omega t,$$

$$u_2 = U_m \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{n}\right),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$u_n = U_m \sin\left[\omega t - (n-1)\frac{2\pi}{n}\right].$$

Wyprowadźmy ogólny wzór na napięcie skojarzone. Weźmy w tym celu dowolne dwie sąsiednie fazy k i $k+1$:

$$u_k = U_m \sin\left[\omega t - (k-1)\frac{2\pi}{n}\right],$$

$$u_{k+1} = U_m \sin\left[\omega t - k\frac{2\pi}{n}\right].$$

Odejmując stronami drugi wzór od pierwszego, otrzymamy dla napięcia skojarzonego, które oznaczymy przez u_p:

$$u_p = u_k - u_{k+1} = U_m\left\{\sin\left[\omega t - (k-1)\frac{2\pi}{n}\right] - \sin\left[\omega t - k\frac{2\pi}{n}\right]\right\}.$$

Przekształcając różnicę sinusów na zasadzie wzoru

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2},$$

otrzymamy

$$u_p = 2 U_m \sin \frac{\pi}{n} \cos \left[\omega t - (2k-1) \frac{\pi}{n} \right] =$$

$$= 2 U_m \sin \frac{\pi}{n} \sin \left[\omega t + \frac{\pi}{2} - (2k-1) \frac{\pi}{n} \right]. \tag{2}$$

Widzimy stąd, że napięcie u_p jest przesunięte w fazie względem napięć fazowych; wartość maksymalna tego napięcia wynosi

$$U_{pm} = 2 U_m \sin \frac{\pi}{n},$$

wartość skuteczna zaś

$$U_p = 2 U_f \sin \frac{\pi}{n}, \tag{3}$$

gdzie U_f stanowi napięcie fazowe.

Analogicznie możemy wyprowadzić wzór dla natężenia prądu skojarzonego w przypadku układu wielobokowego, gdy obciążenie faz jest jednakowe; otrzymamy wtedy

$$I_p = 2 I_f \sin \frac{\pi}{n}, \tag{4}$$

gdzie I_f stanowi natężenie prądu płynącego w dowolnej fazie.

§ 25
MOC PRĄDÓW WIELOFAZOWYCH

Rozpatrzmy układ symetryczny n fazowy z jednakowym obciążeniem wszystkich faz.

Wartości chwilowe napięć będą

$$u_1 = U_m \sin \omega t,$$

$$u_2 = U_m \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{n} \right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_k = U_m \sin \left[\omega t - (k-1) \frac{2\pi}{n} \right],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_n = U_m \sin \left[\omega t - (n-1) \frac{2\pi}{n} \right].$$

Każdy prąd fazowy względem swego napięcia będzie przesunięty w fazie, np. o kąt φ wstecz; wtedy wartości chwilowe odpowiednich prądów będą

$$i_1 = I_m \sin(\omega t - \varphi),$$

$$i_2 = I_m \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{n} - \varphi\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$i_k = I_m \sin\left[\omega t - (k-1)\frac{2\pi}{n} - \varphi\right],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$i_n = I_m \sin\left[\omega t - (n-1)\frac{2\pi}{n} - \varphi\right].$$

Oznaczmy wartość chwilową mocy prądu w fazie k przez p_k. Wówczas możemy napisać

$$p_k = u_k\, i_k = U_m\, I_m \sin\left[\omega t - (k-1)\frac{2\pi}{n}\right] \sin\left[\omega t - (k-1)\frac{2\pi}{n} - \varphi\right].$$

Na podstawie wzoru

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right]$$

będziemy mieli

$$p_k = \frac{U_m I_m}{2}\left\{\cos\varphi - \cos\left[2\omega t - 2(k-1)\frac{2\pi}{n} - \varphi\right]\right\}.$$

W układzie mamy n faz, a więc k zmienia się od 1 do n. Ponieważ dla $n > 2$, na podstawie twierdzenia z § 23,

$$\sum_{k=1}^{k=n} \cos\left[2\omega t - 2(k-1)\frac{2\pi}{n} - \varphi\right] = 0,$$

więc wartość chwilowa mocy prądu w całym układzie będzie

$$p = n\frac{U_m I_m}{2}\cos\varphi = n\,UI\cos\varphi.$$

Widzimy stąd, że wartość chwilowa mocy układu nie zmienia się z biegiem czasu, czyli ma wartość stałą. Układy, w których to ma miejsce, nazywamy *układami wyrównanymi*. Oczywiście, że w tym przypadku moc średnia P będzie miała taką samą wartość co i moc chwilowa. Każdy układ wielofazowy symetryczny jest układem wyrównanym.

§ 26
PRĄD TRÓJFAZOWY

Rozpatrzmy bardziej szczegółowo najwięcej rozpowszechniony w praktyce prąd trójfazowy.

Jeżeli mamy połączenie gwiazdowe, to ze wzorów (2), (3) i (4) wynika:

dla k = 1, czyli między pierwszą i drugą fazą,

$$u_{12} = 2U_m \sin\frac{\pi}{3}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = U_m\sqrt{3}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right);$$

dla $k = 2$, czyli między drugą i trzecią fazą,

$$u_{23} = U_m\sqrt{3}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right);$$

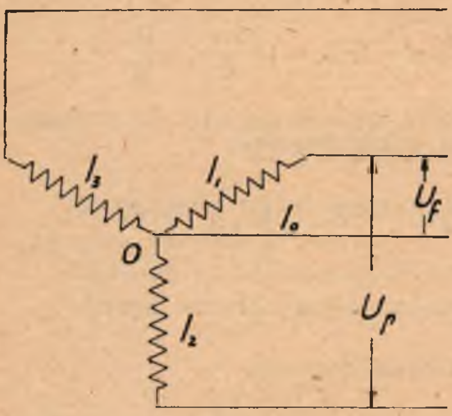
dla $k = 3$, czyli między trzecią i pierwszą fazą,

$$u_{31} = U_m\sqrt{3}\left(\omega t - \frac{7}{6}\pi\right) = U_m\sqrt{3}\sin\left(\omega t + \frac{5}{6}\pi\right);$$

$$U_p = U_f\sqrt{3};\quad I_p = I_f.$$

Dla połączenia w trójkąt będziemy mieli między fazami napięcie równe napięciu fazowemu, prąd przewodowy zaś będzie skojarzony i przy jednakowym obciążeniu trzech faz

$$I_p = I_f\sqrt{3}.$$



Rys. 62

W układzie gwiazdowym wprowadzamy czasami oprócz trzech przewodów idących od końców trzech faz, czyli przewodów fazowych, jeszcze czwarty przewód, idący od punktu łączącego początki wszystkich faz, czyli tak zwanego punktu zerowego, który często bywa uziemiony; przewód ten nazywamy przewodem zerowym (rys. 62). Włączając odbiornik między dowolnym przewodem fazowym i przewodem zerowym, otrzymamy na nim napięcie fazowe, włączając zaś odbiornik między dwa przewody fazowe, będziemy mieli na nim napięcie międzyprzewodowe — skojarzone.

Oznaczając przez I_1, I_2, I_3 wartości skuteczne prądów płynących w poszczególnych fazach, a przez I_0 wartość skuteczną prądu płynącego w przewodzie zerowym, będziemy mieli na zasadzie I prawa Kirchhoffa

$$\hat{I}_1 + \hat{I}_2 + \hat{I}_3 + \hat{I}_0 = 0,$$

czyli

$$\hat{I}_0 = -\hat{I}_1 - \hat{I}_2 - \hat{I}_3.$$

W przypadku szczególnym, gdy wszystkie fazy są jednakowo obciążone i prądy będą się różniły tylko przesunięciem faz o $\pm$ 120°, będziemy mieli dla wartości chwilowych

$$i_1 = I_m \sin \omega t; \quad i_2 = I_m \sin (\omega t - 120°); \quad i_3 = I_m \sin (\omega t + 120°).$$

Na podstawie twierdzenia z § 23

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0,$$

a więc również

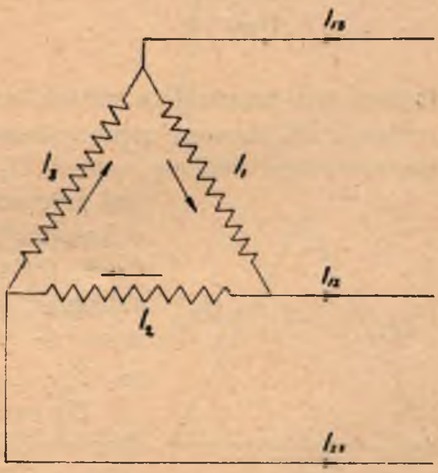
$$\hat{I}_1 + \hat{I}_2 + \hat{I}_3 = 0;$$

w tym przypadku przez przewód zerowy żaden prąd nie będzie przepływał.

Jeżeli zaś obciążenie trzech faz nie jest jednakowe, wówczas

$$\hat{I}_1 + \hat{I}_2 + \hat{I}_3 \neq 0; \quad \hat{I}_0 \neq 0$$

i przez przewód zerowy będzie przepływał prąd o mniejszym na ogół natężeniu niż natężenia prądów fazowych.



Rys 63

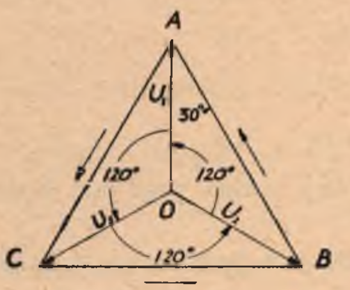
Gdy mamy połączenie trójkątowe (rys. 63)

$$\hat{I}_{12} = \hat{I}_1 - \hat{I}_2,$$
$$\hat{I}_{31} = \hat{I}_3 - \hat{I}_1,$$
$$\hat{I}_{23} = \hat{I}_2 - \hat{I}_3.$$

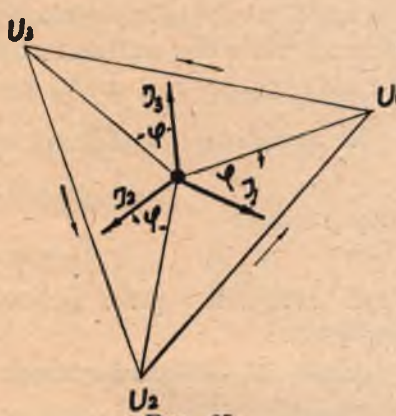
Wobec tego

$$\hat{I}_{12} + \hat{I}_{31} + \hat{I}_{23} = 0.$$

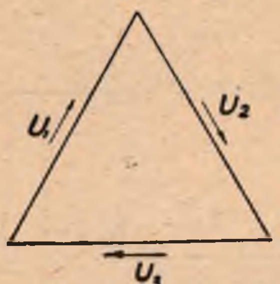
Zależności pomiędzy napięciami fazowymi i międzyfazowymi, a także pomiędzy napięciami i prądami, możemy przedstawić wykreślnie. Dla układu gwiazdowego z jednakowym obciążeniem faz odkładamy od dowolnego początku O (rys. 64) trzy promienie, wyrażające napięcia $OA = U_1$, $OB = U_2$ i $OC = U_3$; łącząc między sobą punkty A, B i C, otrzymamy równoboczny trójkąt, którego każdy bok stanowi odpowiednie napięcie międzyfazowe, a więc między fazą pierwszą i drugą mamy napięcie BA, stanowiące geometryczną różnicę napięć U_1 i U_2; widzimy, że to napięcie jest przesunięte w fazie naprzód względem napięcia U_1 o kąt $30° = \frac{\pi}{6}$; następnie CB stanowi napięcie między fazami drugą i trzecią, jako geometryczna różnica napięć U_2 i U_3; jak widać z wykresu, to napięcie między-



Rys. 64


Rys. 65

fazowe jest przesunięte wstecz względem napięcia U_1 o kąt prosty; wreszcie AC stanowi napięcie między fazami trzecią i pierwszą, jako geometryczna różnica napięć U_3 i U_1; to międzyfazowe napięcie jest przesunięte naprzód względem napięcia U_1 o kąt 150°. Z równoramiennych trójkątów OAB, OBC lub OAC otrzymujemy wiadomą zależność pomiędzy napięciami międzyfazowymi — skojarzonymi, i napięciami fazowymi $U_p = U_f\sqrt{3}$.


Rys. 66

Na rys. 65 mamy zestawienie napięć i prądów w układzie gwiazdowym również w przypadku jednakowego obciążenia wszystkich faz. Wszystkie prądy są przesunięte względem swych napięć fazowych o ten sam kąt φ (na rysunku mamy opóźnienie prądów względem napięć).

W układzie trójkątowym napięcia fazowe i równe im napięcia międzyfazowe tworzą trójkąt zamknięty (rys. 66), natomiast prądy przewodowe będą skojarzone. Wykres dla prądów w przypadku jednakowego obciążenia faz otrzymamy taki sam jak dla napięć w układzie gwiazdowym (rys. 64).

§ 27

ROZKŁAD UKŁADÓW NIESYMETRYCZNYCH NA UKŁADY SYMETRYCZNE PRĄDU TRÓJFAZOWEGO

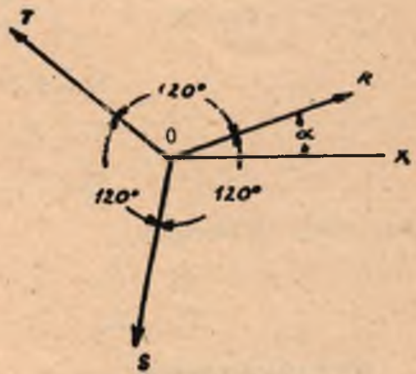
W symetrycznym układzie trójfazowym mamy trzy równe co do wartości wektory, przesunięte względem siebie o kąt 120°.

Mogą to być *SEM* lub przy jednakowym obciążeniu wszystkich faz — prądy albo napięcia. Oznaczmy te wektory przez R, S i T (rys. 67), ich wspólny moduł przez W. Niech wektor R tworzy z podstawową osią OX kąt α, wówczas

$$\hat{R} = We^{j\alpha},$$
$$\hat{S} = We^{j(\alpha-120°)},$$
$$\hat{T} = We^{j(\alpha+120°)},$$

albo

$$\hat{R} = We^{j\alpha},$$
$$\hat{S} = \hat{R}e^{-j120°},$$
$$\hat{T} = \hat{R}e^{j120°}.$$



Rys. 67

Ponieważ

$$e^{j120°} = \cos 120° + j \sin 120° = -\frac{1}{2} + j\frac{1}{2}\sqrt{3},$$

$$e^{-j120°} = \cos 120° - j \sin 120° = -\frac{1}{2} - j\frac{1}{2}\sqrt{3},$$

więc oznaczając w skróceniu

$$\hat{a} = -\frac{1}{2} + j\frac{1}{2}\sqrt{3},$$

skąd

$$\hat{a}^2 = -\frac{1}{2} - j\frac{1}{2}\sqrt{3},$$

będziemy mogli rozpatrywać trzy omawiane wektory w postaci

$$\hat{R}, \quad \hat{S} = \hat{a}^2\hat{R}, \quad \hat{T} = \hat{a}\hat{R}$$

Wektor T jest przesunięty względem wektora R naprzód o kąt 120°, wektor S względem wektora T — również naprzód o kąt 120°. Łatwo zauważyć, że $\hat{a}$ stanowi w rozpatrywanym zagadnieniu pewien czynnik, przez który mnożąc dowolny wektor przesuwamy go naprzód o kąt 120°, natomiast mnożąc dowolny wektor przez $\hat{a}^2$ przesuwamy go wstecz o kąt 120°.

Rys. 68

Zwróćmy również uwagę, że

$$1 + \hat{a} + \hat{a}^2 = 0,$$
$$\hat{a}^3 = 1.$$

Rozpatrzmy teraz niesymetryczny układ R, S, T (rys. 68). Każdy z tych wektorów możemy zastąpić trzema składowymi, tak aby

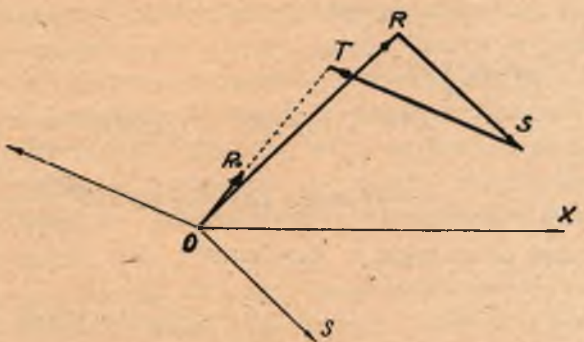
$$\left.\begin{aligned} \hat{R} &= \hat{R}_0 + \hat{R}_1 + \hat{R}_2 \\ \hat{S} &= \hat{S}_0 + \hat{S}_1 + \hat{S}_2 \\ \hat{T} &= \hat{T}_0 + \hat{T}_1 + \hat{T}_2 \end{aligned}\right\}, \tag{5}$$

przy czym dobieramy

$$\hat{S}_0 = \hat{R}_0, \quad \hat{S}_1 = \hat{a}^2\hat{R}_1, \quad \hat{S}_2 = \hat{a}\hat{R}_2;$$
$$\hat{T}_0 = \hat{R}_0, \quad \hat{T}_1 = \hat{a}\hat{R}_1, \quad \hat{T}_2 = \hat{a}^2\hat{R}_2.$$

Otrzymujemy trzy grupy wektorów

0 R_0, R_0, R_0,
1 R_1, $\hat{a}^2R_1$, $\hat{a}\,R_1$,
2 R_2, $\hat{a}\,R_2$, $\hat{a}^2R_2$.



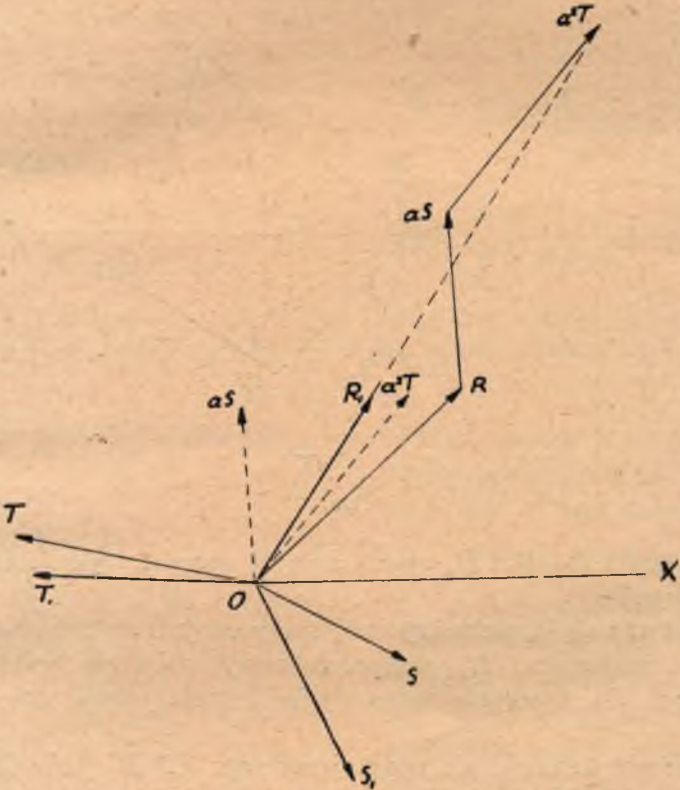
Rys. 69

Każda z tych grup 0, 1 i 2 przedstawia symetryczny układ; przy czym grupa 0 stanowi jeden wektor, grupa 1 odpowiada normalnemu symetrycznemu układowi trójfazowemu, grupa 2 zaś różni się od normalnego układu tylko tym, że wektory S i T mają zmienioną kolejność. Często nazywają grupę 0 *układem zerowym*, grupę 1 *układem współbieżnym* i grupę 2 *układem przeciwbieżnym*.

W ten sposób każdy niesymetryczny układ trójfazowy możemy przedstawić przez trzy symetryczne układy składowe.

Podstawiając wartości poszczególnych wektorów składowych do układu równań (5), będziemy mieli

$$\left.\begin{aligned} \hat{R} &= \hat{R}_0 + \hat{R}_1 + \hat{R}_2 \\ \hat{S} &= \hat{R}_0 + \hat{a}^2\hat{R}_1 + \hat{a}\hat{R}_2 \\ \hat{T} &= \hat{R}_0 + \hat{a}\hat{R}_1 + \hat{a}^2\hat{R}_2 \end{aligned}\right| \qquad (6)$$



Rys. 70

Dodając stronami i biorąc pod uwagę, że $1 + \hat{a} + \hat{a}^2 = 0$, znajdujemy

$$\hat{R}_0 = \frac{1}{3}(\hat{R} + \hat{S} + \hat{T}); \qquad (7)$$

mnożąc drugie równanie przez $\hat{a}$, trzecie przez $\hat{a}^2$ i dodając stronami wszystkie równania, otrzymamy

$$\hat{R} + \hat{a}\hat{S} + \hat{a}^2\hat{T} = 3\hat{R}_1,$$

skąd

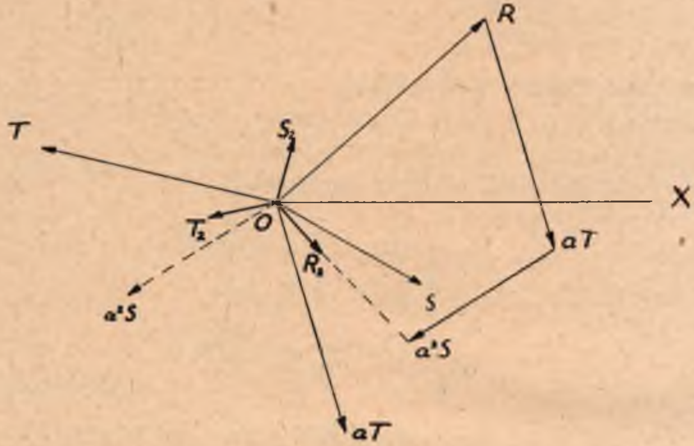
$$\hat{R}_1 = \frac{1}{3}(\hat{R} + \hat{a}\hat{S} + \hat{a}^2\hat{T});$$

wreszcie, mnożąc drugie równanie przez $\hat{a}^2$, trzecie przez $\hat{a}$ i dodając stronami wszystkie równania, otrzymamy

$$\hat{R} + \hat{a}^2\hat{S} + \hat{a}\hat{T} = 3\hat{R}_2,$$

skąd

$$\hat{R}_2 = \frac{1}{3}(\hat{R} + \hat{a}^2\hat{S} + \hat{a}\hat{T}).$$



Rys. 71

Wielkości R_0, R_1 i R_2 można znaleźć również wykreślnie w sposób następujący:

R_0 równa się $1/3$ geometrycznej sumy danych wektorów (rys. 69).

Dla znalezienia R_1 przeprowadzamy najpierw wektory aS i a^2T (rys. 70), następnie bierzemy $1/3$ geometrycznej sumy R, aS i a^2T.

Wreszcie analogicznie znajdujemy (rys. 71) R_2 jako $1/3$ geometrycznej sumy R, a^2S i aT.

§ 28
MOC PRĄDU TRÓJFAZOWEGO

Rozpatrzymy, jak się wyraża moc prądu trójfazowego w najogólniejszym przypadku, gdy obciążenie poszczególnych faz jest różne, to znaczy, że i prądy płynące w przewodach, i napięcia międzyprzewodowe nie są jednakowe.

Gdy odbiorniki połączone są w gwiazdę z trzema przewodami (rys. 72), wartość chwilowa mocy pobieranej przez odbiorniki wynosi

$$p = u_1 i_1 + u_2 i_2 + u_3 i_3,$$

gdzie u_1, u_2, u_3, oznaczają wartości chwilowe napięć w poszczególnych fazach odbiorników, zaś i_1, i_2, i_3 wartości chwilowe prądów płynących w przewodach oraz, w tym przypadku — przez poszczególne fazy odbiorników. Ponieważ

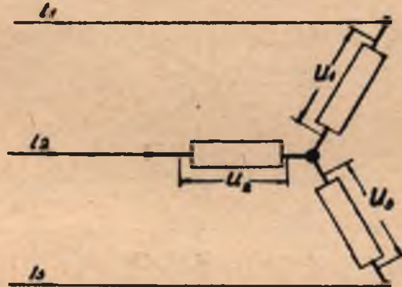
$$i_1 + i_2 + i_3 = 0,$$

czyli $$i_3 = -i_1 - i_2,$$

możemy napisać

$$p = (u_1 - u_3)\, i_1 + (u_2 - u_3)\, i_2 ;$$

ale $$u_1 - u_3 = u_{13}$$



Rys. 72

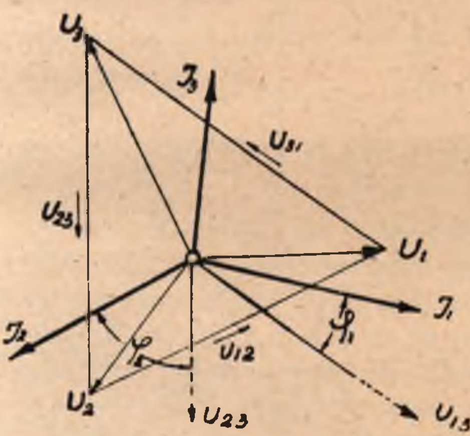
stanowi napięcie między pierwszą i trzecią fazą odbiorników, liczone w kierunku od końca trzeciej do końca pierwszej fazy; tak samo

$$u_2 - u_3 = u_{23}$$

stanowi napięcie między drugą i trzecią fazą, liczone w kierunku od końca trzeciej do końca drugiej fazy; w ten sposób

$$p = u_{13}\, i_1 + u_{23}\, i_2 .$$

Przechodząc od wartości chwilowej mocy do wartości średniej, czyli do mocy czynnej P, wprowadzając wartości skuteczne napięć i prądów i oznaczając przez φ_1 różnicę faz prądu i_1 i napięcia u_{13} oraz przez φ_2 — różnicę faz prądu i_2 i napięcia u_{23} (rys. 73), otrzymamy



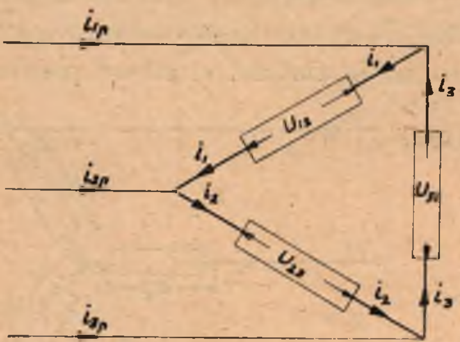
Rys. 73

$$P = U_{13} I_1 \cos\varphi_1 + U_{23} I_2 \cos\varphi_2 . \tag{8}$$

Gdy odbiorniki połączone są w trójkąt (rys. 74), będziemy mieli dla wartości chwilowej mocy układu

$$p = u_{12} i_1 + u_{23} i_2 + u_{31} i_3,$$

gdzie u_{12}, u_{23}, u_{31} oznaczają wartości chwilowe napięć międzyfazowych, które w tym przypadku równe są napięciom fazowym. Kierunki tych napięć, zgodne z kierunkami prądów, które przyjęliśmy jako dodatnie, wskazane są na rys. 74.



Rys. 74

Ponieważ w każdej chwili

$$u_{12} + u_{23} + u_{31} = 0,$$

czyli $u_{12} = -u_{31} - u_{23}$,

zaś $u_{31} = -u_{13}$,

przeto możemy napisać

$$p = u_{13}(i_1 - i_3) + u_{23}(i_2 - i_1);$$

ale $i_1 - i_3 = i_{1p}$, $i_2 - i_1 = i_{2p}$,

gdzie i_{1p} oraz i_{2p} oznaczają prądy płynące w pierwszym i drugim przewodzie.

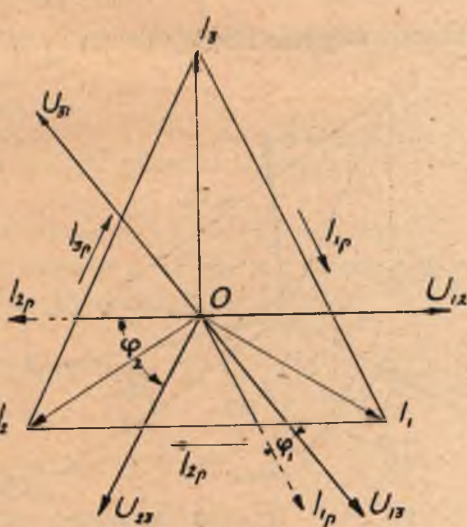
W ten sposób

$$p = u_{13}i_{1p} + u_{23}i_{2p}.$$

Jeżeli przez φ_1 i φ_2 oznaczymy różnice faz odpowiednio pomiędzy u_{13} i i_{1p} oraz u_{23} i i_{2p} i przejdziemy do wartości skutecznych napięć i prądów (rys. 75), otrzymamy dla mocy czynnej rozpatrywanego układu trójkątowego (9)

$$P = U_{13} I_{1p} \cos\varphi_1 + U_{23} I_{2p} \cos\varphi_2$$

wzór analogiczny do wzoru (8).



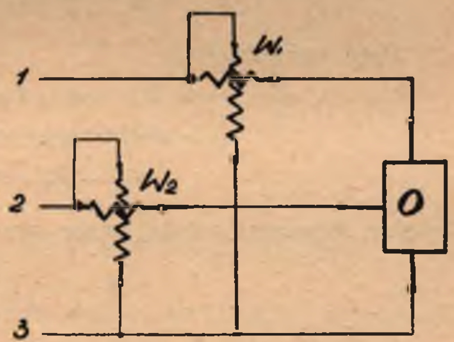
Rys. 75

Widzimy więc, że zarówno w układzie gwiazdowym jak i w układzie trójkątowym moc pobierana przez odbiorniki wyraża się sumą dwóch składników, z których każdy oznacza pewną moc czynną.

Mierzenia mocy prądu dokonywamy za pomocą przyrządów, które nazywamy *watomierzami;* zawierają one dwie cewki: prądową i napięciową. W ogólnym przypadku, dla zmierzenia całkowitej mocy układu prądu trójfazowego musimy zmierzyć obie wyżej wyprowadzone moce składowe, czyli zastosować dwa watomierze.

W tym celu watomierze W_1 i W_2 (rys. 76) włączamy przed odbiornikami O, połączonymi w gwiazdę lub trójkąt, w ten sposób, że przez cewki prądowe płyną prądy przewodów 1 i 2, zaś cewki napięciowe mierzą napięcia: pierwsza między 1 i 3 fazą — U_{13}, druga między 2 i 3 fazą — U_{23}.

Moce wskazywane przez te watomierze odpowiadają składowym mocy we wzorach (8) lub (9), przy czym przy odchyleniu wskazówek watomierzy w tym samym kierunku należy te moce do siebie dodać, a przy odchyleniu w różne strony — odjąć.



Rys. 76

Przy jednakowym obciążeniu trzech faz moc prądu trójfazowego wyrazi się wzorem

$$P = 3 U I \cos \varphi,$$

gdzie U i I oznaczają fazowe napięcia i prądy. Jeżeli wprowadzimy do powyższego wzoru wielkości międzyprzewodowe, to dla układu gwiazdowego $U = \frac{U_p}{\sqrt{3}}$, $I = I_p$, dla trójkątowego zaś $U = U_p$, $I = \frac{I_p}{\sqrt{3}}$; wobec tego, po podstawieniu tych wartości do wzoru na moc, otrzymamy w obu przypadkach jeden i ten sam wzór

$$P = \sqrt{3}\, U_p I_p \cos \varphi.$$

Watomierze W_1 i W_2 w przypadku jednakowego obciążenia trzech faz wskażą na ogół różne moce, ponieważ kąty przesunięcia faz φ_1 i φ_2 we wzorach (8) i (9) na ogół będą różne; tylko w przypadku, gdy prądy I_1, I_2, I_3 są w fazie ze swymi napięciami fazowymi, czyli gdy odbiorniki posiadają tylko oporność rzeczywistą, wskazywane przez oba watomierze moce będą sobie równe. Wtedy bowiem, jak łatwo sprawdzić na rys. 71 i na rys. 73,

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 30°,$$

wobec czego ze wzorów (8) lub (9) otrzymamy

$$P = 2 U_p I_p \cos 30° = \sqrt{3}\, U_p I_p,$$

przy czym

$$\varphi = 0°.$$

Przy dowolnym kącie φ pomiędzy fazowym napięciem i fazowym prądem zarówno w układzie gwiazdowym jak i w układzie trójkątnym

$$\varphi_1 = 30 - \varphi,$$
$$\varphi_2 = 30 + \varphi.$$

Wobec tego moce, które mierzą watomierze W_1 i W_2, będą określone następującymi wzorami:

$$P_1 = UI \cos(30° - \varphi),$$
$$P_2 = UI \cos(30° + \varphi).$$

Stąd otrzymujemy

$$P_1 + P_2 = UI(\cos 30° \cos\varphi + \sin 30° \sin\varphi + \cos 30° \cos\varphi - \sin 30° \sin\varphi) = \sqrt{3}\, UI \cos\varphi,$$
$$P_1 - P_2 = UI \sin\varphi.$$

Dzieląc stronami ostatni wzór przez poprzedni, będziemy mieli

$$\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3}\frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2}.$$

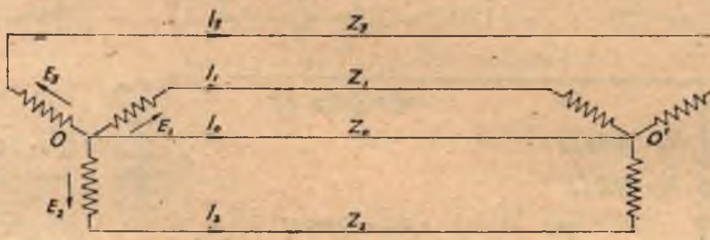
W zależności od wartości i od znaku φ poszczególne moce mogą wypaść dodatnie lub ujemne, więc gdy $30^0 - \varphi > \frac{\pi}{2}$, $P_1 < 0$, gdy $30^0 + \varphi > \frac{\pi}{2}$, $P_2 < 0$.

W ten sposób moc równa jest sumie algebraicznej mocy wskazywanych przez oba watomierze.

§ 29

WYZNACZANIE PRĄDÓW W UKŁADACH PRĄDU TRÓJFAZOWEGO

Rozpatrzmy następujące zagadnienie. Mamy prądnicę prądu trójfazowego w połączeniu gwiazdowym (rys. 77), w każdej fazie działa *SEM* o wartości skutecznej E; od źródła są przeprowadzone 3 przewody fazowe i przewód zerowy do odbiorników, które są również połączone w gwiazdę. Dane są poza tym wszystkie oporności uzwojeń prądnicy, przewodów i odbiorników; trzeba wyznaczyć prądy I_1, I_2, I_3 i I_0, które będą płynęły w odpowiednich przewodach fazowych i w przewodzie zerowym, w przypuszczeniu, że odbiorniki w poszczególnych fazach różnią się między sobą, czyli że obciążenie faz nie jest jednakowe, a więc i w przewodzie zerowym będzie płynął pewien prąd. Oznaczmy oporność pozorną pomiędzy punktami O i O', zawierającą oporność uzwojenia jednej fazy, oporność przewodu i oporność odbiorników włączonych do tej fazy odpowiednio przez Z_1, Z_2 i Z_3, a oporność przewodu zerowego między tymiż punktami O i O' przez Z_0; następnie oznaczmy *SEM* działające w poszczególnych fa-



Rys. 77

zach, różniące się tylko kątami przesunięcia faz, odpowiednio przez E_1, E_2 i E_3.

Na podstawie praw Kirchhoffa będziemy mieli przy założeniu dodatnich kierunków prądów chwilowych, jak na rysunku,

$$\hat{I}_1 + \hat{I}_2 + \hat{I}_3 + \hat{I}_0 = 0,$$
$$\hat{E}_1 = \hat{I}_1\check{Z}_1 - \hat{I}_0\check{Z}_0,$$
$$\hat{E}_2 = \hat{I}_2\check{Z}_2 - \hat{I}_0\check{Z}_0,$$
$$\hat{E}_3 = \hat{I}_3\check{Z}_3 - \hat{I}_0\check{Z}_0.$$

Wyrażając z ostatnich trzech równań prądy $\hat{I}_1$, $\hat{I}_2$ i $\hat{I}_3$ i podstawiając ich wartości do pierwszego równania, otrzymamy

$$\frac{\hat{E}_1 + \hat{I}_0\check{Z}_0}{\check{Z}_1} + \frac{\hat{E}_2 + \hat{I}_0\check{Z}_0}{\check{Z}_2} + \frac{\hat{E}_3 + \hat{I}_0\check{Z}_0}{\check{Z}_3} + \hat{I}_0 = 0,$$

skąd

$$\hat{I}_0\check{Z}_0 = -\frac{\dfrac{\hat{E}_1}{\check{Z}_1} + \dfrac{\hat{E}_2}{\check{Z}_2} + \dfrac{\hat{E}_3}{\check{Z}_3}}{\dfrac{1}{\check{Z}_1} + \dfrac{1}{\check{Z}_2} + \dfrac{1}{\check{Z}_3} + \dfrac{1}{\check{Z}_0}} = -\frac{\hat{E}_1\check{Y}_1 + \hat{E}_2\check{Y}_2 + \hat{E}_3\check{Y}_3}{\check{Y}_1 + \check{Y}_2 + \check{Y}_3 + \check{Y}_0}, \qquad (10)$$

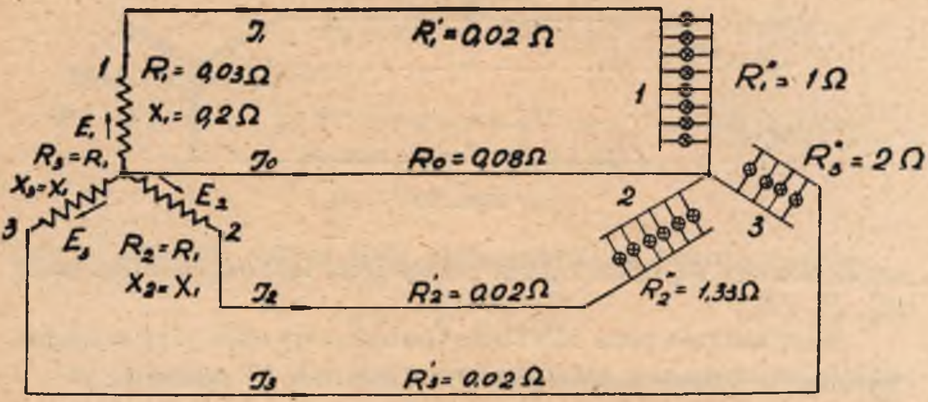
gdzie Y_1, Y_2, Y_3 i Y_0 oznaczają przewodności pozorne odpowiednich części układu; stąd znajdujemy $\hat{I}_0$; podstawiając zaś otrzymane wartości $\hat{I}_0\check{Z}_0$ do powyższych równań, znajdziemy prądy $\hat{I}_1$, $\hat{I}_2$ i $\hat{I}_3$. Należy zauważyć, że iloczyn $\hat{I}_0\check{Z}_0$ stanowi napięcie między punktami

O i O'. Przy rozwiązywaniu zadania należy jedną z SEM, np. E_1, przyjąć jako wektor z kierunkiem podstawowym, wówczas

$$\hat{E}_1 = E,$$

$$\hat{E}_2 = E(\cos 120^\circ - j \sin 120^\circ) = E\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{E}{2}\left(1 + j\sqrt{3}\right).$$

$$\hat{E}_3 = E(\cos 120^\circ + j \sin 120^\circ) = E\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{E}{2}\left(1 - j\sqrt{3}\right).$$



Rys. 78

P r z y k ł a d (rys. 78).

Dane $E_1 = E_2 = E_3 = 120$ woltów

oraz oporności poszczególnych części układu, wskazane na rysunku; trzeba znaleźć prądy I_1, I_2, I_3 i $\hat{I}_0$.

Mamy

$$\begin{aligned} \hat{Z}_1 &= 1{,}05 + j\,0{,}2, &\quad \text{stąd} \quad \hat{Y}_1 &= 0{,}919 - j0{,}175,\\ \hat{Z}_2 &= 1{,}38 + j\,0{,}2, & \hat{Y}_2 &= 0{,}710 - j0{,}103,\\ \hat{Z}_3 &= 2{,}05 + j\,0{,}2, & \hat{Y}_3 &= 0{,}483 - j0{,}047,\\ \hat{Z}_0 &= R_0 = 0{,}08, & Y_0 &= G_0 = 12{,}5. \end{aligned}$$

Biorąc kierunek $\hat{E}_1$ za podstawowy i oznaczając przez ψ_1, ψ_2, ψ_3 i ψ_0 kąty przesunięcia faz poszukiwanych prądów względem $\hat{E}_1$, będziemy mieli

$$\hat{E}_1 = E_1 = 220 \text{ woltów};$$

$$\hat{E}_2 = -110(1 + j\sqrt{3});$$

$$\hat{E}_3 = -110(1 - j\sqrt{3}).$$

Na zasadzie wzoru (10) otrzymujemy

$$\hat{I}_0\hat{Z}_0 = -110\,\frac{2(0{,}919-j0{,}175)-(1+j\sqrt{3})\cdot(0{,}710-j0{,}103)-(1-j\sqrt{3})\cdot(0{,}483-j0{,}047)}{(0{,}919+0{,}710+0{,}483+12{,}5)-j(0{,}175+0{,}103+0{,}047)}.$$

Po wykonaniu wskazanych działań i uczynieniu mianownika liczbą rzeczywistą, znajdujemy

$$\hat{I}_0\hat{Z}_0 = (-4{,}53 + j4{,}38) \text{ woltów};$$

$$I_0 Z_0 = 6{,}2 \text{ woltów};$$

skąd

$$\hat{I}_0 = (-56{,}7 + j54{,}8) \text{ amperów}$$

$$I_0 = 78{,}6 \text{ amperów}$$

$$\operatorname{tg}\psi_0 = -1{,}014, \quad \psi_0 = 135° \text{ (bo w II ćwiartce).}$$

Następnie obliczamy

$$\hat{I}_1 = (\hat{E}_1 + \hat{I}_0\hat{Z}_0)\hat{Y}_1 = (198{,}9 - j33{,}7) \text{ amperów}$$

$$I_1 = 201{,}7 \text{ amperów}$$

$$\operatorname{tg}\psi_1 = -0{,}168, \quad \psi_1 = -9°30' \text{ (bo w IV ćwiartce).}$$

$$\hat{I}_2 = (-99{,}4 - j120{,}4) \text{ amperów}$$

$$I_2 = 156{,}1 \text{ amperów}$$

$$\operatorname{tg}\psi_2 = 1{,}11, \quad \psi_2 = -129°30' \text{ (bo w III ćwiartce).}$$

$$\hat{I}_3 = (-45{,}3 + j99{,}3) \text{ amperów}$$

$$I_3 = 109{,}1 \text{ amperów}$$

$$\operatorname{tg}\psi_3 = -2{,}15, \quad \psi_3 = 115° \text{ (bo w II ćwiartce).}$$

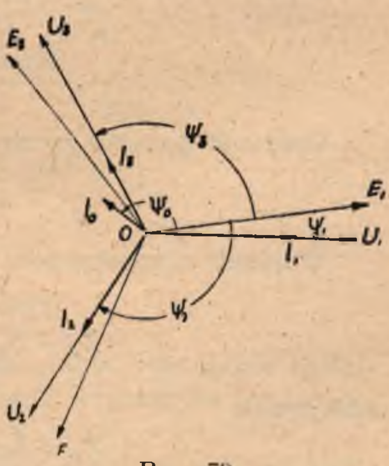
Możemy teraz jeszcze znaleźć napięcia na poszczególnych fazach odbiornika.

$$\hat{U}_1 = \hat{I}_1 R_1'' = 203 \text{ woltów},$$

$$\hat{U}_2 = \hat{I}_2 R_2'' = 207{,}6 \text{ woltów},$$

$$\hat{U}_3 = \hat{I}_3 R_3'' = 219 \text{ woltów}.$$

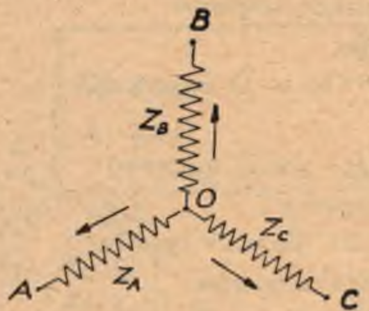
Kąty przesunięcia faz tych napięć względem $\hat{E}_1$ będą takie same jak dla odpowiednich prądów, czyli ψ_1, ψ_2 i ψ_3, ponieważ w rozpatrywanym przykładzie odbiorniki posiadają tylko oporność rzeczywistą.



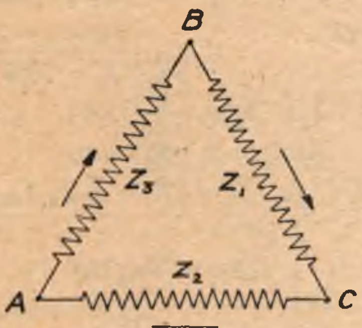
Rys. 79

Znalezione wielkości przedstawione są na wykresie (rys. 79), $OE_1 = E_1$, $OE_2 = E_2$, $OE_3 = E_3$, $OI_1 = I_1$, $OI_2 = I_2$, $OI_3 = I_3$, $OI_0 = I_0$, $OU_1 = U_1$, $OU_2 = U_2$, $OU_3 = U_3$.

Gdy odbiorniki są połączone w trójkąt, stosujemy metodę podaną przez Kenelly'ego, polegającą na przekształceniu trójkąta w równoważną gwiazdę. Nazywać będziemy gwiazdę (rys. 80) równoważną trójkątowi, jeżeli oporności pozorne między trzema punktami A, B i C gwiazdy będą takie same jak pomiędzy odpowiednimi punktami trójkąta, które powinny być znane.



Rys. 80a



Rys. 80b

Oporność pozorna pomiędzy punktami A i B trójkąta składa się z oporności pozornych $\dot{Z}_3$ oraz $\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2$, równolegle połączonych. Oznaczając tę oporność pozorną przez Z_{AB}, będziemy mieli

$$\dot{Z}_{AB} = \frac{\dot{Z}_3(\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2)}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \dot{Z}_3}.$$

Oporność pozorna pomiędzy punktami A i B gwiazdy wynosi

$$\dot{Z}_{AB} = \dot{Z}_A + \dot{Z}_B.$$

Warunek równoważności będzie spełniony, jeżeli

$$\dot{Z}_A + \dot{Z}_B = \frac{\dot{Z}_3(\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2)}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \dot{Z}_3};$$

analogicznie

$$\dot{Z}_A + \dot{Z}_C = \frac{\dot{Z}_2(\dot{Z}_1 + \dot{Z}_3)}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \dot{Z}_3}$$

oraz

$$\dot{Z}_B + \dot{Z}_C = \frac{\dot{Z}_1(\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3)}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \dot{Z}_3}.$$

Z tych równań znajdujemy

$$\dot{Z}_A = \frac{\dot{Z}_2 \dot{Z}_3}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \dot{Z}_3};$$

$$\dot{Z}_B = \frac{\dot{Z}_1 \dot{Z}_3}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \dot{Z}_3};$$

$$\dot{Z}_C = \frac{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \dot{Z}_3}.$$

Bardzo łatwo można znaleźć oporności pozorne równoważnej gwiazdy sposobem wykreślnym.

Na rys. 81.

$$OA = Z_1,$$

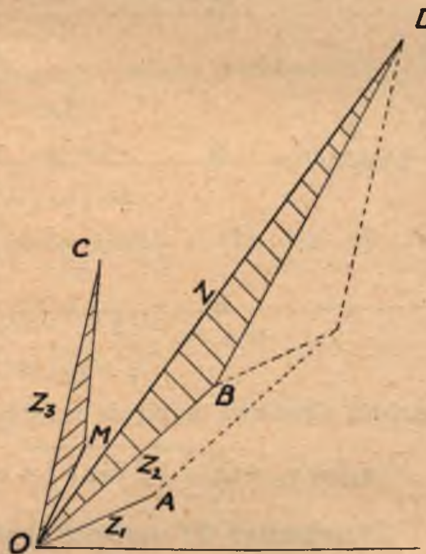
$$OB = Z_2,$$

$$OC = Z_3,$$

$$OD = \hat{Z} = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \dot{Z}_3.$$

W celu znalezienia np. Z_A piszemy na podstawie wyżej wyprowadzonego wzoru proporcję następującą:

$$\frac{\dot{Z}_A}{\dot{Z}_3} = \frac{\dot{Z}_2}{Z}.$$



Rys. 81

Musimy więc zbudować $\triangle OCM$ podobny $\triangle ODB$, w którym $\sphericalangle COM = \sphericalangle DOB$, $\sphericalangle OCM = \sphericalangle ODB$; wtedy powyższa proporcja będzie miała miejsce i oczywiście $OM = Z_A$.

§ 30
PRĄD DWUFAZOWY

Układ dwufazowy symetryczny, jak o tym była mowa (§ 24), nie bywa stosowany, natomiast spotykamy w praktyce prąd dwufazowy w układzie niesymetrycznym.

Jeżeli w dwóch uzwojeniach połączonych jak na rys. (82), tworzących w przestrzeni kąt prosty, powstają *SEM* przesunięte w fazie o $\frac{\pi}{2}$, otrzymamy układ dwufazowy niesymetryczny.

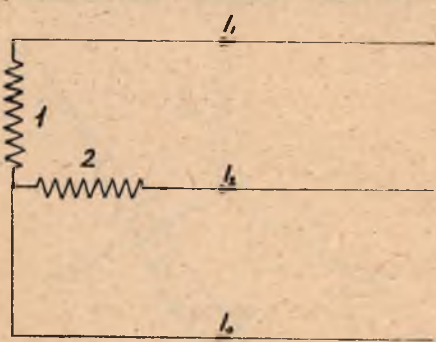
W uzwojeniach powstają SEM: e_1 i e_2, przesunięte w fazie o kąt $\frac{\pi}{2}$, a mianowicie

$$e_1 = E_m \sin \omega t$$

oraz

$$e_2 = E_m \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -E_m \cos \omega t.$$

W układzie tym korzystamy z trzech przewodów: dwóch fazowych, idących od końców faz, i zerowego, idącego od punktu połączenia początków faz, tak zwanego punktu zerowego.



Rys. 82

Napięcie międzyfazowe będzie napięciem skojarzonym; przy jednakowym obciążeniu obu faz wartości chwilowe napięcia fazowego wynoszą odpowiednio

$$u_1 = U_m \sin \omega t,$$

$$u_2 = U_m \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -U_m \cos \omega t;$$

wartość chwilowa napięcia międzyfazowego będzie

$$u_{12} = u_1 - u_2 = U_m(\sin \omega t + \cos \omega t) = U_m\sqrt{2} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right).$$

Przechodząc do wartości skutecznych napięcia, będziemy mieli

$$\hat{U}_{12} = \hat{U}_1 - \hat{U}_2 = Ue^{j0} - Ue^{-j\frac{\pi}{2}} = U + jU = U(1 + j1),$$

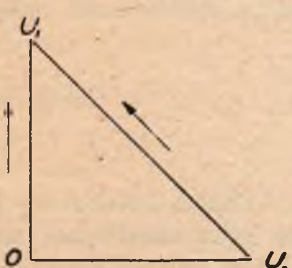
gdzie U stanowi moduł napięcia fazowego.

Skąd

$$U_{12} = U\sqrt{2},$$

$$\operatorname{tg} \sphericalangle (\hat{U}_1, \hat{U}_{12}) = 1,$$

$$\sphericalangle (\hat{U}_1, \hat{U}_{12}) = \frac{\pi}{4}.$$



Rys. 83

To samo otrzymalibyśmy z wykresu (rys. 83), gdzie $OU_1 = U_1$, $OU_2 = U_2$, $U_2U_1 = U_{12}$.

Oznaczmy prąd wychodzący z fazy pierwszej przez I_1, z drugiej zaś przez I_2. Przez przewód zerowy niech płynie prąd I_0. Wówczas na podstawie I prawa Kirchhoffa

$$\hat{I}_1 + \hat{I}_2 + \hat{I}_0 = 0$$

lub

$$\hat{I}_0 = -(\hat{I}_1 + \hat{I}_2).$$

Widzimy stąd, że przez przewód zerowy odpływa prąd o wartości równej sumie geometrycznej prądów obu faz; wobec tego przekrój przewodu zerowego powinien być większy od przekrojów przewodów fazowych. Przy jednakowym obciążeniu faz, gdy $I_1 = I_2 = I$, wartość skuteczna prądu w przewodzie zerowym wyrazi się tak:

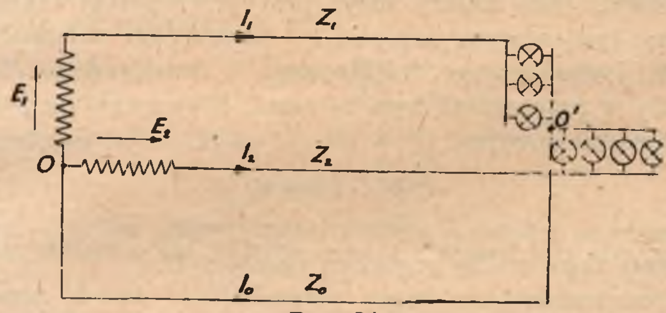
$$I_0 = I\sqrt{2}.$$

Dla wyrażenia mocy rozpatrzonego układu dwufazowego przy jednakowym obciążeniu obu faz mamy

$$u_1 = U_m \sin \omega t,$$
$$u_2 = -U_m \cos \omega t$$

oraz wartości chwilowe prądów pobieranych z obu faz, np. przy obciążeniu indukcyjnym,

$$i_1 = I_m \sin (\omega t - \varphi),$$
$$i_2 = -I_m \cos (\omega t - \varphi).$$



Rys. 84

W każdej chwili moc p takiego układu będzie

$$p = u_1 i_1 + u_2 i_2.$$

Podstawiając do tego wzoru powyższe wartości, otrzymamy

$$p = U_m I_m \{\sin \omega t \sin (\omega t - \varphi) + \cos \omega t \cos (\omega t - \varphi)\} = U_m I_m \cos \varphi.$$

Wprowadzając zaś wartości skuteczne napięcia i prądu,

$$p = 2UI \cos \varphi.$$

Wartość chwilowa mocy jest, jak widzimy, stała, nie zależy od czasu, czyli układ jest wyrównany. Średnia moc P wyrazi się tym samym wzorem

$$P = 2UI\cos\varphi$$

lub, wprowadzając napięcie międzyfazowe $U_p = U\sqrt{2}$ i prąd przewodowy $I_p = I$,

$$P = U_p I_p \sqrt{2}\cos\varphi.$$

Obliczanie prądów w układzie dwufazowym uskuteczniamy tak samo jak dla prądu trójfazowego (§ 29). Wprowadzając oznaczenia, jak na rys. 84, będziemy mieli:

$$\hat{I}_1 = \frac{\hat{E}_1 + \hat{I}_0\hat{Z}_0}{\hat{Z}_1}, \qquad \hat{I}_2 = \frac{\hat{E}_2 + \hat{I}_0\hat{Z}_0}{\hat{Z}_2}, \qquad \hat{I}_0\hat{Z}_0 = -\frac{\hat{E}_1\hat{Y}_1 + \hat{E}_2\hat{Y}_2}{\hat{Y}_1 + \hat{Y}_2 + \hat{Y}_0}.$$

§ 31
WPŁYW WZGLĘDÓW EKONOMICZNYCH NA ROZWÓJ PRĄDÓW ZMIENNYCH WIELOFAZOWYCH

Rozpatrzmy następujące zagadnienie: mamy przenieść moc P kW na odległość l km przy napięciu U. Porównajmy ilość metalu w przewodach, jaką należy zużyć przy przenoszeniu takiej samej mocy, przy tym samym napięciu, w rozmaitych układach prądu zmiennego, jednofazowego, trójfazowego i dwufazowego, tak aby strata mocy w przewodach była ta sama. Przy zwykłym jednofazowym prądzie zmiennym

$$P = UI\cos\varphi, \tag{1}$$

gdzie I oznacza natężenie przenoszonego prądu, zaś φ — kąt przesunięcia fazy tego prądu względem napięcia U.

Dla przeniesienia tej mocy potrzebujemy dwóch przewodów

Oznaczmy oporność każdego przewodu przez R_1, przekrój jego przez s_1; wówczas strata mocy w przewodach wyniesie

$$\Delta P = 2I^2R_1. \tag{2}$$

W tym przypadku objętość metalu użytego na przewody wynosić będzie

$$v_1 = 2s_1l. \tag{3}$$

Dla prądu trójfazowego obliczamy moc ze wzoru

$$P = \sqrt{3}\,U_p I_p \cos\varphi.$$

Przy połączeniu w trójkąt $U_p = U$ i wtedy

$$P = U(I_p \sqrt{3}) \cos \varphi .$$

Zestawiając ten wzór z wzorem (1), otrzymamy

$$U I \cos \varphi = U I_p \sqrt{3} \cos \varphi ,$$

skąd

$$I_p = \frac{I}{\sqrt{3}} .$$

Widzimy stąd, że przy przenoszeniu jednej i tej samej mocy w postaci prądu trójfazowego przez każdy przewód płynie prąd $\sqrt{3}$ razy mniejszy od prądu, który jest potrzebny przy zwykłym prądzie jednofazowym.

Dla rozpatrywanego prądu trójfazowego potrzebujemy trzech przewodów; oznaczmy oporność każdego z tych przewodów przez R_3, przekrój zaś przez s_3.

Strata mocy w przewodach wyniesie

$$\Delta P = 3 I_p^2 R_3 = I^2 R_3 .$$

Zestawiając ten wzór z wzorem (2), otrzymamy

$$I^2 R_3 = 2 I^2 R_1; \qquad R_3 = 2 R_1 .$$

Widzimy stąd, że oporność przewodów dla otrzymania tej samej straty mocy w przypadku prądu trójfazowego musi być dwa razy większa od poprzedniej, czyli

$$s_3 = \frac{s_1}{2} .$$

Objętość metalu użytego na przewody będzie w tym przypadku

$$v_3 = 3 s_3 l = \frac{3 s_1 l}{2} .$$

Biorąc stosunek tej objętości do v_1 z wzoru (3), otrzymamy $^3/_4$, czyli 75%.

To oznacza, że przy układzie trójkątowym na przewody zużywamy 75% materiału potrzebnego w przypadku prądu jednofazowego, czyli uzyskujemy 25% oszczędności.

Rozpatrzmy teraz z kolei układ gwiazdowy prądu trójfazowego; zakładamy, że wszystkie fazy są jednakowo obciążone. Moc prądu będzie

$$P = \sqrt{3} U_p I_p \cos \varphi = 3 U I_p \cos \varphi .$$

Po zestawieniu tego wzoru z wzorem (1) otrzymamy

$$3 I_p = I; \qquad I_p = \frac{I}{3} .$$

Oznaczmy oporność każdego z trzech przewodów przez R'_3, przekrój zaś przez s'_3. Strata mocy będzie

$$\triangle P = 3 I_p^2 R_3' = \frac{I^2}{3} R'_3 .$$

Aby ta strata mocy była ta sama co w przypadku, gdy stosujemy prąd jednofazowy, musi być przez porównanie z wzorem (2)

$$\frac{I^2}{3} R'_3 = 2 I^2 R_1, \quad \text{skąd} \quad R'_3 = 6 R_1 .$$

Przekrój przewodu w danym przypadku stanowić będzie

$$s'_3 = \frac{s_1}{6} .$$

Objętość metalu użytego

$$v'_3 = 3 s'_3 l = \frac{1}{2} s_1 l .$$

Porównując ten wzór z wzorem (3) widzimy, że ilość materiału zużytego na przewody w przypadku układu gwiazdowego z trzema przewodami stanowi $^1/_4$, czyli 25% tego, co jest potrzebne przy prądzie jednofazowym; oszczędność wynosi 75%.

Rozpatrzmy teraz układ gwiazdowy z czwartym przewodem zerowym; załóżmy, jak to zwykle bywa, że przekrój tego przewodu będzie dwa razy mniejszy od przekroju przewodów pozostałych. Wówczas objętość zużytego na przewody materiału wyniesie

$$\left(3 s'_3 + \frac{s'_3}{2}\right) l = 3{,}5 s_3' l \cong 0{,}58 s_1 l .$$

W porównaniu do objętości metalu przy zwykłym prądzie jednofazowym (wzór 3) wynosi to około 29%.

Przy układzie dwufazowym niesymetrycznym z trzema przewodami: dwoma fazowymi i jednym zerowym, moc prądu wynosi

$$P = 2 U I_p \cos \varphi .$$

Porównując ten wzór z wzorem (1) mamy

$$2 I_p = I; \qquad I_p = \frac{I}{2} .$$

Ponieważ prąd płynący w przewodzie zerowym

$$I_0 = I_p \sqrt{2} ,$$

więc

$$I_0 = \frac{I \sqrt{2}}{2} .$$

Oznaczmy oporność przewodów fazowych przez R_2, oporność przewodu zerowego przez R'_2, przekroje zaś odpowiednio przez s_2 i s'_2.

Strata mocy w przewodach wyniesie

$$\triangle P = 2 I_p^2 R_2 + I_0^2 R'_2.$$

Podstawiając tu na I_p i I_0 ich wartości, otrzymujemy

$$\triangle P = \frac{I^2}{2}(R_2 + R'_2).$$

Przez przewód zerowy płynie prąd $I_p\sqrt{2}$; aby spadek napięcia w tym przewodzie był ten sam co w innych przewodach, oporność jego musi być proporcjonalnie mniejsza, czyli

$$R'_2 = \frac{R_2}{\sqrt{2}},$$

a przekrój

$$s'_2 = s_2\sqrt{2}.$$

Wobec tego strata mocy wynosi

$$\triangle P = \frac{I^2}{2} R_2\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cong 0{,}85\, I^2 R_2.$$

Przyrównując tę stratę do straty mocy przy prądzie jednofazowym (wzór II), otrzymamy

$$0{,}85\, I^2 R_2 = 2 I^2 R_1,$$

skąd

$$R_2 = 2{,}3 R_1.$$

Z tego wynika, że przekrój przewodów powinien być w danym przypadku tyleż razy mniejszy, czyli

$$s_2 = \frac{s_1}{2{,}3} \cong 0{,}43 s_1.$$

Wobec tego

$$s'_2 = s_2\sqrt{2} \cong 0{,}43\sqrt{2} s_1 \cong 0{,}60 s_1.$$

Objętość materiału zużytego wyniesie

$$v_2 = (2 s_2 + s'_2) l \cong (0{,}85 + 0{,}60) s_1 l \cong 1{,}45 s_1 l.$$

W stosunku do objętości v_1 (wzór 3) otrzymamy

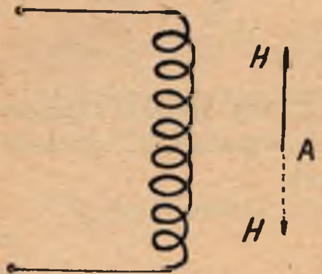
$$\frac{1{,}45}{2} \cong 73\%.$$

§ 32
POLA WIRUJĄCE

Osobliwością prądów zmiennych wielofazowych jest powstawanie tak zwanego wirującego pola magnetycznego.

Przypuśćmy, że mamy cewkę, przez którą płynie prąd zmienny o wartości chwilowej

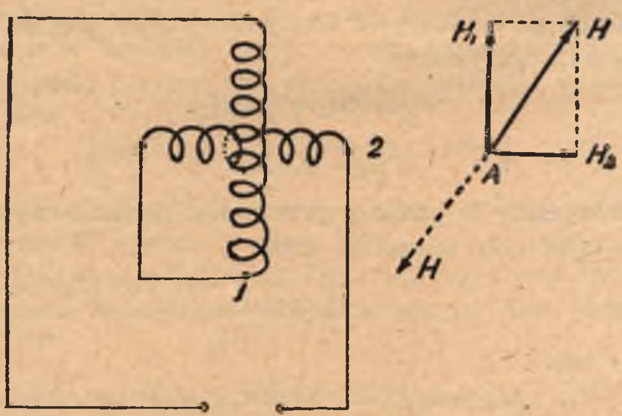
$$i = I_m \sin(\omega t - \varphi).$$



Rys. 85

W dowolnym punkcie A przestrzeni prąd ten (rys. 85) wytwarza pole magnetyczne, którego natężenie H zmienia się sinusoidalnie w czasie, zależnie od zmiany prądu w cewce.

Jeżeli mamy dwie połączone ze sobą cewki tworzące kąt prosty, przez które przepływa jeden i ten sam prąd sinusoidalny, wówczas każda cewka w dowolnym punkcie otoczenia wywoływać będzie w sposób analogiczny natężenie pola o wartościach H_1 i H_2. H_1 i H_2, zmieniając się sinusoidalnie w czasie w sposób



Rys. 86

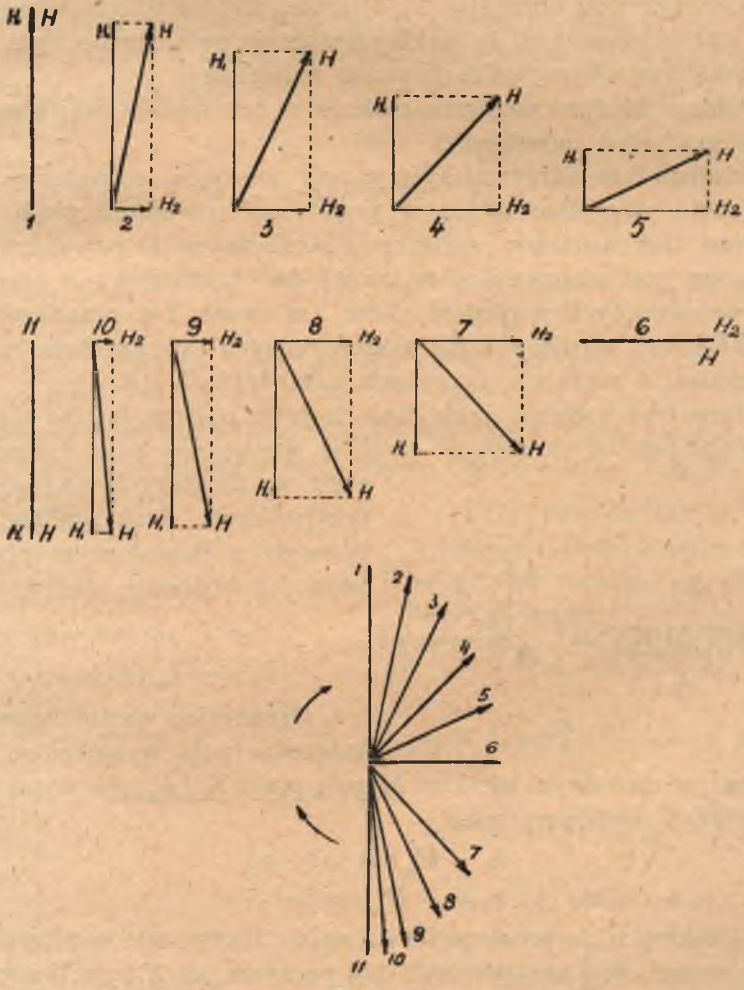
jednakowy, dają w każdej chwili wypadkową H, która będzie się również zmieniać sinusoidalnie, przy czym kierunek jej pozostawać będzie stały (rys. 86).

Zupełnie odmienne zjawisko otrzymamy przy prądach wielofazowych. Jeżeli na przykład mamy układ dwufazowy, wtedy przez uzwojenia będą płynąć prądy (przy jednakowym obciążeniu faz)

$$i_1 = I_m \sin(\omega t - \varphi)$$

oraz

$$i_2 = I_m \sin\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right);$$



Rys. 87

w dowolnym punkcie wytworzonego pola magnetycznego natężenie pola będzie wypadkową składowych H_1 i H_2, wywołanych prądami i_1 i i_2. Wartości tych składowych będą na ogół różne (rys. 87). Rozpatrzmy chwilę, gdy H_1 przybrało wartość największą, wówczas $H_2 = 0$. Wypadkowe natężenie pola w takiej chwili będzie

$$H = H_1.$$

W chwili następnej wartość H_1 się zmieni, a mianowicie zmniejszy się, zaś wartość H_2 wzrośnie; wskutek tego wypadkowa H zmieni swój kierunek itd., obracając się o pewien kąt od położenia pierwotnego. Łatwo zauważyć, że wektor natężenia pola obraca się z szybkością kątową równą pulsacji prądu zmiennego.

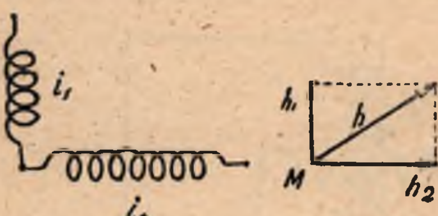
Pole, w którym natężenie zmienia w ten sposób swój kierunek, nazywamy *polem wirującym.*

Analogicznie otrzymalibyśmy pole wirujące, rozpatrując trzy przesunięte względem siebie w przestrzeni uzwojenia prądu trójfazowego. Jak widzimy, warunkiem koniecznym do powstania pola wirującego jest obecność co najmniej dwóch składowych natężenia pola, przesuniętych względem siebie i w czasie, i w przestrzeni.

Własności wirujących pól magnetycznych są wyzyskane w elektrotechnice w silnikach, licznikach indukcyjnych itd.

Rozpatrzmy teraz, jakie linie krzywe opisuje koniec wektora natężenia pola w dowolnym punkcie wirującego pola magnetycznego w niektórych szczególnych przypadkach. Przy prądzie dwufazowym z jednakowym obciążeniem faz będziemy mieli (rys. 88)

$$i_1 = I_m \sin(\omega t - \varphi),$$
$$i_2 = -I_m \cos(\omega t - \varphi).$$



Rys. 88

Oznaczając wartości chwilowe natężenia pola wywołanego tymi prądami, w dowolnym punkcie M pola przez h_1 i h_2, ich wypadkową zaś przez h, będziemy mieli

$$h_1 = H_m \sin(\omega t - \varphi),$$
$$h_2 = -H_m \cos(\omega t - \varphi).$$

Składowe te są prostopadłe do siebie. Biorąc osie współrzędnych w ten sposób, aby w punkcie M był początek, oś X była skierowana w prawo w kierunku składowej h_2, zaś oś Y prostopadle do góry w kierunku składowej h_1, będziemy mieli dla końca wektora natężenia pola h następujące współrzędne

$$x = -H_m \cos(\omega t - \varphi),$$
$$y = H_m \sin(\omega t - \varphi).$$

Z tych równań otrzymujemy

$$x^2 + y^2 = H_m{}^2.$$

Jest to równanie koła ze środkiem w początku współrzędnych i z promieniem równym H_m. To znaczy, że koniec wektora, którego moduł wynosi H_m, opisuje koło z prędkością kątową ω.

Jeżeli przy prądzie dwufazowym obciążenia obu faz są różne, ale prądy płynące w fazach są jednakowo przesunięte w fazie względem swych SEM, wówczas

$$i_1 = I_{1m} \sin(\omega t - \varphi),$$

$$i_2 = -I_{2m} \cos(\omega t - \varphi),$$

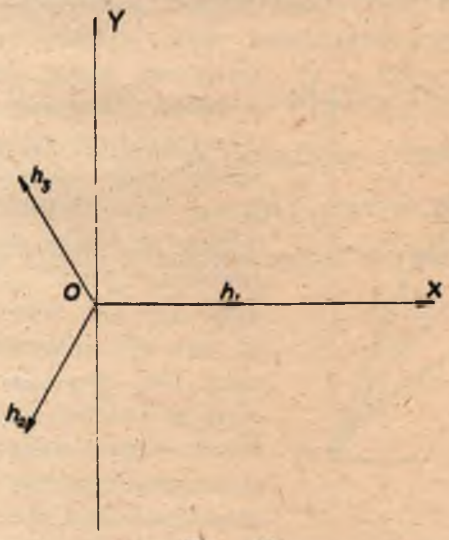
$$y = h_1 = H_{1m} \sin(\omega t - \varphi),$$

$$x = h_2 = -H_{2m} \cos(\omega t - \varphi),$$

skąd

$$\frac{x^2}{H^2{}_{2m}} + \frac{y^2}{H^2{}_{1m}} = 1.$$

Jest to równanie elipsy. Koniec wektora h opisuje więc z prędkością kątową ω elipsę, której półosie równe są H_{1m} i H_{2m}.



Rys. 89

Przy prądzie trójfazowym w układzie gwiazdowym z jednakowym obciążeniem wszystkich faz mamy

$$i_1 = I_m \sin(\omega t - \varphi),$$

$$i_2 = I_m \sin\left(\omega t - \varphi - \frac{2}{3}\pi\right),$$

$$i_3 = I_m \sin\left(\omega t - \varphi + \frac{2}{3}\pi\right);$$

$$h_1 = H_m \sin(\omega t - \varphi),$$

$$h_2 = H_m \sin\left(\omega t - \varphi - \frac{2}{3}\pi\right),$$

$$h_3 = H_m \sin\left(\omega t - \varphi + \frac{2}{3}\pi\right).$$

Biorąc kierunek h_1 za oś X, a prostopadle do tej osi oś Y (rys. 89) i oznaczając rzuty wypadkowego wektora h na osie współrzędnych przez x i y, będziemy mieli

$$x = h_1 + h_2 \cos\frac{2}{3}\pi + h_3 \cos\frac{2}{3}\pi = h_1 - \frac{1}{2}(h_2 + h_3),$$

$$y = h_3 \cos\frac{\pi}{6} + h_2 \cos\frac{5}{6}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}(h_3 - h_2);$$

po podstawieniu wartości h_1, h_2 i h_3 otrzymamy

$$x = H_m\left\{\sin(\omega t - \varphi) - \frac{1}{2}\left[\sin\left(\omega t - \varphi - \frac{2}{3}\pi\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sin\left(\omega t - \varphi + \frac{2}{3}\pi\right)\right]\right\} =$$

$$= H_m\left\{\sin(\omega t - \varphi) - \frac{1}{2}\left[2\sin(\omega t - \varphi)\cos\frac{2}{3}\pi\right]\right\} =$$

$$= H_m\left\{\sin(\omega t - \varphi) + \frac{1}{2}\sin(\omega t - \varphi)\right\} = \frac{3}{2}H_m\sin(\omega t - \varphi),$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}H_m\left[\sin\left(\omega t - \varphi + \frac{2}{3}\pi\right) - \sin\left(\omega t - \varphi - \frac{2}{3}\pi\right)\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}H_m \cdot 2\sin\frac{2}{3}\pi\cos(\omega t - \varphi) = \frac{3}{2}H_m\cos(\omega t - \varphi),$$

skąd

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{3}{2}H_m\right)^2;$$

koniec wektora h opisuje więc koło z prędkością kątową ω; moduł tego wektora, czyli promień koła, wynosi $\frac{3}{2}H_m$.

Przy obciążeniach niejednakowych koniec wektora h opisuje na ogół złożone krzywe.

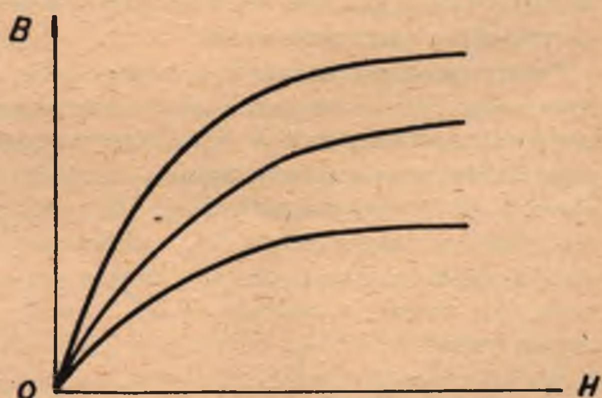
R O Z D Z I A Ł P I Ą T Y

ZJAWISKA MAGNETYCZNE PRZY PRĄDACH ZMIENNYCH

§ 33

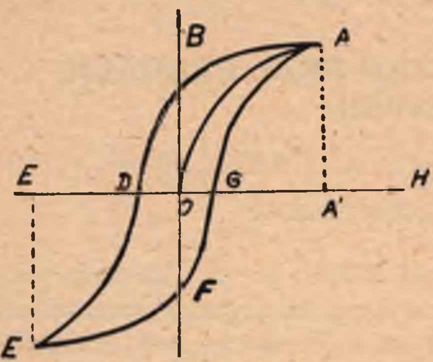
HISTEREZA MAGNETYCZNA

Gdy ciało ferromagnetyczne, np. żelazo, po raz pierwszy podlega magnesowaniu, indukcja B w tym środowisku wzrasta od zera do pewnej wartości, zależnie od natężenia pola magnetycznego H. Przebieg indukcji w tym przypadku dają nam na wykresie charakterystyki magnesowania (rys. 90), których kształt zależny jest od rodzaju ciała ferromagnetycznego. Jeżeli po namagnesowaniu żelaza zaczniemy zmniejszać indukcję przez zmniejszenie natężenia pola, wtedy indukcja nie będzie się zmieniała według tej samej krzywej, lecz z pewnym opóźnieniem. Na rys. 91 wskazany jest przebieg indukcji w przypadku magnesowania i rozmagnesowywania ciała ferromagnetycznego. Krzywa OA jest to krzywa pierwotna, dająca przebieg indukcji w środowisku magnesowanym po raz pierwszy. Największa wartość indukcji AA' odpowiada wartości natężenia pola OA'. Gdy natężenie pola zacznie się zmniejszać, indukcja spada według



Rys. 90

krzywej AC w ten sposób, że przy $H = 0$, $B = OC$, to znaczy, że pomimo zniknięcia pola magnetycznego, w środowisku pozostaje jeszcze tak zwany *magnetyzm szczątkowy*, wobec czego indukcja magnetyczna nie staje się równa zeru. Zmieniając następnie kierunek natężenia pola, zmieniamy indukcję według krzywej CDE w ten sposób, że w punkcie D, gdy $B = 0$, natężenie pola H ma wartość ujemną OD. Taką wartość natężenia pola, która jest potrzebna dla sprowadzenia indukcji do zera, nazywamy *natężeniem powściągającym* (koercyjnym).

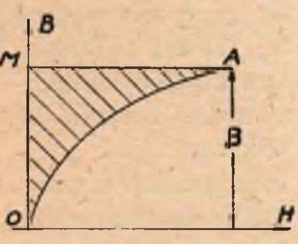


Rys. 91

Po doprowadzeniu indukcji B do wartości ujemnej EE' dla $H = OE'$, gdy zaczniemy zmniejszać natężenie pola do zera, a następnie znów zmienimy kierunek na dodatni — indukcja będzie miała przebieg po krzywej $EFGA$. Rozpatrzone zjawisko, polegające na tym, że zmiana indukcji opóźnia się względem zmiany natężenia pola, nazywamy *histerezą magnetyczną*. Obie krzywe $ACDEFGA$ tworzą tzw. *obieg* albo *cykl histerezy*. Obieg ten dla różnych ciał ma różny kształt i zależy również od największej wartości B, do której doprowadzamy namagnesowanie.

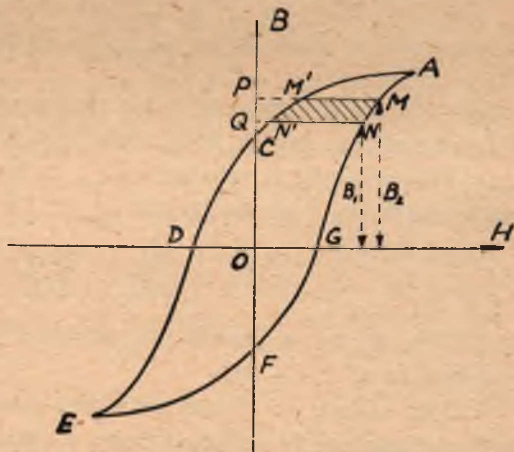
Przy prądzie zmiennym powstaje pole magnetyczne o zmiennym natężeniu; liczba zmian odpowiada częstotliwości prądu zmiennego. Oczywiście, że w ciele ferromagnetycznym znajdującym się w takim polu magnetycznym — zachodzi zjawisko histerezy magnetycznej. Dla przyrostu energii magnetycznej W_m, odniesionej do jednostki objętości obwodu magnetycznego, gdy indukcja zmienia się od O do B, mamy wzór

$$W_m = \int_0^B H dB.$$



Rys. 92

Łatwo jest zauważyć, że całka w tym wzorze odpowiada powierzchni OAM (rys. 92). Możemy więc powiedzieć, że energia magnetyczna przy zmianie indukcji od O do B jest proporcjonalna do tej powierzchni. Rozpatrując obieg histerezy przekonamy się, że energia magnesowania zachodzącego raz po krzywej $EFGA$, drugi raz po krzywej $ACDE$ — ma różne wartości; przy magnesowaniu zużywamy energię z zewnątrz pobieraną, przy rozmagnesowywaniu otrzymujemy ją z powrotem, lecz w mniejszej ilości; zachodzi więc strata energii, która, jak wykazały doświadczenia, przejawia się w postaci ciepła. Ta strata energii przy jednym całkowitym obiegu magnesowania jest proporcjonalna do powierzchni objętej przez obieg histerezy; łatwo to jest sprawdzić rozpatrując energię odpowiadającą dowolnej zmianie indukcji, np. od B_1 do B_2 (rys. 93): energia zużyta przy magnesowaniu po krzywej NM jest proporcjonalna do powierzchni $PMNQ$, energia zaś oddana przy rozmagnesowywaniu jest proporcjonalna do powierzchni $PM'N'Q$; więc strata energii będzie proporcjonalna do różnicy, czyli do powierzchni zakreskowanej $MNN'M'$; rozpatrując zmianę indukcji przy całkowitym obiegu magnesowania, czyli w granicach od $-B$ do $+B$, znajdziemy w ten sposób, że strata energii przy jednym obiegu histerezy jest proporcjonalna do powierzchni objętej przez ten obieg. W elektrotechnice obchodzi nas przeważnie strata mocy w postaci ciepła, spowodowana zjawiskiem histerezy. Dla obliczenia tej straty mamy dwa wzory. Pierwszy wzór, Steinmetza,



Rys. 93

$$P_H = \eta f B_m^{1,6}\ 10^{-7} \text{ watów,}$$

gdzie P_H oznacza stratę mocy w jednym cm^3 środowiska, f oznacza częstotliwość indukcji, czyli w przypadku otrzymywania pola magnetycznego za pomocą prądu zmiennego częstotliwość tego prądu, B_m — wartość maksymalną indukcji magnetycznej w rozpatrywanym środowisku, wyrażoną w gausach, zaś η — współczynnik zwany *współczynnikiem histerezy magnetycznej*, który jest zależny od materiału; tak np. dla blachy twornikowej współczynnik ten wynosi od 0,001 do 0,002, dla stali 0,01 do 0,02.

Doświadczenia wykazały, że spółczynnik histerezy magnetycznej we wzorze Steinmetza nie jest wielkością stałą dla danego gatunku żelaza, zwłaszcza miękkiego; zależy on od indukcji magnetycznej, co się szczególnie uwydatnia przy większych wartościach tej indukcji.

Tak np. dla blachy twornikowej przy maksymalnej wartości indukcji $B_m = 4000\,G$, $\eta = 0{,}00137$, zaś dla $B_m = 16000\,G$, $\eta = 0{,}00185$, natomiast dla stali odchylenia są nieznaczne.

Drugi wzór, podany przez Richtera, ma postać

$$P_H = f\left[\alpha\left(\frac{B_m}{1000}\right) + \beta\left(\frac{B_m}{1000}\right)^2\right] \text{ watów,}$$

gdzie P_H, f i B_m mają te same znaczenia co i w poprzednim wzorze, Steinmetza, zaś α i β stanowią współczynniki zależne od materiału.

Dla większych wartości B_m, powyżej $1000\,G$, Richter podaje wzór strat na 1 kg materiału w postaci

$$P_H = \frac{\eta f}{100}\left(\frac{B_m}{10000}\right)^2 \text{ watów;}$$

η dla blachy twornikowej ma wartości 4,4—4,7; dla blachy wysokowartościowej 2,4—3,0.

Jak widać, w obu tych wzorach strata mocy na histerezę jest proporcjonalna do częstotliwości indukcji magnetycznej.

Rozpatrzmy teraz, jaki wpływ wywiera zjawisko histerezy magnetycznej na przebieg prądu zmiennego, powodującego zmienne pole magnetyczne. Jeżeli mamy np. cewkę posiadającą z zwojów o bardzo małej oporności rzeczywistej, bez rdzenia żelaznego, i przez tę cewkę przepuścimy prąd zmienny o przebiegu sinusoidalnym, wówczas indukcja magnetyczna wewnątrz cewki również będzie miała przebieg sinusoidalny; powstanie wewnątrz cewki strumień magnetyczny, którego wartość chwilową Φ_t możemy wyrazić wzorem

$$\Phi_t = \Phi_m \sin \omega t.$$

Pod wpływem tego zmiennego w czasie strumienia powstaje w cewce *SEM* indukcji własnej, której wartość chwilową określamy ze znanego wzoru

$$e = -z\frac{d\Phi_t}{dt} = -\omega z \Phi_m \cos \omega t = \omega z \Phi_m \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right);$$

z tego wzoru widzimy, że największa wartość *SEM* indukcji własnej wynosi $\omega z \Phi_m$ i że ta *SEM jest opóźniona* w fazie względem *wywołującego ją strumienia* o kąt prosty. Jeżeli rozpatrywany strumień powoduje powstanie *SEM*, to, na odwrót, dla otrzymania takiego strumienia musimy z zewnątrz dać napięcie, które w każdej chwili będzie

$$u = -e,$$

czyli

$$u = -\omega z \Phi_m \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \omega z \Phi_m \cos \omega t =$$

$$= \omega z \Phi_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Jak widzimy, napięcie z zewnątrz przyłożone jest przyśpieszone w fazie względem strumienia magnetycznego o kąt prosty, czyli *strumień magnetyczny jest opóźniony w fazie o kąt prosty względem wywołującego go napięcia.* W przypadku powstawania *SEM* indukcji własnej strumień magnetyczny jest przyczyną, a *SEM* skutkiem, w drugim przypadku przyczyną jest napięcie, zaś skutkiem jest strumień magnetyczny; widzimy więc, że w rozpatrywanym zagadnieniu *skutek jest opóźniony w fazie względem przyczyny o kąt prosty.*

Z ostatniego wzoru wynika, że maksymalna wartość U_m napięcia z zewnątrz przyłożonego wynosi

$$U_m = \omega z \Phi_m = 2\pi f z \Phi_m; \tag{1}$$

wprowadzając wartość skuteczną U tegoż napięcia, będziemy mieli

$$U\sqrt{2} = 2\pi f z \Phi_m,$$

skąd

$$U = \sqrt{2}\pi f z \Phi_m;$$

ponieważ $\sqrt{2}\pi$ w przybliżeniu równa się 4,44, dla wyrażenia zaś napięcia w woltach należy prawą stronę ostatniego wzoru pomnożyć przez 10^{-8}, otrzymamy wzór praktyczny, używany w elektrotechnice,

$$U = 4{,}44 f z \Phi_m \, 10^{-8} \text{ woltów} \tag{2}$$

lub

$$\Phi_m = \frac{U\,10^8}{4{,}44 f z} \text{ makswelów} \tag{3}$$

i tak samo dla *SEM* indukcji powstającej pod wpływem strumienia magnetycznego Φ będziemy mieli w jednostkach bezwzględnych

$$E_m = 2\pi f z \Phi_m, \tag{4}$$

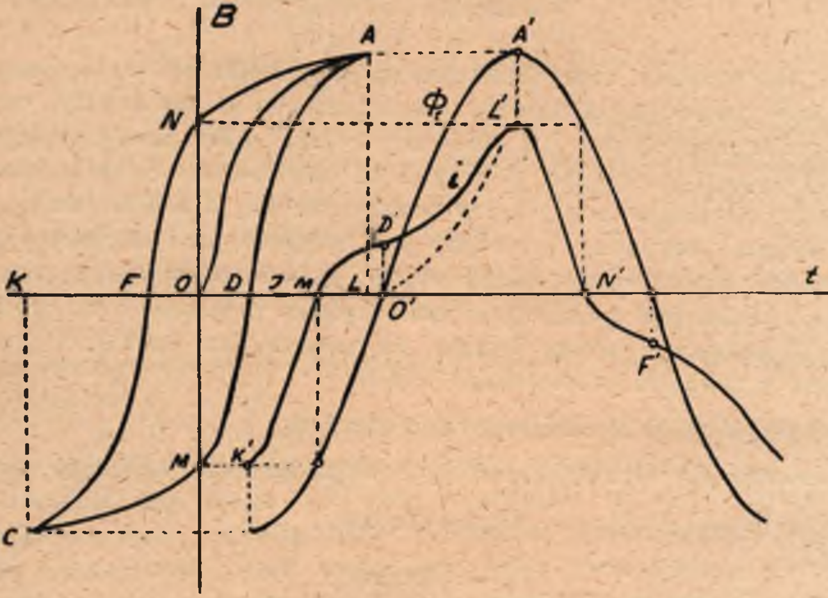
$$E = \sqrt{2}\pi f z \Phi_m,$$

zaś w woltach

$$E = \sqrt{2}\pi f z \Phi_m \, 10^{-8} \cong 4{,}44 f z \Phi_m \, 10^{-8} \text{ woltów.} \tag{5}$$

Ponieważ strumień Φ_m opóźniony jest w fazie względem napięcia U o kąt prosty, tak samo jak i prąd przy oporności indukcyjnej, wnioskować możemy, że prąd I przepływający przez cewkę jest w fazie ze strumieniem Φ. Prąd ten I nazywamy prądem *wzbudzającym* lub *magnesującym*.

Rozpatrzmy, jaki jest przebieg prądu magnesującego w porównaniu z przebiegiem indukcji lub strumienia magnetycznego, gdy



Rys. 94

w cewce jest rdzeń żelazny, a więc w obecności zjawiska histerezy magnetycznej.

Strumień Φ_t z biegiem czasu ma przebieg sinusoidalny; prąd magnesujący $O'L'$ (rys. 94), odpowiadający krzywej pierwotnej indukcji OA, jest w fazie ze strumieniem, natomiast przy następnym magnesowaniu wskutek histerezy zachodzi przesunięcie fazy prądu względem strumienia, przy czym krzywa prądu staje się odkształcona.

Krzywa $K'M'D'L'$ odpowiada krzywej indukcji $CMDA$, zaś krzywa $L'N'F'$ — krzywej indukcji ANF, $O'D' = OD$, punktom M i N (prąd równy zero) odpowiadają punkty M' i N' na krzywej prądu itd. Widzimy, że wobec zjawiska histerezy krzywa prądu $K'D'L'N'$ jest odkształcona i przesunięta w fazie względem strumienia w ten sposób, że prąd wyprzedza w fazie strumień. Prąd ten możemy rozpatrywać jako sumę dwóch prądów: takiego, który idzie na magnesowanie, jest to prąd wzbudzający, czyli magnesujący i_{mg}, oraz prądu idącego na wytworzenie ciepła wywołanego zjawiskiem histerezy, oznaczmy go przez i_h.

$$\dot{i} = \dot{i}_{mg} + \dot{i}_h.$$

Dla przybliżonych rozważań wprowadzamy zamiast prądu odkształconego prąd zastępczy sinusoidalny, mający tę samą wartość skuteczną co istniejący prąd i takie przesunięcie w fazie względem napięcia, aby moc czynna prądu sinusoidalnego była równą mocy wytwarzającej ciepło histerezy; wówczas wartość skuteczną I takiego zastępczego prądu sinusoidalnego możemy rozłożyć na sumę geometryczną prądu magnesującego I_{mg} i prądu I_h idącego na wytwarzanie ciepła histerezy, czyli

$$\dot{I} = \dot{I}_{mg} + \dot{I}_h.$$

Pierwszy prąd I_{mg} jest w fazie ze strumieniem, drugi zaś I_h (czynny) jest w fazie z napięciem.

Oba te prądy i prąd wypadkowy przedstawione są na rys. 95.

Oznaczając kąt odchylenia prądu od strumienia z powodu histerezy przez α, widzimy, że

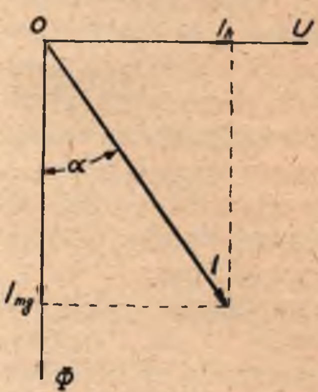
$$I_h = I \sin \alpha$$

oraz

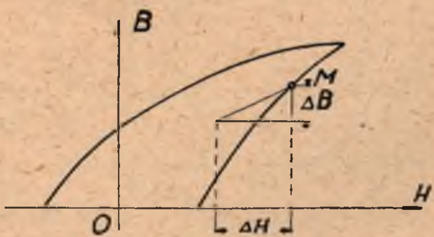
$$I_{mg} = I \cos \alpha;$$

kąt α nazywamy *kątem histerezy*. Jest on tym większy, im większy jest wpływ histerezy. Mnożąc U przez I_h otrzymamy moc prądu straconego na histerezę P_h, czyli

$$P_h = U I_h = U I \sin \alpha.$$



Rys. 95

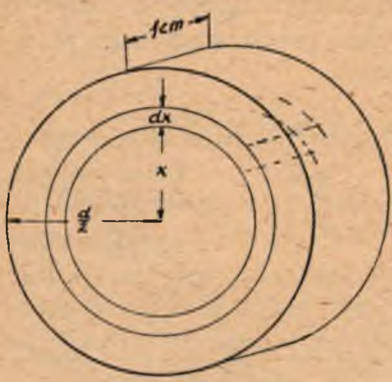


Rys. 96

Dla słabych pól magnetycznych indukcja B zmienia się proporcjonalnie do H, czyli ta część charakterystyki magnesowania jest linią prostą. Rozpatrzmy (rys. 96) punkt M, dla którego natężenie pola = H, indukcja zaś = B. Przy małym zmniejszeniu natężenia pola o ΔH indukcja zmniejszy się o ΔB, gdy zaś z powrotem doprowadzimy natężenie pola do poprzedniej wartości H, indukcja przyjmie znowu wartość B. Stosunek $\mu_r = \frac{\Delta B}{\Delta H}$ nazywamy przenikalnością magnetyczną odwracalną. Przenikalność tę bierze się pod uwagę wówczas, gdy żelazo magnesuje się prądem stałym i na prąd stały nakłada się słaby prąd zmienny. Przenikalność odwracalna jest na ogół mniejsza od przenikalności magnetycznej punktów znajdujących się na obiegu histerezy.

§ 34
PRĄDY WIROWE

W masach metalowych znajdujących się w zmiennym polu magnetycznym powstają prądy indukcyjne, mające na ogół różne kierunki i tworzące jakby wiry w tych masach. Prądy te, zwane są *prądami wirowymi* lub prądami F o u c a u l t a od fizyka, który pierwszy je spostrzegł; wytwarzają one ciepło i powodują w ten sposób stratę mocy. Straty te na ogół można obliczyć tylko w przybliżeniu, zakładając, że mają one przebieg prawidłowy i że indukcja magnetyczna we wszystkich punktach rozpatrywanej masy ma jednakową wartość. W elektrotechnice musimy się liczyć przeważnie ze stratami mocy, powstającymi w ośrodkach ferromagnetycznych, gdzie indukcja magnetyczna osiąga największe wartości, a więc głównie w masach żelaznych w postaci okrągłych drutów lub blachy. Ograniczymy się więc tylko do tych dwóch przypadków.



Rys. 97

Rozpatrzmy kawałek okrągłego drutu o długości 1 cm i średnicy d cm, znajdującego się w zmiennym polu magnetycznym (rys. 97). Indukcja magnetyczna, a więc i strumień — mają kierunek prostopadły do płaszczyzny przekroju poprzecznego i równoległy do osi, czyli do długości tego drutu. Podzielmy cały drut na nieskończenie wielką liczbę walców współosiowych o ściankach nieskończenie małej grubości dx. Rozpatrując jeden z takich walców w odległości x od osi, otrzymamy obwód zamknięty o długości $2\pi x$ cm i przekroju $dx \cdot 1 = dx$ cm². Pole objęte tym obwodem wynosi πx^2. Zakładając, że pole magnetyczne, w którym się znajduje rozpatrywany kawałek drutu, jest jednostajne, i oznaczając przez B_m maksymalną wartość indukcji w dowolnym punkcie, otrzymamy dla maksymalnej wartości strumienia objętego rozpatrywanym obwodem wzór

$$\Phi_{xm} = \pi x^2 B_m.$$

Oznaczając przez E_x wartość skuteczną *SEM* indukcji powstającej w obwodzie pod wpływem tego strumienia, będziemy mieli na podstawie wzoru (5)

$$E_x = 4{,}44 f \Phi_{xm} 10^{-8} \text{ woltów}$$

albo

$$E_x = 4{,}44 f \pi x^2 B_m 10^{-8} \text{ woltów}.$$

Oporność rozpatrywanego obwodu wynosi

$$R_x = \varrho \frac{2\pi x}{dx},$$

gdzie ϱ oznacza oporność właściwą metalu drutu. Strata mocy w postaci ciepła wyniesie

$$dP_x = I^2_x R_x = \frac{E_x^2}{R_x} =$$

$$= \frac{(4{,}44)^2 f^2 \pi^2 x^4 B_m^2 10^{-16}}{\varrho 2\pi x} dx = \frac{10\pi f^2 B_m^2 x^3 10^{-16}}{\varrho} dx \text{ watów}.$$

Dla znalezienia strat w rozpatrywanym kawałku drutu wzór ten należy scałkować w granicach zmiany x, czyli od zera do $d/2$. Otrzymamy

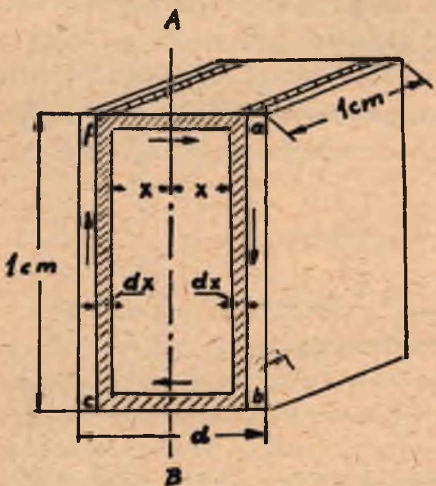
$$P_w = \frac{10\pi f^2}{\varrho} B_m^2 \left| \frac{x^4}{4} \right|_0^{\frac{d}{2}} 10^{-16} = \frac{5}{32} \frac{\pi f^2}{\varrho} B_m^2 d^4 10^{-16} \text{ watów}.$$

Dla otrzymania straty mocy na 1 cm³ objętości żelaza musimy ostatni wyraz podzielić przez $\frac{\pi d^2}{4}$; strata więc na 1 cm³ żelaza wynosi

$$P_w' = \frac{5}{8} \frac{f^2}{\varrho} B_m^2 d^2 10^{-16} \text{ watów}.$$

Dla określenia straty mocy zachodzącej w blasze rozpatrzmy kawałek blachy o długości 1 cm i o przekroju poprzecznym następujących wymiarów: grubość d cm i szerokość 1 cm (rys. 98). Indukcja magnetyczna ma kierunek prostopadły do płaszczyzny przekroju i wartość jednakową we wszystkich punktach.

Podzielmy rozpatrywany kawałek blachy na nieskończenie cienkie blaszki o grubości dx. Dwie takie blaszki rozmieszczone symetrycznie po obu stronach linii środkowej AB w dowolnej odległości x, łącznie z bokami, możemy rozpatrywać jako obwód $a\,b\,c\,f$ dla prądu powstającego pod wpływem SEM indukcji. Pole objęte tym obwodem wynosi $2x$ cm², więc odpowiedni strumień magnetyczny będzie



Rys. 98

$$\Phi_{xm} = 2xB_m,$$

wobec tego SEM indukcji powstająca w tym obwodzie będzie

$$E_x = 4{,}44 f 2xB_m\, 10^{-8} \text{ woltów.}$$

Długość obwodu możemy w przybliżeniu przyjąć równą 2 cm, nie uwzględniając krótkich boków o długości $2x$; przekrój obwodu prądowego wynosi $dx \cdot 1 = dx$ cm²; wobec tego oporność będzie

$$R_x = \varrho \frac{2}{dx}.$$

Strata mocy w rozpatrywanym obwodzie wynosi

$$dP_x = \frac{E_x^2}{R_x} \cong \frac{40 f^2 B_m^2 x^2 dx\, 10^{-16}}{\varrho} \text{ watów.}$$

Stratę mocy dla całego kawałka blachy otrzymamy całkując wzór ten w granicach od $x = 0$ do $x = \frac{d}{2}$, czyli

$$P_w = \int_0^{\frac{d}{2}} \frac{40 f^2 B_m^2 x^2 dx}{\varrho} 10^{-16} = \frac{40 f^2 B_m^2}{\varrho} 10^{-16} \left| \frac{x^3}{3} \right|_0^{\frac{d}{2}} =$$

$$= \frac{40 f^2 B_m^2 d^3}{\varrho\, 24} 10^{-16} = \frac{5}{3} \frac{d^3 f^2 B_m^2}{\varrho} 10^{-16} \text{ watów.}$$

Dla określenia straty mocy na 1 cm³ objętości blachy musimy podzielić powyższy wzór przez objętość rozpatrzonego kawałka, czyli przez $d \times 1 \times 1 = d$; w ten sposób strata mocy na 1 cm³ wyniesie

$$P'_w = \frac{5}{3}\frac{d^2}{\varrho} f^2 B_m^2 \, 10^{-16} \text{ watów.}$$

Z wyprowadzonych wzorów na stratę mocy z prądów wirowych widzimy, że straty te są proporcjonalne do kwadratu częstotliwości f oraz do kwadratu indukcji magnetycznej B_m i są odwrotnie proporcjonalne do oporności właściwej metalu, z którego sporządzone są drut lub blacha.

Przy dużych masach żelaza w zmiennym polu magnetycznym otrzymalibyśmy bardzo znaczne straty z prądów wirowych, szczególnie przy znacznej grubości drutu lub blachy. W celu zmniejszenia tych strat robimy zazwyczaj rdzeń żelazny nie z jednolitego kawałka, lecz z cienkich drutów lub też blach przekładanych izolacją (np. dobrym, suchym papierem lub lakierem). Również w celu zmniejszenia strat z prądów wirowych używamy, zamiast czystego żelaza, stopów, czyli aliaży, np. żelaza z domieszką krzemu. Oporność właściwa takich stopów jest większa od oporności właściwej żelaza i przez to straty mocy na prądy wirowe są mniejsze.

Gatunki żelaza pod względem strat na histerezę i prądy wirowe często określamy za pomocą tzw. *stratności magnetycznej*, rozumiejąc pod tą nazwą straty powyższe, wyrażone w watach na 1 kg żelaza, otrzymywane przy $B_m = 10000$ G, $f = 50$ okresów na sek, przy temperaturze 30°C. Dla żelaza czystego ta stratność wynosi od $2-4\ \frac{W}{kg}$, dla stopów od $1-2\ \frac{W}{kg}$.

Oba rozpatrzone zjawiska: histereza i prądy wirowe, powstają jednocześnie i nierozłącznie. Za pomocą pomiarów możemy określić całkowitą stratę mocy. Dla obliczenia, jaka część strat przypada na prądy wirowe, jaka zaś na histerezę, rozumujemy w sposób następujący: ze wzoru (3)

$$\Phi_m = \frac{U 10^8}{4{,}44 f z}$$

widzimy, że dla osiągnięcia warunku, aby Φ_m lub, co na jedno wychodzi, B_m miały wartość stałą przy zmianie f, musimy dla stałej liczby zwojów z w jednakowym stosunku zmieniać napięcie U i częstotliwość f prądu służącego do badań. Gdy $B = const$, straty na prądy wirowe i histerezę dla danego materiału będą zależne tylko od częstotliwości, a mianowicie

$$P_H = k_1 f \quad \text{oraz} \quad P_w = k_2 f^2,$$

gdzie k_1 i k_2 stanowią w tym przypadku stałe współczynniki.

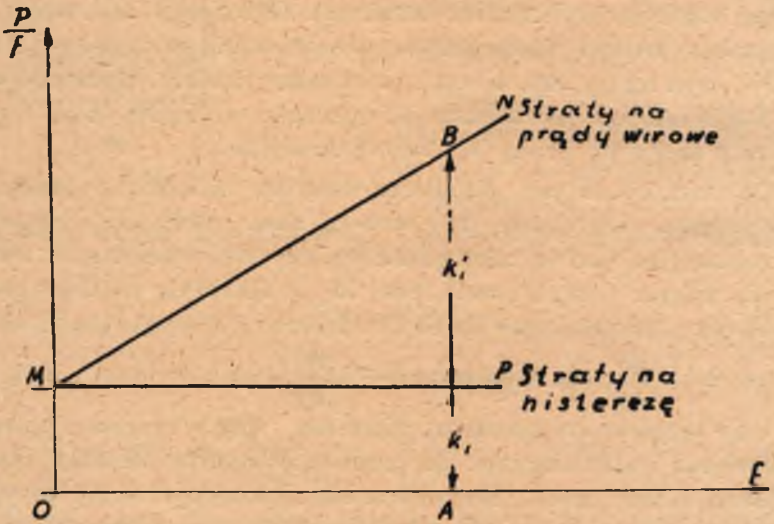
Całkowita zaś strata

$$P = P_H + P_w = k_1 f + k_2 f^2.$$

Strata przypadająca na jeden okres prądu zmiennego będzie

$$\frac{P}{f} = k_1 + k_2 f.$$

Mierząc całkowite straty w badanym materiale przy rozmaitych częstotliwościach, lecz przy stałej wartości indukcji magnetycznej, i dzieląc te straty przez liczbę okresów, możemy rezultaty przedstawić na wykresie (rys. 99).



Rys. 99

Na osi odciętych odkładamy wartości częstotliwości f — na osi rzędnych straty $\frac{P}{f} = k_1 + k_2 f$, otrzymamy wówczas prostą MN. Jasne jest, że $OM = k_1$ i że prosta MP, przeprowadzona równolegle do osi odciętych, daje nam wartości strat na histerezę, przypadające na jeden okres. Różnica rzędnych punktów leżących na prostych

MN i MP daje nam straty na prądy wirowe również obliczone na jeden okres.

Np. $$AB = k_1 + k_1'$$

przedstawia stratę na jeden okres na prądy wirowe i histerezę, dla wartości $f = OA$; k_1 stanowi stratę na histerezę, zaś k_1' — na prądy wirowe.

Przytaczamy przykłady:

Dla blachy twornikowej przy $B_m = 10000$ G oraz częstotliwości $f = 50$ okresów na sek:

$$\begin{array}{ll} \text{straty} & P_H = 2{,}25 \text{ W/kg} \\ & P_w = 1{,}31 \text{ W/kg} \\ \hline \text{razem} & P \;\; = 3{,}56 \text{ W/kg;} \end{array}$$

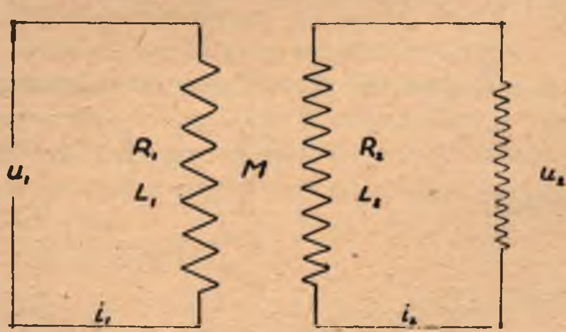
dla blachy stopowej przy tych samych wartościach B_m i f

$$\begin{array}{l} P_H = 1{,}78 \text{ W/kg} \\ P_\omega = 0{,}18 \text{ W/kg} \\ \hline P \;\; = 1{,}96 \; W\text{/kg.} \end{array}$$

§ 35

OBWODY MAGNETYCZNIE SPRZĘŻONE. TRANSFORMATOR POWIETRZNY

Przypuśćmy, że mamy dwa obwody zawierające uzwojenia (rys. 100), pierwotny i wtórny; przez obwód pierwotny płynie prąd i_1, we wtórnym zaś powstaje prąd i_2 przez indukcję. Mówimy, że takie obwody są sprzężone magnetycznie. Obwody magnetycznie sprzężone dają możność zmiany napięcia i natężenia prądu za pomocą odpowiedniej zmiany liczby zwojów. Zespół uzwojeń tego rodzaju nazywamy na ogół *transformatorem*, służy on do przetwarzania prądu zmiennego jednego napięcia na prąd o innym napięciu.



Rys. 100

Transformatory bywają powietrzne lub z rdzeniem żelaznym, zależnie od tego, czy uzwojenia znajdują się w powietrzu, czy też zawierają w sobie masy żelazne. Rozpatrzmy najpierw transformator powietrzny.

Oznaczmy oporność pierwotnego uzwojenia przez R_1, jego indukcyjność własną przez L_1, całego zaś obwodu wtórnego przez R_2 oraz L_2; indukcyjność wzajemna obu obwodów niech będzie M.

Na zasadzie znanych wzorów, oznaczając przez u_1 wartość chwilową napięcia z zewnątrz przyłożonego do uzwojenia pierwotnego, możemy napisać

$$u_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

oraz

$$0 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}.$$

Wprowadzając zamiast wartości chwilowych wartości skuteczne, przepiszemy te wzory stosując wielkości zespolone.

$$\hat{U} = R_1 \hat{I}_1 + j\omega L_1 \hat{I}_1 + j\omega M \hat{I}_2 \tag{6}$$

oraz

$$0 = R_2 \hat{I}_2 + j\omega L_2 \hat{I}_2 + j\omega M \hat{I}_1. \tag{7}$$

Z ostatniego wzoru otrzymujemy

$$j\omega M \hat{I}_1 = -(R_2 + j\omega L_2)\hat{I}_2,$$

$$\frac{\hat{I}_1}{\hat{I}_2} = -\frac{L_2}{M} - \frac{R_2}{j\omega M} = -\frac{L_2}{M} + \frac{jR_2}{\omega M} = \frac{j}{\omega M}(R_2 + j\omega L_2) =$$

$$= -\frac{\omega L_2}{\omega M} + j\frac{R_2}{\omega M}.$$

Stąd znaleźć możemy od razu wartość (moduł) stosunku prądów I_1 i I_2 oraz kąt przesunięcia fazy δ pomiędzy nimi. Mianowicie

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{\omega M}\sqrt{R^2{}_2 + (\omega L_2)^2},$$

skąd

$$I_2 = \frac{\omega M}{\sqrt{R^2{}_2 + (\omega L_2)^2}} I_1,$$

zaś

$$\operatorname{tg} \delta = -\frac{R_2}{\omega L_2},$$

przy czym $90° \leqslant \delta \leqslant 180°$;
gdy

$$R_2 = 0, \quad \operatorname{tg}\delta = 0 \quad \text{i} \quad \delta = 180°;$$

czyli wektory wyobrażające prądy I_1 i I_2 byłyby w tym przypadku skierowane w kierunkach przeciwnych.

Zobaczmy teraz, jaki jest stosunek prądu I_1 do napięcia U_1. Podstawiając ze wzoru (7)

$$\hat{I}_2 = -\frac{j\omega M}{R_2 + j\omega L_2}\hat{I}_1$$

do wzoru (6), otrzymujemy

$$\hat{U}_1 = R_1\hat{I}_1 + j\omega L_1\hat{I}_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R_2 + j\omega L_2}\hat{I}_1 =$$

$$= \hat{I}_1\left\{R_1 + j\omega L_1 + \frac{(R_2 - j\omega L_2)\,\omega^2 M^2}{R^2_2 + \omega^2 L^2_2}\right\}.$$

Łącząc razem liczby rzeczywiste i urojone, otrzymamy

$$\hat{U}_1 = \hat{I}_1\left\{R_1 + \frac{R_2(\omega M)^2}{R^2_2 + (\omega L_2)^2} + j\left[\omega L_1 - \frac{(\omega L_2)(\omega M)^2}{R^2_2 + (\omega L_2)^2}\right]\right\}.$$

Z tego wzoru widzimy, że wyraz stojący w głównych nawiasach stanowi oporność pozorną obwodu pierwotnego z uwzględnieniem indukcyjnego wpływu obwodu wtórnego. Oporność rzeczywista jest tu zwiększona o

$$\frac{R^2_2(\omega M)^2}{R^2_2 + (\omega L_2)^2},$$

a oporność urojona zmniejszona o

$$\frac{(\omega L_2)(\omega M)^2}{R^2_2 + (\omega L_2)^2}.$$

To samo zagadnienie możemy rozpatrzeć na wykresie, przedstawiając najpierw wzór (7), następnie wzór (6). Wykres taki daje również możność obliczenia dwóch wielkości z trzech: U_1, I_1, I_2, gdy jedna jest wiadoma.

Za oś podstawową obieramy kierunek prądu wtórnego I_2, zupełnie zresztą dowolny (rys. 101). Od punktu O odkładamy w tym kierunku odcinek $OA = I_2R_2$. Do tego odcinka OA dodać musimy geometrycznie pod kątem prostym naprzód odcinek $AB = j\omega L_2 I_2$. Wektor zamykający będzie

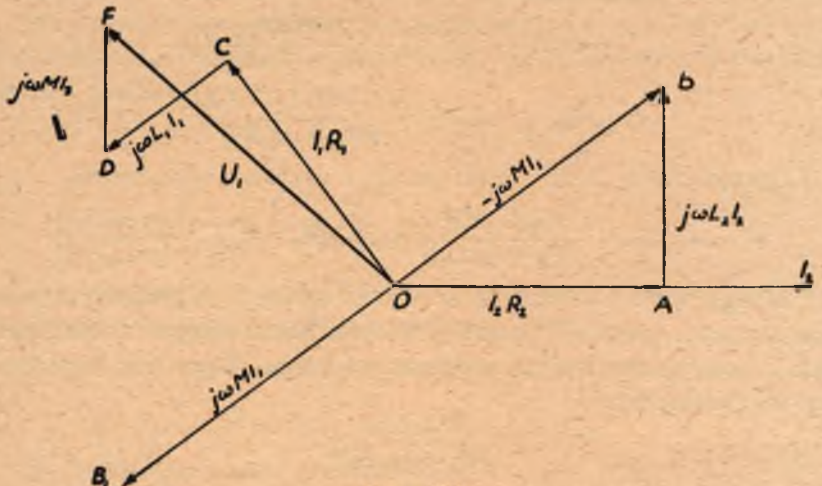
$$OB = -j\omega M I_1.$$

Wektor $OB_1 = j\omega M\hat{I}_1$ będzie miał wobec tego kierunek odwrotny; w ten sposób otrzymujemy wartość $\omega\, MI_1$, a więc i wartość I_1. W celu wykreślenia wektora $OC = R_1 I_1$ wykonujemy obrót w kierunku ujemnym o kąt $\frac{\pi}{2}$ wstecz od OB_1. Następnie od punktu

C dodajemy do wektora OC pod kątem prostym naprzód odcinek $CD = j\omega L_1 I_1$. Od punktu D w kierunku równoległym do AB odkładamy wektor $DF = j\omega M I_2$. Wektor zamykający OF przedstawia napięcie U_1 z zewnątrz przyłożone.

Jeżeli w obwodzie nie uwzględniamy rozproszenia, wtedy

$$M^2 = L_1 L_2 .$$



Rys. 101

Jeżeli zaś rozproszenie uwzględniamy, wówczas

$$M = \frac{\sqrt{L_1 L_2}}{\sqrt{\sigma_1 \sigma_2}} = \kappa \sqrt{L_1 L_2},$$

gdzie wielkości σ_1 i σ_2 oznaczają współczynniki rozproszenia H o p k i n s o n a dla obwodów pierwotnego i wtórnego.

Współczynnik

$$\kappa = \frac{1}{\sqrt{\sigma_1 \sigma_2}}$$

nazywamy w s p ó ł c z y n n i k i e m s p r z ę ż e n i a m a g n e t y c z n e g o.

W przypadku, gdy nie ma rozproszenia, $\kappa = 1$; w dobrych transformatorach technicznych (z żelazem) κ wynosi od 0,99 do 1, czyli 99 do 100%. W małych transformatorach powietrznych κ wynosi niekiedy zaledwie 0,1%.

§ 36
TRANSFORMATOR Z RDZENIEM ŻELAZNYM

Przypuśćmy, że mamy dwa uzwojenia na wspólnym rdzeniu żelaznym, czyli transformator z rdzeniem żelaznym; pierwsze uzwojenie niech ma z_1, drugie z_2 zwojów. Jeżeli oznaczymy wartość chwilową zmiennego strumienia magnetycznego powstającego pod wpływem przechodzącego prądu zmiennego w każdym zwoju I uzwojenia przez Φ_t i założymy najpierw, że nie ma rozproszenia magnetycznego, wtedy w obu uzwojeniach powstają *SEM* indukcji o wartości chwilowej

$$e_1 = -z_1 \frac{d\Phi_t}{dt}$$

oraz

$$e_2 = -z_2 \frac{d\Phi_t}{dt}.$$

Stosunek

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{z_1}{z_2} = \vartheta \tag{8}$$

nazywamy *przekładnią transformatora.*

Oznaczmy przez i_0 prąd, który musimy przepuścić przez uzwojenie pierwotne, aby otrzymać strumień magnetyczny, wywołujący *SEM* indukcji w drugim obwodzie, z uwzględnieniem strat na prądy wirowe i histerezę. Prąd ten możemy nazwać prądem magnesującym. Oznaczmy następnie prąd powstający we wtórnym uzwojeniu przez i_2. Wówczas moc prądu we wtórnym uzwojeniu wyrazi się jako iloczyn $e_2 i_2$. Aby ją otrzymać, musimy w pierwotnym uzwojeniu oprócz prądu i_0 mieć prąd i'_1, którego moc $= e_1 i'_1$.

Moc oddawana w pierwszym uzwojeniu powinna się równać mocy pobieranej we wtórnym uzwojeniu.

Wobec tego

$$e_1 i'_1 = -e_2 i_2. \tag{9}$$

Całkowity prąd i_1, jaki będzie przepływał w pierwszym obwodzie, stanowi sumę prądów i_0 oraz i'_1, czyli

$$i_1 = i_0 + i'_1. \tag{10}$$

Ze wzoru (9) z uwzględnieniem wzoru (8), mamy

$$\frac{e_1}{e_2} = -\frac{i_2}{i'_1} = \frac{z_1}{z_2},$$

skąd

$$z_1 i'_1 + z_2 i_2 = 0.$$

Podstawiając tu zamiast i'_1 jego wartość ze wzoru (10), otrzymujemy

$$z_1(\dot{i}_1 - \dot{i}_0) + z_2\dot{i}_2 = 0,$$

lub inaczej

$$z_1\dot{i}_1 + z_2\dot{i}_2 = z_1\dot{i}_0 .$$

Słowami możemy to wyrazić tak. Suma amperozwojów pierwotnego i wtórnego uzwojenia powinna się równać amperozwojom prądu magnesującego przepływającego w pierwszym uzwojeniu.

Z ostatniego wzoru możemy napisać

$$\dot{i}_1 = \dot{i}_0 - \frac{z_2}{z_1}\dot{i}_2 .$$

Oznaczmy wyraz $-\frac{z_2}{z_1}\dot{i}_2$ przez $\dot{i}'_2$.

Iloczyn $z_2\dot{i}_2$ stanowi amperozwoje wtórnego uzwojenia; podzielone są one przez liczbę zwojów pierwszego uzwojenia. Prąd $\dot{i}'_2$ można więc określić jako prąd wtórny, zredukowany do uzwojenia pierwotnego i wzięty ze znakiem—.

Wobec tego możemy napisać

$$\dot{i}_1 = \dot{i}_0 + \dot{i}'_2. \tag{11}$$

Rozpatrzmy teraz przypadek, gdy uwzględniamy rozproszenie magnetyczne. Oznaczmy wartości chwilowe strumienia magnetycznego wspólnego dla obu obwodów przez Φ_t, strumień rozproszenia pierwotnego obwodu przez Φ_{r_1}, a strumień rozproszenia obwodu wtórnego przez Φ_{r_2}. Całkowity strumień objęty przez uzwojenie pierwotne będzie miał wartość

$$\Phi_t + \Phi_{r_1},$$

przez uzwojenie wtórne zaś

$$\Phi_t + \Phi_{r_2}.$$

SEM indukcji powstająca w pierwszym uzwojeniu będzie miała wartość

$$-z_1\frac{d\Phi_t}{dt} - z_1\frac{d\Phi_{r_1}}{dt},$$

a w drugim uzwojeniu

$$-z_2\frac{d\Phi_t}{dt} - z_2\frac{d\Phi_{r_2}}{dt}.$$

Rozproszenie zachodzi przeważnie w powietrzu. Strumień rozproszenia w tym przypadku jest proporcjonalny do prądu przepływającego w obwodzie. Oznaczmy indukcyjność od strumienia rozproszenia w pierwszym uzwojeniu przez L_{r_1}, w drugim zaś przez L_{r_2}, będziemy mieli

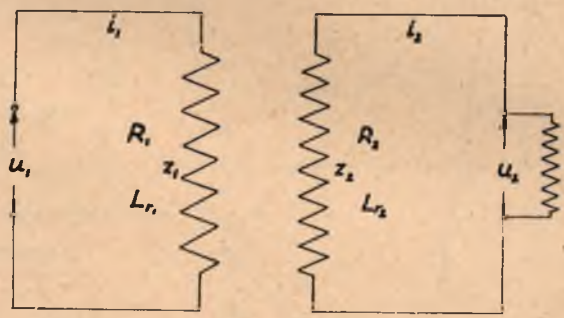
$$z_1 \Phi_{r_1} = L_{r_1} i_1;$$

$$z_2 \Phi_{r_2} = L_{r_2} i_2.$$

Biorąc pochodne tych strumieni względem czasu i mając na uwadze, że w rozpatrywanym przypadku L_{r_1} oraz L_{r_2} mają wartości stałe, otrzymamy

$$z_1 \frac{d\Phi_{r_1}}{dt} = L_{r_1} \frac{di_1}{dt}.$$

$$z_2 \frac{d\Phi_{r_2}}{dt} = L_{r_2} \frac{di_2}{dt};$$



Rys. 102

Oznaczmy przez u_1 wartość chwilową napięcia z zewnątrz przyłożonego do pierwotnego uzwojenia, przez R_1 oporność rzeczywistą (rys. 102) tego uzwojenia, przez L_{r_1} indukcyjność rozproszenia oraz przez z_1 ilość zwojów. Dla uzwojenia wtórnego te same wielkości niech mają wartości R_2, L_{r_2}, z_2; następnie niech u_2 oznacza napięcie na zaciskach odbiornika włączonego do wtórnego uzwojenia. Oba uzwojenia znajdują się na rdzeniu żelaznym.

Według prawa Ohma w każdej chwili musi zachodzić zależność następująca:

$$u_1 - z_1 \frac{d\Phi_t}{dt} - L_{r_1} \frac{di_1}{dt} = i_1 R_1$$

oraz

$$- z_2 \frac{d\Phi_t}{dt} - L_{r_2} \frac{di_2}{dt} = i_2 R_2 + u_2.$$

Rozwiązując te równania względem u_1 i u_2, otrzymujemy

$$u_1 = z_1 \frac{d\Phi_t}{dt} + i_1 R_1 + L_{r_1} \frac{di_1}{dt}$$

oraz

$$u_2 = - z_2 \frac{d\Phi_t}{dt} - i_2 R_2 - L_{r_2} \frac{di_2}{dt}.$$

Przechodząc od wartości chwilowych do wartości skutecznych, możemy symbolicznie przepisać powyższe wzory w sposób następujący:

$$\hat U_1 = -\hat E_1 + \hat I_1(R_1 + j\omega L_{r_1}), \qquad (12)$$

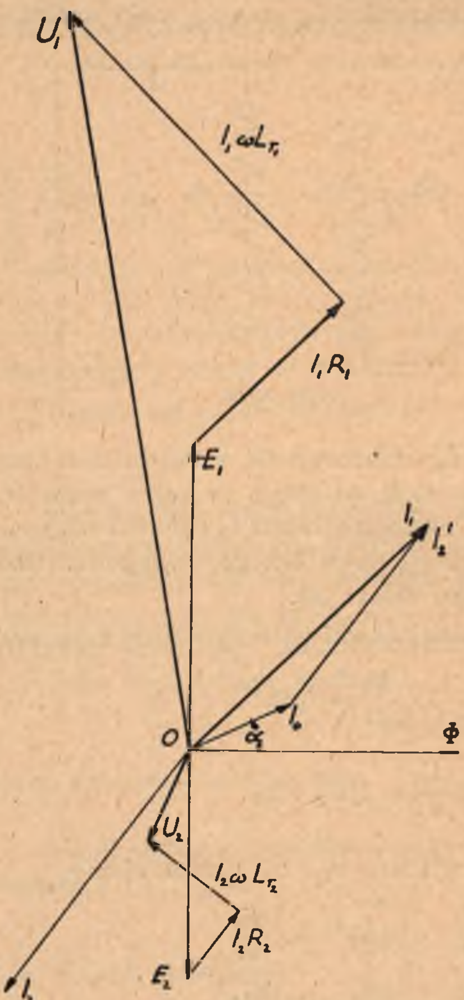
$$\hat U_2 = \hat E_2 - \hat I_2(R_2 + j\omega L_{r_2}); \qquad (13)$$

wzór (11) w postaci

$$\hat I_1 = \hat I_0 + \hat I_2',$$

gdzie

$$\hat I_2' = -\frac{z_2 \hat I_2}{z_1}.$$



Rys. 103

Wykreślnie wzory te możemy przedstawić jak na rys. 103.

Za oś podstawową bierzemy kierunek strumienia Φ.

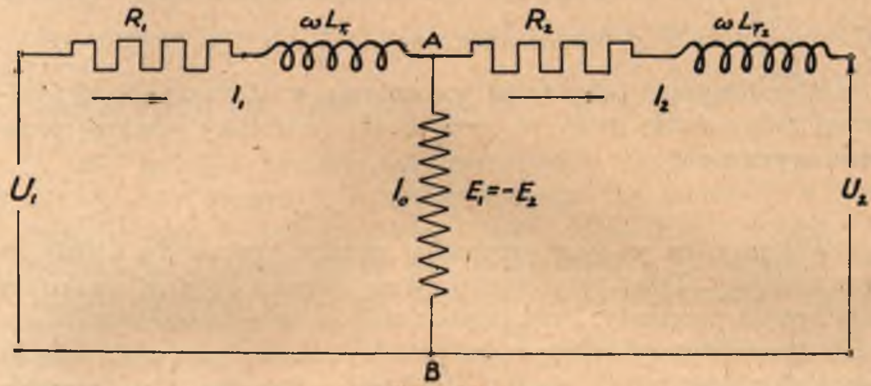
Jak wiemy, *SEM* indukcji jest w fazie opóźniona o kąt prosty względem strumienia magnetycznego; wobec tego $-E_1$, wchodzące we wzorze (12), odkładamy pod kątem prostym naprzód (do góry), zaś $+E_2$ pod kątem prostym wstecz (w dół).

Niech np. prąd I_2 będzie opóźniony w fazie względem E_2.

Prąd magnesujący I_0 ze względu na straty na histerezę i prądy wirowe jest przesunięty w fazie względem strumienia Φ o pewien kąt α. Do tego prądu dodajemy geometrycznie prąd I'_2 w kierunku przeciwnym do prądu I_2 i otrzymujemy prąd I_1.

Do wektora $-E_1$ dodajemy geometrycznie $R_1 \hat I_1 + j\omega L_{r_1} \hat I_1$; suma geometryczna będzie wektorem napięcia pierwotnego U_1. Odejmując geometrycznie od wektora $\hat E_2$, czyli dodając w kierunku przeciwnym wektory $\hat I_2 R_2$ oraz $j\omega L_{r_2} \hat I_2$, otrzymamy napięcie na zaciskach wtórnych U_2.

Jeżeli we wzorach (12) i (13) założymy $E_1 = -E_2$, to możemy te wzory otrzymać ze schematu przedstawionego na rys. 104.



Rys. 104

§ 37
PRAKTYCZNE ZNACZENIE TRANSFORMATORÓW

Gdy chodzi o przesyłanie energii elektrycznej na znaczne odległości, staramy się osiągnąć jak najmniejsze straty.

Jeżeli mamy do przeniesienia pewną moc P przy napięciu U, to strata mocy w przewodach $\triangle P$ będzie określona wzorem

$$\triangle P = I^2 R.$$

Oporność przewodu podwójnego o długości l i przekroju s wynosi

$$R = \varrho \cdot \frac{2l}{s},$$

gdzie ϱ oznacza oporność właściwą materiału przewodu.

Wobec tego

$$\triangle P = I^2 \varrho \frac{2l}{s}.$$

Z wzorów tych obliczamy potrzebny przekrój przewodu

$$s = \frac{I^2 \varrho 2l}{\triangle P}.$$

Przy prądzie zmiennym moc prądu

$$P = U I \cos \varphi.$$

Dla stałego, zwykle z góry określonego współczynnika mocy $\cos\varphi$ moc P zależy od dwóch zmiennych wielkości U i I.

Gdy powiększamy napięcie np. n razy, to prąd dla otrzymania tej samej mocy P powinien mieć wartość $\frac{I}{n}$.

Aby otrzymać taką samą procentową w stosunku do przenoszonej mocy stratę mocy w przewodach, potrzebny przekrój przewodu wyniesie

$$s = \frac{I^2 \varrho 2l}{n^2 \Delta P}.$$

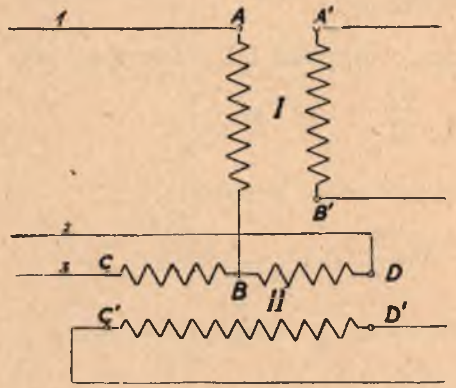
Widzimy, że w tym przypadku przekrój przewodu będzie n^2 razy mniejszy. Tyleż razy zmniejszy się również objętość materiału zużytego na przewody. Przy prądzie stałym, w celu zwiększenia napięcia musielibyśmy wziąć prądnicę na wyższe napięcie, a dla bardzo wysokich napięć takich prądnic zbudować nie można. Przy prądach zmiennych natomiast zastosujemy do tego celu transformatory, które nie wymagają żadnej obsługi i można je konstruować łatwo, wobec braku ruchomych części, na bardzo wysokie napięcia.

§ 38

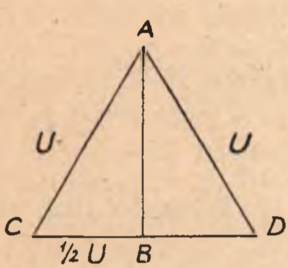
UKŁAD SCOTTA

Układ ten, zawierający dwa transformatory jednofazowe, daje możność otrzymania prądu dwufazowego z prądu trójfazowego lub odwrotnie.

Na rys. 105 koniec pierwotnego uzwojenia pierwszego transformatora połączony jest ze środkiem pierwotnego uzwojenia drugiego transformatora; końce 1, 2 i 3 połączone są ze źródłem prądu trój-



Rys. 105



Rys. 106

fazowego. Wtedy napięcie między zaciskami C i D pierwotnego uzwojenia II transformatora będzie równe napięciu międzyprzewodowemu prądu trójfazowego U, napięcie zaś między zaciskami A i B pierwotnego uzwojenia I transformatora będzie równe $\frac{\sqrt{3}}{2}U$, jak to wynika z rys. 106, gdzie $AB = \sqrt{AC^2 - CB^2} = \sqrt{U^2 - \frac{U^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}U$.

To ostatnie napięcie jest przesunięte względem napięcia BC o 90°. Aby otrzymać jednakowe napięcie na zaciskach wtórnych uzwojeń obu transformatorów, trzeba odpowiednio dobrać liczbę zwojów; mianowicie, jeżeli dla transformatora II stosunek liczby zwojów wtórnego uzwojenia do liczby zwojów pierwotnego wynosi m, to stosunek ten dla transformatora I powinien wynosić $\frac{2}{\sqrt{3}}m$.

Otrzymujemy w ten sposób na zaciskach $A'B'$ i $C'D'$ napięcia prądu dwufazowego. Odwrotnie, mając prąd dwufazowy na zaciskach $A'B'$ i $C'D'$, otrzymamy pomiędzy zaciskami A i C, C i D, A i D napięcia prądu trójfazowego.

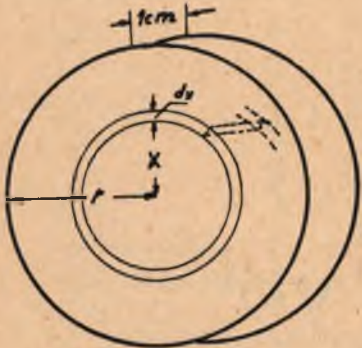
R O Z D Z I A Ł   S Z Ó S T Y

ZJAWISKA ZACHODZĄCE W PRZEWODACH I W DIELEKTRYKACH PRZY PRĄDZIE ZMIENNYM

§ 39

ZJAWISKO NASKÓRKOWOŚCI

Przy prądzie stałym gęstość prądu w poprzecznym przekroju przewodu jest rozłożona równomiernie, to znaczy ma tę samą wartość we wszystkich punktach przekroju. Przy prądzie zmiennym wytwarza się wewnątrz przewodu zmienne pole magnetyczne, które powoduje nierównomierny rozkład gęstości prądu w poprzecznym przekroju przewodu, a mianowicie gęstość zwiększa się w kierunku od osi przewodu do jego powierzchni. Zjawisko to nazywamy *naskórkowością* (*Skineffekt*).



Rys. 107

Zbadajmy rozkład gęstości prądu w prostolinijnym przewodzie o okrągłym przekroju, ograniczając się do niewielkiej jego długości, z dala od jego końców. Dla uproszczenia zagadnienia wprowadzimy zamiast wartości chwilowych wartości skuteczne rozważanych wielkości sinusoidalnie zmiennych w czasie.

W ten sposób będziemy mieli do czynienia z funkcjami tylko jednej zmiennej: odległości od osi przewodu. Rozpatrzmy w dowolnej odległości x od tej osi (rys. 107) warstwę cylindryczną o długości 1 cm i nieskończenie małej grubości dx. Gdy przez przewód przepływa prąd zmienny, powstaje zmienne pole magnetyczne i w dowolnym punkcie, na powierzchni rozpatrywanej warstwy, natężenie pola magnetycznego będzie miało pewną wartość skuteczną, którą oznaczymy przez H_x.

Wektory tego natężenia pola leżą w płaszczyznach prostopadłych do osi przewodu i są styczne do kół otrzymywanych w poprzecznym przekroju. Część prądu przepływającego przez przekrój o promieniu x i powodującego natężenie pola H_x oznaczmy przez I_x. Zarówno I_x jak i H_x będą funkcjami odległości x. Działanie magnetyczne prądu I_x jest takie, jak gdyby cały ten prąd płynął wzdłuż osi przewodu; przy czym, w rozpatrywanym przypadku prostolinijnego przewodu,

$$H_x = \frac{2I_x}{x},$$

jeżeli I_x wyrażamy w jednostkach bezwzględnych, czyli

$$I_x = \frac{H_x x}{2}. \tag{1}$$

Niech gęstość prądu w przekroju warstwy wynosi σ. Prąd przepływający przez cienką warstwę będzie dI_x, a ponieważ przekrój tej warstwy wynosi $2\pi x dx$, przeto

$$\sigma \cdot 2\pi x dx = dI_x,$$

skąd

$$\sigma = \frac{1}{2\pi x}\frac{dI_x}{dx}. \tag{2}$$

Ze wzoru (1) mamy

$$\frac{dI_x}{dx} = \frac{1}{2}\left(H_x + x\frac{dH_x}{dx}\right);$$

podstawiając tę wartość do wzoru (2), otrzymamy

$$4\pi x\sigma = H_x + x\frac{dH_x}{dx}. \tag{3}$$

Indukcja magnetyczna na powierzchni warstwy będzie $B_x = \mu H_x$, gdzie μ oznacza przenikalność magnetyczną metalu, z którego przewód jest sporządzony. Dla metali magnetycznie obojętnych, jak np. miedź, aluminium itp., przenikalność ma wartość stałą i praktycznie może być przyjęta równą jedności.

Strumień magnetyczny w warstwie o przekroju $dx \cdot 1\ \text{cm}^2$ wyniesie

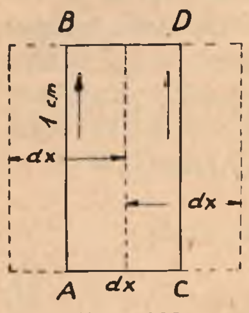
$$d\Phi_x = B_x dx = \mu H_x dx.$$

Pod wpływem tego strumienia powstaje *SEM*, której wartość skuteczna według wzoru (4) z § 33 wyniesie w jednostkach bezwzględnych

$$dE = 2\pi f d\Phi_x;$$

ponieważ *SEM* jest opóźniona w fazie względem strumienia o 90°, przeto, wprowadzając wielkości zespolone, napiszemy

$$d\hat{E} = -j 2\pi f d\Phi_x$$



Rys. 108

lub, podstawiając wartość $d\Phi_x$,

$$d\hat{E} = -j\, 2\pi f \mu \hat{H}_x dx. \tag{4}$$

Rozpatrując przekrój warstwy wzdłuż osi przewodu (rys. 108), możemy rozumować w sposób następujący: przez jeden bok AB płynie struga prądu $di = \sigma ds$, gdzie ds stanowi element przekroju; przez drugi bok CD w tym samym kierunku płynie struga prądu $di + d(di)$; oporność każdego boku wynosi $\frac{\varrho \cdot 1}{ds}$, gdzie ϱ oznacza oporność właściwą metalu. Stosując do rozpatrywanego zamkniętego obwodu II prawo Kirchhoffa, otrzymamy

$$dE = di \cdot \frac{\varrho}{ds} - \left[\left(di + d(di)\right)\right] \frac{\varrho}{ds} = -\varrho \frac{d(di)}{ds}$$

lub, po podstawieniu $di = \sigma\, ds$ i wprowadzając wielkości zespolone

$$d\hat{E} = -\varrho\, d\hat{\sigma}. \tag{5}$$

Zestawiając wzory (5) i (4), będziemy mieli

$$\varrho\, d\hat{\sigma} = j\, 2\pi f \mu \hat{H}_x dx,$$

czyli

$$\hat{H}_x = -j \frac{\varrho}{2\pi f \mu} \frac{d\hat{\sigma}}{dx}.$$

Podstawiając tę wartość H_x oraz jej pochodną do wzoru (3), otrzymamy

$$4\pi x \hat{\sigma} = -j \frac{\varrho}{2\pi f \mu} \frac{d\hat{\sigma}}{dx} - j \frac{\varrho}{2\pi f \mu} \frac{d^2 \hat{\sigma}}{dx^2},$$

skąd po uproszczeniu

$$\frac{d^2 \hat{\sigma}}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\hat{\sigma}}{dx} - j \frac{8\pi^2 f \mu}{\varrho} \hat{\sigma} = 0.$$

Oznaczając w skróceniu

$$m^2 = -j\frac{8\pi^2 f\mu}{\varrho}, \tag{6}$$

otrzymujemy równanie różniczkowe w postaci

$$\frac{d^2\hat{\sigma}}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d\hat{\sigma}}{dx} + m^2\hat{\sigma} = 0\,. \tag{7}$$

Jest to równanie drugiego rzędu, które posiada dwa rozwiązania szczególne, których suma daje rozwiązanie ogólne. Rozwiązanie szczególne można założyć w postaci szeregu ze wzrastającymi potęgami x, czyli

$$\hat{\sigma} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + \ldots,$$

gdzie a z indeksami oznacza wielkości stałe;
wtedy

$$\frac{d\hat{\sigma}}{dx} = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + 6a_6x^5 + \ldots,$$

$$\frac{d^2\hat{\sigma}}{dx^2} = 2a_2 + 2\cdot 3a_3x + 3\cdot 4a_4x^2 + 4\cdot 5a_5x^3 + 5\cdot 6a_6x^4 + \ldots;$$

podstawiając te wartości do naszego równania różniczkowego, otrzymamy po zgrupowaniu

$$\frac{a_1}{x} + (m^2a_0 + 4a_2) + (m^2a_1 + 9a_3)\,x + (m^2a_2 + 16a_4)x^2 +$$
$$+ (m^2a_3 + 25a_5)x^3 + (m^2a_4 + 36a_6)x^4 + (m^2a_5 + 49a_7)x^5 + \ldots = 0.$$

Ponieważ wzór powyższy jest tożsamością, to znaczy, że lewa strona powinna się równać zeru przy wszelkich wartościach x, przeto wszystkie współczynniki przy wszelkich potęgach x, jak również wyraz stały, powinny się równać zeru; w ten sposób

$$a_1 = 0;\quad m^2a_0 + 4a_2 = 0;\quad m^2a_1 + 9a_3 = 0;$$
$$m^2a_2 + 16a_4 = 0;\quad m^2a_3 + 25a_5 = 0\quad \text{itd.}$$

Ponieważ $a_1 = 0$, więc wszystkie współczynniki z nieparzystymi indeksami stają się również równe zeru; pozostają więc tylko współczynniki z parzystymi indeksami, przy czym

$$a_2 = -\frac{m^2a_0}{2^2};\quad a_4 = -\frac{m^2a_2}{4^2} = +\frac{m^4a_0}{2^2\,4^2};\quad a_6 = -\frac{m^6a_0}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}\quad \text{itd.}$$

Wobec tego rozwiązanie szczególne będzie

$$\hat{\sigma} = a_0\left(1 - \frac{m^2x^2}{2^2} + \frac{m^4x^4}{2^2\cdot 4^2} - \frac{m^6x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2} + \frac{m^8x^8}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8^2} + \ldots\right). \tag{8}$$

Szereg w nawiasach stanowi funkcję Bessela albo funkcję cylindryczną pierwszego rodzaju, rzędu zerowego argumentu mx; oznaczymy ją przez $I_0(mx)$, czyli

$$I_0(mx) = 1 - \frac{(mx)^2}{2^2} + \frac{(mx)^4}{(2\cdot 4)^2} - \frac{(mx)^6}{(2\cdot 4\cdot 6)^2} + \frac{(mx)^8}{(2\cdot 4\cdot 6\cdot 8)^2} + \dots \tag{9}$$

Dalsze rozważania matematyczne doprowadzają do wniosku, że druga całka szczególna rozpatrywanego równania różniczkowego daje dla funkcji, czyli w tym przypadku dla gęstości prądu, wartość nieskończenie wielką, gdy $x = 0$, to znaczy na osi przewodu. Nie ma to sensu fizycznego, więc stała dowolna przy tej drugiej całce szczególnej musi się równać zeru, pozostanie tylko pierwsza wyżej wyznaczona całka szczególna; rozpatrując a_0 jako stałą dowolną i oznaczając ją przez A, otrzymamy ogólną całkę równania w postaci

$$\hat{\sigma} = A\, I_0(mx). \tag{10}$$

Stałą dowolną A możemy wyznaczyć przez prąd $\hat{I}$ płynący przez cały przekrój przewodu o promieniu r. Wtedy bowiem

$$\hat{I} = \int_0^r \hat{\sigma}\cdot 2\pi x dx = 2\pi A \int_0^r I_0(mx) x dx. \tag{11}$$

Biorąc wartość $I_0\,(mx)$ ze wzoru (9), mnożąc przez x i całkując, otrzymamy

$$\hat{I} = 2\pi A\left[\frac{r^2}{2} - \frac{m^2 r^4}{2^2\cdot 4} + \frac{m^4 r^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6} - \frac{m^6 r^8}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8} + \dots\right] =$$

$$= 2\pi A \frac{r}{m}\left[\frac{mr}{2} - \frac{m^3 r^3}{2^2\cdot 4} + \frac{m^5 r^5}{2^2\cdot 4^2\cdot 6} - \frac{m^7 r^7}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8} + \dots\right];$$

wyraz w nawiasach stanowi funkcję Bessela rzędu pierwszego argumentu mr, czyli

$$I_1(mr) = \frac{mr}{2} - \frac{m^3 r^3}{2^2\cdot 4} + \frac{m^5 r^5}{2^2\cdot 4^2\cdot 6} - \frac{m^7 r^7}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8} + \dots =$$

$$= \frac{mr}{2}\left[1 - \frac{1}{2}\frac{m^2 r^2}{2^2} + \frac{1}{3}\frac{m^4 r^4}{(2\cdot 4)^2} - \frac{1}{4}\frac{m^6 r^6}{(2\cdot 4\cdot 6)^2} + \dots\right]. \tag{12}$$

Mamy więc

$$\hat{I} = 2\pi A \frac{r}{m} I_1(mr),$$

skąd

$$A = \frac{\hat{I}_m}{2\pi r\, I_1(mr)}. \tag{13}$$

Wobec tego wzór (10) daje

$$\hat{\sigma} = \frac{\hat{I}_m I_0(mx)}{2\pi r I_1(mr)}. \tag{14}$$

Dla małych częstotliwości możemy na podstawie wzorów (9) i (12) założyć w przybliżeniu

$$I_0(mx) \cong 1,$$

$$I_1(mr) \cong \frac{mr}{2};$$

wówczas dla gęstości prądu otrzymamy ze wzoru (14)

$$\hat{\sigma} = \frac{\hat{I}}{\pi r^2},$$

co wskazuje, że gęstość jest jednakowa we wszystkich punktach przekroju, jak przy prądzie stałym.

Ponieważ m wchodzące do funkcyj Bessela, jak widać ze wzoru (6), stanowi liczbę urojoną, przeto interesujące nas wielkości możemy wyrazić w postaci liczb zespolonych.

Oznaczmy w skróceniu

$$p = \sqrt{\frac{8\pi^2 f\mu}{\varrho}} = 2\pi\sqrt{\frac{2f\mu}{\varrho}},$$

czyli

$$m^2 = -jp^2;$$

wtedy wyrazy wchodzące do szeregów funkcyj Bessela będą miały następujące wartości:

$$\begin{aligned}
m^2x^2 &= -jp^2x^2, & m^2r^2 &= -jp^2r^2,\\
m^4x^4 &= -p^4x^4, & m^4r^4 &= -p^4r^4,\\
m^6x^6 &= jp^6x^6, & m^6r^6 &= jp^6r^6,\\
m^8x^8 &= p^8x^8, & m^8r^8 &= p^8r^8,
\end{aligned}$$

itd.

Wobec tego ze wzorów (9) i (12) otrzymujemy po zgrupowaniu

$$I_0(mx) = \left(1 - \frac{p^4x^4}{(2\cdot4)^2} + \frac{p^8x^8}{(2\cdot4\cdot6\cdot8)^2} - \dots\right) + $$
$$+ j\left(\frac{p^2x^2}{2^2} - \frac{p^6x^6}{(2\cdot4\cdot6)^2} + \frac{p^{10}x^{10}}{(2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10)^2}\right);$$

$$I_1(mr) = \frac{mr}{2}\left[\left(1 - \frac{1}{3}\frac{p^4r^4}{(2\cdot4)^2} + \frac{1}{5}\frac{p^8r^8}{(2\cdot4\cdot6\cdot8)^2} - \dots\right) + \right.$$
$$\left. + j\left(\frac{1}{2}\frac{p^2r^2}{2^2} - \frac{1}{4}\frac{p^6r^6}{(2\cdot4\cdot6)^2} + \frac{1}{6}\frac{p^{10}r^{10}}{(2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10)^2} + \dots\right)\right].$$

Lord Kelvin oznaczał część rzeczywistą stojącą w nawiasach przez *ber*, część urojoną zaś przez *bei*; używając tych oznaczeń, napiszemy

$$I_0(mx) = ber(px) + j\,bei(px); \tag{15}$$

$$I_1(mr) = \frac{mr}{2}\left[ber_1(pr) + j\,bei_1(pr)\right]; \tag{16}$$

wtedy wzór (14) przepiszemy w postaci

$$\hat{\sigma} = \frac{\hat{I}}{\pi r^2}\,\frac{ber\,(px) + j\,bei\,(px)}{ber_1(pr) + j\,bei_1(pr)}. \tag{17}$$

Jest to gęstość prądu w odległości x od osi przewodu; na powierzchni przewodu, czyli dla $x = r$, gęstość wyniesie

$$\hat{\sigma}_r = \frac{\hat{I}}{\pi r^2}\,\frac{ber\,(pr) + j\,bei\,(pr)}{ber_1(pr) + j\,bei_1(pr)};$$

wobec tego stosunek gęstości:

$$\frac{\hat{\sigma}}{\hat{\sigma}_r} = \frac{ber(px) + j\,bei(px)}{ber(pr) + j\,bei(pr)}.$$

Licznik w ostatnim wzorze dla $x < r$ jest mniejszy od mianownika, co łatwo sprawdzić ze wzoru (14); wynika stąd, że gęstość prądu jest największa na powierzchni i zmniejsza się w kierunku od powierzchni do osi przewodu.

Na samej osi, dla $x = 0$, gdzie gęstość prądu jest najmniejsza, $ber(px) = 1$, $bei(px) = 0$; $I_0(mx) = 1$,

$$\hat{\sigma}_0 = \frac{\hat{I}}{\pi r^2\,[ber_1(pr) + j\,bei_1(pr)]} = \frac{\hat{I}_m}{2\pi r\,I_1(mr)},$$

czyli, jak widać ze wzoru (13),

$$\hat{\sigma}_0 = A;$$

gęstość prądu na osi równa jest stałej otrzymanej w całce ogólnej równania różniczkowego, dającego rozkład gęstości prądu w poprzecznym przekroju przewodnika.

Widzimy więc, że przy prądzie zmiennym przewód nie jest wyzyskany jak przy prądzie stałym, gdzie gęstość prądu jest taka sama na osi jak i na powierzchni. Powoduje to, że oporność rzeczywista przy prądzie zmiennym jest większa niż przy prądzie stałym.

Rozpatrując, jak i poprzednio, część przewodu o długości 1 cm i promieniu r, będziemy mieli dla oporności R_s przy prądzie stałym

$$R_s = \frac{\varrho}{\pi r^2}.$$

Moc prądu wytwarzająca ciepło przy natężeniu prądu I będzie

$$P = I^2 R_s.$$

W przypadku prądu zmiennego wartość skuteczną prądu przepływającego przez cały przekrój przewodu określiliśmy we wzorze (11), mianowicie

$$I = \int_0^r \sigma 2\pi x dx.$$

Oznaczmy przez R_z oporność rzeczywistą, którą określiliśmy jako iloraz mocy wytwarzającej ciepło, przez kwadrat wartości skutecznej prądu; mamy więc

$$R_z = \frac{P}{I^2}.$$

Moc P, przy uwzględnieniu nierównomiernego rozkładu gęstości, znajdziemy wyrażając moc dP nieskończenie cienkiej warstwy cylindrycznej (rys. 104), której oporność wynosi

$$dR = \frac{\varrho}{2\pi x dx};$$

prąd przepływający przez tę warstwę dI wynosi $\sigma \cdot 2\pi x dx$, więc

$$dP = (dI)^2 \cdot dR = \frac{\sigma^2 \cdot 4\pi^2 x^2 dx^2 \cdot \varrho}{2\pi x dx} = 2\pi \varrho \sigma^2 x dx;$$

całkując ten wyraz w granicach całego przekroju przewodu, czyli dla x w granicach od 0 do r, znajdujemy moc prądu zmiennego w rozpatrywanej części przewodu

$$P = 2\pi \varrho \int_0^r \sigma^2 x dx.$$

Dzieląc tę moc przez kwadrat wartości skutecznej prądu, otrzymamy

$$R_z = \frac{2\pi \varrho \int_0^r \sigma^2 x dx}{\left[\int_0^r \sigma^2 2\pi x dx\right]^2}.$$

Stosunek oporności rzeczywistej przy prądzie zmiennym do oporności przy prądzie stałym, który oznaczymy przez k, wyrazi się wzorem

$$k = \frac{R_z}{R_s} = \frac{2\pi\varrho \int\limits_0^r \sigma^2 x\, dx \,.\, \pi r^2}{4\pi^2 \left[\int\limits_0^r \sigma x\, dx\right]^2 . \,\varrho} = \frac{r^2 \int\limits_0^r \sigma^2 x\, dx}{2\left[\int\limits_0^r \sigma x\, dx\right]^2}.$$

Do tego wzoru należy podstawić wartość σ ze wzoru (17), przy czym w tym przypadku chodzi nie o wartości zespolone, lecz o same moduły, czyli

$$\sigma = \frac{I}{\pi r^2} \frac{\sqrt{[ber\,(px)]^2 + [bei\,(px)]^2}}{\sqrt{[ber_1(pr)]^2 + [bei_1(pr)]^2}}.$$

Obliczenie tych całek daje w rezultacie szereg, za pomocą którego możemy wyznaczyć wartość k w każdym poszczególnym przypadku z żądaną dokładnością. Najczęściej posługujemy się wzorami przybliżonymi; w ogólnym przypadku dla niezbyt dużych częstotliwości istnieje wzór przybliżony

$$k = 1 + \frac{1}{12}\left(\frac{pr}{2}\right)^4 - \frac{1}{144}\left(\frac{pr}{2}\right)^8,$$

gdzie

$$p = 2\pi\sqrt{\frac{2f\mu}{\varrho}};$$

przy tym należy zwrócić uwagę, że r wyrażone jest w centymetrach, a oporność właściwa metalu przewodu w jednostkach *cgs* układu elektromagnetycznego.

Dla miedzi $\mu = 1$, $\varrho = 0{,}017 \cdot 10^5$; istnieje przybliżony wzór

$$k = 1 + 0{,}70\left(\frac{fd^2}{1000}\right)^2 - 0{,}49\left(\frac{fd^2}{1000}\right)^4,$$

gdzie d oznacza średnicę przewodu w cm.

W niżej podanej tablicy ułożonej przez Lorda K e l v i n a wskazane są wartości k dla różnych wartości fd^2 dla drutów miedzianych. Dla otrzymania wartości k dla drutów innych metali należy wartość

fd^2 pomnożyć przez $\frac{\mu}{\varrho} \cdot 0{,}017$ i dla otrzymanej wartości fd^2 szukać k w tabeli.

fd^2	k	fd^2	k	fd^2	k
0	1	720	1,3180	2880	2,3937
20	1,0000	980	1,4920	5120	3,0956
80	1,0010	1280	1,6778	8000	3,7940
180	1,0258	1620	1,8628	18000	5,5732
320	1,0805	2000	2,0430	32000	7,3250
500	1,1747	2420	2,2190		

Widzimy stąd, że np. gdy $fd^2 = 320$, to dla $f = 50$, $d^2 = 6{,}4$, $d \cong 2{,}5$ cm, oporność jest o 8% większa niż przy prądzie stałym.

Dla aluminium współczynniki we wzorze poprzednio podanym będą inne, a mianowicie

$$k = 1 + 0{,}24\left(\frac{fd^2}{1000}\right)^2 - 0{,}05\left(\frac{fd^2}{1000}\right)^4.$$

W żelaznym drucie zjawisko naskórkowości uwydatnia się bardzo znacznie, ponieważ wchodzą tu w grę jego własności magnetyczne. Używamy przewodów żelaznych tylko przy słabych prądach, gdyż mamy wtedy bardzo słabe pola magnetyczne.

Dla cienkich drutów żelaznych, gdy $\mu = 1000$, $\varrho = 0{,}10 \cdot 10^5$,

$$k = 1 + 2\left(\frac{fd^2}{10}\right)^2 - 4\left(\frac{fd^2}{10}\right)^4.$$

Przy wielkich częstotliwościach używa się wzoru następującego:

$$k = \frac{\pi d}{2}\sqrt{\frac{\mu f}{\varrho}}.$$

Przy większych przekrojach, w celu zmniejszenia wpływu naskórkowości, używamy przewodów złożonych z szeregu drutów izolowanych i odpowiednio przeplatanych.

Przy bardzo wielkich częstotliwościach zjawisko naskórkowości występuje w takim stopniu, że można korzystać z przewodów rurowych, gdyż cały prąd skupiony jest w pobliżu powierzchni przewodu.

Zjawisko naskórkowości wpływa również na indukcyjność przewodu, gdyż jednocześnie zachodzi inny rozkład natężenia pola magnetycznego. Skutkiem tego indukcyjność przy prądzie zmiennym staje się mniejsza niż przy prądzie stałym. Teoretyczne rozważania, podobne do poprzednich, doprowadzają również do funkcyj Bessela i do szeregów, które w praktycznym zastosowaniu sprowadzają się do wzorów przybliżonych. Oznaczając przez L_s indukcyjność przewodu przy prądzie zmiennym o bardzo małej częstotliwości, graniczącym z prądem stałym, przez L_z zaś indukcyjność przy prądzie zmiennym o średnich częstotliwościach, mamy wzory przybliżone dla $pr \leq 2$

$$L_z = L_s - \frac{1}{48}\left(\frac{pr}{2}\right)^4 + \frac{13}{8640}\left(\frac{pr}{2}\right)^8;$$

dla wielkich częstotliwości wzór Zennecka daje

$$L_z = L_s + \mu\left[\frac{1{,}424}{pr} - \frac{0{,}160}{(pr)^2} - 0{,}5\right];$$

we wzorach tych r oznacza promień przewodu w cm, p jak i poprzednio

$$p = 2\mu\sqrt{\frac{2f\mu}{\varrho}}.$$

§ 40

STRATY W DIELEKTRYKACH

Od dawna spostrzeżono, że dielektryk w kondensatorze ogrzewa się wówczas, gdy kondensator podlega zmiennemu elektryzowaniu. W elektrotechnice mamy do czynienia z dielektrykami, które mają za zadanie izolować przewody od ziemi lub od innych przewodów. Każdy taki układ z izolacją możemy rozpatrywać jako kondensator; jeżeli zaś przewód znajduje się pod napięciem prądu zmiennego, wówczas w dielektryku otaczającym przewód zachodzi elektryzacja na przemian w jednym i drugim kierunku, wydziela się ciepło, wobec czego w dielektryku zachodzi strata mocy. Zjawisko to posiada pewną analogię z histerezą magnetyczną, zachodzącą w żelazie znajdującym się w zmiennym polu magnetycznym, przeto niektórzy elektrotechnicy (pierwszy Steinmetz) nazwali to zjawisko *histerezą dielektryczną*, chociaż nie są to zjawiska identyczne.

Oprócz powyższych strat dielektrycznych mogą zachodzić w dielektryku straty spowodowane tym, że każdy dielektryk posiada pewną przewodność, skutkiem czego pod działaniem napięcia powstaje prąd płynący wskroś dielektryka, czyli tak zwany *prąd skrośny*. Wreszcie mogą zachodzić straty skutkiem wyładowań elektrycznych, czyli tak zwanego *ulotu*. Wszystkie te zjawiska powodują pewien upływ elektryczności, przetwarzającej się w ciepło. Upływ ten można ująć w postaci pewnego prądu czynnego, który nazwiemy *prądem upływu*, proporcjonalnego do napięcia działającego na dielektryk. Współczynnik proporcjonalności pomiędzy prądem upływu i napięciem nazywamy *upływnością*; upływność będziemy oznaczali literą A. W ten sposób pomiędzy prądem upływu I_u, napięciem U działającym na dielektryk oraz upływnością istnieje zależność

$$I_u = A U. \tag{18}$$

Moc wytworzona przez prąd upływu, czyli moc P_u pochłonięta w dielektryku, będzie określona wzorem

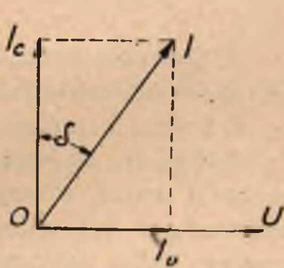
$$P_u = U I_u = A U^2,$$

skąd

$$A = \frac{P_u}{U^2};$$

możemy więc określić upływność A jako iloraz mocy pochłoniętej w dielektryku przez kwadrat napięcia działającego na dielektryk.

W ten sposób, mając niedoskonały dielektryk znajdujący się pod napięciem, musimy uwzględnić dwa prądy: prąd upływu, jako prąd czynny, będący w fazie z napięciem, oraz prąd przesunięcia, stanowiący zwykle prąd ładowania kondensatora, w skład którego wchodzi rozpatrywany dielektryk. Ten ostatni prąd, który oznaczymy przez I_c, jak wiadomo, wyprzedza w fazie napięcie o kąt prosty. Geometryczna suma tych prądów (rys. 109) stanowi prąd I, który w rzeczywistości będzie płynął przez dielektryk. Łatwo zauważyć, że kąt δ odchylenia prądu wypadkowego I od prądu I_c jest tym większy, im większy jest prąd upływu I_u, przy czym



Rys. 109

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{I_u}{I_c};$$

ponieważ $I_c = \omega C U$, $I_u = A U$, przeto:

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{A}{\omega C}; \quad A = \omega C \operatorname{tg}\delta.$$

Strata mocy w dielektryku spowodowana upływnością będzie:

$$P_u = A U^2 = \omega C U^2 \operatorname{tg}\delta = 2\pi f C U^2 \operatorname{tg}\delta. \tag{19}$$

Kąt δ nosi nazwę kąta *stratności dielektrycznej*, zaś $\operatorname{tg}\delta$ — nazwę *współczynnika strat dielektrycznych.*

Dla używanych w elektrotechnice materiałów izolacyjnych współczynnik strat dielektrycznych wynosi od 0,001 do 0,3.

Upływność spowodowana tak zwaną histerezą dielektryczną zależy od rodzaju materiału dielektryka i w pewnej mierze od temperatury. W sieciach kablowych izolacja zwykle jest tak dobra, że straty od prądu skrośnego można nie brać pod uwagę; nie ma również zjawiska ulotu, więc stratność w dielektryku spowodowana jest wyłącznie zjawiskiem histerezy dielektrycznej.

Dla przykładu obliczmy stratę mocy w dielektryku kabla z izolacją papierową przy prądzie zmiennym o napięciu 10000 V i częstotliwości 50 Hz, jeżeli pojemność kabla wynosi 0,5 μF na kilometr; współczynnik strat dielektrycznych dla papieru impregnowanego $\operatorname{tg}\delta = 0{,}024$. Ze wzoru (19) otrzymamy:

$$P_u = 6{,}28 \cdot 50 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{8} \cdot 0{,}024 = 375 \text{ watów;}$$

co w ciągu roku daje stratę energii:

$$W = \frac{375 \,.\, 365 \,.\, 24}{1000} = 3285 \text{ kilowatogodzin.}$$

Upływność przez izolację od prądu skrośnego zależy oczywiście od oporności materiału; jeżeli chodzi o przewody elektryczne, to w dobrych urządzeniach ta upływność nie przekracza zwykle $2 \cdot 10^{-7}$ S/km. Upływność od ulotu w przewodach napowietrznych zachodzi tylko wówczas, jeżeli wartość napięcia między dwoma przewodami lub między przewodem i ziemią przekroczy pewną granicę, którą nazywamy napięciem krytycznym. Dla każdej średnicy przewodu i dla każdej odległości między przewodami lub przewodem i ziemią istnieje napięcie krytyczne, po przekroczeniu którego rozpoczyna się wyładowanie elektryczne i powstaje zjawisko korony; na wartość tego napięcia w pewnej mierze wpływają jeszcze stan powierzchni przewodu oraz stan pogody.

Badania dokonane przez Towarzystwo Inżynierów Amerykańskich doprowadziły do empirycznego wzoru, który daje możność obliczania strat mocy, spowodowanych ulotem elektryczności. Wzór ten, nazywany wzorem Peeka, jest następujący:

$$P_{ul} = \frac{344}{a} f \sqrt{\frac{r}{a}} \left(U - U_0\right)^2 10^{-5},$$

gdzie P_{ul} oznacza stratę mocy w kW na km przewodu pojedynczego, α — współczynnik zależny od temperatury i ciśnienia powietrza, przy czym

$$\alpha = \frac{3{,}92\,b}{273 + t},$$

b — ciśnienie powietrza w cm słupa rtęci;
t — temperatura powietrza w °C;
f — częstotliwość prądu zmiennego;
r — promień przewodu w cm; jeżeli linka, to promień koła opisanego;
a — odległość między przewodami w cm;

U — wartość skuteczna napięcia w kilowoltach względem punktu zerowego (ziemi); przy prądzie jednofazowym stanowi to połowę napięcia w sieci; przy prądzie trójfazowym i połączeniu gwiazdowym — napięcie fazowe; przy uwzględnieniu spadku napięcia w przewodach trzeba brać średnią wartość napięcia całego przewodu;

U_0 — wartość skuteczna napięcia krytycznego w kilowoltach względem punktu zerowego.

To ostatnie napięcie oblicza się ze wzoru

$$U_0 = \delta m_1 m_2 \alpha r \ln \frac{a}{r},$$

w którym δ — napięcie przebijające powietrza; dla $\alpha = 1$, czyli dla $b = 76$ cm i $t = 25$°C wynosi ono 21,1 $^{\mathrm{kV}}/_{\mathrm{cm}}$;

m_1 — spółczynnik zależny od stanu powierzchni przewodu, przy czym

dla powierzchni odpolerowanej $m_1 = 1$,
dla zwykłych drutów $m_1 = 0{,}98$—$0{,}93$,
dla linek $m_1 = 0{,}87 - 0{,}83$;

m_2 — spółczynnik zależny od stanu pogody i równy
dla suchego powietrza $m_2 = 1$,
dla wilgotnego powietrza (chmury, śnieg, deszcz) $m_2 = 0{,}8$.

Uwzględniając wartości α i δ, poprzednie wzory można napisać w sposób następujący:

$$P_{ul} = \frac{87{,}8\,(273 + t)}{b} f \sqrt{\frac{r}{a}}\,(U - U_0)^2 \cdot 10^{-5} \text{ kilowatów na km,}$$

$$U_0 = \frac{21{,}1 \cdot 3{,}92 \cdot b}{273 + t} m_1 m_2 r \ln \frac{r}{a} \text{ kilowoltów.}$$

Ponieważ pojemność jednego przewodu wynosi

$$C = \frac{1}{18\, ln \frac{a}{r}} \text{ mikrofaradów na km,}$$

przeto

$$ln \frac{a}{r} = \frac{1}{18\, C};$$

wobec tego

$$U_0 = \frac{21{,}1 \,.\, 3{,}92}{18} \cdot \frac{t}{273 + t} \cdot m_1 m_2 \frac{r}{C} \text{ kilowoltów,}$$

albo ostatecznie

$$U_0 = 4595\, m_1 m_2 \frac{b}{273 + t} \cdot \frac{r}{C} \text{ woltów,}$$

gdzie pojemność C określona jest w mikrofaradach na 1 km pojedynczego przewodu.

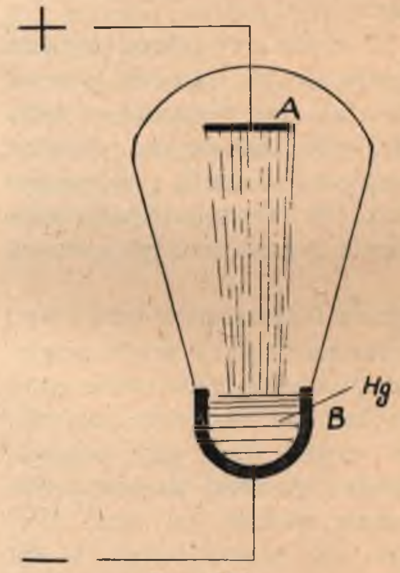
PROSTOWNIKI

§ 41
PROSTOWNIK RTĘCIOWY

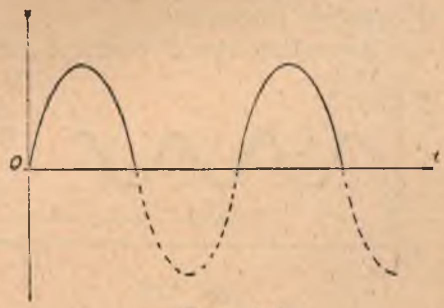
Przyrządy, za pomocą których możemy prąd zmienny prostować, czyli otrzymywać prąd o jednym kierunku, nazywamy *prostownikami*. Rozpatrzmy zasady działania kilku prostowników stosowanych w elektrotechnice.

Prostownik rtęciowy oparty jest na własności lampy rtęciowej, dającej łuk świetlny tylko wówczas, gdy rtęć jest katodą.

Przypuśćmy, że mamy naczynie (rys. 110) z rtęcią; po wypompowaniu powietrza zostanie w naczy-



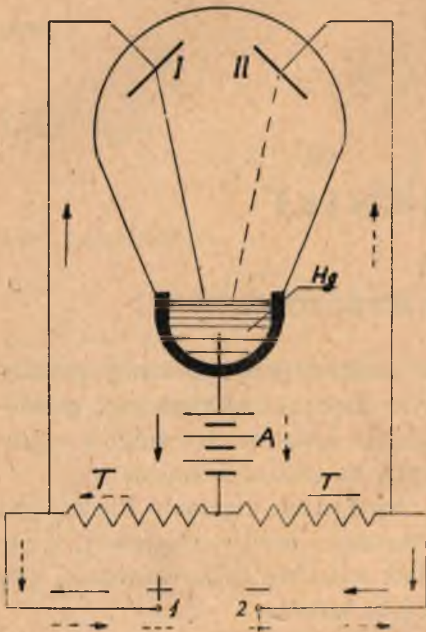
Rys. 110



Rys. 111

niu para rtęci i jeżeli następnie obie elektrody, np. żelazną A i rtęciową B, połączymy ze źródłem prądu, to przy odpowiednim napięciu otrzymamy łuk, lecz tylko wtedy, gdy rtęć jest katodą.

Gdybyśmy obie elektrody A i B przyłączyli do źródła prądu zmiennego, mielibyśmy łuk w ciągu połowy okresu, gdy prąd płynie przez elektrodę żelazną w kierunku rtęci; w drugiej połowie okresu łuku by nie było. Wykres prądu przechodzącego przez taki przyrząd mamy na rys. 111.

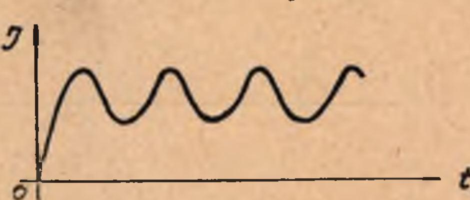


Rys. 112

Dla uniknięcia przerwy w powstawaniu łuku zastosowane zostały przy zwykłym prądzie zmiennym dwie elektrody dodatnie. Prąd zmienny od zacisków 1 i 2 źródła prądu zmiennego (rys. 112) wchodzi do transformatora T, którego wtórne uzwojenie połączone jest z dwoma żelaznymi elektrodami I i II; środek uzwojenia wtórnego łączymy z rtęcią przez odbiornik A, zasilany prądem stałym, np. przez baterię akumulatorów.

W chwili gdy biegun dodatni znajduje się na zacisku 1, prąd płynie tak, jak wskazują strzałki ciągłe, gdy zaś biegun dodatni przejdzie na zacisk 2, prąd popłynie tak, jak wskazują strzałki przerywane. Widzimy zatem, że przez odbiornik A prąd przepływa zawsze w jednym kierunku.

Transformator T posiada indukcyjność i wywołuje wskutek tego przesunięcie fazy prądu względem napięcia, mianowicie prąd opóźnia się względem napięcia. W chwili więc gdy napięcie spadnie do zera, wartość prądu będzie większa od zera. Wykres dla prądu będzie w danym przypadku inny niż dla napięcia; otrzymamy tzw. prąd tętniący (rys. 113).

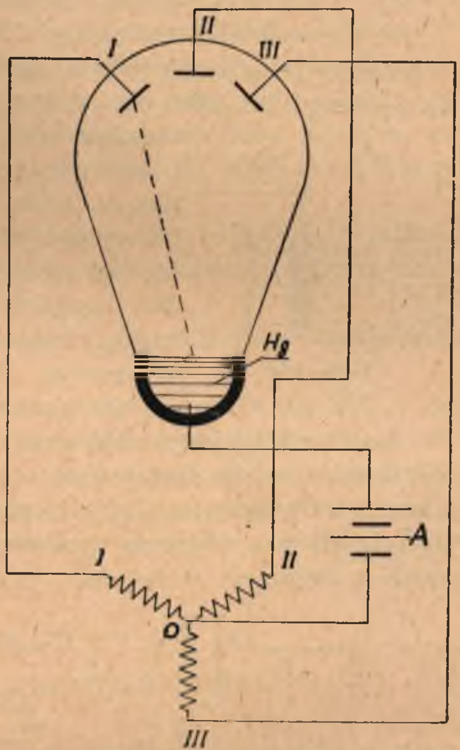


Rys. 113

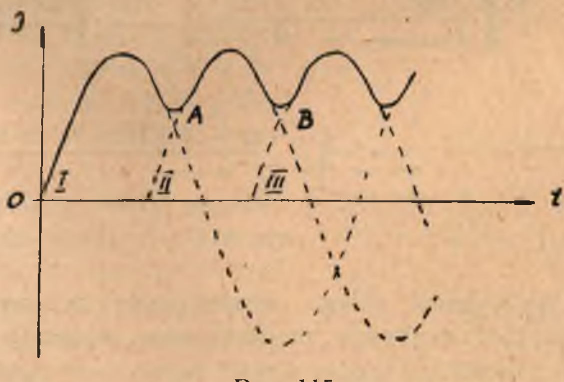
Dla prostowania prądu trójfazowego korzystamy z 3 elektrod dodatnich (rys. 114). Każdą z tych elektrod I, II i III łączymy z końcami poszczególnych faz (prądnicy lub transformatora), elektrodę rtęciową zaś łączymy z punktem zerowym przez odbiornik *A*. Wykres otrzymamy w danym przypadku następujący (rys. 115):

Z chwilą gdy pomiędzy I elektrodą i rtęcią powstaje łuk — zaczyna płynąć prąd z pierwszej fazy, przedstawiony na rysunku sinusoidą I. W dalszym ciągu napięcie na pierwszej elektrodzie maleje, a na II wzrasta, i w pewnej chwili (punkt *A* na rys. 115) łuk z elektrody I przeskoczy na elektrodę II. W dalszym ciągu napięcie na elektrodzie II będzie malało, a na elektrodzie III będzie wzrastało, i w pewnej chwili (*B*) łuk przeskoczy na elektrodę III. Otrzymamy w ten sposób prąd tętniący, którego wartości nigdy do zera nie spadają.

Prostowniki rtęciowe zyskały szerokie zastosowanie, zwłaszcza w kolejnictwie elektrycznym, i odznaczają się wysoką sprawnością.



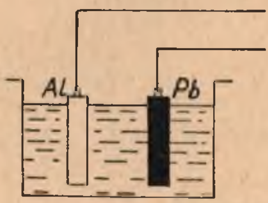
Rys. 114



Rys. 115

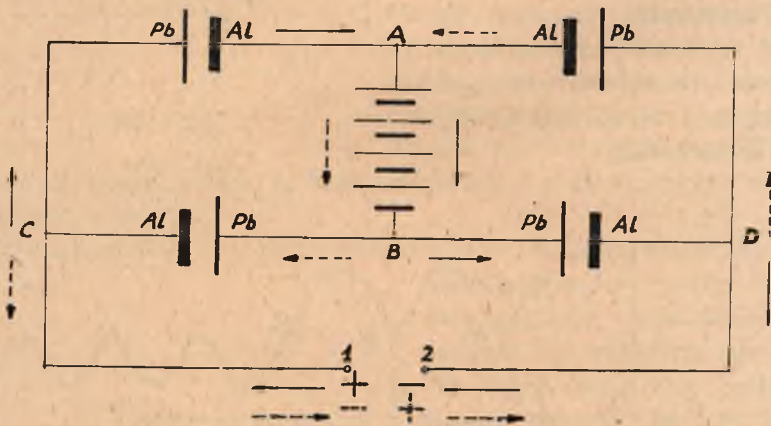
§ 42
PROSTOWNIK ELEKTROLITYCZNY

Prostownik elektrolityczny albo aluminiowy oparty jest na izolacyjnych własnościach tlenków niektórych metali, np. Al_2O_3, i składa się z jednego lub kilku ogniw; każde ogniwo zawiera dwie elektrody: aluminiową i ołowianą, zanurzone w naczyniu z wodnym rozczynem kwasu siarkowego lub jeszcze lepiej — zwyczajnej sody (rys. 116). Gdy połączymy następnie elektrodę Al z anodą, zaś elektrodę Pb z katodą, wtedy na anodzie wydziela się tlen i tworzy się warstwa Al_2O_3, która posiada własności izolacyjne i w pewnym stopniu przy niewielkim napięciu nie przepuszcza prądu.



Rys. 116

Gdy przyłączymy obie elektrody do źródła prądu zmiennego, powstanie zjawisko następujące: w ciągu połowy okresu, gdy elektroda aluminiowa połączona jest z biegunem ujemnym, prąd będzie przepływał, gdy zaś w drugiej połowie okresu elektroda ta będzie połączona z biegunem dodatnim — prąd będzie przerwany.



Rys. 117

W celu wyzyskania całego okresu prądu zmiennego obmyślił rodak nasz Pollak urządzenie, przedstawione schematycznie na rysunku 117.

Mamy cztery ogniwa połączone ze sobą, jak wskazano na rysunku. Możemy łatwo sprawdzić, że pomiędzy punktami A i B, gdzie włączony został odbiornik, np. akumulator, prąd będzie przepływał w jednym tylko kierunku, mianowicie od A do B. Rzeczywiście, gdy na zacisku 1 mamy biegun dodatni, prąd będzie płynął w kierunku wskazanym strzałkami ciągłymi do punktu *C*. W punkcie *C*, mając przed sobą dwie drogi, prąd popłynie, w myśl wyżej powiedzianego, przez elektrodę ołowianą, a zatem do punktu *A*. Z tego punktu *A* — mając znów dwie drogi przed sobą, popłynie on do punktu *B*, stąd zaś przez punkt *D* wróci do bieguna ujemnego na zacisku 2.

Zupełnie analogicznie wyznaczyć możemy drogę prądu w drugiej połowie okresu; wskazana jest ona na rysunku strzałkami przerywanymi.

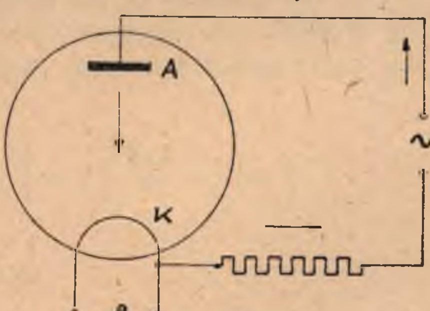
Widzimy zatem, że urządzenie powyższe pozwala na korzystanie z całego okresu prądu zmiennego.

Sprawność tego rodzaju prostowników jest mała (do 25%), zachodzą tu bowiem znaczne straty na ogrzewanie. Użyteczne są one przy niewielkich mocach, przy większych zaś stają się nieekonomiczne; można je stosować przy niskich napięciach; już nawet przy napięciu 120 V część prądu będzie przepływała również przez elektrodę aluminiową.

§ 43

PROSTOWNIK ELEKTRONOWY

Prostownik ten składa się z bańki szklanej, w której umieszczone są dwie elektrody: anoda z blaszki wolframowej i katoda z drucika wolframowego; wewnątrz bańki — próżnia. Katoda powinna być rozżarzona prądem albo z baterii ogniw, albo ze źródła prądu zmiennego przez odpowiedni transformator.



Rys. 118

Tego rodzaju układ, nazywany lampą prostowniczą lub kenotronem, może przepuszczać prąd tylko w jednym kierunku, mianowicie wewnątrz lampy od anody do katody; prąd zewnętrzny będzie płynął od katody do anody.

Na rys. 118 wskazany jest kierunek prądu, który powstanie, gdy lampa prostownicza będzie włączona do sieci prądu zmiennego.

A oznacza anodę, *K* — katodę, *B* oznacza źródło prądu żarzenia. W takim obwodzie powstanie prąd jednokierunkowy, przerywany na przeciąg połowy okresu. Ażeby wykorzystać obie połowy okresu prądu zmiennego, można zastosować dwie lampy prostownicze, odpowiednio je włączając, lub też używać lampy z dwiema anodami, podobnie jak w prostowniku rtęciowym.

Spadek napięcia w takiej lampie jest znaczny; używa się ich do wysokich napięć i słabych prądów.

Oprócz lamp prostowniczych próżniowych istnieją również lampy wypełnione wewnątrz argonem o małym ciśnieniu (kilka centymerów). W takich lampach otrzymuje się mniejszy spadek napięcia; używa się ich do napięć niskich i prądów silniejszych, np. do ładowania akumulatorów. Wytwarza się je tak samo jak lampy próżniowe z jedną lub z dwiema anodami.

§ 44
PROSTOWNIK TLENKOWY

Prostownik tlenkowy lub kuprytowy składa się z płytki miedzianej pokrytej cienką warstwą tlenku miedzi; na tę płytkę nałożona jest płytka ołowiana i obie te płytki są mocno ściśnięte izolowaną śrubą. Działanie tego prostownika oparte jest na tym, że prąd, płynąc w kierunku od ołowiu do miedzi, napotyka w kontakcie opór znacznie mniejszy, niż prąd płynący w kierunku od miedzi do ołowiu. Prostownika tego używa się przeważnie do niskich napięć i niewielkich prądów.

R O Z D Z I A Ł Ó S M Y

PRĄDY ODKSZTAŁCONE

§ 45

SZEREG FOURIERA

Prądy zmienne spotykane w praktyce — nie mają przebiegu dokładnie sinusoidalnego, chociaż stanowią funkcje okresowo zmienne w czasie, czasem odbiegają nawet znacznie od takiego przebiegu. Prądy tego rodzaju będziemy nazywali *prądami odkształconymi*. Analizę ich najdogodniej oprzeć na rozkładaniu takich funkcji w szeregi Fouriera, gdyż w ten sposób sprowadzamy badanie prądów odkształconych do badania prądów sinusoidalnych. Przypomnijmy, na czym polega rozkładanie funkcyj w szeregi Fouriera.

Niech będzie $f(x)$, gdzie $x = \frac{2\pi t}{T}$, jednoznaczna funkcja czasu t, okresowo zmienna z okresem T; znaczy to, że wartości tej funkcji będą się powtarzały w odstępach czasu różniących się o okres T lub o całkowitą liczbę okresów. Oznaczając przez k dowolną liczbę całkowitą, możemy napisać

$$f\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = f\left[\frac{2\pi}{T}(t + kT)\right] = f\left(\frac{2\pi t}{T} + 2k\pi\right).$$

Zakładając $\frac{2\pi t}{T} = x$, otrzymamy

$$f(x) = f(x + 2k\pi),$$

czyli że wartości funkcji będą się powtarzały dla wartości x, różniących się o całkowitą liczbę 2π; w tym przypadku 2π, będzie okresem.

Według Fouriera

$$f(x) = A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + A_3 \cos 3x + \ldots + A_n \cos nx +$$
$$+ B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + B_3 \sin 3x + \ldots + B_n \sin nx =$$
$$= A_0 + \sum_{k=1}^{k=n} A_k \cos kx + \sum_{k=1}^{k=n} B_k \sin kx, \tag{1}$$

gdzie $A_0, A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n$ są wielkościami stałymi, n zaś może być liczbą skończoną lub nieskończoną.

Dla znalezienia stałej A_0 mnożymy obie strony wzoru (1) przez dx i całkujemy w granicach od 0 do 2π albo od dowolnej wartości x do $x + 2\pi$. W ten sposób otrzymamy

$$\int_0^{2\pi} f(x)\, dx = \int_0^{2\pi} A_0 dx + \ldots + \int_0^{2\pi} A_k \cos kx dx + \ldots + \int_0^{2\pi} B_k \sin kx dx + \ldots$$

Wszystkie całki określone postaci $\int_0^{2\pi} A_k \cos kx dx$ i $\int_0^{2\pi} B_k \sin kx\, dx$ są zerami, ponieważ ich całki nieokreślone $\frac{1}{k} \sin kx$ i $-\frac{1}{k} \cos kx$ mają tę samą wartość na początku i na końcu okresu. Zatem

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = \int_0^{2\pi} A_0 dx = A_0 \int_0^{2} dx = 2\pi A_0 ;$$

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx. \tag{2}$$

Dla znalezienia każdego ze spółczynników przy cosinusach mnożymy obie strony wzoru (1) przez $\cos kx$ i całkujemy jak poprzednio. Otrzymamy wtedy

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx = A_0 \int_0^{2\pi} \cos kx dx + \ldots + A_i \int_0^{2\pi} \cos ix \cos kx dx +$$
$$+ \ldots + A_k \int_0^{2\pi} \cos^2 kx\, dx + \ldots + B_i \int_0^{2\pi} \sin ix \cos kx\, dx + \ldots$$

Pierwsza całka jest zerem, cośmy już wyprowadzili poprzednio. Każda z całek typu

$$\int_0^{2\pi} \cos ix \cos kx dx; \quad (i \neq k) \quad \text{i} \quad \int_0^{2\pi} \sin ix \cos kx dx$$

jest również zerem, bo funkcja podcałkowa daje się zamienić na sumę dwóch funkcji trygonometrycznych, a tych całki w rozpatrywanych granicach są, jakeśmy już widzieli, zerami.

Otrzymujemy zatem

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx = A_k \int_0^{2\pi} \cos^2 kx dx.$$

Ale

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 kx\, dx = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2kx}{2} dx = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2} + \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2kx\, dx}{2} = \pi,$$

skąd

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx = A_k \pi;$$

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx. \tag{3}$$

Zupełnie tak samo, dla wyznaczenia każdego ze spółczynników przy sinusach, mnożymy obie strony wzoru (1) przez sin kx i całkujemy; wtedy

$$B_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx. \tag{4}$$

W szeregu Fouriera możemy połączyć sinusy i cosinusy, których argumenty są te same, pisząc jedną tylko funkcję sinusoidalną, zakładając

$$A_k \cos kx + B_k \sin kx = F_k \sin (kx + \psi_k),$$

$$F_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}; \qquad \operatorname{tg} \psi_k = \frac{A_k}{B_k}.$$

Na tej podstawie szereg Fouriera możemy podać w postaci

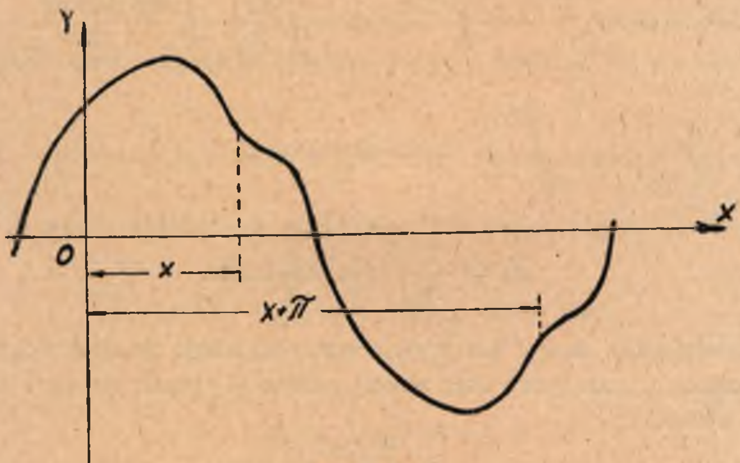
$$f(x) = A_0 + F_1 \sin (x + \psi_1) + F_2 \sin (2x + \psi_2) + \ldots + F_k \sin (kx + \psi_k). \tag{5}$$

Sinusoida $F_1 \sin(x + \psi_1)$ nazywa się *główną sinusoidą* albo *główną falą,* lub *pierwszą harmoniczną.* Inne sinusoidy noszą nazwę *wyższych harmonicznych* rozpatrywanej funkcji i, w zależności od wskaźnika wielokrotności argumentu głównej sinusoidy, mówimy w skróceniu druga, trzecia itd. harmoniczna.

§ 46

PRZYPADKI SZCZEGÓLNE

1) Krzywa stanowiąca wykres rozpatrywanej funkcji jest symetryczna względem osi X w ten sposób, że połowa fali znajdująca się pod osią X jest zwierciadlanym odbiciem połowy fali przebiegającej nad osią X, przesuniętym naprzód o π (rys. 119).



Rys. 119

W tym przypadku dla dwóch punktów krzywej, których odcięte różnią się o π, rzędne będą się różniły tylko znakami. To znaczy

$$f(x + \pi) = -f(x).$$

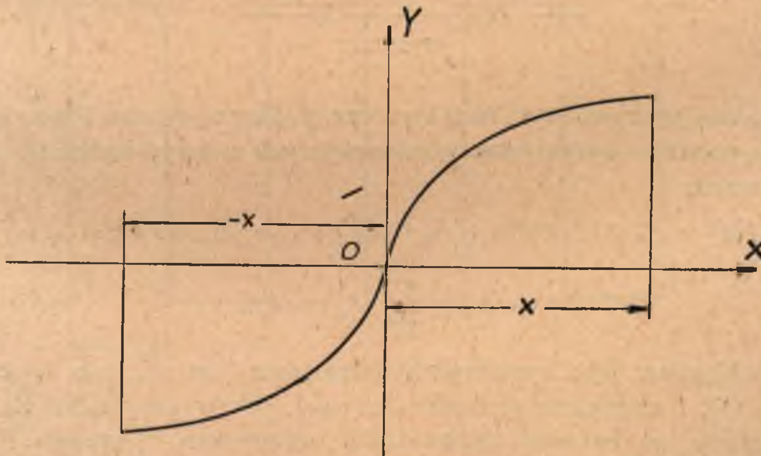
Aby temu zadośćuczynić, w szeregu F o u r i e r a nie powinno być stałej A_0, poza tym zginąć powinny wyrazy zawierające funkcje trygonometryczne od argumentów stanowiących parzyste wielokrotności x. Mogą pozostać tylko wyrazy z argumentami o nieparzystych wielokrotnościach x, gdyż tylko te wyrazy zmieniają znak przy zamianie x na $(x+\pi)$. Zatem w tym przypadku

$$f(x) = A_1 \cos x + A_3 \cos 3x + \ldots + A_{2k+1} \cos(2k+1)x + \ldots +$$
$$+ B_1 \sin x + B_3 \sin 3x + \ldots + B_{2k+1} \sin(2k+1)x + \ldots =$$
$$= \sum_{k=0}^{k=n} A_{2k+1} \cos(2k+1)x + \sum_{k=0}^{k=n} B_{2k+1} \sin(2k+1)x. \quad (6)$$

Przy wyznaczaniu spółczynników wystarczy całkowanie w granicach od 0 do π, gdzie funkcja ma ten sam znak, i pomnożenie rezultatów przez 2. W ten sposób

$$A_{2k+1} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(2k+1)x\,dx; \quad B_{2k+1} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(2k+1)x\,dx. \quad (7)$$

2) Krzywa jest symetryczna względem swego początku. Jeżeli początek osi spółrzędnych umieścimy w punkcie krzywej, gdzie rzędna równa jest zeru, to symetria będzie polegała na tym, że dwa punkty krzywej mające odcięte $+x$ i $-x$ będą miały rzędne o tej samej wartości, przy tym znaki tych rzędnych mogą być różne lub jednakowe; rozpatrzymy więc dwie możliwości:



Rys. 120

a) przy zamianie x na $-x$ znak rzędnych się zmienia, czyli

$$f(-x) = -f(x),$$

jak to ma miejsce np. dla krzywej na rys. 120.

W tym przypadku w szeregu Fouriera (1) nie powinno być stałej A_0 oraz wyrazów zawierających cosinusy; otrzymamy więc szereg w postaci

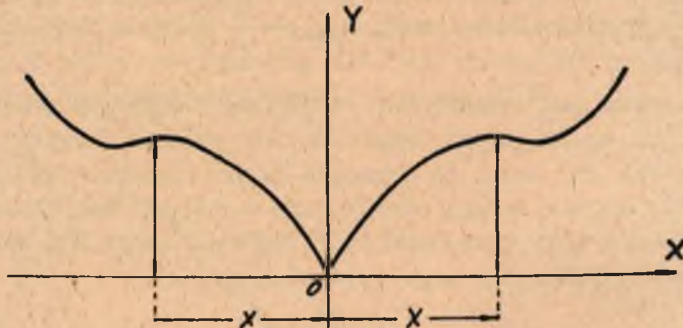
$$f(x) = B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + \ldots + B_k \sin kx + \ldots =$$

$$= \sum_{k=1}^{k=n} B_k \sin kx; \tag{8}$$

b) przy zamianie x na $-x$ znak rzędnych się nie zmienia, czyli

$$f(-x) = f(x),$$

jak to np. ma miejsce dla krzywej na rys. 121.



Rys. 121

Łatwo jest zauważyć, że w tym przypadku w szeregu Fouriera (1) nie powinno być wyrazów zawierających sinusy; będziemy więc mieli szereg

$$f(x) = A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \ldots + A_k \cos kx + \ldots =$$

$$= A_0 + \sum_{k=1}^{k=n} A_k \cos kx. \tag{9}$$

3) Krzywa jest symetryczna względem osi X, jak w przypadku (1), i względem początku krzywej, jak w przypadku 2a.

Wtedy, na zasadzie poprzednich rozumowań, w szeregu Fouriera mogą pozostać tylko wyrazy zawierające sinusy argumentów stanowiących nieparzyste wielokrotności x, czyli

$$f(x) = B_1 \sin x + B_3 \sin 3x + \ldots + B_{2k+1} \sin (2k+1)x + \ldots \tag{10}$$

Ponieważ w tym przypadku można podzielić krzywą odpowiadającą jednej fali na 4 jednakowe części o takim samym przebiegu więc przy obliczaniu spółczynników wystarczy całkowanie w granicach od 0 do $\frac{\pi}{2}$ i mnożenie rezultatu przez 4. W ten sposób

$$B_{2k+1} = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} f(x)\sin(2k+1)x\,dx. \tag{11}$$

§ 47

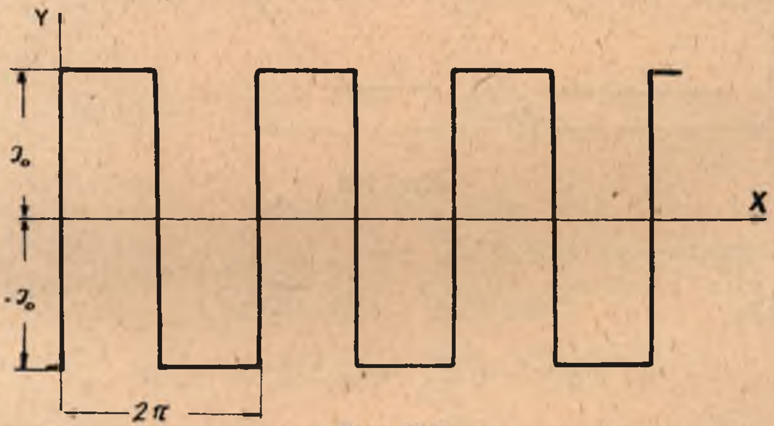
PRZYKŁADY

Przykład 1. Prąd o natężeniu stałym I_0 zmienia okresowo kierunek (rys. 122).

Zachodzi tu ostatnio rozpatrywany przypadek szczególny (3); stosujemy zatem wzory (10) i (11)

$$f(x) = B_1\sin x + B_3\sin 3x + \ldots + B_{2k+1}\sin(2k+1)x + \ldots;$$

$$B_{2k+1} = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin(2k+1)x\,dx; \qquad f(x) = I_0 = \text{const.}$$



Rys. 122

$$B_{2k+1} = \frac{4I_0}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2k+1)x\,dx = \frac{4I_0}{\pi(2k+1)}\Big| -\cos(2k+1)x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{4I_0}{\pi(2k+1)}\left[1 - \cos\frac{(2k+1)\pi}{2}\right];$$

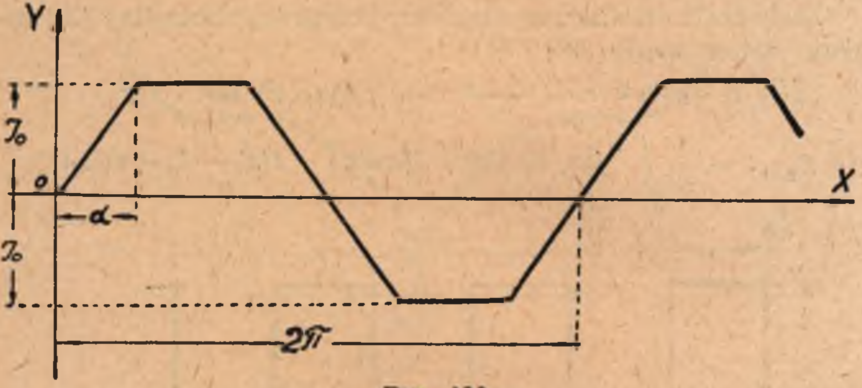
$$\cos\frac{(2k+1)\pi}{2} = 0; \qquad B_{2k+1} = \frac{4I_0}{\pi(2k+1)}.$$

Ostatecznie

$$f(x) = \frac{4I_0}{\pi}\left[\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{7}\sin 7x + \ldots\right].$$

Dana funkcja jest wypadkową nieskończonego szeregu sinusoid, których okresy i amplitudy maleją jak szereg naturalny liczb nieparzystych, a początek wszystkich jest wspólny. Główna fala ma amplitudę $\frac{4I_0}{\pi} \cong 1{,}3\, I_0$, trzecia harmoniczna $\frac{4I_0}{3\pi} \cong 0{,}4\, I_0$ itd.

Przykład 2. Funkcja zmienia się w sposób trapezoidalny (rys. 123) między wartościami $-I_0$ i $+I_0$. Mamy tu również przypadek szczególny trzeci.



Rys. 123

Rozpatrujemy ćwierć fali.

Dla $\quad 0 \leqslant x \leqslant a, \qquad f(x) = \frac{I_0}{a}x;$

$\qquad a \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, \qquad f(x) = I_0.$

$$f(x) = B_1 \sin x + B_3 \sin 3x + \ldots + B_{2k+1} \sin (2k+1)x + \ldots;$$

$$B_{2k+1} = \frac{4}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin (2k+1)x\,dx = \frac{4}{\pi}\int\limits_0^{a} f(x) \sin (2k+1)x\,dx +$$

$$+\frac{4}{\pi}\int\limits_a^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin (2k+1)x\,dx;$$

$$\int_0^a f(x) \sin (2k+1)x dx = \int_0^a \frac{I_0}{a} x \sin (2k+1)x\, dx =$$

$$= \frac{I_0}{(2k+1)^2 a} \int_0^a (2k+1)\, x \sin (2k+1)\, xd\, [(2k+1)x];$$

$$\int z \sin z\, dz = -z \cos z + \int \cos z\, dz = -z \cos z + \sin z;$$

$$\int_0^a (2k+1)x \sin (2k+1)xd\, [(2k+1)x] = \Big| -(2k+1)x \cos (2k+1)x +$$

$$+ \sin (2k+1)x \Big|_0^a = \sin (2k+1)\, a - (2k+1)\, a \cos (2k+1)\, a;$$

$$\int_0^a f(x) \sin (2k+1)x\, dx = \frac{I_0}{a}\left[\frac{\sin (2k+1)a}{(2k+1)^2} - \frac{a \cos (2k+1)a}{2k+1}\right];$$

$$\int_a^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin (2k+1)x\, dx = I_0 \int_a^{\frac{\pi}{2}} \sin (2k+1)x\, dx =$$

$$= \frac{I_0}{2k+1} \Big| -\cos (2k+1)\, x \Big|_a^{\frac{\pi}{2}} = \frac{I_0}{2k+1} \cos (2k+1)\, a,$$

gdyż

$$\cos (2k+1) \frac{\pi}{2} = 0;$$

$$B_{2k+1} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{I_0}{a}\left[\frac{\sin (2k+1)a}{(2k+1)^2} - \frac{a}{(2k+1)} \cos (2k+1)\, a\right] +$$

$$+ \frac{4}{\pi} \cdot \frac{I_0}{2k+1} \cos (2k+1)a = \frac{4 I_0}{\pi a} \cdot \frac{\sin (2k+1)\, a}{(2k+1)^2} -$$

$$- \frac{4 I_0}{\pi (2k+1)} \cos (2k+1)\, a + \frac{4 I_0}{\pi (2k+1)} \cos (2k+1)\, a =$$

$$= \frac{4}{\pi} \cdot \frac{I_0}{a} \frac{\sin (2k+1)\, a}{(2k+1)^2};$$

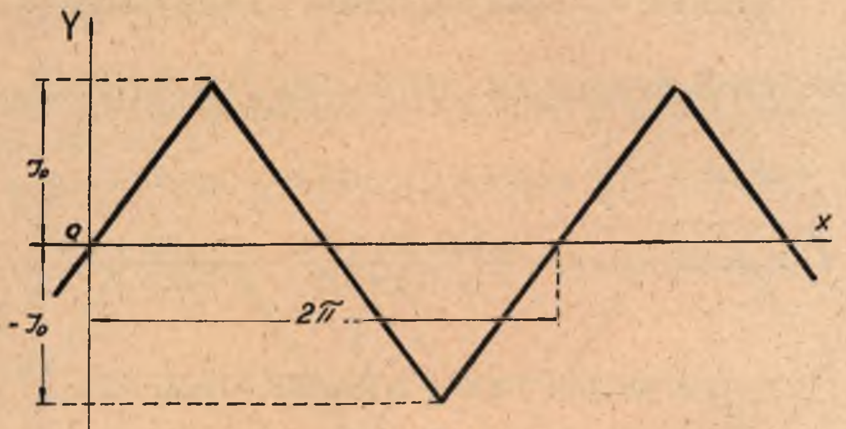
$$f(x) = \frac{4 I_0}{\pi a}\left\{\frac{\sin a \sin x}{1^2} + \frac{\sin 3a \sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5a \sin 5x}{5^2} + \ldots\right\} =$$

$$= \frac{4 I_0}{\pi a} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{\sin (2k+1)a \sin (2k+1)x}{(2k+1)^2}.$$

Przykład 3. Prąd wzrasta i maleje proporcjonalnie do czasu między stałymi wartościami $\pm I_0$ (rys. 124).

Jest to graniczny przypadek przykładu poprzedniego, gdy $a = \frac{\pi}{2}$. Z tego powodu, biorąc pod uwagę, że

$$\sin a = \sin\frac{\pi}{2} = 1, \quad \sin 3a = \sin\frac{3\pi}{2} = -1,$$



Rys. 124

$$\sin 5a = \sin\frac{5\pi}{2} = 1, \ \ldots \sin(4l+1)a = \sin(4l+1)\frac{\pi}{2} = 1,$$

$$\sin(4l+3)a = \sin(4l+3)\frac{\pi}{2} = -1,$$

będziemy mieli

$$f(x) = \frac{8I_0}{\pi^2}\left\{\frac{\sin x}{1^2} - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} - \frac{\sin 7x}{7^2} + \ldots\right\} =$$

$$= \frac{8I_0}{\pi^2}\sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k\frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^2}.$$

Przykład 4. Prąd zmienny sinusoidalny zmienia swój kierunek w drugiej połowie okresu, stając się w ten sposób prądem jednokierunkowym — tętniącym (rys. 125).

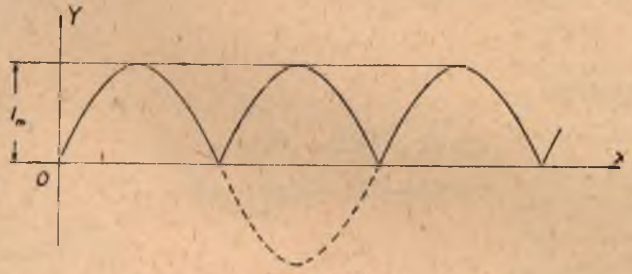
Mamy tu przypadek szczególny 2b, więc stosujemy wzór (9)

$$f(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{k=n} A_k \cos kx.$$

Rozpatrywana funkcja, mając wartość największą I_m, zmienia się od zera do I_m w sposób następujący:

w granicach od 0 do $\pi \ldots f(x) = I_m \sin x$,

„ „ „ π „ $2\pi \ldots f(x) = -I_m \sin x$.



Rys. 125

Obliczamy spółczynniki

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\pi} I_m \sin x\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} - I_m \sin x\, dx\right] =$$

$$= \frac{I_m}{2\pi}\left[\left| -\cos x\right|_0^{\pi} + \left| + \cos x\right|_{\pi}^{2\pi}\right] = \frac{2I_m}{\pi};$$

$$A_k = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} I_m \sin x \cos k x\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} - I_m \sin x \cos k x\, dx\right] =$$

$$= \frac{I_m}{\pi}\left\{\int_0^{\pi} \frac{1}{2}\left[\sin (k+1)x - \sin (k-1)x\right] dx -\right.$$

$$\left. - \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{2}\left[\sin (k+1)x - \sin (k-1)x\right] dx\right\} =$$

$$= \frac{I_m}{2\pi}\left[\left| -\frac{\cos (k+1)x}{k+1} + \frac{\cos (k-1)x}{k-1}\right|_0^{\pi} -\right.$$

$$\left. - \left| -\frac{\cos (k+1)x}{k+1} + \frac{\cos (k-1)x}{k-1}\right|_{\pi}^{2\pi}\right] =$$

$$= \frac{I_m}{2\pi}\left[\frac{-\cos (k+1)\pi}{k+1} + \frac{\cos (k-1)\pi}{k-1} + \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k-1} +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k-1} - \frac{\cos (k+1)\pi}{k+1} + \frac{\cos (k-1)\pi}{k-1}\right] =$$

$$= \frac{I_m}{\pi}\left[\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k-1} - \frac{\cos (k+1)\pi}{k+1} + \frac{\cos (k-1)\pi}{k-1}\right];$$

dla k nieparzystego

$$\cos(k+1)\pi = \cos(k-1)\pi = 1,$$

wtedy, co łatwo zauważyć,

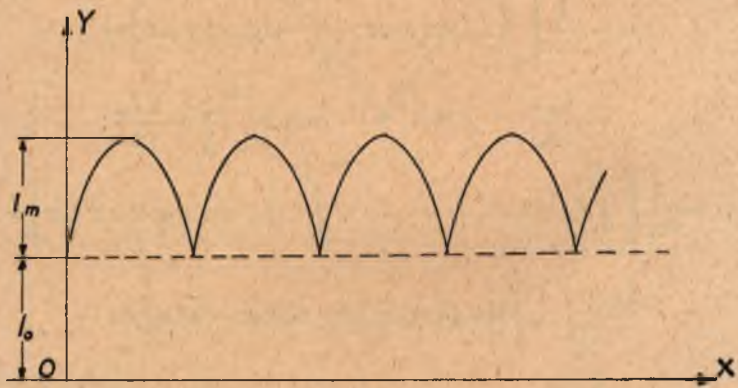
$$A_k = 0;$$

dla k parzystego

$$\cos(k+1)\pi = \cos\pi = -1,$$
$$\cos(k-1)\pi = \cos(-\pi) = -1,$$

wtedy

$$A_k = \frac{I_m}{\pi}\left[\frac{2}{k+1} - \frac{2}{k-1}\right] = \frac{2\,I_m}{\pi}\cdot\frac{(k-1)-(k+1)}{(k+1)\,(k-1)} = -\frac{4\,I_m}{\pi}\cdot\frac{1}{k^2-1}.$$



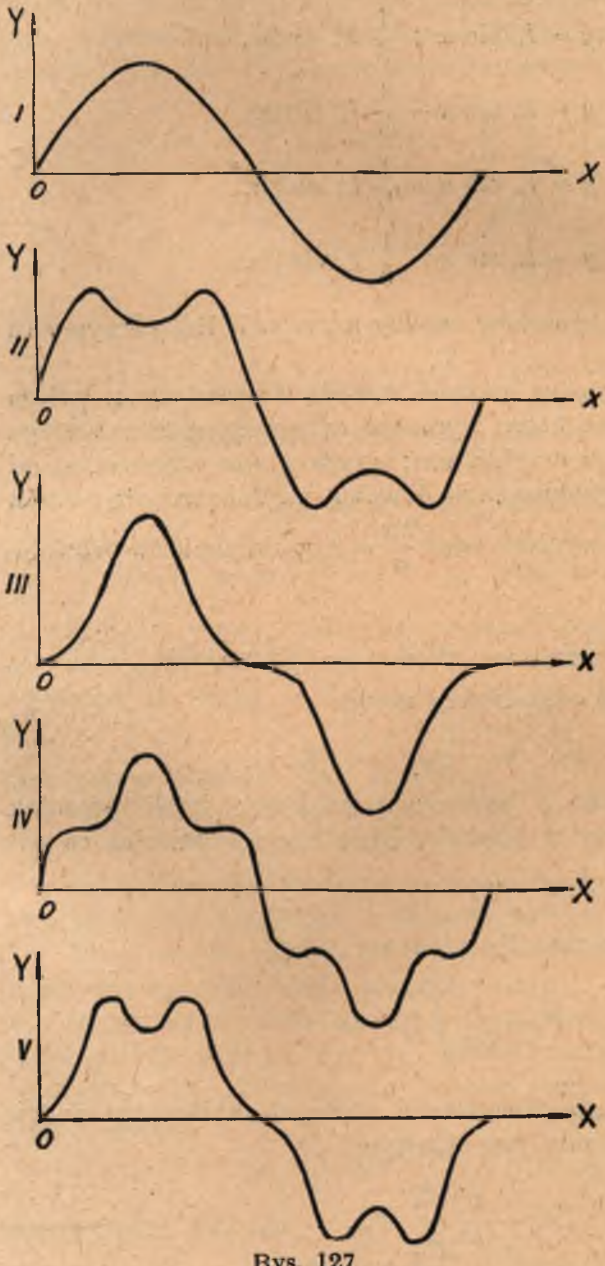
Rys. 126

Podstawiając wartości A_0 i A_k do wzoru na rozpatrywaną funkcję, otrzymamy

$$f(x) = \frac{2\,I_m}{\pi}\left[1 - \frac{2}{1\cdot3}\cos 2x - \frac{2}{3\cdot5}\cos 4x - \frac{2}{5\cdot7}\cos 6x - \ldots\right].$$

Jeżeli mamy prąd tętniący, którego wartości zmieniają się nie od 0 do I_m, lecz od I_0 do I_m, gdzie $I_0 > 0$ (rys. 126), wówczas dla znalezienia funkcji przedstawionej krzywą prądu trzeba tylko do poprzedniego wzoru dodać I_0.

§ 48
ANALIZA KRZYWYCH



Rys. 127

W rozpatrywanych przykładach wyższe harmoniczne wywierają coraz mniejszy wpływ na kształt krzywej, tak że uwzględniając tylko niewielką ilość harmonicznych, otrzymamy względnie znaczną dokładność. W praktyce uwzględniamy najczęściej harmoniczne do dziewiątej włącznie.

Bardzo ważny ze względu na kształt krzywej jest znak trzeciej harmonicznej; jeżeli jest dodatni, to krzywa ma wierzchołki stępione w stosunku do pierwszej harmonicznej, jeżeli jest ujemny, to wierzchołki są zaostrzone. Zupełnie odwrotnie wpływa znak piątej harmonicznej.

Na rys. 127 uwidoczniony jest wpływ tych harmonicznych na kształt krzywej.

Równania tych krzywych są następujące:

$$\text{I} \qquad y = I_m \sin x,$$

$$\text{II} \qquad y = I_m \sin x + \frac{1}{3} I_m \sin 3x,$$

$$\text{III} \qquad y = I_m \sin x - \frac{1}{3} I_m \sin 3x,$$

$$\text{IV} \qquad y = I_m \sin x + \frac{1}{5} I_m \sin 5x,$$

$$\text{V} \qquad y = I_m \sin x - \frac{1}{5} I_m \sin 5x.$$

Jest bardzo wiele sposobów analizy krzywych. Rozpatrzymy tu trzy metody.

Pierwsza, którą można nazwać metodą arytmetyczną, polega na tym, że całki, przez które wyrażone są spółczynniki w szeregu Fouriera, obliczamy w przybliżeniu; w tym celu na wykresie, na osi odciętych, dzielimy cały okres 2π na dowolną, zwykle parzystą liczbę n równych części; każda wyniesie więc $\frac{2\pi}{n} = \Delta x$; dla punktów podziału, których odcięte będą

$$0, \quad \Delta x, \quad 2\Delta x, \quad \ldots, \quad m\Delta x, \quad \ldots, \quad (n-1)\Delta x,$$

znajdujemy z wykresu odpowiednie rzędne

$$y_0, \quad y_1, \quad y_2 \ldots y_m, \quad \ldots, \quad y_{n-1};$$

rzędne te należy brać z właściwym znakiem; jeżeli początek spółrzędnych weźmiemy w punkcie, gdzie krzywa przecina oś odciętych, to

$$y_0 = 0.$$

Wyraz stały w szeregu Fouriera

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx$$

znajdujemy jako średnią powyższych rzędnych, zastępując w ten sposób wzór ścisły wzorem przybliżonym

$$A_0 = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{m=n-1} Y_m.$$

Na rozpatrywanym wykresie odcięte $m\Delta x$ odpowiadają w szeregu Fouriera odciętym x; rzędne y_m odpowiadają wartości $f(x)$; zamieniając we wzorach (3) i (4) (§ 45), dla przybliżonych obliczeń, całki przez odpowiednie sumy, otrzymamy dla współczynników przy cosinusach i sinusach k-tej harmonicznej w szeregu Fouriera (1) (§45):

$$A_k = \frac{1}{\pi}\sum_{x=0}^{x=2\pi} f(x)\cos kx = \frac{2}{n}\sum_{m=0}^{m=n-1} Y_m \cos km\,\Delta x,$$

$$B_k = \frac{1}{\pi}\sum_{x=0}^{x=2\pi} f(x)\sin kx = \frac{2}{n}\sum_{m=0}^{m=n-1} Y_m \sin km\,\Delta x$$

albo

$$A_k = \frac{2}{n}\Big[y_0 + y_1\cos k\frac{2\pi}{n} + y_2\cos 2k\frac{2\pi}{n} + \dots +$$
$$+ y_m \cos mk\frac{2\pi}{n} + \dots + y_{n-1}\cos(n-1)k\frac{2\pi}{n}\Big]; \qquad (12)$$

$$B_k = \frac{2}{n}\Big[y_1\sin k\frac{2\pi}{n} + y_2\sin 2k\frac{2\pi}{n} + \dots +$$
$$+ y_m \sin mk\frac{2\pi}{n} + \dots + y_{n-1}\sin(n-1)k\frac{2\pi}{n}\Big]. \qquad (13)$$

Mając te wzory, obliczymy współczynniki dowolnej harmonicznej; następnie znajdujemy wartość maksymalną poszukiwanej harmonicznej ze wzoru

$$F_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}$$

oraz kąt przesunięcia fazy ze wzoru

$$\operatorname{tg}\psi_k = \frac{A_k}{B_k}.$$

Im większa będzie liczba n punktów podziału jednego okresu, tym ściślejszy otrzymamy z obliczeń rezultat.

Druga metoda analizy krzywych, którą tu rozpatrzymy, stanowi wykreślny sposób podany przez Rothego.

Mając wykres badanej krzywej, postępujemy jak poprzednio: dzielimy cały okres na dowolną całkowitą liczbę, najlepiej parzystą, n równych części; znajdujemy z wykresu rzędne odpowiadające punktom podziału:

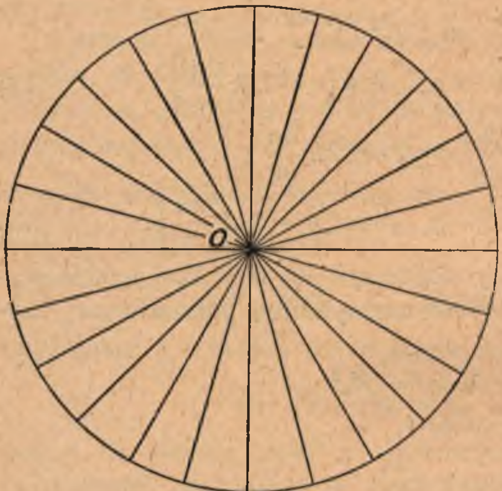
$$0,\ \frac{2\pi}{n},\ 2\cdot\frac{2\pi}{n},\ \dots,\ (n-1)\frac{2\pi}{n};$$

niech rzędne te będą:

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ \dots,\ y_{n-1}.$$

Robimy teraz następujący wykres: z dowolnego punktu jako środka przeprowadzamy promień podstawowy w dowolnym kierunku, np. poziomym, oraz $n-1$ promieni pod kątami $\frac{2\pi}{n}$, $2\cdot\frac{2\pi}{n}$, ..., $(n-1)\frac{2\pi}{n}$, odmierzonymi od promienia podstawowego. Na rys. 128 $n=24$, $\frac{2\pi}{n}=15°$.

Chcąc znaleźć wartość maksymalną dowolnej, np. k-tej, harmonicznej, odkładamy na przeprowadzonych promieniach pod kątami 0, $k\frac{2\pi}{n}$, $2k\frac{2\pi}{n}$, ..., $(n-1)\,k\frac{2\pi}{n}$ znalezione poprzednio rzędne y_0, y_1, ..., y_{n-1}, uwzględniając przy tym znaki tych rzędnych w taki sposób, że wartościom dodatnim dajemy kierunek od środka O, wartościom ujemnym zaś kierunek przeciwny. Otrzymane w ten sposób wektory dodajemy do siebie geometrycznie i sumę tę dzielimy przez $\frac{n}{2}$; rezultat daje nam wartość maksymalną k-tej harmonicznej.



Rys. 128

Rzeczywiście, suma geometryczna rozpatrywanych odcinków może być wyrażona symbolicznie w postaci

$$\hat{S}_k = y_0 + y_1 e^{jk\frac{2\pi}{n}} + y_2 e^{j2k\frac{2\pi}{n}} + \ldots + y_{n-1} e^{j(n-1)k\cdot\frac{2\pi}{n}}$$

albo

$$\hat{S}_k = y_0 + y_1 \cos k\frac{2\pi}{n} + y_2 \cos 2k\frac{2\pi}{n} + \ldots + y_{n-1} \cos (n-1)\,k\frac{2\pi}{n} +$$

$$+ j\left[y_1 \sin k\frac{2\pi}{n} + y_2 \sin 2k\frac{2\pi}{n} + \ldots + y_{n-1} \sin (n-1)\,k\frac{2\pi}{n}\right].$$

Uwzględniając wzory (12) i (13) widzimy, że część rzeczywista ostatniego wyrazu stanowi $\frac{n}{2} A_k$, część zaś urojona $\frac{n}{2} B_k$; wobec tego

$$\hat{S}_k = \frac{n}{2} (A_k + j B_k).$$

Oznaczając przez ψ_k kąt, który tworzy $\hat{S}_k$ z promieniem podstawowym, będziemy mieli

$$S_k (\cos \psi_k + j \sin \psi_k) = \frac{n}{2} (A_k + j B_k).$$

Wartość maksymalna k-tej harmonicznej w szeregu podanym we wzorze (5) będzie

$$F_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2} = \frac{S_k}{\frac{n}{2}};$$

kąt przesunięcia fazy tej harmonicznej znajdujemy ze wzoru

$$\operatorname{tg} \psi_k = \frac{A_k}{B_k}.$$

A_k stanowi rzut znalezionej sumy $\hat{S}_k$ na oś odciętych (promień podstawowy), B_k — rzut tejże sumy na oś rzędnych (prostopadłą do promienia podstawowego).

Trzecią metodę, którą tu podajemy, stanowi sposób Fischer-Hinnena. Oparty on jest na następującym twierdzeniu: sumy

$$\sin x + \sin (x + a) + \sin (x + 2a) + \ldots + \sin [x + (p - 1) a],$$

$$\cos x + \cos (x + a) + \cos (x + 2a) + \ldots + \cos [x + (p - 1) a],$$

gdzie

$$a = \frac{2k\pi}{p},$$

przy czym k i p oznaczają liczby całkowite, są równe $p \sin x$, względnie $p \cos x$, jeżeli $\frac{k}{p}$ jest liczbą całkowitą, a równają się zeru, jeżeli $\frac{k}{p}$ jest ułamkiem. Ten ostatni przypadek był rozpatrzony w twierdzeniu o sumie wartości chwilowych wielkości układu wielofazowego symetrycznego w § 23, pozostaje więc do rozpatrzenia przypadek, gdy $\frac{k}{p}$ jest liczbą całkowitą.

Wówczas, zakładając $\frac{k}{p} = m$, gdzie m jest liczbą całkowitą, będziemy mieli $a = \frac{2k\pi}{p} = 2m\pi$ i rozpatrywana suma sinusów będzie

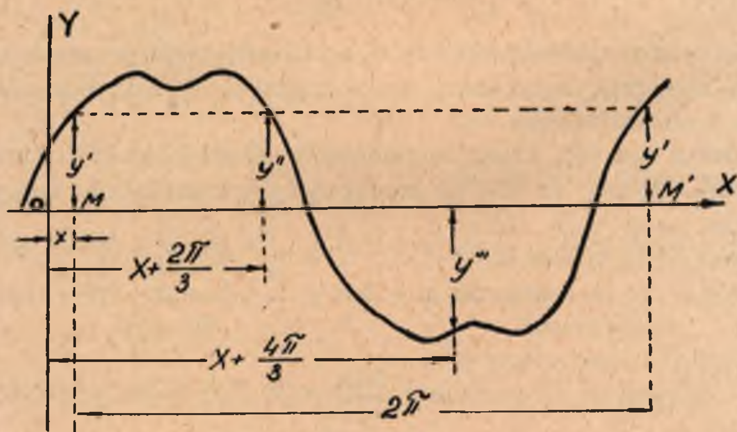
$$\sin x + \sin (x + 2m\pi) + \sin (x + 4m\pi) + \ldots + \sin [x + \\ + (p - 1)\, 2m\pi] = \sin x + \sin x + \sin x + \ldots + \sin x = p \sin x;$$

w sposób analogiczny znajdziemy, że suma cosinusów równa się $p \cos x$.

Sposób Fischer-Hinnena rozpatrzymy najpierw w przypadku, gdy krzywa jest symetryczna względem osi odciętych (rys. 129); wtedy szereg Fouriera posiada, jak wiadomo, tylko nieparzyste harmoniczne; według wzoru (6)

$$f(x) = A_1 \cos x + B_1 \sin x + A_3 \cos 3x + B_3 \sin 3x + \ldots = \\ = \sum_{k=0}^{k=n} \Big[A_{2k+1} \cos (2k + 1)x + B_{2k+1} \sin (2k + 1)\, x \Big]. \qquad (14)$$

Ograniczymy liczbę harmonicznych do dziewiątej włącznie.



Rys. 129

Najpierw wybieramy początek osi współrzędnych w dowolnym punkcie O na osi X (osi symetrii rozpatrywanej krzywej). Przypuśćmy, że od dowolnego punktu M na osi X, którego odcięta jest x, odłożymy na tejże osi $MM' = 2\pi$; niech rzędna krzywej odpowiadająca punktowi M będzie y', wtedy

$$A_1 \cos x + B_1 \sin x + A_3 \cos 3x + B_3 \sin 3x + \ldots + \\ + A_9 \cos 9x + B_9 \sin 9x = y'. \qquad (15)$$

Podzielmy MM' na 3 równe części i niech y', y'', y''' oznaczają rzędne w punktach podziału, których odcięte stanowią x, $x+a$, $x+2a$, gdzie $a=\frac{2\pi}{3}$. Te same wartości rzędnych musimy otrzymać, zakładając we wzorze (14) zamiast x kolejno x, $x+a$, $x+2a$. Oznaczając sumę

$$y'+y''+y'''=S_3,$$

będziemy mieli

$$A_1[\cos x+\cos(x+a)+\cos(x+2a)]+B_1[\sin x+\sin(x+a)+ \\ +\sin(x+2a)]+A_3[\cos 3x+\cos(3x+3a)+\cos(3x+6a)]+ \\ +B_3[\sin 3x+\sin(3x+3a)+\sin(3x+6a)]+\ldots+ \\ +A_9[\cos 9x+\cos(9x+9a)+\cos(9x+18a)]+B_9[\sin 9x+ \\ +\sin(9x+9a)+\sin(9x+18a)]=S_3.$$

Na podstawie poprzednio wyprowadzonego twierdzenia, dla

$a=\frac{2\pi}{3}$ otrzymamy

$$3A_3\cos 3x+3B_3\sin 3x+3A_9\cos 9x+3B_9\sin 9x=S_3. \quad (16)$$

Następnie dzielimy ten sam odcinek MM' na 5 równych części, odmierzamy rzędne w punktach podziału x, $x+a$, $x+2a$, $x+3a$, $x+4a$, gdzie $a=\frac{2\pi}{5}$. Korzystając z wzoru (14) i biorąc sumę rzędnych, którą oznaczymy przez S_5, otrzymamy jak poprzednio

$$5A_5\cos 5x+5B_5\sin 5x=S_5. \quad (17)$$

Dzieląc następnie MM' na 7, a wreszcie na 9 równych części, otrzymamy

$$7A_7\cos 7x+7B_7\sin 7x=S_7, \quad (18)$$

$$9A_9\cos 9x+9B_9\sin 9x=S_9, \quad (19)$$

gdzie S_7 i S_9 oznaczają sumy siedmiu i dziewięciu rzędnych w odpowiednich punktach podziału.

Pięć wzorów 15, 16, 17, 18 i 19 zawiera 10 niewiadomych spółczynników A i B, dla znalezienia których potrzeba 10 niezależnych od siebie równań. Równania te możemy z łatwością ułożyć, przeprowadzając obliczenia dla dwóch rozmaitych wartości x; w tym przypadku najdogodniej założyć najpierw $x=0$, następnie $x=\frac{\pi}{2}$. Jeżeli dla $x=0$ oznaczymy rzędną przez y_1, zaś sumy S_3, S_5, S_7, S_9

odpowiednio przez y_3, y_5, y_7, y_9; następnie dla $x = \frac{\pi}{2}$ oznaczymy rzędną przez y_1' i sumy odpowiednio przez y_3', y_5', y_7', y_9', wtedy z powyższych wzorów otrzymamy dla $x = 0$

$$\begin{aligned} A_1 + A_3 + A_5 + A_7 + A_9 &= y_1, \\ 3A_3 + 3A_9 &= y_3, \\ 5A_5 &= y_5, \\ 7A_7 &= y_7, \\ 9A_9 &= y_9, \end{aligned}$$

dla $x = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} B_1 - B_3 + B_5 - B_7 + B_9 &= y_1', \\ -3B_3 + 3B_9 &= y_3', \\ 5B_5 &= y_5', \\ -7B_7 &= y_7', \\ 9B_9 &= y_9', \end{aligned}$$

skąd od razu znajdujemy wartości poszukiwanych współczynników.

Sposób postępowania w przypadku krzywej symetrycznej względem osi odciętych będzie więc następujący: bierzemy dowolny punkt na osi X jako początek współrzędnych; od tego punktu ($x = 0$) odkładamy na osi X odcinek równy 2π, odpowiadający jednemu okresowi; odmierzamy rzędną krzywej na początku współrzędnych y_1; następnie dzielimy odcinek kolejno na 3, 5, 7 i 9 równych części, odmierzając za każdym razem odpowiednie rzędne i sumując je przy uwzględnieniu znaków tych rzędnych; w ten sposób znajdujemy y_3, y_5, y_7, y_9; następnie przesuwamy się na osi X od początku współrzędnych o $^1/_4$ okresu $\left(x = \frac{\pi}{2}\right)$ i postępujemy w sposób analogiczny, wyznaczając y_1', y_3', y_5', y_7', y_9'. Znalezione wartości podstawiamy do układu równań i rozwiązujemy te równania; obliczone wartości współczynników A i B podstawiamy do wzoru (14), który określi badaną krzywą.

W przypadku ogólnym, gdy badana krzywa nie wykazuje symetrii, musimy przede wszystkim stwierdzić, czy szereg Fouriera (1), określający poszukiwaną funkcję, zawiera stałą A_0, którą się oblicza ze wzoru (2)

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} y\,dx;$$

wyraz ten stanowi średnią rzędną wszystkich punktów krzywej, zawartych pomiędzy $x = 0$ i $x = 2\pi$, a więc w granicach całego okresu; ponieważ w jednej części okresu rzędne są dodatnie, w drugiej ujemne, przeto w rezultacie dla ogólnej średniej otrzymamy albo wielkość dodatnią, albo wielkość ujemną, albo zero. Praktycznie taką średnią możemy znaleźć dzieląc okres od dowolnego punktu na osi X (np. od $x = 0$ do $x = 2\pi$) na mniejszą lub większą liczbę części, w zależności od stopnia odkształcenia krzywej; następnie odmierzamy wszystkie rzędne odpowiadające punktom podziału, obliczamy ich sumę z uwzględnieniem znaków, wreszcie dzielimy tę sumę przez liczbę rzędnych; otrzymany w ten sposób rezultat da nam A_0. Jeżeli A_0 nie będzie równe zeru (praktycznie — bliskie zeru), wtedy, przesuwając oś odciętych równolegle na odległość równą A_0 w stronę dodatnią lub ujemną, w zależności od znaku A_0 otrzymamy nowe osie współrzędnych, względem których odcięte krzywej pozostaną te same, wszystkie zaś rzędne będą zmniejszone o A_0. W ten sposób w nowym układzie współrzędnych w szeregu Fouriera pozbędziemy się wyrazu stałego.

Na rys. 130 pokazana jest taka krzywa niesymetryczna; w jednej połowie okresu, gdzie rzędne są dodatnie, mamy przebieg inny aniżeli w drugiej połowie, gdzie rzędne są ujemne; średnia wszystkich rzędnych odpowiadających jednemu okresowi wynosi $OO' = A_0$; wypadła ona w tym przypadku dodatnia. Po przeniesieniu osi OX do położenia $O'X'$ otrzymujemy nowy układ współrzędnych $O'X'$, $O'Y$, względem którego rozpatrywana krzywa określona będzie szeregiem Fouriera, zawierającym wyłącznie cosinusy i sinusy.

Znalezienie średniej rzędnej, czyli A_0, może być uskutecznione jeszcze lepiej za pomocą planimetru (przyrządu do określenia pola powierzchni). Rozpatrując bowiem wyraz

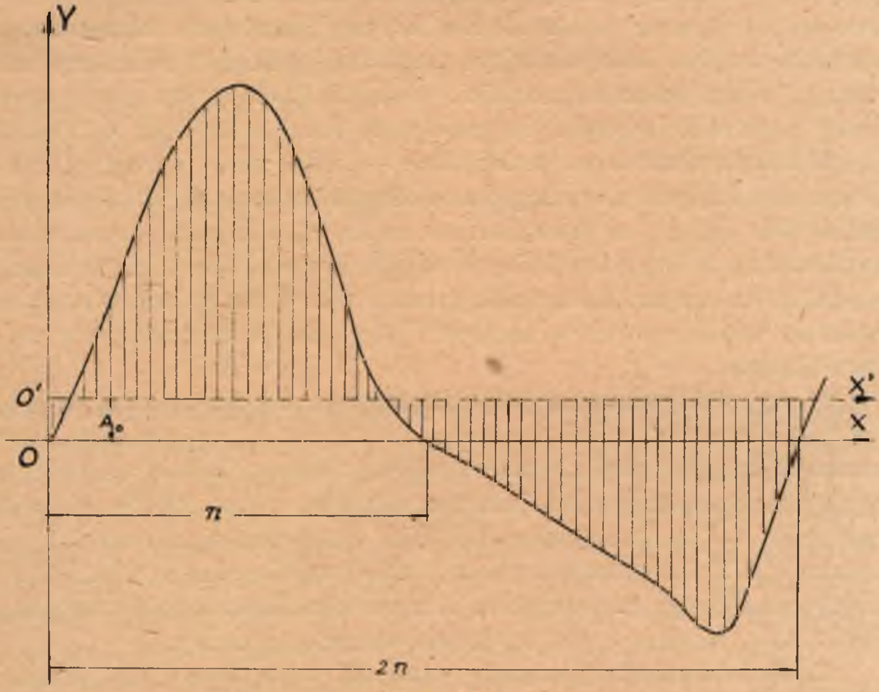
$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} y\,dx$$

i biorąc początek spółrzędnych ($x = 0$) w punkcie przecięcia się krzywej z osią X, od którego zaczynając rzędne krzywej przyjmują wartości dodatnie, będziemy mieli

$$\int_0^{2\pi} y\,dx = \int_0^{\pi} y\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} y\,dx = S_1 - S_2,$$

gdzie S_1 oznacza pole powierzchni zawartej pomiędzy krzywą i osią X

w granicach $x = 0$ i $x = \pi$, zaś S_2 — pole powierzchni ograniczonej krzywą i osią X w granicach $x = \pi$ i $x = 2\pi$; wyraz S_2 wzięty ze znakiem —, ponieważ w rozpatrywanych tutaj granicach wszystkie rzędne krzywej będą ujemne. Jeżeli więc za pomocą planimetru określimy pola S_1 i S_2, to dla znalezienia A_0 trzeba różnicę tych wartości podzielić przez 2π. Jasne jest, że po przesunięciu osi X do



Rys. 130

położenia $O'X'$ pola powierzchni odpowiadające dodatnim i ujemnym rzędnym krzywej będą sobie równe; na rys. 130 pola te są zakreskowane.

Przystępując do analizy krzywej nie zawierającej w szeregu Fouriera stałej A_0, musimy znaleźć współczynniki przy cosinusach i sinusach wszystkich harmonicznych, zarówno nieparzystych jak i parzystych. Ograniczymy i w tym przypadku liczbę harmonicznych do dziewiątej włącznie. Ustaliwszy w dowolnym punkcie na osi odciętych początek osi współrzędnych, odkładamy od dowolnego punktu na tej osi z odciętą x odcinek równy 2π. Odcinek ten dzielimy kolejno na 2, 3, 4...9 równych części, odmierzamy rzędne krzywej w punktach podziału i obliczamy odpowiednie sumy rzędnych z uwzględnieniem znaków rzędnych. Oznaczając przez S_1 rzędną krzywej dla odciętej x, zaś przez S_2, $S_3 \ldots S_4$ sumy rzędnych odpowiadających 2, 3...9 działkom, otrzymamy, rozumując tak samo jak w poprzednio rozpatrzonym przypadku, następujące wzory:

$$A_1 \cos x + B_1 \sin x + A_2 \cos 2x + B_2 \sin 2x + \ldots + A_9 \cos 9x + \\ + B_9 \sin 9x = S_1,$$

$$2A_2 \cos 2x + 2B_2 \sin 2x + 2A_4 \cos 4x + 2B_4 \sin 4x + \\ + 2A_6 \cos 6x + 2B_6 \sin 6x + 2A_8 \cos 8x + 2B_8 \sin 8x = S_2,$$

$$3A_3 \cos 3x + 3B_3 \sin 3x + 3A_6 \cos 6x + \\ + 3B_6 \sin 6x + 3A_9 \cos 9x + 3B_9 \sin 9x = S_3,$$

$$4A_4 \cos 4x + 4B_4 \sin 4x + 4A_8 \cos_8 x + 4B_8 \sin 8x = S_4,$$

$$5A_5 \cos 5x + 5B_5 \sin 5x = S_5,$$

$$6A_6 \cos 6x + 6B_6 \sin 6x = S_6,$$

$$7A_7 \cos 7x + 7B_7 \sin 7x = \mathrm{S}_7,$$

$$8A_8 \cos 8x + 8B_8 \sin 8x = S_8,$$

$$9A_9 \cos 9x + 9B_9 \sin 9x = S_9.$$

Dla znalezienia współczynników A i B musimy ułożyć 18 równań niezależnych. Najpierw bierzemy $x = 0$, to znaczy wybieramy pierwszy punkt podziału w początku współrzędnych; oznaczając rzędną krzywej w tym punkcie przez y_1, sumy rzędnych zaś przy kolejnych dzieleniach w tym przypadku przez y_2, y_3, ..., y_9, otrzymamy z powyższych wzorów:

$$A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_9 = y_1,$$

$$A_2 + A_4 + A_6 + A_8 = \frac{y_2}{2},$$

$$A_3 + A_6 + A_9 = \frac{y_3}{3},$$

$$A_4 + A_8 = \frac{y_4}{4},$$

$$A_5 = \frac{y_5}{5},$$

$$\mathrm{A}_6 = \frac{y_6}{6},$$

$$A_7 = \frac{y_7}{7},$$

$$A_8 = \frac{y_8}{8},$$

$$A_9 = \frac{y_9}{9},$$

skąd określamy wszystkie współczynniki A.

Dla znalezienia współczynników B musimy dać x jakąkolwiek inną wartość, ale taką, aby te współczynniki pozostały we wzorach, czyli aby żaden z sinusów nie stał się równym zeru (dla $x = \frac{\pi}{2}$, jak to czyniliśmy w poprzednim przypadku, zginęłyby we wzorach współczynniki B z parzystymi indeksami). Oczywiście, dogodniej jest dać dla x wartość taką, aby ona stanowiła π podzielone przez liczbę całkowitą większą niż 9, np. $\frac{\pi}{10}$ lub $\frac{\pi}{12}$. Odmierzając od nowego punktu odciętej odcinek równy 2π i postępując jak poprzednio, otrzymamy jeszcze 9 równań dla znalezienia współczynników B.

§ 49
NAKŁADANIE SIĘ PRĄDÓW ODKSZTAŁCONYCH

Wiadomo, że suma dwóch prądów sinusoidalnych o jednakowej częstotliwości jest również prądem sinusoidalnym o tej samej częstotliwości. Oznaczmy wartości chwilowe dwóch prądów przez i_1 i i_2, ich amplitudy przez I_{1m} i I_{2m}, kąty przesunięcia faz tych prądów względem wspólnego napięcia przez φ_1 i φ_2. Prąd wypadkowy stanowiący ich sumę niech ma wartość chwilową i oraz amplitudę I_m; kąt przesunięcia fazy tego prądu wypadkowego względem napięcia oznaczmy przez ψ, zaś pulsację prądów — przez ω. Wtedy mamy

$$i_1 = I_{1m} \sin(\omega t + \varphi_1), \qquad i_2 = I_{2m} \sin(\omega t + \varphi_2);$$

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi); \qquad i = i_1 + i_2.$$

Następnie

$$I_{1m} \sin(\omega t + \varphi_1) + I_{2m} \sin(\omega t + \varphi_2) = I_m \sin(\omega t + \psi);$$

$$I_{1m} \cos\varphi_1 \sin\omega t + I_{2m} \cos\varphi_2 \sin\omega t + I_{1m} \sin\varphi_1 \cos\omega t +$$
$$+ I_{2m} \sin\varphi_2 \cos\omega t = I_m \sin\omega t \cos\psi + I_m \cos\omega t \sin\psi.$$

Stąd

$$(I_{1m}\cos\varphi_1 + I_{2m}\cos\varphi_2 - I_m\cos\psi)\sin\omega t +$$
$$+ (I_{1m}\sin\varphi_1 + I_{2m}\sin\varphi_2 - I_m\sin\psi)\cos\omega t = 0.$$

Ponieważ równość ta zachodzi dla wszystkich wartości t, więc powinno być

$$I_{1m}\cos\varphi_1 + I_{2m}\cos\varphi_2 - I_m\cos\psi = 0;$$
$$I_{1m}\sin\varphi_1 + I_{2m}\sin\varphi_2 - I_m\sin\psi = 0,$$

skąd

$$I_m\cos\psi = I_{1m}\cos\varphi_1 + I_{2m}\cos\varphi_2; \quad I_m\sin\psi = I_{1m}\sin\varphi_1 + I_{2m}\sin\varphi_2.$$

Podnosząc oba ostatnie równania do kwadratu i dodając stronami, znajdziemy

$$I^2_m = I_1{}^2_m + 2I_{1m}I_{2m}\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + I_2{}^2_m,$$

skąd

$$I_m = \sqrt{I_{1m}{}^2 + 2I_{1m}I_{2m}\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + I_2{}^2_m};$$

dzieląc zaś drugie równanie przez pierwsze, otrzymamy

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{I_{1m}\sin\varphi_1 + I_{2m}\sin\varphi_2}{I_{1m}\cos\varphi_1 + I_{2m}\cos\varphi_2}.$$

W ten sposób znaleźliśmy amplitudę i kąt przesunięcia fazy prądu wypadkowego.

Jeżeli amplitudy prądów składowych są jednakowe

$$I_{1m} = I_{2m}, \quad \text{wtedy}$$

$$I_m = \sqrt{2I_1{}^2_m + 2I_1{}^2_m\cos(\varphi_1 - \varphi_2)} = I_{1m}\sqrt{2[1 + \cos(\varphi_1 - \varphi_2)]} =$$
$$= 2I_{1m}\cos\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right);$$

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{I_{1m}(\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2)}{I_{1m}(\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2)} = \frac{2\sin\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\cos\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}}{2\cos\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\cos\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}.$$

Ponieważ kąty φ_1 i φ_2 zawarte są w granicach $\pm 90°$, przeto kąt ψ nie może przekroczyć $\pm 90°$, wobec czego

$$\psi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}.$$

Zanim rozpatrzymy nakładanie się dwóch jednakowych prądów odkształconych, wyjaśnimy następujące zagadnienie. Mając dwie jednakowe krzywe odkształcone, dające wykresy dwóch funkcji okresowo zmiennych, przesuniętych względem siebie w fazie o kąt α, i biorąc na pierwszej krzywej dowolny punkt z odciętą x, będziemy mieli na drugiej krzywej odpowiedni punkt z odciętą $x - \alpha$; wówczas dla rzędnych tych punktów, czyli dla $f(x)$ i $f(x-\alpha)$, które oznaczymy przez y_1 i y_2, stosując szereg F o u r i e r a w postaci wzoru (5) z § 45, otrzymamy

$$y_1 = A_0 + F_1 \sin(x + \psi_1) + \ldots + F_k \sin(kx + \psi_k)$$

$$y_2 = A_0 + F_1 \sin(x - \alpha + \psi_1) + \ldots + F_k \sin[k(x-\alpha) + \psi_k] =$$

$$= A_0 + F_1 \sin(x + \psi_1 - \alpha) + \ldots + F_k \sin(kx + \psi_k - k\alpha).$$

Zakładając $x = \omega t$, będziemy mieli

$$y_1 = A_0 + F_1 \sin(\omega t + \psi_1) + \ldots + F_k \sin(k\omega t + \psi_k) \qquad (20)$$

$$y_2 = A_0 + F_1 \sin(\omega t + \psi_1 - \alpha) \ldots + F_k \sin(k\omega t + \psi_k - k\alpha). \qquad (21)$$

Z tych wzorów wynika, że dowolna k-ta harmoniczna drugiej funkcji jest przesunięta w fazie względem takiejże harmonicznej pierwszej funkcji o kąt $k\alpha$. We wzorach powyższych F_k stanowi wartość maksymalną k-tej harmonicznej. Łatwo można zauważyć, że gdy $k\alpha$ stanowi całkowitą wielokrotność 2π, wówczas k-te harmoniczne w obu funkcjach będą ze sobą w fazie.

Rozpatrzmy teraz dwa jednakowe prądy odkształcone, przesunięte względem siebie w fazie o kąt α; rozumiemy pod tym, że o kąt α są przesunięte względem siebie w fazie pierwsze harmoniczne; inne harmoniczne będą wówczas przesunięte w fazie o kąty 2α, 3α, $k\alpha$. Wartości maksymalne, względnie wartości skuteczne odpowiednich harmonicznych będą sobie równe.

Oznaczając przez i_{1k} oraz i_{2k} wartości chwilowe k-tej harmonicznej natężenia obu prądów, zaś przez I_{km} ich wartości maksymalne, będziemy mieli na podstawie poprzednich rozumowań

$$i_{1k} = I_{km} \sin(k\omega t + \varphi_k); \qquad i_{2k} = I_{km} \sin(k\omega t + \varphi_k - k\alpha),$$

gdzie φ_k oznacza kąt przesunięcia fazy względem tej samej harmonicznej napięcia.

Suma tych dwóch harmonicznych da nam sinusoidę o tej samej częstotliwości; wartość maksymalna I'_{km} i kąt przesunięcia fazy ψ_k tej sinusoidy będą na podstawie wyżej wyprowadzonych wzorów

$$I'_{km} = 2 I_{km} \cos \frac{k\alpha}{2}; \qquad \psi_k = \varphi_k - \frac{k\alpha}{2}.$$

będzie to więc harmoniczna prądu wypadkowego

$$i_k = i_{1k} + i_{2k} = 2 I_{km} \cos \frac{ka}{2} \sin \left(k\omega t - \frac{ka}{2} + \varphi_k \right).$$

W szczególnym przypadku harmoniczne prądów składowych mogą się znosić i prąd wypadkowy będzie wówczas pozbawiony odpowiedniej harmonicznej. Mianowicie, gdy

$$I'_{km} = 2 I_{km} \cos \frac{ka}{2} = 0, \quad \text{czyli} \quad \cos \frac{ka}{2} = 0, \quad k\frac{a}{2} = \left(2_m - 1\right)\frac{\pi}{2},$$

gdzie m oznacza liczbę całkowitą.

Odpowiednia harmoniczna prądu wypadkowego osiągnie największą wartość maksymalną, gdy

$$\cos \frac{ka}{2} = \pm 1; \quad \frac{ka}{2} = m\pi; \quad a = \frac{2m\pi}{k}.$$

§ 50

WSPÓŁCZYNNIK KSZTAŁTU I WSPÓŁCZYNNIK SZCZYTU

Współczynnikiem kształtu krzywej, przedstawiającej przebieg w czasie funkcji okresowo zmiennej nazywamy stosunek wartości skutecznej do wartości średniej rozpatrywanej funkcji:

$$s_k = \frac{Y}{Y_s}.$$

Wartość skuteczna jest określona wzorem

$$Y = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y^2\, dx},$$

wartość średnia zaś

$$Y_s = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y\, dx;$$

w przypadkach szczególnych, gdy mamy przebiegi symetryczne, rozpatrujemy tylko część krzywej, odpowiadającą $^1/_2$ lub $^1/_4$ okresu.

Współczynnikiem szczytu krzywej, przedstawiającej przebieg w czasie funkcji okresowo zmiennej, nazywamy stosunek wartości największej do wartości skutecznej tej funkcji:

$$s_s = \frac{Y_m}{Y}.$$

Określimy te współczynniki dla niektórych przebiegów:

a) *Sinusoida* (rozpatrujemy $^1/_4$ okresu).

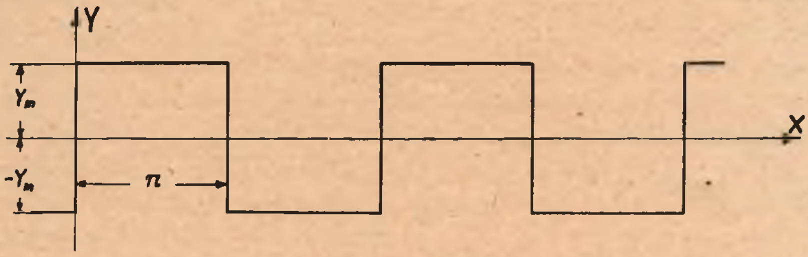
$$Y_s = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} y dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} Y_m \sin x dx = \frac{2}{\pi} Y_m \Big| -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} Y_m;$$

$$Y = \frac{Y_m}{\sqrt{2}};$$

$$s_k = \frac{Y}{Y_s} = \frac{\frac{Y_m}{\sqrt{2}}}{\frac{2}{\pi}\cdot Y_m} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \cong 1{,}11;$$

$$s_a = \frac{Y_m}{Y} = \frac{Y_m}{\frac{Y_m}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2} \cong 1{,}41.$$

b) *Przebieg prostokątny*, to jest funkcja zmieniająca się w ten sposób, że w ciągu każdego półokresu wartość funkcji jest stała, po czym zmienia znak, zachowując tę samą wartość bezwzględną (rys. 131).



Rys. 131

Łatwo zauważyć, że zarówno wartość skuteczna jak i wartość średnia są równe sobie i równe wartości największej rozpatrywanej funkcji:

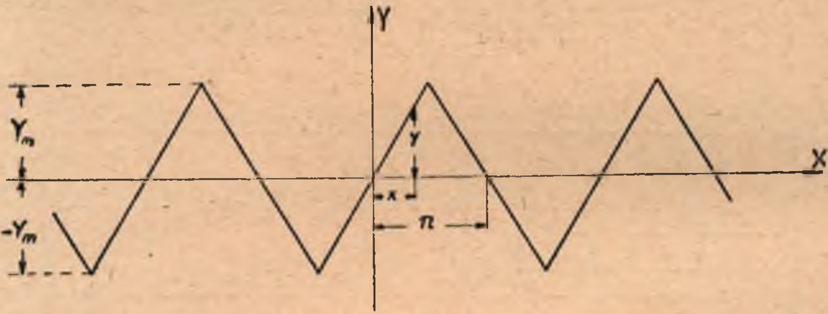
$$Y = Y_s = Y_m,$$

wobec tego

$$s_k = \frac{Y}{Y_s} = \frac{Y_m}{Y_m} = 1;$$

$$s_a = \frac{Y_m}{Y} = \frac{Y_m}{Y_m} = 1.$$

c) *Przebieg trójkątny.* Jest to funkcja zmieniająca się liniowo między dwiema wartościami. Przeprowadzamy oś X jako oś symetrii, wobec czego bezwzględne wartości największe będą sobie równe (rys. 132).



Rys. 132

Rozpatrujemy $^1/_4$ okresu.

$$y = Y_m \cdot \frac{x}{\frac{\pi}{2}} = Y_m \cdot \frac{2x}{\pi};$$

$$Y = \sqrt{\frac{1}{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} y^2 dx} = \sqrt{\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} Y_m^2 \cdot \frac{4x^2}{\pi^2}\, dx} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi} \cdot \frac{4}{\pi^2} \cdot Y_m^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\, dx} = \sqrt{\frac{8}{\pi^3} \cdot Y_m^2 \cdot \frac{\pi^3}{3 \cdot 8}} =$$

$$= \sqrt{\frac{Y_m^2}{3}} = \frac{Y_m\sqrt{3}}{3};$$

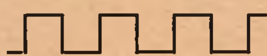
$$Y_s = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} y dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} Y_m \frac{2x}{\pi}\, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2}{\pi}\, Y_m \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\, dx =$$

$$= \frac{4}{\pi^2} \cdot Y_m \cdot \frac{\pi^2}{2 \cdot 4} = \frac{Y_m}{2};$$

$$s_k = \frac{Y}{Y_s} = \frac{\frac{Y_m}{3} \cdot \sqrt{3}}{\frac{Y_m}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{3} \cong 1{,}15;$$

$$s_a = \frac{Y_m}{Y} = \frac{Y_m}{\frac{Y_m}{3}\sqrt{3}} = \sqrt{3} \cong 1{,}73;$$

zestawiając, otrzymamy

Kształt funkcji	s_k	s_a
	1	1
sinusoida	$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \cong 1{,}11$	$\sqrt{2} \cong 1{,}41$
	$\frac{2}{3}\sqrt{3} \cong 1{,}15$	$\sqrt{3} \cong 1{,}73$

Zwracamy uwagę, że krzywa płaska ma współczynniki mniejsze, krzywa ostra większe niż sinusoida.

§ 51
WARTOŚĆ SKUTECZNA PRĄDU ODKSZTAŁCONEGO

Jak wiadomo, wartością skuteczną funkcji okresowo zmiennej nazywamy wyrażenie

$$Y = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} y^2\,dx}.$$

Dla prądu zmiennego odkształconego bez składowej stałej mamy

$$y = \sum_{k=1}^{k=n} (A_k \cos kx + B_k \sin kx).$$

Jeżeli tę sumę podniesiemy do kwadratu, otrzymamy sumę wyrazów następujących postaci:

$$A_k^2 \cos^2 kx; \quad 2A_k B_k \cos kx \sin kx; \quad B_k^2 \sin kx;$$
$$A_k A_l \cos kx \cos lx; \quad A_k B \cos kx \sin lx; \quad B_k B_l \sin kx \sin lx.$$

Całka sumy równa się sumie całek, więc pod pierwiastkiem otrzymamy sumę całek wyrazów tych postaci, wziętych w granicach od 0 do 2π. Ale

$$\int_0^{2\pi} \sin kx \cos kx\, dx = 0; \quad \int_0^{2\pi} \cos kx \cos lx\, dx = 0;$$

$$\int_0^{2\pi} \sin kx \sin lx\, dx = 0; \quad \int_0^{2\pi} \cos kx \sin lx\, dx = 0;$$

pozostaną zatem jedynie wyrażenia postaci

$$\int_0^{2\pi} A_k^2 \cos^2 kx\, dx = \pi A_k^2; \quad \int_0^{2\pi} B_k^2 \sin^2 kx\, dx = \pi B_k^2.$$

Wobec tego

$$Y = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} y^2\, dx} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\sum_{k=1}^{k=n}(A_k \cos kx + B_k \sin kx)\right]^2 dx} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{k=n}(\pi A_k^2 + \pi B_k^2)} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\pi\sum_{k=1}^{k=n}(A_k^2 + B_k^2)} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=n}(A_k^2 + B_k^2)}.$$

Szereg

$$y = \sum_{k=1}^{k=n}(A_k \cos kx + B_k \sin kx)$$

możemy też przedstawić w postaci

$$y = \sum_{k=1}^{k=n} F_k \sin (kx + \varphi_k).$$

gdzie

$$F_k^2 = A_k^2 + B_k^2; \quad \operatorname{tg} \varphi_k = \frac{A_k}{B_k}.$$

W ten sposób dla wartości skutecznej otrzymujemy

$$Y = \sqrt{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=n}(A_k^2 + B_k^2)} = \sqrt{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=n}F_k^2}.$$

Ale wartość skuteczna funkcji sinusoidalnej, a więc każdej harmonicznej funkcji odkształconej, równa się wartości maksymalnej tej harmonicznej podzielonej przez $\sqrt{2}$, czyli

$$Y_k = \frac{Y_{km}}{\sqrt{2}}; \qquad 2Y^2_k = Y^2_{km};$$

więc ostatecznie

$$Y = \sqrt{\frac{1}{2}\sum Y^2_{km}} = \sqrt{\frac{1}{2}\cdot 2\sum Y^2_k} = \sqrt{\sum Y^2_k}.$$

Wartość skuteczna funkcji odkształconej, okresowo zmiennej w czasie, równa się pierwiastkowi kwadratowemu z sumy kwadratów wartości skutecznych wszystkich harmonicznych tej funkcji.

Tak np. dla napięcia

$$U = \sqrt{\sum U^2_k} = \sqrt{U^2_1 + U^2_2 + U^2_3 + \ldots + U^2_n}; \tag{22}$$

dla prądu

$$I = \sqrt{\sum I_k^2} = \sqrt{I^2_1 + I^2_2 + I^2_3 + \ldots + I^2_n}. \tag{23}$$

Stosunek wartości skutecznej funkcji odkształconej do wartości skutecznej głównej fali stanowi współczynnik odkształcenia tej funkcji; oznaczając go przez s, mamy

$$s = \frac{Y}{Y_1} = \frac{\sqrt{Y^2_1 + Y^2_2 + \ldots + Y^2_n}}{Y_1}.$$

§ 52
OBWÓD PRĄDU ODKSZTAŁCONEGO

Rozpatrując część obwodu, w którym mamy napięcie $u = U_m \sin \omega t$ oraz w szereg połączone oporności: rzeczywistą, indukcyjną i pojemnościową, wiemy, że powstanie prąd ustalony o natężeniu

$$i = I_m \sin(\omega t - \varphi);$$

przy czym

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

W przypadku, gdy w takim obwodzie mamy napięcie o przebiegu odkształconym, rozumujemy w sposób następujący. Napięcie takie składa się z szeregu harmonicznych o przebiegu sinusoidalnym, o różnych amplitudach i częstotliwościach. Wobec niezależności prądów płynących w jednym obwodzie każda harmoniczna napięcia daje niezależnie od innych prąd o przebiegu sinusoidalnym o częstotliwości tej samej co powodujące go napięcie. Wszystkie te prądy, dodając się, tworzą prąd wypadkowy, odkształcony, przy czym poszczególne prądy będą harmonicznymi. Ponieważ częstotliwość harmonicznej rzędu k jest k razy większa od częstotliwości prądu pierwszej harmonicznej, więc

$$I_k = \frac{U_k}{\sqrt{R^2 + \left(k\omega L - \frac{1}{k\omega C}\right)^2}},$$

$$\operatorname{tg} \varphi_k = \frac{k\omega L - \frac{1}{k\omega C}}{R}.$$

Zbadajmy, jakie warunki muszą być spełnione, aby wpływy samoindukcji i pojemności znosiły się wzajemnie dla danej harmonicznej, czyli żeby dana harmoniczna dawała rezonans napięć. Będzie to wtedy, gdy

$$k\omega L - \frac{1}{k\omega C} = 0; \quad k\omega L = \frac{1}{k\omega C};$$

$$k^2\omega^2 LC = 1; \quad LC = \frac{1}{k^2\omega^2};$$

albo jeszcze

$$k = \frac{1}{\omega\sqrt{LC}}$$

lub

$$k = \frac{1}{2\pi f\sqrt{LC}}.$$

Widzimy, że rezonans może zachodzić wyłącznie dla jednej harmonicznej na raz, i to tylko wtedy, kiedy spełniony jest warunek

$$LC = \frac{1}{k^2\omega^2}.$$

Jeżeli dla danej harmonicznej zachodzi rezonans napięć, to dla tej harmonicznej oporność pozorna staje się najmniejszą i równą oporności rzeczywistej, a więc natężenie prądu tej harmonicznej będzie największe; inaczej, wpływ danej harmonicznej napięcia na prąd wypadkowy potęguje się. To zjawisko pozwala nam wyodrębniać w badaniu poszczególne harmoniczne napięcia.

Ze wzoru (24) możemy zbadać, jaki wpływ na kształt krzywej prądu odkształconego wywierają indukcyjność i pojemność. Mianowicie, jeżeli w obwodzie, w którym działa napięcie o przebiegu odkształconym, mamy oporność R i indukcyjność L w szeregowym połączeniu, wówczas natężenie prądu będzie miało również przebieg odkształcony, przy czym natężenie prądu harmonicznej rzędu k będzie na podstawie wzoru (24) równe

$$I_k = \frac{U_k}{\sqrt{R^2 + (k\omega L)^2}};$$

wynika stąd, że im większy wskaźnik k harmonicznej, tym mniejszy będzie prąd, to znaczy, że wpływ wyższych harmonicznych maleje, a więc natężenie prądu będzie miało przebieg mniej odkształcony niż napięcie, które ten prąd spowodowało. Indukcyjność tłumi wyższe harmoniczne prądu, zbliża więc krzywą prądu do sinusoidy.

Jeżeli zaś w obwodzie z napięciem odkształconym mamy oporność R i pojemność C w szeregowym połączeniu, wówczas natężenie prądu harmonicznej rzędu k wyrazi się wzorem

$$I_k = \frac{U_k}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{k\omega C}\right)^2}}.$$

Im większy wskaźnik k, tym mniejszy będzie mianownik w ostatnim wzorze, czyli tym większe będzie natężenie prądu harmonicznej, czyli wpływ wyższych harmonicznych staje się coraz większy; przebieg natężenia prądu będzie więcej odkształcony niż przebieg napięcia. Pojemność potęguje wyższe harmoniczne, oddala więc krzywą prądu od sinusoidy.

§ 53

MOC PRĄDU ODKSZTAŁCONEGO

Każda harmoniczna prądu odkształconego jako prąd sinusoidalny daje średnią moc za jeden okres, czyli tak zwaną moc czynną, równą iloczynowi napięcia przez natężenie prądu i przez współczynnik mocy, zależny od przesunięcia fazy prądu względem napięcia. Dla otrzymania mocy czynnej prądu odkształconego musimy wziąć sumę mocy czynnych wszystkich harmonicznych tego prądu. W ten sposób możemy napisać dla mocy czynnej P prądu odkształconego wzór następujący:

$$P = U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_2 I_2 \cos \varphi_2 + \ldots + U_n I_n \cos \varphi_n.$$

Rozpatrzmy prąd sinusoidalny, którego napięcie i natężenie mają wartości skuteczne U i I, zupełnie takie same jak wartości skuteczne napięcia i natężenia prądu odkształconego; na podstawie wzorów (22) i (23) znaczy to, że

$$U = \sqrt{U^2_1 + U^2_2 + \ldots + U^2_n}, \tag{25}$$

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + \ldots + I_n^2}. \tag{26}$$

Niech natężenie prądu I będzie przesunięte względem napięcia U o kąt φ, dobrany w ten sposób, aby moc tego prądu sinusoidalnego wypadła taka sama jak dla prądu odkształconego; wtedy będziemy mieli

$$P = UI \cos \varphi = U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_2 I_2 \cos \varphi_2 + \ldots + U_n I_n \cos \varphi_n. \tag{27}$$

Taki umyślony prąd sinusoidalny, którego napięcie i natężenie mają te same wartości skuteczne co i prąd odkształcony i którego moc czynna równa się mocy czynnej prądu odkształconego, nazywamy prądem sinusoidalnym równoważnym prądowi odkształconemu.

Cos φ można nazwać współczynnikiem mocy równoważnego prądu; współczynnik ten zawsze może być odpowiednio dobrany, wynika to z tego, że na podstawie wzorów (27) oraz (25) i (26)

$$\cos \varphi = \frac{U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_2 I_2 \cos \varphi_2 + \ldots + U_n I_n \cos \varphi_n}{\sqrt{(U_1^2 + U^2_2 + \ldots + U_n^2)(I_1^2 + I_2^2 \ldots + I^2_n)}}. \tag{28}$$

Mianownik w ostatnim wzorze nie może być mniejszy od licznika, czyli że wyraz ten jest na ogół mniejszy od jedności; inaczej mówiąc, zawsze można dobrać kąt φ dla otrzymania potrzebnego współczynnika mocy.

W przypadku, gdy w obwodzie prądu odkształconego z opornością rzeczywistą R założymy, że dla wszystkich częstotliwości (harmonicznych) R ma wartość stałą, to znaczy, nie weźmiemy pod uwagę działania naskórkowości, będziemy mieli

$$UI \cos \varphi = I^2 R \tag{29}$$

$$\left.\begin{aligned} U_1 I_1 \cos \varphi_1 &= I_1^2 R, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ U_n I_n \cos \varphi_n &= I_n^2 R. \end{aligned}\right| \tag{30}$$

Wzór (29) daje

$$\cos\varphi = \frac{I\,R}{U} = R\sqrt{\frac{I_1^2 + I_2^2 + \ldots + I_n^2}{U_1^2 + U_2^2 + \ldots + U_n^2}}, \tag{31}$$

określając zaś ze wzorów (30) wartości $I_1, \ldots, I_n$ i podstawiając do (31), otrzymamy

$$\cos\varphi = \sqrt{\frac{U_1^2\cos^2\varphi_1 + U_2^2\cos^2\varphi_2 + \ldots + U_n^2\cos^2\varphi_n}{U_1^2 + U_2^2 + \ldots + U_n^2}};$$

w przypadku szczególnym, gdy w obwodzie uwzględniamy tylko oporność rzeczywistą, wszystkie harmoniczne prądu będą w fazie ze swymi napięciami, a więc dowolny $\cos\varphi_k = 1$, wtedy $\cos\varphi = 1$.

Iloczyn wartości skutecznych napięcia i prądu odkształconego stanowi *moc pozorną* tego prądu; stosunek mocy czynnej do mocy pozornej nazywamy *współczynnikiem mocy prądu odkształconego.* Oznaczając ten współczynnik przez K, będziemy mieli

$$K = \frac{U_1 I_1\cos\varphi_1 + \ldots + U_k I_k\cos\varphi_k + \ldots + U_n I_n\cos\varphi_n}{\sqrt{(U_1^2 + \ldots + U_k^2 + \ldots + U_n^2)(I_1^2 + \ldots + I_k^2 + \ldots + I_n^2)}}. \tag{32}$$

Porównując wzory (28) i (32), widzimy, że współczynnik mocy prądu odkształconego może być ujęty w postaci

$$K = \cos\varphi.$$

Należy tylko mieć na uwadze, że kąt φ jest tylko pewnym umyślonym kątem, którego cosinus stanowi współczynnik mocy na podstawie wyżej podanego określenia, albo też kątem przesunięcia fazy natężenia prądu względem napięcia w równoważnym prądzie sinusoidalnym.

Oznaczając dla prądu odkształconego moc pozorną przez P_z, moc czynną przez P, będziemy mieli

$$P_z = U I; \quad P = K U I = U I\cos\varphi = P_z\cos\varphi.$$

Moc czynną możemy rozpatrywać jako składową mocy pozornej; wówczas drugą składową, analogicznie jak dla mocy prądu sinusoidalnego, będzie pewna moc, której wartość możemy wyrazić w postaci $U I\sin\varphi$; nazwijmy tę składową mocy pozornej *mocą bierną;* oznaczając ją przez P_x, będziemy mieli

$$P_x = U I\sin\varphi;$$

$$P_z^2 = P^2 + P_x^2; \quad P_x = \sqrt{P_z^2 - P^2}.$$

Należy zwrócić uwagę, że w przeciwieństwie do mocy czynnej prądu odkształconego, która jest równa sumie mocy czynnych poszczególnych harmonicznych, moc bierna, określona w sposób wyżej podany, nie jest na ogół równa sumie mocy biernych tych harmonicznych. Ta ostatnia suma

$$U_1 I_1 \sin \varphi_1 + \ldots + U_k I_k \sin \varphi_k + \ldots + U_n I_n \sin \varphi_n =$$

$$= \sum_{x=1}^{k=n} U_k I_k \sin \varphi_k$$

ma największą wartość wówczas, gdy wszystkie sinusy będą równe 1, czyli gdy kąty przesunięcia wszystkich harmonicznych prądu względem swych napięć wynoszą 90°, ale wówczas współczynnik mocy, jak wynika z wzoru (32), staje się równy zeru, więc $\cos \varphi = 0$, $\sin \varphi = 1$; obwód zawiera tylko oporność bierną.

Porównajmy w tym teoretycznym przypadku wartość mocy biernej prądu odkształconego, która staje się wówczas równą mocy pozornej, z sumą mocy biernych poszczególnych harmonicznych; biorąc różnicę kwadratów tych wielkości będziemy mieli

$$P_x^2 - \left[\sum_{k=1}^{k=n} U_k I_k \sin \varphi_k\right]^2 = U^2 I^2 - \left[\sum_{k=1}^{k=n} U_k I_k\right]^2;$$

ale

$$U^2 = U_1^2 + \ldots + U_k^2 + \ldots + U_n^2 = \Sigma U_k^2,$$

$$I^2 = I_1^2 + \ldots + I_k^2 + \ldots + I_n^2 = \Sigma I_k^2,$$

$$U^2 I^2 = \Sigma U_k^2 I_k^2 + \Sigma U_k^2 I_l^2 + \Sigma U_l^2 I_k^2,$$

$$[\Sigma U_k I_k]^2 = (U_1 I_1 + \ldots U_n I_n)^2 = \Sigma U_k^2 I_k^2 + 2 \Sigma U_k I_k U_l I_l.$$

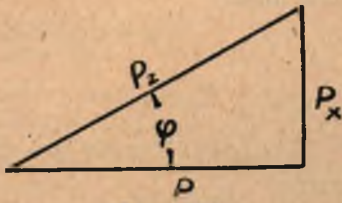
Odejmując stronami ostatnie dwa wzory, otrzymujemy

$$P_x^2 - \left[\sum_{k=1}^{k=n} U_k I_k\right]^2 = \sum (U_k I_l - U_l I_k)^2 > 0.$$

Wyraz z prawej strony w rozpatrywanym przypadku nie może się równać zeru, gdyż wówczas mielibyśmy

$$\frac{U_k}{I_k} = \frac{U_l}{I_l} = \text{Const.},$$

a to byłoby możliwe tylko w obecności w obwodzie wyłącznie oporności czynnej; tymczasem rozpatrywaliśmy przypadek, gdy w obwodzie mamy tylko oporność bierną.



Rys. 133

Analogicznie do mocy prądu sinusoidalnego można moce przy prądzie odkształconym ująć wykreślnie w trójkąt, jak na rys. 133.

§ 54
WPŁYW PRĄDU ODKSZTAŁCONEGO PRZY POMIARACH INDUKCYJNOŚCI I POJEMNOŚCI

Załóżmy, że do napięcia U prądu zmiennego o przebiegu sinusoidalnym włączyliśmy tylko oporność indukcyjną, np. cewkę o bardzo małej oporności rzeczywistej w porównaniu z indukcyjnością własną L tej cewki. Wówczas, oznaczając przez I natężenie prądu płynącego w takim obwodzie przy pulsacji ω, będziemy mieli

$$U = I \omega L,$$

skąd dla indukcyjności otrzymujemy

$$L = \frac{U}{I\omega}.$$

Jeżeli zaś taką samą cewkę włączymy do napięcia o takiej samej wartości skutecznej U, lecz o przebiegu odkształconym, wówczas, oznaczając przez U_k wartość skuteczną k—tej harmonicznej, będziemy mieli dla wartości skutecznej I_k tej samej harmonicznej natężenia prądu

$$I_k = \frac{U_k}{k\omega L};$$

wobec tego dla wartości skutecznych tych odkształconych prądów będziemy mieli

$$U = \sqrt{U_1^2 + \ldots + U_k^2}$$

$$I = \sqrt{\frac{U_1^2}{(\omega L)^2} + \ldots + \frac{U_k^2}{k^2(\omega L)^2}} = \frac{1}{\omega L}\sqrt{U_1^2 + \ldots + \frac{U_k^2}{k^2}}.$$

Oznaczając wyraz $\frac{U}{I\omega}$ przy prądzie odkształconym przez L', otrzymamy

$$L' = L\sqrt{\frac{U_1^2 + \ldots + U_k^2}{U_1^2 + \ldots + \frac{U_k^2}{k^2}}}.$$

Ponieważ licznik pod pierwiastkiem jest większy od mianownika, przeto

$$L' > L,$$

to znaczy, że przy mierzeniu indukcyjności prądem odkształconym otrzymujemy rezultat większy niż przy prądzie sinusoidalnym.

Do analogicznego rezultatu dojdziemy również przy mierzeniu pojemności. Jeżeli mianowicie do napięcia U prądu sinusoidalnego włączymy kondensator o pojemności C ze znikomo małą opornością rzeczywistą, wtedy przy takim prądzie

$$U = I\frac{1}{\omega C},$$

skąd

$$C = \frac{1}{U\omega}.$$

Jeżeli ten sam kondensator włączymy do napięcia o takiej samej wartości skutecznej, lecz o przebiegu odkształconym, wówczas dla k-tej harmonicznej z napięciem U_k otrzymamy dla natężenia prądu

$$I_k = k\omega C U_k,$$

wobec tego dla wartości skutecznych napięcia i natężenia prądu odkształconego otrzymamy

$$U = \sqrt{U_1^2 + \ldots + U_k^2},$$

$$I = \sqrt{(\omega C)^2 U_1^2 + \ldots (k\omega C)^2 U_k^2} = \omega C\sqrt{U_1^2 + \ldots (k\omega C)^2 U_k^2}.$$

Oznaczając przy prądzie odkształconym $\frac{I}{U\omega}$ przez C', będziemy mieli

$$C' = C\sqrt{\frac{U_1^2 + \ldots + k^2 U_k^2}{U_1^2 + \ldots + U_k^2}},$$

skąd wynika, że

$$C' > C.$$

§ 55
WIELOFAZOWE PRĄDY ODKSZTAŁCONE

Rozpatrzmy układ wielofazowy symetryczny źródła prądu odkształconego. *SEM* powstające w sąsiednich uzwojeniach takiego układu będą przesunięte względem siebie w fazie o jednakowe kąty. Założymy, że wartości maksymalne *SEM* we wszystkich uzwojeniach-fazach będą sobie równe, jak to zresztą zwykle ma miejsce. Przy jednakowym obciążeniu wszystkich faz będą także równe wartości maksymalne napięć na poszczególnych fazach. Oznaczmy przez p ilość faz rozpatrywanego układu, gdzie $p > 2$; przez e_I, e_{II}, e_{III}, ..., e_p wartości chwilowe *SEM* odpowiednich faz; kąt przesunięcia fazy między dwiema sąsiednimi SEM (pierwszymi harmonicznymi) przez α, przy czym $\alpha = \frac{2\pi}{p}$; następnie oznaczmy wartości maksymalne SEM poszczególnych harmonicznych w każdej fazie przez $E_{1m}, E_{2m}, \ldots, E_{km}$. Na podstawie wzorów (20) i (21) z § 49, biorąc pod uwagę, że przy prądzie zmiennym bez domieszki prądu stałego nie powinno być w szeregu Fouriera składowej stałej, będziemy mieli

$$
\begin{aligned}
e_I &= E_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + \ldots + E_{km} \sin(k\omega t + \psi_k),\\
e_{II} &= E_{1m} \sin(\omega t + \psi_1 - \alpha) + \ldots + E_{km} \sin(k\omega t + \psi_k - k\alpha),\\
e_{III} &= E_{1m} \sin(\omega t + \psi_1 - 2\alpha) + \ldots + E_{km} \sin(k\omega t + \psi_k - k \cdot 2\alpha),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
e_p &= E_{1m} \sin[\omega t + \psi_1 - (p-1)\alpha] + \ldots + E_{km} \sin[k\omega t + \psi_k - k(p-1)\alpha].
\end{aligned}
$$

Ponieważ $\alpha = \frac{2\pi}{p}$, przeto $k\alpha = \frac{k}{p} 2\pi$.

Łatwo zauważyć, że w przypadku, gdy $\frac{k}{p}$ jest liczbą całkowitą, czyli gdy $k\alpha$, $k \cdot 2\alpha$, ..., $k(p-1)\alpha$ będą całkowitymi wielokrotnościami 2π, harmoniczne we wszystkich fazach będą miały tę samą wartość co k-ta harmoniczna pierwszej fazy, czyli

$$E_{km} \sin(k\omega t + \psi_k).$$

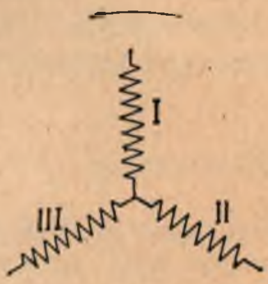
Suma wartości chwilowych sił elektromotorycznych wszystkich faz nie będzie zawierała tych harmonicznych, dla których $\frac{k}{p}$ nie jest liczbą całkowitą, gdyż sumy takich harmonicznych dają zero; natomiast pozostaną harmoniczne, dla których $\frac{k}{p}$ jest liczbą całkowitą.

Zastosujemy powyższe rozumowania do trójfazowych prądów odkształconych, gdzie $\alpha = \frac{2\pi}{3}$. Wartości chwilowe SEM w poszczególnych fazach będą

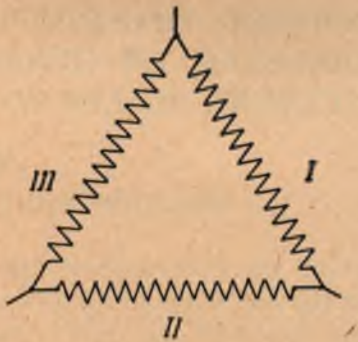
$$
\begin{aligned}
e_I &= E_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + \ldots + E_{km} \sin(k\omega t + \psi_k),\\
e_{II} &= E_{1m} \sin\left(\omega t + \psi_1 - \frac{2\pi}{3}\right) + \ldots + E_{km} \sin\left(k\omega t + \psi_k - k\frac{2\pi}{3}\right),\\
e_{III} &= E_{1m} \sin\left(\omega t + \psi_1 - 2 \cdot \frac{2\pi}{3}\right) + \ldots + E_{km} \sin\left(k\omega t + \psi_k - k \cdot 2 \cdot \frac{2\pi}{3}\right);
\end{aligned}
$$

$\frac{k}{3}$ będzie liczbą całkowitą, gdy k jest wielokrotnością trzech, a więc dla harmonicznych trzeciej, szóstej, dziewiątej itd.

Te harmoniczne stają się sobie równe we wszystkich trzech fazach. Przy połączeniu faz w gwiazdę (rys. 134), oprócz *SEM* fazowych, rozpatrujemy *SEM* skojarzone, które będą miały wartości chwilowe równe różnicy takichże wartości *SEM* fazowych. Do tych różnic nie wejdą harmoniczne, których wskaźnik jest liczbą podzielną przez 3. Przy jednakowym obciążeniu wszystkich trzech faz napięcia na poszczególnych fazach źródła prądu będą miały te same



Rys. 134



Rys. 135

wartości maksymalne; napięcia skojarzone nie będą zawierały harmonicznych, których wskaźnik jest podzielny przez 3; prądy powstające pod wpływem tych harmonicznych napięcia również nie będą zawierały tych samych harmonicznych. Jeżeli w układzie gwiazdowym mamy czwarty przewód, tak zwany zerowy, wówczas, według pierwszego prawa Kirchhoffa, algebraiczna suma wartości chwilowych wszystkich prądów schodzących się w punkcie zerowym równa się zeru, czyli prąd płynący w przewodzie zerowym będzie równy algebraicznej sumie prądów płynących w trzech przewodach fazowych. Dla przebiegów sinusoidalnych suma ta równa się zeru, więc przy jednakowym obciążeniu wszystkich faz prąd w przewodzie zerowym nie będzie płynął; natomiast przy przebiegach odkształconych suma ta będzie zawierała prądy tych harmonicznych, których wskaźnik jest podzielny przez 3, a więc nawet przy jednakowym obciążeniu wszystkich faz w przewodzie zerowym będzie płynął prąd zawierający te harmoniczne, których brak między przewodami fazowymi.

Przy połączeniu trójkątnym (rys, 135), gdy dla prądu sinusoidalnego suma wszystkich trzech *SEM* równa jest zeru, w razie przebiegów odkształconych suma ta będzie zawierała harmoniczne, których wskaźnik podzielny jest przez 3.

Pod wpływem tych *SEM* w trójkącie stanowiącym zamknięty obwód będzie płynął prąd zawierający te same harmoniczne. Z tego powodu w prądnicach nie stosuje się połączenia trójkątnego, aby uniknąć przy odkształconym napięciu strat na ciepło, które powstaje nawet wówczas, gdy prąd na zewnątrz nie byłby pobierany.

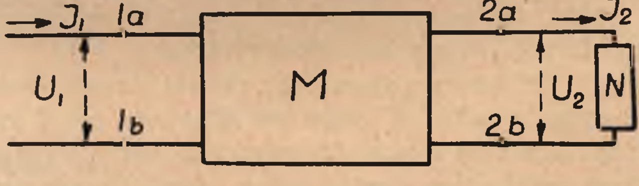
ROZDZIAŁ DZIEWIĄTY

CZWÓRNIKI, RÓWNANIA I WYKRESY OBWODÓW PRĄDU ZMIENNEGO OPARTE NA BADANIACH W STANIE JAŁOWYM I W STANIE ZWARCIA

§ 56

POJĘCIA OGÓLNE O CZWÓRNIKACH

W większości przypadków w elektrotechnice mamy do czynienia z obwodami, które można sprowadzić do układów równoważnych zawierających w ten czy inny sposób połączone oporności czynne, indukcyjności i pojemności, inaczej mówiąc, układów złożonych z kilku oporności pozornych. Taki układ, znajdujący się między źródłem energii elektrycznej i odbiornikiem, zawierający 2 zaciski wejściowe oraz 2 zaciski wyjściowe, został nazwany czwórnikiem (rys. 136). Na rysunku *M* oznacza czwórnik, 1a i 1b zaciski wejściowe,



Rys. 136

czyli zaciski na początku czwórnika, 2a i 2b zaciski wyjściowe, czyli zaciski w końcu czwórnika. Napięcie i natężenie prądu na początku oznaczymy wskaźnikiem 1, zaś w końcu wskaźnikiem 2. *N* oznacza odbiornik włączony do zacisków końcowych.

Jeżeli układ czwórnika jest tego rodzaju, że do poszczególnych obwodów można zastosować prawa Kirchhoffa i zasadę superpozycji, czwórnik taki nazywamy liniowym.

Przypuśćmy, że mamy w czwórniku n obwodów, do których można zastosować prawa Kirchhoffa; otrzymamy wtedy n równań liniowych, do których wejdą również napięcia i prądy na początku i w końcu czwórnika; z równań tych możemy wyrugować wszystkie napięcia i prądy, pozostawiając równania zawierające tylko napięcia i prądy na początku i w końcu czwórnika. Ponieważ wszystkie równania są liniowe, więc i równania zawierające napięcia i prądy na początku i w końcu czwórnika będą liniowe; można je ująć w następujące wzory:

$$\hat{U}_1 = A\hat{U}_2 + B\hat{I}_2, \tag{1}$$

$$\hat{I}_1 = C\hat{U}_2 + D\hat{I}_2, \tag{2}$$

gdzie współczynniki A, B, C i D są na ogół liczbami zespolonymi, zależnymi od R, L i C oraz częstotliwości (pulsacji) prądu zmiennego.

W przypadku, gdy wewnątrz czwórnika znajduje się również źródło energii elektrycznej, czwórnik taki nazywamy czynnym; jeżeli zaś tego źródła nie ma, czwórnik nazywamy biernym. Dalej będziemy rozpatrywali czwórniki liniowe bierne.

W dalszych rozważaniach przyjmiemy, że R, L i C mają wartości stałe, wobec czego dla określonej częstotliwości prądu zmiennego współczynniki wchodzące do wzorów (1) i (2) będą miały wartości stałe, można więc nazwać te współczynniki stałymi czwórnika.

W szczególności, gdy czwórnik ma układ tego rodzaju, że przeniesienie źródła prądu na zaciski wyjściowe, zaś odbiornika na zaciski wejściowe nie powoduje ani zmiany natężenia prądu pobieranego ze źródła, ani zmiany napięcia prądu płynącego do odbiornika, czwórnik taki nazywamy symetrycznym.

We wzorze (1) każdy z wyrazów z prawej strony stanowi pewne napięcie, z czego wynika, że A nie ma wymiaru, zaś B ma wymiar oporności; tak samo we wzorze (2) wyrazy z prawej strony odpowiadają pewnym natężeniom prądu, wobec czego C musi mieć wymiar odwrotności oporności, czyli przewodności, natomiast D nie ma wymiaru.

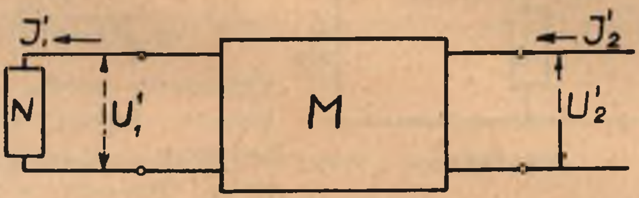
Między czterema stałymi wchodzącymi do wzorów (1) i (2) istnieje zależność, którą możemy ustalić, rozumując w sposób następujący: zamieniamy miejsca źródła prądu i odbiornika; oznaczmy napięcie w końcu czwórnika przez U_2', zaś na początku przez U_1', oraz odpowiednie natężenia prądu przez I'_2 i I'_1. Prądy te będą miały kierunki przeciwne do poprzednich (rys. 137) i we wzorach (1) i (2) należy pisać je ze znakami ujemnymi. Otrzymamy wówczas

$$\hat{U}'_1 = A\hat{U}'_2 - B\hat{I}'_2$$
$$-\hat{I}'_1 = C\hat{U}'_2 - D\hat{I}'_2.$$

Z tych dwóch równań otrzymujemy

$$\hat{U}'_2 = \frac{D}{AD-BC}\hat{U}'_1 + \frac{B}{AD-BC}\hat{I}'_1, \tag{3}$$

$$\hat{I}'_2 = \frac{C}{AD-BC}\hat{U}'_1 + \frac{A}{AD-BC}\hat{I}'_1. \tag{4}$$



Rys. 137

Przypuśćmy, że na początku czwórnika przyłożymy napięcie $U_1 = U$ i zewrzemy zaciski w końcu, wtedy $U_2 = 0$; następnie przykładamy to samo napięcie w końcu czwórnika, czyli we wzorze (3) $U'_2 = U$, i zewrzemy zaciski na początku, wtedy $U'_1 = 0$. Prądy płynące przez zwarte zaciski czwórnika będą wyncsiły: w pierwszym przypadku

z (1) $\hat{I}_{2_z} = \frac{\hat{U}}{B}$, zaś w drugim przypadku z (3) $\hat{I}_{1_z} = \frac{AD-BC}{B}\hat{U}$;

ale prądy te przy tym samym napięciu muszą być sobie równe, więc

$$\frac{\hat{U}}{B} = \frac{AD-BC}{B}\hat{U},$$

skąd wynika, że

$$AD - BC = 1. \tag{5}$$

Biorąc pod uwagę ostatni wzór otrzymamy zamiast wzorów (3) i (4)

$$\hat{U}'_2 = D\hat{U}'_1 + B\hat{I}'_1, \tag{6}$$

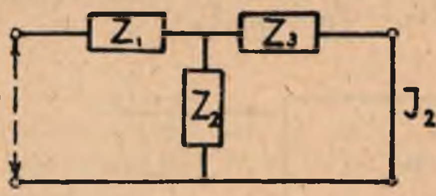
$$\hat{I}'_2 = C\hat{U}'_1 + A\hat{I}'_1. \tag{7}$$

Pokażemy na przykładzie, że prądy płynące przez zwarte zaciski czwórnika będą jednakowe, gdy umieścimy źródło prądu raz na począłku, a drugi raz w końcu czwórnika (to samo napięcie). Ze schematu (rys. 138) widzimy, że

$$\hat{U} = \hat{I}_1\dot{Z}_1 + \hat{I}_2\dot{Z}_3$$

$$\hat{I}_1 = \frac{\hat{U}}{\dot{Z}_1 + \dfrac{\dot{Z}_2\dot{Z}_3}{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3}}$$

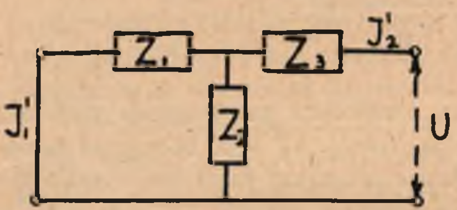
Z tych równań znajdujemy natężenie prądu płynącego przez zwarte w końcu zaciski



Rys. 138

$$\hat{I}_2 = \frac{\hat{U}\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2 + \dot{Z}_1\dot{Z}_3 + \dot{Z}_2\dot{Z}_3}.$$

Przenosimy źródło prądu na końcowe zaciski, na których będziemy mieli to samo napięcie U. Oznaczmy w tym przypadku natężenie prądu wychodzącego z końca czwórnika przez $\hat{I}'_2$, zaś natężenie prądu, płynącego przez zwarte zaciski na początku, przez I'_1 (rys. 139), wtedy, jak widać na schemacie,



Rys. 139

$$\hat{U} = \hat{I}'_2\dot{Z}_3 + \hat{I}'_1\dot{Z}_1,$$

$$\hat{I}'_2 = \frac{\hat{U}}{\dot{Z}_3 + \dfrac{\dot{Z}_1\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2}}$$

z tych równań znajdujemy

$$\hat{I}'_1 = \frac{\hat{U}\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2 + \dot{Z}_1\dot{Z}_3 + \dot{Z}_2\dot{Z}_3}$$

czyli

$$\hat{I}'_1 = \hat{I}_2$$

W przypadku czwórnika symetrycznego zamiana miejsca przyłączenia źródła prądu nie zmienia natężenia prądu płynącego do odbiornika ani natężenia prądu pobieranego ze źródła prądu, więc we wzorach (6) i (7) będziemy mieli $\hat{U}'_1 = \hat{U}_2$; $\hat{I}'_2 = \hat{I}_1$; $\hat{I}'_1 = \hat{I}_2$; wzory te przyjmą postać

$$\hat{U}_1 = D\hat{U}_2 + B\hat{I}_2, \tag{8}$$

$$\hat{I}_1 = C\hat{U}_2 + A\hat{I}_2. \tag{9}$$

Jeżeli porównamy te ostatnie wzory z wzorami (1) i (2), dojdziemy do wniosku, że w czwórniku symetrycznym

$$A = D, \tag{10}$$

wobec czego wzór (5) daje nam

$$A^2 = D^2 = 1 + BC. \tag{11}$$

§ 57

WYZNACZENIE STAŁYCH CZWÓRNIKA DROGĄ POMIARÓW

Oporność pozorna czwórnika, mierzona na początku, wyrazi się wzorem

$$\dot{Z}_1 = \frac{\hat{U}_1}{\hat{I}_1},$$

a oporność pozorna, mierzona w końcu, będzie równa

$$\dot{Z}_2 = \frac{\hat{U}_2}{\hat{I}_2}.$$

Na podstawie wzorów (1) i (2) otrzymamy

$$\dot{Z}_1 = \frac{A\hat{U}_2 + B\hat{I}_2}{C\hat{U}_2 + D\hat{I}_2}. \tag{12}$$

Dla znalezienia stałych czwórnika przeprowadzamy następujące pomiary:

1) mierzymy na początku czwórnika przyłożone napięcie (dowolne), prąd przy tym pobierany oraz kąt przesunięcia fazy prądu względem napięcia w dwóch przypadkach: raz, gdy w końcu czwórnika prąd nie jest pobierany, czyli mamy tak zwany stan jałowy, drugi raz, gdy w końcu czwórnika zaciski są zwarte, czyli mamy stan zwarcia. Oznaczmy dla obu tych stanów oporności pozorne mierzone na początku odpowiednio przez Z_{10} i Z_{1z}. Biorąc pod uwagę, że we wzorze (12) trzeba założyć: w pierwszym przypadku $I_2 = 0$, w drugim zaś $U_2 = 0$, otrzymamy

$$\dot{Z}_{10} = \frac{A}{C}, \tag{13}$$

$$\dot{Z}_{1z} = \frac{B}{D}; \tag{14}$$

2) dajemy dowolne napięcie na zaciskach w końcu czwórnika, mierzymy to napięcie, pobierany przy tym prąd i kąt przesunięcia

fazy prądu względem tego napięcia: raz, gdy prąd na początku nie jest pobierany (stan jałowy), drugi raz, gdy zaciski na początku są zwarte (stan zwarcia). Oznaczmy dla tego przypadku oporności pozorne mierzone w końcu czwórnika odpowiednio przez Z_{20} i Z_{2z}. Na podstawie wzorów (6) i (7), zakładając kolejno $I'_1 = 0$ i $U'_1 = 0$, otrzymamy

$$\dot{Z}_{20} = \frac{D}{C}, \tag{15}$$

$$\dot{Z}_{2z} = \frac{B}{A}. \tag{16}$$

Z równań (13), (14), (15) i (16) możemy stwierdzić, że

$$\frac{\dot{Z}_{10}}{Z_{1z}} = \frac{\dot{Z}_{20}}{Z_{2z}}. \tag{17}$$

Do tego dochodzi jeszcze zależność (5)

$$AD - BC = 1.$$

Rozwiązując równania (13) do (16) z uwzględnieniem ostatniej zależności, otrzymujemy wartości stałych czwórnika w dwóch postaciach:

$$A = \sqrt{\frac{\dot{Z}_{10}}{\dot{Z}_{20} - \dot{Z}_{2z}}} = \frac{\dot{Z}_{10}}{\sqrt{\dot{Z}_{20}(\dot{Z}_{10} - \dot{Z}_{1z})}}, \tag{18}$$

$$B = \dot{Z}_{1z}\sqrt{\frac{\dot{Z}_{20}}{\dot{Z}_{10} - \dot{Z}_{1z}}} = \dot{Z}_{2z}\sqrt{\frac{\dot{Z}_{10}}{\dot{Z}_{20} - \dot{Z}_{2z}}}, \tag{19}$$

$$C = \sqrt{\frac{1}{\dot{Z}_{20}(\dot{Z}_{10} - \dot{Z}_{1z})}} = \sqrt{\frac{1}{\dot{Z}_{10}(\dot{Z}_{20} - \dot{Z}_{2z})}}, \tag{20}$$

$$D = \frac{\dot{Z}_{20}}{\sqrt{\dot{Z}_{10}(\dot{Z}_{20} - \dot{Z}_{2z})}} = \sqrt{\frac{\dot{Z}_{20}}{\dot{Z}_{10} - \dot{Z}_{1z}}}. \tag{21}$$

Dla czwórnika symetrycznego, gdy $A = D$, jak widać z wzorów (13) do (16), $\dot{Z}_{10} = \dot{Z}_{20} = \dot{Z}_0$; $\dot{Z}_{1z} = \dot{Z}_{2z} = \dot{Z}_z$, wobec tego wzory (18) do (21) dają nam

$$A = \sqrt{\frac{\dot{Z}_0}{\dot{Z}_0 - \dot{Z}_z}}, \tag{22}$$

$$B = \dot{Z}_z\sqrt{\frac{\dot{Z}_0}{\dot{Z}_0 - \dot{Z}_z}}. \tag{23}$$

$$C = \sqrt{\frac{1}{\dot{Z}_0(\dot{Z}_0 - \dot{Z}_z)}}, \tag{24}$$

$$D = \sqrt{\frac{\dot{Z}_0}{\dot{Z}_0 - \dot{Z}_z}}. \tag{25}$$

Do tego ostatniego dochodzi zależność (11)

$$A^2 = D^2 = 1 + BC.$$

Z ostatnich wzorów wynika, że dla znalezienia stałych czwórnika symetrycznego wystarczy dokonać pomiarów tylko na początku, gdy w końcu mamy stan jałowy i stan zwarcia.

Wzory (1) i (2) dają nam wartości napięcia i natężenia prądu na początku czwórnika, gdy mamy w końcu napięcie U_2 i pobieramy prąd I_2. W stanie jałowym ($I_2 = 0$) napięcie źródła U_1 dałoby nam w końcu inne napięcie niż U_2, które mamy przy pobieranym prądzie I_2; dla zachowania w stanie jałowym napięcia U_2 musielibyśmy dać na początku inne napięcie, które nazwiemy napięciem na początku czwórnika w stanie jałowym i oznaczymy przez U_{10}, również i natężenie prądu pobieranego na początku ulegnie wtedy zmianie, nazwiemy go prądem w stanie jałowym i oznaczymy przez I_{10}. Analogicznie rozumując, gdy mamy stan zwarcia ($U_2 = 0$), musimy dać na początku napięcie U_{1z} i prąd I_{1z}, by natężenie prądu płynącego przez zwarte w końcu zaciski czwórnika wynosiło I_2, tak jak przy normalnym obciążeniu.

Z wzorów (1) i (2) otrzymujemy

$$\hat{U}_{10} = A\hat{U}_2; \quad \hat{U}_{1z} = B\hat{I}_2; \quad \hat{I}_{10} = C\hat{U}_2; \quad \hat{I}_{1z} = D\hat{I}_2.$$

Widzimy, że

$$\left.\begin{aligned} \hat{U}_1 &= \hat{U}_{10} + \hat{U}_{1z} \\ \hat{I}_1 &= \hat{I}_{10} + \hat{I}_{1z} \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Z wzorów tych wynika, że dla otrzymania wartości napięcia i natężenia prądu na początku obciążonego czwórnika należy dodać do siebie odpowiednie wartości tych wielkości w stanie jałowym i w stanie zwarcia.

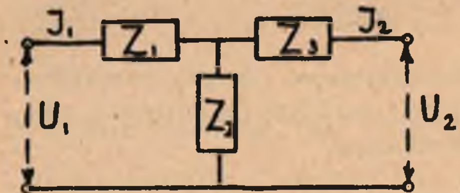
Przejdziemy teraz do rozpatrzenia najbardziej rozpowszechnionych typów czwórnika.

§ 58

CZWÓRNIK TYPU *T*

Układ czwórnika nazwanego typem *T* posiada trzy oporności pozorne, z których dwie, Z_1 i Z_3, są połączone szeregowo, trzecia zaś, Z_2, włączona jest równolegle między tamtymi (rys. 140).

Rozpatrując ten układ możemy napisać następujące równania:



Rys. 140

$$\hat{U}_1 - \hat{U}_2 = \hat{I}_1\hat{Z}_1 + \hat{I}_2\hat{Z}_3, \qquad (27)$$

$$\hat{I}_1 - \hat{I}_2 = \frac{1}{\hat{Z}_2}(\hat{U}_1 - \hat{I}_1\hat{Z}_1). \qquad (28)$$

Z drugiego równania

$$\hat{I}_1 = \frac{\hat{U}_1 + \hat{I}_2\hat{Z}_2}{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2};$$

podstawiamy tę wartość do pierwszego równania, wtedy

$$\hat{U}_1 - \hat{U}_2 = (\hat{U}_1 + \hat{I}_2\hat{Z}_2)\frac{\hat{Z}}{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2} + \hat{I}_2\hat{Z}_3,$$

skąd

$$\hat{U}_1\left(1 - \frac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2}\right) = \hat{U}_2 + \hat{I}_2\frac{\hat{Z}_1\hat{Z}_2 + \hat{Z}_1\hat{Z}_3 + \hat{Z}_2\hat{Z}_3}{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2},$$

$$\hat{U}_1 = \frac{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2}{\hat{Z}_2}\hat{U}_2 + \frac{\hat{Z}_1\hat{Z}_2 + \hat{Z}_1\hat{Z}_3 + \hat{Z}_2\hat{Z}_3}{\hat{Z}_2}\hat{I}_2. \qquad (29)$$

Analogicznie określając z równania (28)

$$\hat{U}_1 = \hat{I}_1\hat{Z}_2 - \hat{I}_2\hat{Z}_2 + \hat{I}_1\hat{Z}_1$$

i podstawiając tę wartość do równania (27), znajdziemy

$$\hat{I}_1 = \frac{1}{\hat{Z}_2}\hat{U}_2 + \frac{\hat{Z}_2 + \hat{Z}_3}{\hat{Z}_2}\hat{I}_2. \qquad (30)$$

Zestawiając wzory (29) i (30) z podstawowymi wzorami czwórnika (1) i (2) stwierdzimy, że dla czwórnika typu *T*

$$A = \frac{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2}{\hat{Z}_2}; \quad B = \frac{\hat{Z}_1\hat{Z}_2 + \hat{Z}_1\hat{Z}_3 + \hat{Z}_2\hat{Z}_3}{\hat{Z}_2}; \quad C = \frac{1}{\hat{Z}_2}; \quad D = \frac{\hat{Z}_2 + \hat{Z}_3}{\hat{Z}_2}.$$

Dla stanu jałowego ($I_2 = 0$) będziemy mieli z (29) i (30)

$$\hat{U}_{10} = \frac{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2}{\hat{Z}_2}\hat{U}_2 \qquad (31)$$

$$\hat{I}_{10} = \frac{1}{\hat{Z}_2}\hat{U}_2 \qquad (32)$$

skąd oporność pozorna czwórnika w stanie jałowym będzie

$$\hat{Z}_0 = \frac{\hat{U}_{10}}{\hat{I}_{10}} = \hat{Z}_1 + \hat{Z}_2. \tag{33}$$

Dla stanu zwarcia ($U_2 = 0$) z tychże równań (29) i (30) otrzymamy

$$\hat{U}_{1z} = \frac{\hat{Z}_1\hat{Z}_2 + \hat{Z}_1\hat{Z}_3 + \hat{Z}_2\hat{Z}_3}{\hat{Z}_2}\hat{I}_2 \tag{34}$$

$$\hat{I}_{1z} = \frac{\hat{Z}_2 + \hat{Z}_3}{\hat{Z}_2}\hat{I}_2 \tag{35}$$

skąd oporność pozorna czwórnika w stanie zwarcia będzie

$$\hat{Z}_z = \frac{\hat{U}_{1z}}{\hat{I}_{1z}} = \frac{\hat{Z}_1\hat{Z}_2 + \hat{Z}_1\hat{Z}_3 + \hat{Z}_2\hat{Z}_3}{Z_2 + Z_3}. \tag{36}$$

Wzory uzależniające napięcie i natężenie prądu na początku czwórnika od tychże wielkości na końcu — mogą być wyrażone prościej, jeżeli wprowadzimy do nich oporności stanu jałowego i stanu zwarcia Z_0 i Z_z oraz dwie nowe wielkości zespolone, mianowicie

$$\hat{S}_0 = \frac{\hat{U}_{10}}{\hat{U}_2}, \tag{37}$$

$$\hat{S}_z = \frac{\hat{I}_{1z}}{\hat{I}_2}. \tag{38}$$

Na podstawie wzorów (31) i (35) dla naszego czwórnika

$$\hat{S}_0 = \frac{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2}{\hat{Z}_2}, \tag{39}$$

$$\hat{S}_z = \frac{\hat{Z}_2 + \hat{Z}_3}{\hat{Z}_2}. \tag{40}$$

Biorąc pod uwagę wartości Z_0 i Zz ze wzorów (33) i (36), znajdziemy stałe czwórnika w postaci

$$A = \hat{S}_0; \quad B = \hat{S}_z\hat{Z}_z; \quad C = \frac{\hat{S}_0}{\hat{Z}_0}; \quad D = \hat{S} \ ;$$

wtedy zamiast wzorów (29) i (30) otrzymujemy

$$\hat{U}_1 = \hat{S}_0\,\hat{U}_2 + \hat{S}_z\,\hat{Z}_z\,\hat{I}_2, \tag{41}$$

$$\hat{I}_1 = \frac{\hat{S}_0}{\hat{Z}_0}\,\hat{U}_2 + \hat{S}_z\,\hat{I}_2. \tag{42}$$

Ponieważ dla każdego czwórnika

$$AD - BC = 1,$$

przeto

$$\hat{S}_0\hat{S}_z - \frac{\hat{S}_0\hat{S}_z\hat{Z}_z}{\hat{Z}_0} = 1,$$

skąd

$$\hat{S}_0\hat{S}_z = \frac{\hat{Z}_0}{\hat{Z}_0 - \hat{Z}_z}. \tag{43}$$

Często zamiast $\frac{1}{\hat{Z}_0}$ wprowadza się przewodność pozorną stanu jałowego $\hat{Y}_0$, wówczas wzory (41), (42), (43) będą miały postać:

$$\hat{U}_1 = \hat{S}_0\hat{U}_2 + \hat{S}_z\hat{Z}_z\hat{I}_2, \tag{41'}$$

$$\hat{I}_1 = \hat{S}_0\hat{Y}_0\hat{U}_2 + \hat{S}_z\hat{I}_2, \tag{42'}$$

$$\hat{S}_0\hat{S}_z = \frac{1}{1 - \hat{Y}_0\hat{Z}_0}, \tag{43'}$$

Każda z wielkości $\hat{S}_0$ i $\hat{S}_z$ określonych wzorami (37) i (38) stanowi pewną liczbę zespoloną, zależną od oporności pozornych czwórnika. Oznaczmy kąt przesunięcia fazy $\hat{U}_{10}$ względem $\hat{U}_2$ przez σ_0, a $\hat{I}_{1z}$ względem $\hat{I}_2$ przez σ_z; kąty te będą argumentami $\hat{S}_0$ $\hat{S}$i $_z$, czyli

$$\hat{S}_0 = S_0(\cos\sigma_0 + j\sin\sigma_0) = S_0 e^{j\sigma_0},$$

$$\hat{S}_z = S_z(\cos\sigma_z + j\sin\sigma_z) = S_z e^{j\sigma_z}.$$

Dla czwórnika symetrycznego typu T wyżej wyprowadzone wzory znacznie się upraszczają, wtedy bowiem $\hat{Z}_3 = \hat{Z}_1$ i z wzorów (39) i (40) wynika, że

$$\hat{S}_0 = \hat{S}_z = \hat{S} = \frac{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2}{\hat{Z}_2}, \tag{44}$$

również $\sigma_0 = \sigma_z = \sigma$, czyli $\hat{S} = S(\cos\sigma + j\sin\sigma) = Se^{j\sigma}$.

Z wzorów (33) i (44) znajdujemy

$$\hat{Z}_1 = \frac{\hat{S} - 1}{\hat{S}}\hat{Z}_0, \tag{45}$$

$$\hat{Z}_2 = \frac{\hat{Z}_0}{\hat{S}}. \tag{46}$$

Wzory (41), (42) i (43) przyjmują postać

$$\hat{U}_1 = \hat{S}\hat{U}_2 + \hat{S}\hat{Z}_z\hat{I}_2 = \hat{S}(\hat{U}_2 + \hat{Z}_z\hat{I}_2), \tag{47}$$

$$\hat{I}_1 = \frac{\hat{S}}{\hat{Z}_0}\hat{U}_2 + \hat{S}\hat{I}_2 = \hat{S}\left(\frac{1}{\hat{Z}_0}\hat{U}_2 + \hat{I}_2\right), \tag{48}$$

$$\hat{S}^2 = \frac{\hat{Z}_0}{\hat{Z}_0 - \hat{Z}_z}; \quad \hat{S} = \sqrt{\frac{\hat{Z}_0}{\hat{Z}_0 - \hat{Z}_z}}; \tag{49}$$

łub też z wzorów (41′), (42′) i (43′)

$$\hat{U}_1 = \hat{S}\,(\hat{U}_2 + \hat{Z}_z \hat{I}_2), \tag{47′}$$

$$\hat{I}_1 = \hat{S}\,(\hat{Y}_0 \hat{U}_2 + \hat{I}_2), \tag{48′}$$

$$\hat{S} = \sqrt{\frac{1}{1 - \hat{Y}_0 \hat{Z}_z}}. \tag{49′}$$

Poza tym będziemy mieli

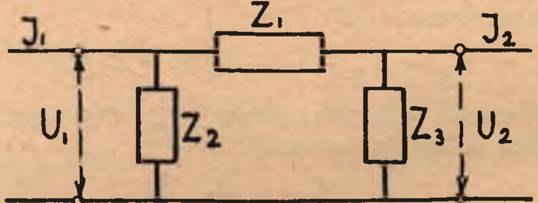
$$A = D = \hat{S} = \frac{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2}{\hat{Z}_2}; \quad B = \hat{S}_z \hat{Z}_z = \frac{\hat{Z}_1^2 + 2\hat{Z}_1\hat{Z}_2}{\hat{Z}_2}; \quad C = \frac{\hat{S}}{\hat{Z}_0} = \frac{1}{\hat{Z}_2}. \tag{50}$$

§ 59
CZWÓRNIK TYPU Π

Czwórnik typu π zawiera trzy oporności pozorne, połączone jak na schemacie (rys. 141). Rozpatrując ten układ, znajdziemy:

$$\hat{U}_1 - \hat{U}_2 = \left(\hat{I}_1 - \frac{\hat{U}_1}{\hat{Z}_2}\right)\hat{Z}_1, \tag{51}$$

$$\hat{I}_1 - \hat{I}_2 = \frac{\hat{U}_1}{\hat{Z}_2} + \frac{\hat{U}_2}{\hat{Z}_3}. \tag{52}$$



Rys. 141

Dla stanu jałowego ($I_2 = 0$)

$$\hat{U}_{10} - \hat{U}_2 = \left(\hat{I}_{10} - \frac{\hat{U}_{10}}{\hat{Z}_2}\right)\hat{Z}_1, \tag{53}$$

$$\hat{I}_{10} = \frac{\hat{U}_{10}}{\hat{Z}_2} + \frac{\hat{U}_2}{\hat{Z}_3}; \tag{54}$$

z tych dwu równań rugujemy $\hat{I}_{10}$, wtedy

$$\hat{U}_{10} - \hat{U}_2 = \frac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_3}\hat{U}_2, \qquad \hat{U}_{10} = \frac{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_3}{\hat{Z}_3}\hat{U}_2 \tag{55}$$

po podstawieniu tej wartości $\hat{U}_{10}$ do wzoru (54), otrzymamy

$$\hat{I}_{10} = \frac{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_3}{\hat{Z}_2 \hat{Z}_3} \hat{U}_2 + \frac{1}{\hat{Z}_3} \hat{U}_2 = \frac{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 + \hat{Z}_3}{\hat{Z}_2 \hat{Z}_3} \hat{U}_2. \tag{56}$$

Dzieląc stronami wzór (55) przez (56) znajdziemy oporność pozorną czwórnika w stanie jałowym:

$$\hat{Z}_0 = \frac{\hat{U}_{10}}{\hat{I}_{10}} = \frac{(\hat{Z}_1 + \hat{Z}_3) \hat{Z}_2 \hat{Z}_3}{\hat{Z}_3 (\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 + Z_3)} = \frac{\hat{Z}_1 \hat{Z}_2 + \hat{Z}_2 \hat{Z}_3}{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 + \hat{Z}_3}. \tag{57}$$

Dla stanu zwarcia ($U_2 = 0$), z wzorów (51) i (52)

$$\hat{U}_{1z} = \hat{I}_{1z} - \frac{\hat{U}_{1z}}{\hat{Z}_2}, \tag{58}$$

$$\hat{I}_{1z} - \hat{I}_2 = \frac{\hat{U}_{1z}}{\hat{Z}_2}. \tag{59}$$

Z równań tych rugujemy $\hat{U}_{1z}$, określając jego wartość z (59) i podstawiając do (58), otrzymujemy

$$\hat{Z}_2 (\hat{I}_{1z} - \hat{I}_2) = \hat{I}_2 \hat{Z}_1; \quad \hat{I}_{1z} \hat{Z}_2 = (\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2) \hat{I}_2$$

$$\hat{I}_{1z} = \frac{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2}{\hat{Z}_2} \hat{I}_2. \tag{60}$$

Następnie z równań (58) i (59)

$$\hat{U}_{1z} = (\hat{I}_{1z} - \hat{I}_{1z} + \hat{I}_2) \hat{Z}_1 = \hat{Z}_1 \hat{I}_2. \tag{61}$$

Dzieląc stronami wzór (61) przez (60) otrzymamy oporność pozorną czwórnika w stanie zwarcia

$$\hat{Z}_z = \frac{\hat{U}_{1z}}{\hat{I}_{1z}} = \frac{\hat{Z}_1 \,.\, \hat{Z}_2}{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2}. \tag{62}$$

Sumując wartości napięć i prądów w stanie jałowym i w stanie zwarcia, otrzymamy na podstawie wzorów (26), (55), (56), (58) i (62):

$$\hat{U}_1 = \hat{U}_{10} + \hat{U}_{1z} = \frac{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_3}{\hat{Z}_3} \hat{U}_2 + \hat{Z}_1 \hat{I}_2, \tag{63}$$

$$\hat{I}_1 = \hat{I}_{10} + \hat{I}_{1z} = \frac{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 + \hat{Z}_3}{\hat{Z}_2 \hat{Z}_3} \hat{U}_2 + \frac{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2}{\hat{Z}_2} \hat{I}_2. \tag{64}$$

Z tych wzorów określimy stałe, wchodzące do podstawowych wzorów (1) i (2) dla czwórnika typu π:

$$A = \frac{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_3}{\hat{Z}_3}; \quad B = \hat{Z}_1; \quad C = \frac{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 + \hat{Z}_3}{\hat{Z}_2 \hat{Z}_3}; \quad D = \frac{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2}{\hat{Z}_2}. \tag{65}$$

Wielkości $\hat{S}_0$ i $\hat{S}_z$, na podstawie (37) i (38) oraz (54) i (57) będą:

$$\hat{S}_0 + \frac{\hat{U}_{10}}{\hat{U}_2} = \frac{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_3}{\hat{Z}_3}; \quad \hat{S}_z = \frac{\hat{I}_{1z}}{\hat{I}_2} = \frac{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2}{\hat{Z}_2}; \tag{66}$$

zamiast (65), biorąc pod uwagę ostatnie wzory oraz (57) i (62), otrzymamy:

$$A = \hat{S}_0; \quad B = \hat{S}_z \hat{Z}_z; \quad C = \frac{\hat{S}_0}{\hat{Z}_0}; \quad D = \hat{S}_z;$$

wtedy z podstawowych wzorów (1) i (2), będziemy mieli:

$$\hat{U}_1 = \hat{S}_0 \hat{U}_2 + \hat{S}_z \hat{Z}_z \hat{I}_2, \tag{67}$$

$$\hat{I}_1 = \frac{\hat{S}_0}{\hat{Z}_0} \hat{U}_2 + \hat{S}_z \hat{I}_2. \tag{68}$$

Tak samo jak dla czwórnika typu T, otrzymamy dla czwórnika typu π zależność (43)

$$\hat{S}_0 \hat{S}_z = \frac{\hat{Z}_0}{\hat{Z}_0 - \hat{Z}_z}. \tag{69}$$

Dla czwórnika symetrycznego typu Π $\hat{Z}_3 = \hat{Z}_2$, wówczas ze wzorów (65) będziemy mieli

$$A = D = \frac{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2}{\hat{Z}_2}; \quad B = \hat{Z}_1; \quad C = \frac{\hat{Z}_1 + \hat{Z}2_2}{\hat{Z}_2^2}. \tag{70}$$

wzory (57) i (62) dadzą nam

$$\hat{Z}_0 = \frac{(\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2)\hat{Z}_2}{\hat{Z}_1 + 2\hat{Z}_2}; \quad \hat{Z}_z = \frac{\hat{Z}_1 \hat{Z}_2}{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2}. \tag{71}$$

Następnie z (66)

$$\hat{S}_0 = \hat{S}_z = \hat{S} = \frac{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2}{\hat{Z}_2}. \tag{72}$$

Z tych ostatnich wzorów znajdujemy

$$\hat{Z}_1 = \hat{Z}_z \hat{S}, \tag{73}$$

$$\hat{Z}_2 = \frac{\hat{Z}_z \hat{S}}{\hat{S} - 1}. \tag{74}$$

Wzory (67), (68) i (69) dadzą:

$$\hat{U}_1 = \hat{S}\hat{U}_2 + \hat{S}\hat{Z}_z \hat{I}_2 = \hat{S}(\hat{U}_2 + \hat{Z}_z \hat{I}_2), \tag{75}$$

$$\hat{I}_1 = \frac{\hat{S}}{\hat{Z}_0} \hat{U}_2 + \hat{S}\hat{I}_2 = \hat{S}\left(\frac{1}{\hat{Z}_0} \hat{U}_2 + \hat{I}_2\right), \tag{76}$$

$$\hat{S} = \sqrt{\frac{\hat{Z}_0}{\hat{Z}_0 - \hat{Z}_z}} \tag{77}$$

albo

$$\hat{U}_1 = \hat{S}(\hat{U}_2 + \hat{Z}_z \hat{I}_2) \tag{75'}$$

$$\hat{I}_1 = \hat{S}(\hat{Y}_0 \hat{U}_2 + \hat{I}_2), \tag{76'}$$

$$\hat{S} = \sqrt{\frac{1}{\hat{Y}_0 \hat{Z}_z}}. \tag{77'}$$

Wreszcie, jak widać z tych wzorów,

$$A = D = \hat{S}; \quad B = \hat{S}\hat{Z}_z; \quad C = \frac{\hat{S}}{\hat{Z}_0} \hat{S}\hat{Y}_0.$$

§ 60

CZWÓRNIKI RÓWNOWAŻNE

Czwórniki różnych typów nazwiemy równoważnymi, gdy odpowiednie stałe tych czwórników są sobie równe, chociażby czwórniki były złożone z różnych elementów. W takich czwórnikach otrzymamy te same zależności między napięciami i prądami na początku i w końcu. Porównamy czwórniki poprzednio rozpatrzonych typów T i Π.

Z wzorów (29) i (30) dla czwórnika typu T (rys. 140)

$$A = \frac{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2}{\hat{Z}_2}; \quad B = \frac{\hat{Z}_1\hat{Z}_2 + \hat{Z}_1\hat{Z}_3 + \hat{Z}_2\hat{Z}_3}{\hat{Z}_2}; \quad C = \frac{1}{\hat{Z}_2}; \quad D = \frac{\hat{Z}_2 + \hat{Z}_3}{\hat{Z}_2};$$

zaś ze wzorów (65) otrzymamy stałe dla czwórnika typu Π (rys. 141); we wzorach tych, dla odróżnienia od elementów czwórnika typu T, oznaczmy dla typu Π $\hat{Z}_1 = \hat{Z}_a$; $\hat{Z}_2 = \hat{Z}_b$; $\hat{Z}_3 = \hat{Z}_c$, wtedy

$$A = \frac{\hat{Z}_a + \hat{Z}_c}{\hat{Z}_c}; \quad B = \hat{Z}_a; \quad C = \frac{\hat{Z}_a + \hat{Z}_b + \hat{Z}_c}{\hat{Z}_b\hat{Z}_c}; \quad D = \frac{\hat{Z}_a + \hat{Z}_b}{\hat{Z}_b\hat{Z}_c}.$$

Ażeby oba czwórniki były równoważne, powinna być spełniona równość

$$\frac{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2}{\hat{Z}_2} = \frac{\hat{Z}_a + \hat{Z}_c}{\hat{Z}_c}; \quad \frac{\hat{Z}_1\hat{Z}_2 + \hat{Z}_1\hat{Z}_3 + \hat{Z}_2\hat{Z}_3}{\hat{Z}_2} = \hat{Z}_a,$$

$$\frac{1}{\hat{Z}_2} = \frac{\hat{Z}_a + \hat{Z}_b + \hat{Z}_c}{\hat{Z}_b\hat{Z}_c}; \quad \frac{\hat{Z}_2 + \hat{Z}_3}{\hat{Z}_2} = \frac{\hat{Z}_a + \hat{Z}_b}{\hat{Z}_b}.$$

Rozwiązując te równania względem $\hat{Z}_1$, $\hat{Z}_2$ i $\hat{Z}_3$, znajdujemy:

$$\hat{Z}_1 = \frac{\hat{Z}_a\hat{Z}_b}{\hat{Z}_a + \hat{Z}_b + \hat{Z}_c}; \quad \hat{Z}_2 = \frac{\hat{Z}_b\hat{Z}_c}{\hat{Z}_a + \hat{Z}_b + \hat{Z}_c}; \quad \hat{Z}_3 = \frac{\hat{Z}_a\hat{Z}_c}{\hat{Z}_a + \hat{Z}_b + \hat{Z}_c};$$

rozwiązując je zaś względem $\hat{Z}_a$, $\hat{Z}_b$ i $\hat{Z}_c$, otrzymamy:

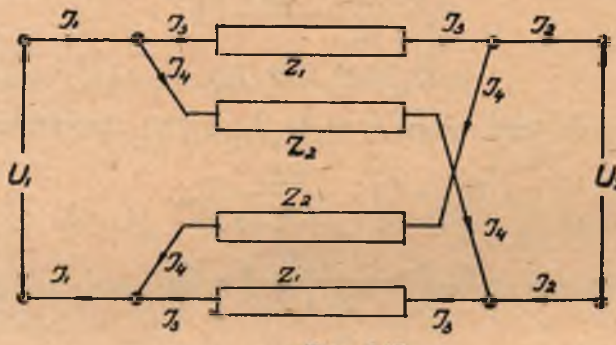
$$\hat{Z}_a = \frac{\hat{Z}_1 \hat{Z}_2 + \hat{Z}_1 \hat{Z}_3 + \hat{Z}_2 \hat{Z}_3}{\hat{Z}_2}; \quad \hat{Z}_b = \frac{\hat{Z}_1 \hat{Z}_2 + \hat{Z}_1 \hat{Z}_3 + \hat{Z}_2 \hat{Z}_3}{\hat{Z}_3};$$

$$\hat{Z}_c = \frac{\hat{Z}_1 \hat{Z}_2 + \hat{Z}_1 \hat{Z}_3 + \hat{Z}_2 \hat{Z}_3}{\hat{Z}_1}.$$

Wzory te dają nam oporności elementów składowych przy przejściu od typu *T* do typu *Π* lub odwrotnie.

§ 61
CZWÓRNIK KRZYŻOWY

Czwórnik krzyżowy zawiera 4 oporności pozorne, połączone z sobą, jak wskazuje rys. 142. Rozpatrzymy tylko czwórnik krzyżowy symetryczny, w którym po dwie odpowiednie oporności są sobie równe. Ze schematu, na którym oznaczone są napięcia i prądy w róż-



Rys. 142

nych częściach układu, otrzymamy stosując prawa Kirchhoffa:

$$\hat{I}_1 = \hat{I}_3 + \hat{I}_4; \quad \hat{I}_2 = \hat{I}_3 - \hat{I}_4,$$

skąd

$$\hat{I}_3 = \frac{\hat{I}_1 + \hat{I}_2}{2}; \quad \hat{I}_4 = \frac{\hat{I}_1 - \hat{I}_2}{2};$$

następnie

$$\hat{U}_1 = \hat{I}_4 \hat{Z}_2 + \hat{I}_3 \hat{Z}_1 = \frac{\hat{I}_1 - \hat{I}_2}{2} \hat{Z}_2 + \frac{\hat{I}_1 + \hat{I}_2}{2} \hat{Z}_1$$

$$\hat{U}_1 - \hat{U}_2 = \hat{I}_3 \hat{Z}_1 + \hat{I}_3 \hat{Z}_1 = 2 \hat{I}_3 \hat{Z}_1$$

albo

$$\hat{U}_1 = \frac{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2}{2} \hat{I}_1 + \frac{\hat{Z}_1 - \hat{Z}_2}{2} \hat{I}_2, \tag{78}$$

$$\hat{U}_1 - \hat{U}_2 = \hat{Z}_1 (\hat{I}_1 + \hat{I}_2). \tag{79}$$

Z wzoru (78) określamy

$$\hat{I}_2 = \frac{2\hat{U}_1}{\hat{Z}_1 - \hat{Z}_2} - \frac{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2}{\hat{Z}_1 - Z_2} \hat{I}_1, \tag{80}$$

więc

$$\hat{I}_1 - \hat{I}_2 = \hat{I}_1 + \frac{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2}{Z_1 - \hat{Z}_2} \hat{I}_1 - \frac{2}{\hat{Z}_1 - \hat{Z}_2} \hat{U}_1 = \frac{2}{\hat{Z}_1 - \hat{Z}_2} (\hat{I}_1 \hat{Z}_1 - \hat{U}_1). \tag{81}$$

Dla stanu jałowego ($I_2 = 0$), z (78)

$$\hat{U}_{10} = \frac{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2}{2} \hat{I}_{10}, \tag{82}$$

skąd oporność pozorna w stanie jałowym

$$\hat{Z}_0 = \frac{\hat{U}_{10}}{\hat{I}_{10}} = \frac{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2}{2}; \tag{83}$$

z (79)
$$\hat{U}_{10} - \hat{U}_2 = \hat{Z}_1 \hat{I}_{10}; \tag{84}$$

podstawiając do tego wzoru wartość $\hat{I}_{10}$ z (82) otrzymamy:

$$\hat{U}_{10} - \hat{U}_2 = \frac{2\hat{Z}_1}{\hat{Z}_1 + Z_2} \hat{U}_{10},$$

$$\hat{U}_{10} \left(1 - \frac{2\hat{Z}_1}{Z_1 + Z_2}\right) = \hat{U}_2,$$

$$\hat{U}_{10} = \frac{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2}{\hat{Z}_2 - \hat{Z}_1} \hat{U}_2, \tag{85}$$

wobec tego z (82) i (85)

$$\hat{I}_{10} = \frac{2}{\hat{Z}_2 - \hat{Z}_1} \hat{U}_2. \tag{86}$$

Dla stanu zwarcia ($U_2 = 0$) z (79)

$$\hat{U}_{1z} = \hat{I}_{1z} \hat{Z}_1 + \hat{I}_2 \hat{Z}_1, \tag{87}$$

z (80)

$$\hat{I}_2 = \frac{2}{Z_1 - Z_2} \hat{U}_{1z} - \frac{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2}{Z_1 - \hat{Z}_2} \hat{I}_{1z}.$$

Podstawiamy do tego wzoru wartość $\hat{U}_{1z}$ z (87)

$$\hat{I}_2 = \frac{2}{\hat{Z}_1 - \hat{Z}_2}(\hat{I}_{1z}\hat{Z}_1 + \hat{I}_2\hat{Z}_1) - \frac{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2}{\hat{Z}_1 - \hat{Z}_2}\hat{I}_{1z},$$

$$\hat{I}_{1z}\left(\frac{2\hat{Z}_1}{\hat{Z}_1 - \hat{Z}_2} - \frac{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2}{\hat{Z}_1 - \hat{Z}_2}\right) = \hat{I}_2\left(1 - \frac{2\hat{Z}_1}{\hat{Z}_1 - \hat{Z}_2}\right),$$

$$\hat{I}_{1z}\frac{\hat{Z}_1 - \hat{Z}_2}{\hat{Z}_1 - \hat{Z}_2} = \hat{I}_2\frac{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2}{\hat{Z}_2 - \hat{Z}_1},$$

$$\hat{I}_{1z} = \frac{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2}{\hat{Z}_2 - \hat{Z}_1}\hat{I}_2. \tag{88}$$

podstawiając ostatnią wartość $\hat{I}_{1z}$ do (87), otrzymamy:

$$\hat{U}_{1z} = \frac{(\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2)\hat{Z}_1}{\hat{Z}_2 - \hat{Z}_1}\hat{I}_2 + \hat{Z}_1\hat{I}_2 = \frac{\hat{Z}_1^2 + \hat{Z}_1\hat{Z}_2 + \hat{Z}_1\hat{Z}_2 - \hat{Z}_1^2}{\hat{Z}_2 - \hat{Z}_1}\hat{I}_2,$$

czyli

$$\hat{U}_{1z} = \frac{2\hat{Z}_1\hat{Z}_2}{\hat{Z}_2 - \hat{Z}_1}\hat{I}_2; \tag{89}$$

z (88) i (89) znajdujemy

$$\hat{Z}_z = \frac{\hat{U}_{1z}}{\hat{I}_{1z}} = \frac{2\hat{Z}_1\hat{Z}_2}{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2}. \tag{90}$$

Na podstawie (26) oraz (85), (86), (88) i (89)

$$\hat{U}_1 = \hat{U}_{10} + \hat{U}_{1z} = \frac{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2}{\hat{Z}_2 - \hat{Z}_1}\hat{U}_2 + \frac{2\hat{Z}_1\hat{Z}_2}{\hat{Z}_2 - \hat{Z}_1}\hat{I}_2, \tag{91}$$

$$\hat{I}_1 = \hat{I}_{10} + \hat{I}_{1z} = \frac{2}{\hat{Z}_2 - \hat{Z}_1}\hat{U}_2 + \frac{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2}{\hat{Z}_2 - \hat{Z}_1}\hat{I}_2. \tag{92}$$

Z wzorów tych wynika, że stałe z podstawionych wzorów (1) i (2) wynoszą

$$A = D = \frac{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2}{\hat{Z}_2 - \hat{Z}_1}; \quad B = \frac{2\hat{Z}_1\hat{Z}_2}{\hat{Z}_2 - \hat{Z}_1}; \quad C = \frac{2}{\hat{Z}_2 - \hat{Z}_1}. \tag{93}$$

Wprowadzając, jak i w poprzednio rozpatrzonych typach czwórnika, wielkość $\hat{S}$ (czwórnik symetryczny), będziemy mieli

$$\frac{\hat{U}_{10}}{\hat{U}_2} = \frac{\hat{I}_{1z}}{\hat{I}_2} = \hat{S} = \frac{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2}{\hat{Z}_2 - \hat{Z}_1}. \tag{94}$$

Z wzorów (83), (90) i (94) otrzymamy

$$\hat{Z}_1 = \hat{Z}_0\frac{\hat{S} - 1}{\hat{S}}, \tag{95}$$

$$\hat{Z}_2 = \hat{Z}_z\frac{\hat{S}}{\hat{S} - 1}. \tag{96}$$

Biorąc pod uwagę (94), (95) i (96), możemy wyrazić stałe czwórnika z (93) w postaci

$$A = D = \hat{S}; \quad B = \hat{S}\hat{Z}_z; \quad C = \frac{\hat{S}}{\hat{Z}_0}.$$

Wzory (91) i (92) możemy napisać w postaci

$$\hat{U}_1 = \hat{S}\hat{U}_2 + \hat{S}\hat{Z}_z\hat{I}_2 = \hat{S}(\hat{U}_2 + \hat{Z}_z\hat{I}_2), \tag{97}$$

$$\hat{I}_1 = \frac{\hat{S}}{\hat{Z}_0}\hat{U}_2 + \hat{S}\hat{I}_2 = \hat{S}\left(\frac{\hat{U}_2}{\hat{Z}_0} + \hat{I}_2\right) = \hat{S}(\hat{Y}_0\hat{U}_2 + \hat{I}_2). \tag{98}$$

Do tych wzorów dochodzi jeszcze zależność

$$\hat{S} = \sqrt{\frac{\hat{Z}_0}{\hat{Z}_0 - \hat{Z}_z}} = \sqrt{\frac{1}{1 - \hat{Y}_0\hat{Z}_z}}. \tag{99}$$

§ 62

OKREŚLENIE WIELKOŚCI $\hat{S}_0$ i $\hat{S}_z$ ZA POMOCĄ POMIARÓW

Rozpatrując wzory dla czwórników typu T, Π i krzyżowego, wprowadziliśmy wielkości S_0 i S_z, przy czym, jak widać z wzorów (41), (42), (67), (68), (97) i (98),

$$\hat{S}_0 = A; \quad \hat{S}_z = D;$$

a dla czwórników symetrycznych

$$\hat{S}_0 = \hat{S}_z = \hat{S} = A = D.$$

W § 57 podana była metoda doświadczalna, za pomocą której możemy znaleźć wartości stałych A, B, C i D, oparta na pomiarze oporności pozornych czwórnika w stanie jałowym i w stanie zwarcia, przy czym w ogólnym przypadku przeprowadza się pomiary z obu stron czwórnika; na początku znajdujemy oporności pozorne $\hat{Z}_{10}$ i $\hat{Z}_{1z}$, w końcu znajdujemy oporności pozorne $\hat{Z}_{20}$ i $\hat{Z}_{2z}$. Dla czwórników symetrycznych wystarczą pomiary tylko na początku.

Korzystamy z gotowych wzorów (18) i (21); każdy z nich daje nam A i D, czyli $\hat{S}_0$ i $\hat{S}_z$ w dwóch postaciach. Mnożąc A przez D, biorąc pod uwagę drugie postacie, otrzymamy

$$\hat{S}_0\hat{S}_z = \frac{\hat{Z}_{10}}{\sqrt{\hat{Z}_{20}(\hat{Z}_{10} - \hat{Z}_{1z})}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{Z}_{20}}{\hat{Z}_{10} - \hat{Z}_{1z}}} = \frac{\hat{Z}_{10}}{\hat{Z}_{10} - \hat{Z}_{1z}}. \tag{100}$$

Biorąc zaś wartości A i D w pierwszej postaci, otrzymamy, dzieląc A przez D,

$$\frac{\hat{S}_0}{\hat{S}_z} = \sqrt{\frac{\hat{Z}_{10}}{\hat{Z}_{20} - \hat{Z}_{2z}}} \cdot \frac{\sqrt{\hat{Z}_{10}(\hat{Z}_{20} - \hat{Z}_{2z})}}{\hat{Z}_{20}} = \frac{\hat{Z}_{10}}{\hat{Z}_{20}}. \tag{101}$$

Ten ostatni wzór można na podstawie (17) napisać również w postaci

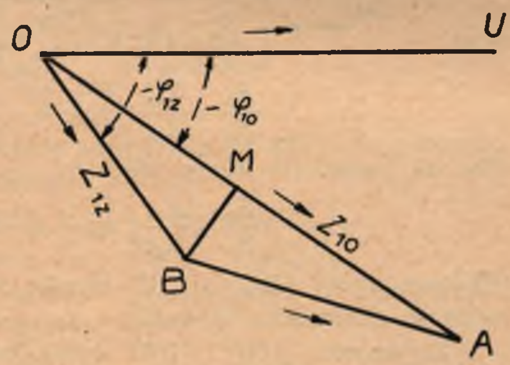
$$\frac{\hat{S}_0}{\hat{S}_z} = \frac{\hat{Z}_{1z}}{\hat{Z}_{2z}}. \tag{102}$$

Wielkości $\hat{S}_0$ i $\hat{S}_z$ mają argumenty, które oznaczyliśmy przez σ_0 i σ_z. Kąty przesunięcia faz między prądami znalezionymi z pomiaru i napięciem na początku czwórnika oznaczmy odpowiednio przez φ_{10}, φ_{1z}, φ_{20} i φ_{2z}. Wówczas argumenty rozpatrywanych oporności pozornych będą $-\varphi_{10}$, $-\varphi_{1z}$, $-\varphi_{20}$ i $-\varphi_{2z}$.

Wynika to z tego, że jeśli

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}}{\hat{Z}}; \quad Ie^{j\varphi} = \frac{\hat{U}}{Ze^{j\alpha}} = Ie^{-j\alpha},$$

to $\alpha = -\varphi$.



Rys. 143

Dla znalezienia modułów i argumentów $\hat{S}_0$ i $\hat{S}_z$ służy wykres dla wzoru (100). Bierzemy dowolny kierunek OU jako podstawowy (rys. 143), odpowiadający napięciu, i odkładamy pod kątami $-\varphi_{10}$ i $-\varphi_{1z}$ $OA = Z_{10}$, $OB = Z_{1z}$; wtedy $BA = \hat{Z}_{10} - \hat{Z}_{1z}$. Biorąc pod uwagę, że $\sphericalangle AOB = -\varphi_{1z} - (-\varphi_{10}) = \varphi_{10} - \varphi_{1z}$, otrzymamy z $\triangle AOB$

$$BA = \sqrt{OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cos(\varphi_{10} - \varphi_{1z})},$$

czyli

$$BA = \sqrt{Z^2_{10} + Z^2_{1z} - 2Z_{10}Z_{1z}\cos(\varphi_{10} - \varphi_{1z})}.$$

W ten sposób, na podstawie wzoru (100), będziemy mieli

$$S_0 S_z = \frac{OA}{BA} = \frac{Z_{10}}{\sqrt{Z^2_{10} + Z^2_{1z} - 2Z_{10}Z_{1z}\cos(\varphi_{10} - \varphi_{1z})}}. \tag{103}$$

Opuszczamy z punktu B prostopadłą BM na OA. Z $\triangle MAB$ mamy:

$$\operatorname{tg} \sphericalangle OAB = \frac{MB}{MA} = \frac{MB}{OA - OM} = \frac{OB \sin \sphericalangle AOB}{OA - OB \cos \sphericalangle AOB},$$

czyli

$$\operatorname{tg} \sphericalangle OAB = \frac{Z_{1z}\sin(\varphi_{10} - \varphi_{1z})}{Z_{10} - Z_{1z}\cos(\varphi_{10} - \varphi_{1z})}. \tag{104}$$

Jak widać z wzoru (100), argument $\hat{S}_0\hat{S}_z$ z jednej strony równy jest sumie argumentów $\hat{S}_0$ i $\hat{S}_z$, czyli $\sigma_0 + \sigma_z$, z drugiej strony zaś równy jest różnicy argumentów $\hat{Z}_{10}$ i $(\hat{Z}_{10} - \hat{Z}_{1z})$, czyli kątowi OAB, którego tangens mamy w wzorze (104), więc $\sigma_0 + \sigma_z = \sphericalangle OAB$.

$$\operatorname{tg}(\sigma_0 + \sigma_z) = \frac{Z_{1z} \sin(\varphi_{10} - \varphi_{1z})}{Z_{10} - Z_{1z} \cos(\varphi_{10} - \varphi_{1z})}. \tag{105}$$

Następnie ze wzoru (101) mamy:

$$\frac{S_0 e^{j\sigma_0}}{S_z e^{j\sigma_z}} = \frac{Z_{10} e^{-j\varphi_{10}}}{Z_{20} e^{-j\varphi_{20}}},$$

skąd

$$\frac{S_0}{S_z} e^{j(\sigma_0 - \sigma_z)} = \frac{Z_{10}}{Z_{20}} e^{j(\varphi_{20} - \varphi_{10})},$$

$$\frac{S_0}{S_z} = \frac{Z_{10}}{Z_{20}}; \quad \sigma_0 - \sigma_z = \varphi_{20} - \varphi_{10}; \tag{106}$$

albo na podstawie wzoru (102)

$$\frac{S_0}{S_z} = \frac{Z_{1z}}{Z_{2z}}; \quad \sigma_0 - \sigma_z = \varphi_{2z} - \varphi_{1z}. \tag{107}$$

Ostatnie wzory (106) i (107) łącznie z wzorami (103) i (105) dają możność znalezienia modułów i argumentów wielkości $\hat{S}_0$ i $\hat{S}_z$.

Ze wzorów (106) i (107) wynikałoby, że jeden pomiar, czy to w stanie jałowym, czy to w stanie zwarcia, jest zbyteczny; lepiej jednak przeprowadzić wszystkie cztery pomiary, czwarty służy wtenczas dla kontroli.

W przypadku czwórnika symetrycznego oczywiście wystarczą tylko dwa pomiary, na początku czwórnika, wtedy bowiem $\hat{S}_0 = \hat{S}_z = \hat{S}$; $\sigma_0 = \sigma_z = \sigma$, i wzory (103) i (105) dają nam

$$S = \sqrt{\frac{Z_{10}}{Z^2_{10} + Z^2_{1z} + 2 Z_{10} Z_{1z} \cos(\varphi_{10} - \varphi_{1z})}},$$

$$\operatorname{tg} 2\sigma = \frac{Z_{1z} \sin(\varphi_{10} - \varphi_{1z})}{Z_{10} - Z_{1z} \cos(\varphi_{10} - \varphi_{1z})}.$$

§ 63

ŁĄCZENIE CZWÓRNIKÓW

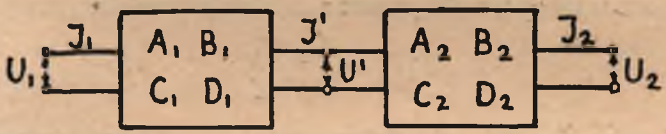
Rozpatrzmy dwa różne czwórniki połączone z sobą w szereg, wtedy w miejscu połączenia tych czwórników będziemy mieli wspólne napięcie i wspólny prąd; dla pierwszego czwórnika będą to wielkości wyjściowe, dla drugiego — wejściowe. Oznaczmy je przez U' i I'

(rys. 144). Stałe pierwszego czwórnika niech będą A_1, B_1, C_1 i D_1, drugiego A_2, B_2, C_2, D_2. Na podstawie wzorów (1) i (2) możemy napisać:

$$\hat{U}_1 = A_1\hat{U}' + B_1\hat{I}'; \quad \hat{I}_1 = C_1\hat{U}' + D_1\hat{I}';$$
$$U' = A_2\hat{U}_2 + B_2\hat{I}_2; \quad \hat{I}' = C_2\hat{U}_2 + D_2\hat{I}_2.$$

Podstawiamy wartości U' i I' do pierwszych dwóch równań, wówczas

$$\hat{U}_1 = A_1(A_2\hat{U}_2 + B_2\hat{I}_2) + B_1(C_2\hat{U}_2 + D_2\hat{I}_2),$$
$$\hat{I}_1 = C_1(A_2\hat{U}_2 + B_2\hat{I}_2) + D_1(C_2\hat{U}_2 + D_2\hat{I}_2),$$



Rys. 144

skąd znajdujemy zależności między napięciami i prądami na początku i w końcu rozpatrywanego układu

$$\hat{U}_1 = (A_1A_2 + B_1C_2)\,\hat{U}_2 + (A_1B_2 + B_1D_2)\,\hat{I}_2,$$
$$\hat{I}_1 = (A_2C_1 + C_2D_1)\,\hat{U}_2 + (B_2C_1 + D_1D_2)\,\hat{I}_2.$$

Gdy czwórniki są jednakowe i symetryczne, w powyższych wzorach

$$A_1 = A_2 = D_1 = D_2 = A$$
$$B_1 = B_2 = B; \quad C_1 = C_2 = C;$$

poza tym $A^2 - BC = 1$.

Wtedy ostatnie wzory przyjmą postać:

$$\hat{U}_1 = (A^2 + BC)\,\hat{U}_2 + 2AB\hat{I}_2,$$
$$\hat{I}_1 = 2AC\hat{U}_2 + (A^2 + BC)\,\hat{I}_2;$$

zakładając w tych wzorach $BC = A^2 - 1$, otrzymamy

$$\hat{U}_1 = (2A^2 - 1)\,\hat{U}_2 + 2AB\hat{I}_2,$$
$$\hat{I}_1 = 2AC\hat{U}_2 + (2A^2 - 1)\,\hat{I}_2.$$

§ 64

WARUNKI OSIĄGNIĘCIA NAJWIĘKSZEJ MOCY NA ODBIORNIKU

Rozpatrzmy zagadnienie następujące: na początku napięcie obwodu u źródła U_1 ma wartość stałą, na odbiorniku spółczynnik mocy $\cos\varphi_2$ również pozostaje bez zmiany. W jakich warunkach moc oddawana odbiornikowi będzie miała wartość największą? Oznaczając tę moc przez P_2, mamy

$$P_2 = U_2 I_2 \cos\varphi_2.$$

Wartość P_2 oczywiście będzie największą wtedy, gdy iloczyn $U_2 I_2$ będzie największy.

Wszystko, co się znajduje między źródłem prądu i odbiornikiem, jak przewody, transformatory itp., możemy zastąpić czwórnikiem. Wtedy, na podstawie określenia wielkości S_0 i S_z, będziemy mieli

$$\hat{U}_2 = \frac{\hat{U}_{10}}{\hat{S}_0}; \quad \hat{I}_2 = \frac{\hat{I}_z}{\hat{S}_z} = \frac{\hat{U}_{1z}}{\hat{S}_z \hat{Z}_z},$$

gdzie Z_z oznacza oporność pozorną w stanie zwarcia, stąd

$$\hat{U}_2 \hat{I}_2 = \frac{\hat{U}_{10} \hat{U}_{1z}}{\hat{S}_0 \hat{S}_z \hat{Z}_z};$$

ponieważ $\hat{S}_0 \hat{S}_z \hat{Z}_z$ jest wielkością stałą dla danego obwodu, więc maximum $\hat{U}_2 \hat{I}_2$ będzie odpowiadało maximum iloczynu

$$\hat{U}_{10} \hat{U}_{1z},$$

czyli maximum iloczynu modułów tych wektorów

$$U_{10} U_{1z}.$$

Z drugiej strony,

$$\hat{U}_{10} + \hat{U}_{1z} = \hat{U}_1,$$

ponieważ z założenia $\hat{U}_1$ ma wartość stałą, więc suma geometryczna wektorów $\hat{U}_{10}$ i $\hat{U}_{1z}$ jest wielkością stałą. Oznaczmy kąt przesunięcia fazy $\hat{U}_{10}$ względem $\hat{U}_{1z}$ przez α, tj.

$$\sphericalangle (\hat{U}_{10}, \hat{U}_{1z}) = \alpha;$$

dla określenia wartości tego kąta mamy

$$\hat{U}_{10} = \hat{U}_2 \hat{S}_0, \; \hat{U}_{1z} = \hat{I}_2 \hat{S}_z \hat{Z}_z = \frac{\hat{U}_2}{\hat{Z}_2} \hat{S}_z \hat{Z}_z,$$

gdzie Z_2 oznacza oporność pozorną odbiornika.

Oznaczmy

$$\sphericalangle (\hat{U}_{10}, \hat{U}_1) = \psi_0, \; \sphericalangle (\hat{U}_{1z}, \hat{U}_1) = \psi_z, \; \sphericalangle (\hat{U}_2, \hat{U}_1) = \psi_2.$$

Zważywszy, że

$$\sphericalangle (\hat{I}_2 \hat{U}_2) = \varphi_2, \quad \text{arg.}\, \hat{S}_0 = \sigma_0, \quad \text{arg.}\, \hat{S}_z = \sigma_z, \quad \text{arg.}\, \hat{Z}_z = -\varphi_z,$$
$$\text{arg.}\, \hat{Z}_2 = -\varphi_2,$$

będziemy mieli

$$\psi_0 = \psi_2 + \sigma_0,$$
$$\psi_z = \psi_2 + \varphi_2 + \sigma_z - \varphi_z,$$
$$\alpha = \psi_0 - \psi_z = \psi_2 + \sigma_0 - \psi_2 - \varphi_2 - \sigma_z + \varphi_z$$

i ostatecznie

$$a = \varphi_z - \varphi_2 + \sigma_0 - \sigma_z, \tag{108}$$

dla obwodu symetrycznego, gdy $\sigma_0 = \sigma_z$,

$$a = \varphi_z - \varphi_2. \tag{109}$$

Ponieważ wartości kątów określających kąt a są stałe dla danego obwodu, przeto i kąt a pomiędzy wektorami $\hat{U}_{10}$ i $\hat{U}_{1z}$ jest wielkością stałą.

Mamy więc do rozwiązania następujące zadanie: dwa wektory (rys. 145)

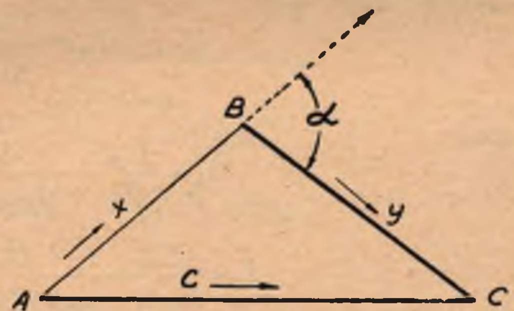
$$AB = \hat{U}_{10} = x$$
$$BC = \hat{U}_{1z} = y$$

mają stałą sumę geometryczną $AC = \hat{U}_1 = c$ i tworzą stały kąt a; trzeba znaleźć

$$\max U_{10} U_{1z} = \max xy.$$

Oznaczając

$$U = xy,$$



Rys. 145

będziemy szukali max U; z $\triangle ABC$

$$AB^2 + BC^2 + 2AB \cdot BC \cdot \cos a = c^2,$$

czyli

$$x^2 + y^2 + 2xy \cos a = c^2. \tag{110}$$

Rozpatrując y jako funkcję x, określoną ostatnim równaniem, i różniczkując, otrzymamy

$$2x + 2yy' + 2x \cos a y' + 2y \cos a = 0,$$

skąd

$$y' = -\frac{y \cos a + x}{y + x \cos a}.$$

Różniczkując U będziemy mieli

$$U' = xy' + y$$

i, podstawiając znalezioną wartość y', otrzymamy

$$U' = \frac{-xy \cos a - x^2}{y + x \cos a} + y = \frac{y^2 - x^2}{y + x \cos a}$$

przyrównując $U' = 0$, znajdujemy

$$y = x$$

czyli po podstawieniu do (110)

$$x = y = \frac{c}{\sqrt{2(1+\cos\alpha)}} = \frac{c}{2\cos\frac{\alpha}{2}};$$

ponieważ dla takiej wartości x i y $U'' < 0$, przeto warunek $y = x$ daje nam max U, a więc

$$\max \hat{U}_{10}\hat{U}_{1z}, \text{ czyli } \max P_2$$

nastąpi wtedy, gdy

$$U_{10} = U_{1z} = \frac{U_1}{2\cos\frac{\alpha}{2}},$$

ale

$$U_2 = \frac{U_{10}}{S_0} = \frac{U_1}{2\,S_0\cos\frac{\alpha}{2}},$$

$$I_2 = \frac{U_{1z}}{S_z Z_z} = \frac{U_1}{2\,S_z Z_z\cos\frac{\alpha}{2}},$$

więc

$$\max P_2 = \max U_2 I_2\cos\varphi_2 = \frac{U_1^2\cos\varphi_2}{4\cos^2\frac{\alpha}{2}\,S_0 S_z Z_z}.$$

Ponieważ

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha = 1 + \cos(\varphi_z - \varphi_2 + \sigma_0 - \sigma_z),$$

możemy napisać

$$\max P_2 = \frac{U_1^2\cos\varphi_2}{2S_0 S_z Z_z[1+\cos(\varphi_z - \varphi_2 + \sigma_0 - \sigma_z)]}.$$

Rozpatrując teraz największą wartość max P_2 w zależności od φ_2, możemy znaleźć największą z największych wartości mocy, którą możemy osiągnąć na odbiorniku, dobierając odpowiednio U_2, I_2 oraz φ_2. W tym celu bierzemy pochodną ostatniego wzoru względem φ_2 i przyrównywamy ją do zera; po odpowiednich skróceniach otrzymamy

$$-[1+\cos(\varphi_z - \varphi_2 + \sigma_0 - \sigma_z)]\sin\varphi_2 - \sin(\varphi_z - \varphi_2 + \sigma_0 - \sigma_z)\cos\varphi_2 = 0$$

lub

$$(1+\cos\alpha)\sin\varphi_2 + \sin\alpha\cos\varphi_2 = 0;$$

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = -\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = -\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = -\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2};$$

$$\varphi_2 = -\frac{\alpha}{2} = -\frac{(\varphi_z - \varphi_2 + \sigma_0 - \sigma_z)}{2},$$

skąd

$$\varphi_2 = -(\varphi_z + \sigma_0 - \sigma_z);$$

dla obwodu symetrycznego będziemy mieli

$$\varphi_2 = -\varphi_z$$

i w tym przypadku największa możliwa moc będzie

$$\max P_2 = \frac{U_1^2\cos\varphi_z}{2S_0S_zZ_z(1+\cos 2\varphi_z)} =$$

$$= \frac{U_1^2\cos\varphi_z}{4S_0S_zZ_z\cos^2\varphi_z} = \frac{U_1^2}{4S_0S_zZ_z\cos\varphi_z}.$$

§ 65

WYKRES PRACY OBWODU PRĄDU ZMIENNEGO

Wykresem pracy obwodu prądu zmiennego nazywamy wykres, za pomocą którego możemy określać napięcia i prądy powstające na początku i w końcu obwodu, jak również moc pobieraną i oddawaną, przy zachowaniu pewnych warunków. Podstawą do takich wykresów są pomiary przeprowadzone w stanie jałowym i w stanie zwarcia. W tym celu cały układ znajdujący się między źródłem prądu i odbiornikiem zamienimy na czwórnik.

Wychodzimy znowu z założenia, że napięcie U_1 na początku obwodu pozostaje bez zmiany i że spółczynnik mocy na odbiorniku $\cos\varphi_2$ ma wartość stałą. Mamy trzy zasadnicze równania (41), (42) i (43) lub (67), (68) i (69)

$$\hat{U}_1 = \hat{U}_{10} + \hat{U}_{1z} = \hat{U}_2\hat{S}_0 + \hat{I}_2\hat{S}_z\hat{Z}_z, \tag{111}$$

$$\hat{I}_1 = \hat{I}_{10} + \hat{I}_{1z} = \hat{U}_2\frac{\hat{S}_0}{\hat{Z}_0} + \hat{I}_2\hat{S}_z, \tag{112}$$

$$\hat{S}_0\hat{S}_z = \frac{\hat{Z}_0}{\hat{Z}_0 - \hat{Z}_z}. \tag{113}$$

Z pierwszego równania określamy

$$\hat{U}_2\hat{S}_0 = \hat{U}_1 - \hat{I}_2\hat{S}_z\hat{Z}_z.$$

Podstawiając do drugiego, znajdziemy

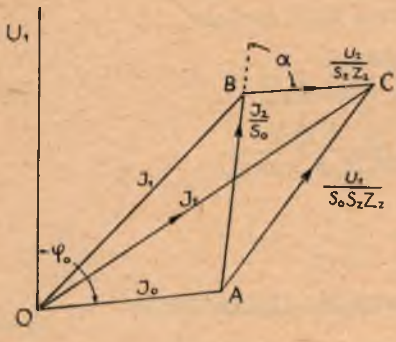
$$\hat{I}_1 = \frac{\hat{U}_1 - \hat{I}_2\hat{S}_z\hat{Z}_z}{\hat{Z}_0} + \hat{I}_2\hat{S}_z = \frac{\hat{U}_1}{\hat{Z}_0} + \hat{I}_2\hat{S}_z\left(\hat{I} - \frac{\hat{Z}_z}{\hat{Z}_0}\right),$$

na mocy zaś trzeciego równania

$$\hat{I}_1 = \frac{\hat{U}_1}{\hat{Z}_0} + \frac{\hat{I}_2}{\hat{S}_0}.$$

Oznaczmy przez I_0 prąd na początku obwodu przy napięciu U_1, gdy w końcu mamy stan jałowy; wtedy

$$\hat{I}_0 = \frac{\hat{U}_1}{\hat{Z}_0}$$



Rys. 146

ma wartość stałą, przy tym kąt przesunięcia fazy I_0 względem U_1 oznaczymy przez φ_0; możemy więc napisać

$$\hat{I}_1 = \hat{I}_0 + \frac{\hat{I}_2}{\hat{S}_0}.$$

Przyjmując dowolny kierunek, np. pionowy, jako kierunek napięcia U_1, odłóżmy pod kątem φ_0 $OA = \hat{I}_0$ (rys. 146). Gdybyśmy wiedzieli, jaka jest wartość wektora $\frac{\hat{I}_2}{\hat{S}_0}$ i jaki jest jego kierunek, wtedy dodając geometrycznie ten wektor do wektora $\hat{I}_0$, otrzymalibyśmy wektor $\hat{I}_1$. Przypuśćmy, że AB stanowi wektor $\frac{\hat{I}_2}{\hat{S}_0}$, wtedy OB wyraża wektor $\hat{I}_1$.

Dzieląc obie strony równania (111) przez $\hat{S}_0\hat{S}_z\hat{Z}_z$, otrzymamy

$$\frac{\hat{U}_1}{\hat{S}_0\hat{S}_z\hat{Z}_z} = \frac{\hat{U}_{10}}{\hat{S}_0\,\hat{S}_z\hat{Z}_z} + \frac{\hat{U}_{1z}}{\hat{S}_0\hat{S}_z\hat{Z}_z} = \frac{\hat{U}_2}{\hat{S}_z\hat{Z}_z} + \frac{\hat{I}_2}{\hat{S}_0}. \tag{114}$$

Kąt pomiędzy wektorami $\hat{U}_{10}$ i $\hat{U}_{1z}$, oznaczony poprzednio przez α, został określony na podstawie wzorów (108), względnie (109).

Jeżeli te dwa wektory $\hat{U}_{10}$ i $\hat{U}_{1z}$ podzielimy przez jeden i ten sam iloczyn symboli $\hat{S}_0\hat{S}_z\hat{Z}_z$, to, oczywiście, otrzymane w ten sposób nowe wektory będą tworzyły ze sobą ten sam kąt α, czyli

$$\sphericalangle\left(\frac{\hat{U}_2}{\hat{S}_z\hat{Z}_z},\ \frac{\hat{I}_2}{\hat{S}_0}\right) = \alpha.$$

Kąt α będziemy odmierzali w kierunku od wektora $\frac{\hat{I}_2}{\hat{S}_0}$ do wektora $\frac{\hat{U}_z}{\hat{S}_z Z_z}$; na rys. 146 $\alpha < O$; wektor $\frac{\hat{U}_2}{\hat{S}_z Z_z} = BC$ jest przesunięty wstecz względem wektora $\frac{\hat{I}_2}{\hat{S}_0}$.

Przechodząc do naszego wykresu, przeprowadzamy od punktu B pod kątem α, np. wstecz ($\alpha < O$) od AB, odcinek

$$BC = \frac{\hat{U}_2}{\hat{S}_z Z_z},$$

wtedy, na zasadzie (114), geometryczna suma AB i BC będzie

$$AC = \frac{\hat{U}_1}{\hat{S}_0 \hat{S}_z Z_z}.$$

Wyraz ten stanowi wielkość stałą, więc jeżeli do tego stałego wektora dodamy również stały wektor $OA = \hat{I}_0 = \frac{\hat{U}_1}{Z_0}$, wtedy otrzymamy również jako wektor stały geometryczną sumę

$$OC = \frac{\hat{U}_1}{Z_0} + \frac{\hat{U}_1}{\hat{S}_0 \hat{S}_z Z_z} = \frac{\hat{U}_1}{Z_z}\left(\frac{\dot{Z}_z}{Z_0} + \frac{1}{\hat{S}_0 \hat{S}_z}\right).$$

Wyraz w nawiasach, na zasadzie wzoru (113), równy jest 1, zaś $\frac{\hat{U}_1}{\dot{Z}_z} = \hat{I}_z$ stanowi prąd płynący na początku obwodu, gdy koniec obwodu jest zwarty; kąt przesunięcia fazy tego prądu względem napięcia U_1 oznaczmy przez φ_z; będzie to argument prądu, gdy kierunek wektora U_1 przyjmiemy jako oś podstawową.

W ten sposób $OC = \hat{I}_z$; więc jeżeli będziemy mieli wartości I_0, I_z, φ_0, φ_z, wtedy punkty A i C będą na wykresie końcami wiadomych wektorów $\hat{I}_0$ i $\hat{I}_z$; łącząc te punkty, otrzymamy odcinek AC.

Wektory

$$AB = \frac{\hat{I}_2}{\hat{S}_0} \quad \text{i} \quad BC = \frac{\hat{U}_2}{\hat{S}_z Z_z}$$

mają zatem stałą i wiadomą sumę geometryczną AC oraz tworzą ze sobą stały i wiadomy kąt α.

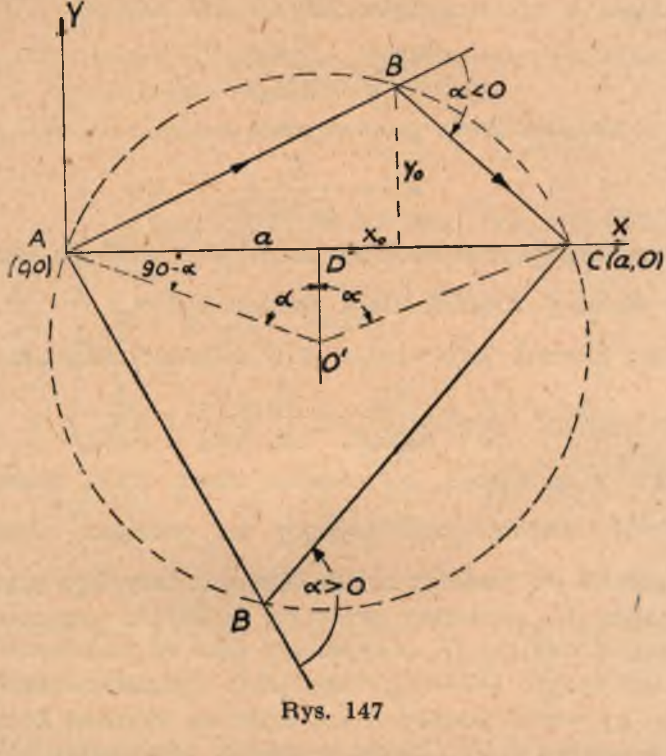
Jeżeli na danym odcinku $AC = a$ zbudujemy trójkąt tak, aby dwa pozostałe boki tworzyły kąt zewnętrzny α (rys. 147), wtedy geometrycznym miejscem wierzchołków B takich trójkątów będzie koło, którego środek O' ma spółrzędne

$$x_c = \frac{a}{2}, \quad y_c = \frac{a}{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}, \tag{115}$$

zaś promień

$$r = \frac{a}{2 \sin \alpha},$$

czyli że dany odcinek AC stanowi cięciwę odpowiadającą kątowi środkowemu 2α, środek zaś znajduje się na prostopadłej przeprowadzonej przez środek tego odcinka.



Rys. 147

Aby tego dowieść, wybieramy osie współrzędnych, biorąc w A początek: oś X w kierunku AC, zaś oś Y w kierunku prostopadłym. Oznaczmy współrzędne zmiennego punktu B przez x_0 i y_0; współrzędne punktu A będą 0,0, zaś punktu C — będą a, 0. Stosując wzór na równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty, otrzymamy równanie BC

$$\frac{y}{y_0} = \frac{x - a}{x_0 - a}, \quad \text{czyli} \quad y = \frac{y_0}{x_0 - a} x - \frac{a y_0}{x_0 - a},$$

równanie AB

$$\frac{y}{y_0} = \frac{x}{x_0}, \quad \text{czyli} \quad y = \frac{y_0}{x_0} x.$$

Kąt pomiędzy prostą BC i prostą AB oznaczyliśmy przez α; z równań prostych wynika, że

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\dfrac{y_0}{x_0 - a} - \dfrac{y_0}{x_0}}{1 + \dfrac{y_0^2}{x_0(x_0 - a)}} = \frac{a y_0}{x_0^2 - a x_0 + y_0^2},$$

skąd

$$x_0^2 + y_0^2 - a x_0 - \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha} y_0 = 0,$$

albo

$$\left(x_0 - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y_0 - \frac{a}{2\operatorname{tg}\alpha}\right)^2 = \frac{a^2}{4}\left(1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}\right) = \frac{a^2}{4\sin^2\alpha}.$$

Jest to równanie koła, którego środek ma spółrzędne $\frac{a}{2}$ i $\frac{a}{2\operatorname{tg}\alpha}$, promień zaś równy jest $\frac{a}{2\sin\alpha}$.

Na rys. 147 O' stanowi środek takiego koła.

Z trójkąta $AO'D$ lub $DO'C$ mamy

$$\operatorname{tg}\sphericalangle AO'D = \frac{AD}{O'D} = \frac{\dfrac{a}{2}}{\dfrac{a}{2\operatorname{tg}\alpha}} = \operatorname{tg}\alpha,$$

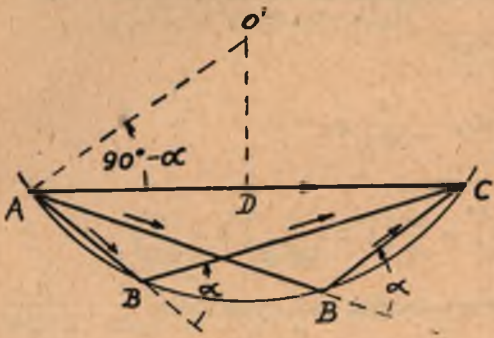
skąd

$$\sphericalangle AO'D = \alpha.$$

Z rysunku widzimy, że dla znalezienia środka koła O' musimy ze środka odcinka AC przeprowadzić prostopadłą, następnie z punktu A pod kątem $90° - \alpha$ do AC przeprowadzić prostą aż do przecięcia z prostopadłą w poszukiwanym punkcie O'.

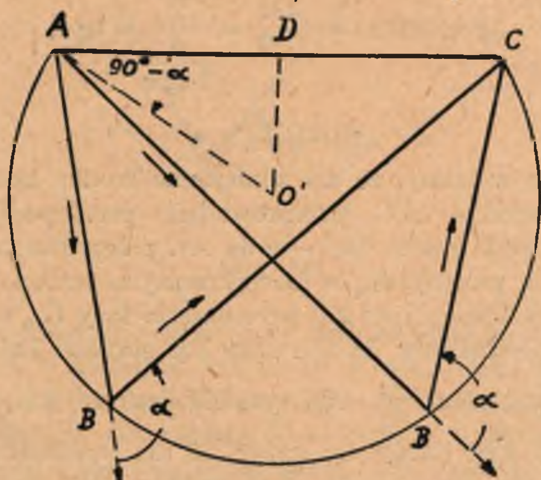
Kąt α określiliśmy jako kąt przesunięcia fazy $\hat{U}_{10}$ względem $\hat{U}_{1z}$; następnie stwierdziliśmy, że ten sam kąt stanowi kąt przesunięcia fazy $\frac{\hat{U}_2}{\hat{S}_z Z_z}$ względem $\frac{\hat{I}_2}{\hat{S}_0}$. Na rys. 147 jest to kąt, jaki tworzy BC względem AB. Łatwo zauważyć, że dla punktów B, mających rzędne dodatnie, kąt $\alpha < 0$, czyli wektor BC, jest przesunięty wstecz względem wektora AB; gdy zaś rzędne punktów B będą ujemne, wtedy $\alpha > 0$. Z tego wynika, że przy $\alpha > 0$ zadaniu będzie odpowiadać część koła leżąca pod odcinkiem AC (osią X), zaś przy $\alpha < 0$ — część koła leżąca nad odcinkiem AC. Kąt α, posiadający ważne znaczenie w rozpatrywanym zagadnieniu, może się zmieniać w granicach od $-180°$ do $+180°$.

Pozostawiając do szczególnego omówienia przypadki, gdy $\alpha = 0, \pm \frac{\pi}{2}, \pm \pi$, rozpatrzymy, w jaki sposób zmienia się położenie środka interesującego nas koła przy zmianie wartości kąta α. Na podstawie wzorów (115) znak rzędnej środka koła jest taki sam jak i znak tg α; przy tym będziemy mogli sprawdzić, że we wszystkich przypadkach dla znalezienia tego środka wystarczy z punktu A przeprowadzić prostą pod kątem $90° - \alpha$ do AC z uwzględnieniem znaku tego kąta. Możemy ustalić cztery następujące przypadki:



Rys. 148

I. (rys. 148). $\alpha > 0$, lecz $< 90°$,
tg $\alpha > 0$,
$90° - \alpha > 0$, lecz $< 90°$.



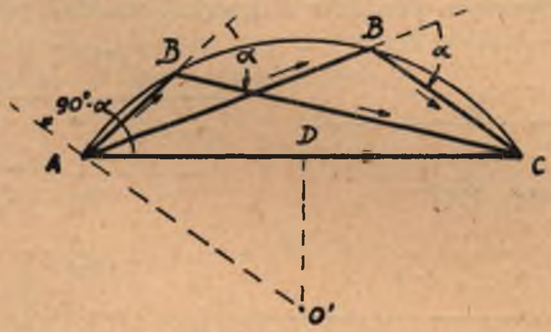
Rys. 149

AO' tworzy z AC kąt dodatni i ostry; geometryczne miejsce punktów B znajduje się pod odcinkiem AC.

II. (rys. 149). $\alpha > 90°$, lecz $< 180°$, tg $\alpha < 0$,
$90° - \alpha > -90°$, lecz < 0.

AO' tworzy z AC kąt ujemny i ostry; miejsce geometryczne punktów B znajduje się pod odcinkiem AC.

III. (rys. 150).

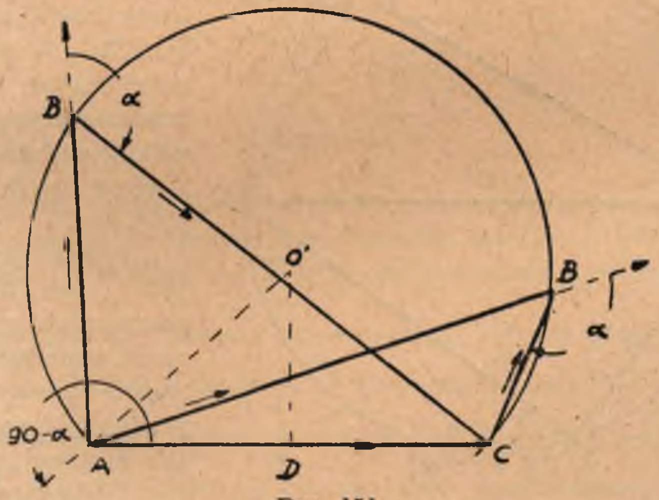


Rys. 150

$$\alpha < 0, \text{ lecz } > -90°,$$
$$\operatorname{tg} \alpha < 0,$$
$$90° - \alpha > 90°, \text{ lecz } < 180°.$$

AO' tworzy z AC kąt dodatni i rozwarty; miejsce geometryczne punktów B znajduje się nad odcinkiem AC.

IV. (rys. 151).

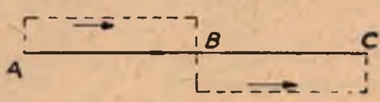


Rys. 151

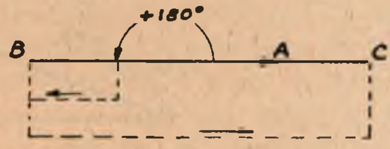
$$\alpha < -90°, \text{ lecz } > -180°,$$
$$\operatorname{tg} \alpha > 0,$$
$$90° - \alpha > 180°, \text{ lecz } < 270°.$$

AO' tworzy z AC kąt dodatni, zawarty pomiędzy 180° i 270°; miejsce geometryczne punktów B znajduje się nad odcinkiem AC.

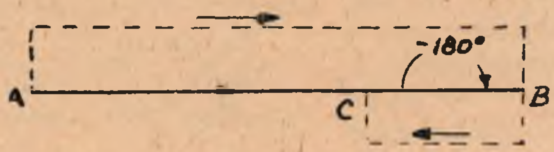
W przypadkach szczególnych, gdy $\alpha = 0, +180°, -180°$, miejscem geometrycznym punktów B będzie linia AC, przy tym



Rys. 152

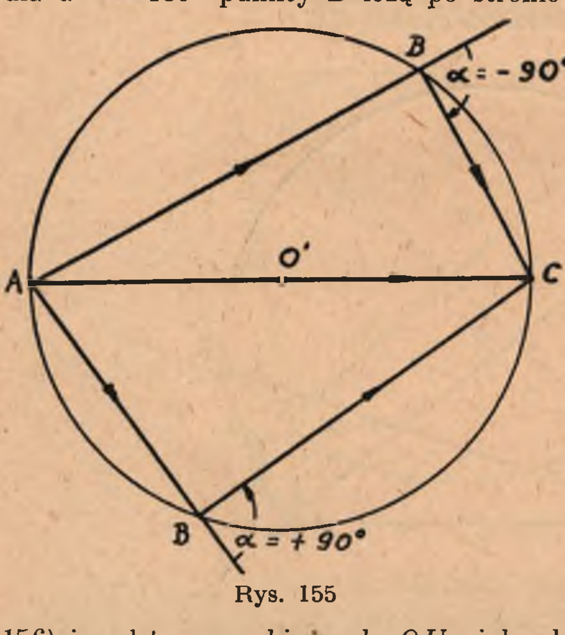


Rys. 153



Rys. 154

dla $\alpha = 0$ punkty B leżą pomiędzy A i C (rys. 152);
dla $\alpha = +180°$ punkty B leżą po stronie A (rys. 153);
dla $\alpha = -180°$ punkty B leżą po stronie C (rys. 154);



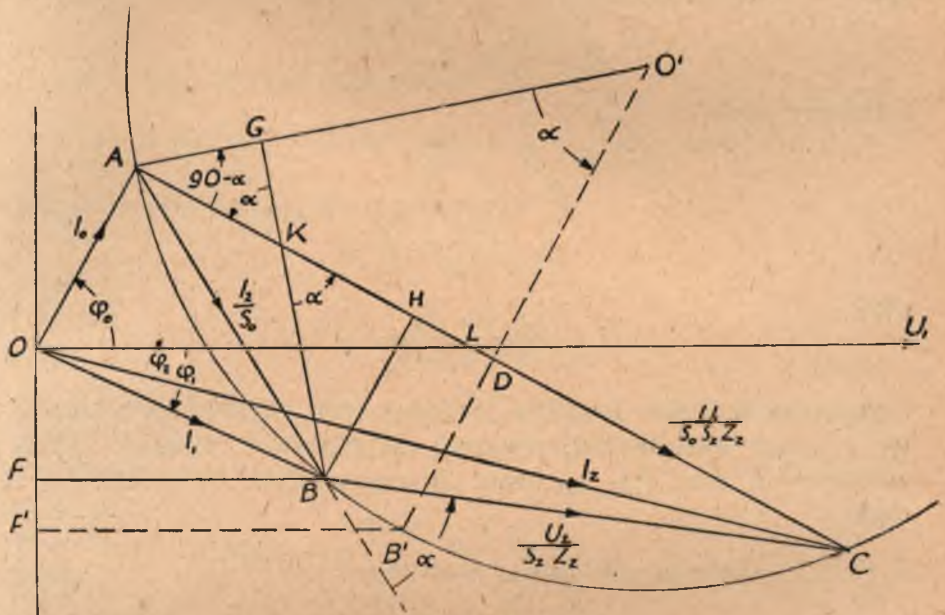
Rys. 155

gdy $\alpha = \pm 90°$, otrzymujemy środek koła w środku odcinka AC, przy tym dla $\alpha = +90°$ geometrycznym miejscem punktów B będzie dolne półkole, zaś dla $\alpha = -90°$ — górne półkole (rys. 155).

Powracając do rys. 146 i opierając się na powyższych rozumowaniach, możemy wykonać wykres pracy obwodu prądu zmiennego w sposób następujący:

Wybieramy początek wektorów O (rys. 156) i podstawowy kierunek OU_1 jako kierunek wektora stałego napięcia U_1. Od początku O pod kątami φ_0 i φ_z odkładamy w ustalonej skali prądów wiadome wartości $I_0 = OA$ oraz $I_z = OC$. Łączymy

A i C linią prostą i ze środka D odcinka AC przeprowadzamy prostopadłą. Z punktu A pod kątem $90° - \alpha$ do AC prowadzimy prostą AO' do przecięcia owej prostopadłej w punkcie O', który będzie środkiem koła o promieniu $O'A$. W zależności od znaku kąta α wykreślamy część koła: przy $\alpha > 0$ pod odcinkiem AC (jak na rysunku), przy $\alpha < 0$ nad odcinkiem AC.



Rys. 156

Otrzymany w ten sposób łuk koła stanowi poszukiwany wykres pracy. Na podstawie tego wykresu możemy znaleźć wartości I_1 i U_2 dla rozmaitych wartości I_2. W tym celu dla danej wartości I_2 obliczamy $\frac{I_2}{S_0}$, lub dla obwodu symetrycznego $\frac{I_2}{S}$; w przyjętej skali z punktu A odcinkiem równym $\frac{I_2}{S_0}$ przecinamy nasz wykres, znajdując w ten sposób punkt B; wtedy OB daje nam bezpośrednio wektor $\hat{I}_1$, zaś BC wektor $\frac{\hat{U}_2}{\hat{S}_z Z_z}$ lub $\frac{\hat{U}_2}{\hat{S} Z_z}$ skąd obliczamy $\hat{U}_2$.

Potrzebne do wykresu pracy wartości I_0, φ_0, I_z, φ_z powinny być wiadome lub znalezione przez pomiary prądów i ich kątów przesunięcia fazy.

W przypadku obwodu symetrycznego moduł spółczynnika $\hat{S}$ i jego argument σ możemy znaleźć z wykresu pracy: wychodząc ze wzorów (49), (77) i (99).

$$\hat{S}^2 = \frac{\hat{Z}_0}{\hat{Z}_0 - \hat{Z}_z},$$

gdzie w naszym zagadnieniu

$$\hat{Z}_0 = \frac{\hat{U}_1}{\hat{I}_0}; \quad \hat{Z}_z = \frac{\hat{U}_1}{\hat{I}_z},$$

będziemy mieli

$$\hat{S}^2 = \frac{\frac{\hat{U}_0}{\hat{I}_0}}{\frac{\hat{U}_0}{\hat{I}_0} - \frac{\hat{U}_1}{\hat{I}_z}},$$

czyli

$$\hat{S}^2 = \frac{\hat{I}_z}{\hat{I}_z - \hat{I}_0}$$

i mając na wykresie $\hat{I}_z - \hat{I}_0 = AC$ (rys. 156), otrzymamy S^2 dzieląc I_z przez wartość AC, wreszcie znajdziemy S. Różnica kątów wektorów $\hat{I}_z$ oraz $\hat{I}_z - \hat{I}_0$ równa się argumentowi 2σ wektora $\hat{S}^2$; czyli

$$2\sigma = \varphi_z - \sphericalangle CLU_1, \text{ skąd } \sigma = \frac{\varphi_z - \sphericalangle CLU_1}{2}.$$

$\sphericalangle CLU_1$ trzeba odmierzyć np. kątomierzem i wziąć oczywiście z właściwym znakiem, mierząc go w kierunku od osi podstawowej OU_1.

Za pomocą wykresu pracy możemy również znajdować moc P_1 na początku obwodu oraz moc P_2 w końcu dla określonej wartości prądu I_2.

Wektor $OB = \hat{I}_1$ tworzy z kierunkiem wektora napięcia $\hat{U}_1$ kąt φ_1. Jeżeli kierunek OU_1 przyjmiemy za oś odciętych, a oś rzędnych przeprowadzimy prostopadle do tego kierunku, wtedy otrzymamy dla odciętej punktu B

$$BF = I_1 \cos \varphi_1.$$

Ponieważ moc prądu na początku obwodu ma wartość

$$P_1 = U_1 I_1 \cos \varphi_1,$$

zaś U_1 ma wartość stałą, przeto odcinek

$$BF = \frac{P_1}{U_1}$$

jest proporcjonalny do tej mocy i w odpowiedniej skali daje nam wartość P_1. W trójkącie ABC

$$AB = \frac{I_2}{S_0}, \quad BC = \frac{U_2}{S_z Z_z}.$$

Pole tego trójkąta ma wartość

$$\triangle = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin a = \frac{1}{2} \cdot \frac{I_2 U_2}{S_0 S_z Z_z} \sin a;$$

ponieważ moc odbiornika ma wartość

$$P_2 = U_2 I_2 \cos \varphi_2,$$

więc

$$\triangle = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin a}{S_0 S_z Z_z \cos \varphi_2} P_2.$$

Z drugiej strony możemy pole trójkąta ABC określić jako połowę iloczynu podstawy AC przez wysokość BH.

Podstawa

$$AC = \frac{U_1}{S_0 S_z Z_z},$$

zatem

$$\triangle = \frac{1}{2} \cdot \frac{U_1}{S_0 S_z Z_z} \cdot BH;$$

przez porównanie obydwóch wzorów dla $\triangle$ znajdziemy

$$BH = \frac{P_2 \sin a}{U_1 \cos \varphi_2},$$

$$\frac{BH}{\sin a} = \frac{P_2}{U_1 \cos \varphi_2};$$

wartość $\dfrac{BH}{\sin a}$ znajdziemy przeprowadzając prostopadłą BG z punktu B na promień $O'A$; ta prostopadła przetnie odcinek AC w punkcie K; ponieważ

$$\sphericalangle AKG = a = \sphericalangle BKH,$$

przeto

$$BK = \frac{BH}{\sin a} = \frac{P_2}{U_1 \cos \varphi_2};$$

iloczyn $U_1 \cos \varphi_2$ ma wartość stałą, więc odcinek BK w odpowiedniej skali daje nam wartość mocy oddawanej w końcu obwodu przy prądzie I_2.

Największa moc na odbiorniku odpowiada największej wartości BH; wartość tę otrzymamy przeprowadzając ze środka AC prostopadłą do przecięcia się z kołem wykresu, wówczas $AB = \frac{I_2}{S_0}$ oraz $BC = \frac{U_2}{S_z Z_z}$ dają nam wartości I_2 i U_2, dla których moc oddawana będzie największą.

R O Z D Z I A Ł   D Z I E S I Ą T Y

OBLICZANIE POJEMNOŚCI I INDUKCYJNOŚCI W LINIACH ELEKTRYCZNYCH

§ 66

ROZKŁAD POTENCJAŁU W POLU ELEKTRYCZNYM

Będziemy rozpatrywali przewody składające się z drutów lub linek okrągłych, gołych oraz izolowanych, czyli przewodów cylindrycznych z równomiernie rozłożonymi ładunkami. Ładunki znajdujące się na takich przewodach dają pole elektryczne, którego natężenie będzie skierowane prostopadle do powierzchni przewodów, czyli prostopadle do ich osi. Aby móc określać pojemność dla rozmaitych układów takich przewodów, musimy przede wszystkim umieć określać wartość potencjału w dowolnym punkcie pola elektrycznego powstającego pod wpływem ładunku przewodów. Najogólniejszy wzór dla potencjału V w dowolnym punkcie (x, y, z) pola jest to wzór Laplace'a

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \tag{1}$$

Można wyprowadzić ten wzór w sposób następujący. W polu elektrycznym strumień indukcji $d\psi$ przez powierzchnię ds, gdzie indukcja ma wartość D i kierunek jej tworzy z normalną do powierzchni kąt α, wyrazi się wzorem:

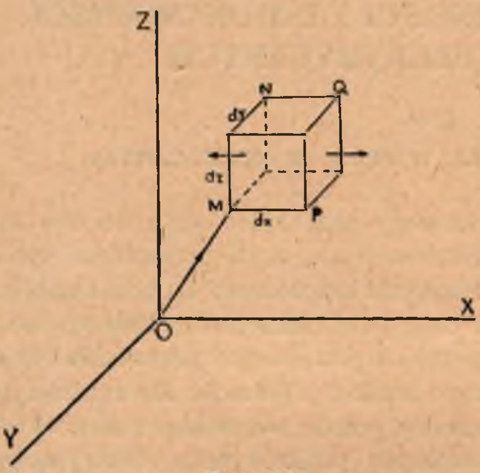
$$d\psi = D \cos \alpha \, ds.$$

Rozpatrując dowolny punkt pola, gdzie indukcja ma wartość D, natężenie pola K i potencjał V, i oznaczając przez promień r kierunek działania natężenia pola oraz indukcji, przez ε przenikalność dielektryczną ośrodka, będziemy mieli na podstawie znanych wzorów

$$K = -\frac{dV}{dr}; \quad D = \varepsilon K = -\varepsilon \frac{dV}{dr}.$$

Weźmy w polu elektrycznym dwa nieskończenie bliskie punkty M i Q (rys. 157); współrzędne tych punktów będą się różniły odpowiednio o dx, dy, dz.

Oznaczmy przez D indukcję elektryczną w punkcie M z kierunkiem r, a jej składowe w kierunku osi spółrzędnych przez D_x, D_y, D_z. Strumień indukcji elektrycznej wchodzący przez powierzchnię $MN = dydz$ będzie równy $-D_x dydz$ ($\alpha = 180°$, $\cos \alpha = -1$), strumień wychodzący przez powierzchnię $PQ = dydz$ będzie równy $\left(D_x + \frac{\partial D_x}{\partial x} dx\right) dydz$. Suma tych dwóch strumieni równa jest $\frac{\partial D_x}{\partial x} dx\, dy\, dz$. Analogicznie znajdziemy sumy strumieni wchodzących i wychodzących przez pozostałe dwie pary powierzchni prostopadłych do osi Y i do osi Z, w postaci



Rys. 157

$$\frac{\partial D_y}{\partial y} dxdydz \quad \text{i} \quad \frac{\partial D_z}{\partial z} dxdydz.$$

Całkowity strumień, pozostający wewnątrz równoległościanu $MNPQ$, równy sumie tych strumieni, w przypadku, gdy w rozpatrywanym punkcie nie ma ładunku elektrycznego, powinien równać się zeru; wobec tego

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0, \tag{*}$$

ale

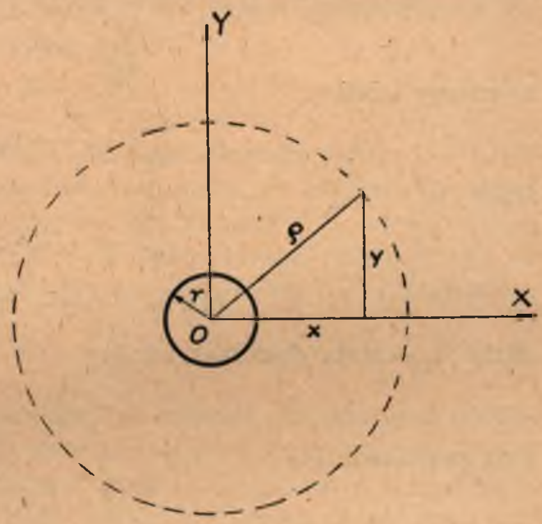
$$D = -\varepsilon \frac{dV}{dr},$$

więc
$$D_x = -\varepsilon \frac{dV}{dx}, \quad \frac{\partial D_x}{\partial x} = -\varepsilon \frac{\partial^2 V}{\partial x^2};$$
$$\frac{\partial D_y}{\partial y} = -\varepsilon \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}; \quad \frac{\partial D_z}{\partial z} = -\varepsilon \frac{\partial^2 V}{\partial z^2};$$

więc po podstawieniu tych wartości do wzoru (*), otrzymamy po skróceniu przez $-\varepsilon$ wzór Laplace'a (1).

Dla naszych celów wzór ten możemy znacznie uprościć. Mianowicie będziemy rozpatrywali przewody, których kształt, wymiary i całe otoczenie są jednakowe na całej rozpatrywanej ich długości. Jeżeli przeprowadzimy płaszczyznę prostopadłą do osi takiego przewodu, to zmiana potencjału w rozmaitych punktach tej płaszczyzny będzie niezależna od tego, w jakim miejscu przewodu taka płaszczyzna została przeprowadzona. Biorąc oś przewodu za oś Z, wyrazimy warunek powyższy w ten sposób, że zmiana potencjału nie zależy od z, czyli

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \qquad (2)$$



Rys. 158

Następnie, ponieważ, jak założyliśmy, przewód jest okrągły, przeto w płaszczyźnie prostopadłej do osi przewodu (rys. 158) wszystkie punkty znajdujące się w jednakowej odległości od osi przewodu O będą miały potencjał o tej samej wartości; można więc zamiast dwóch zmiennych x i y wprowadzić tylko jedną zmienną ϱ, stanowiącą odległość rozpatrywanego punktu od osi przewodu. Wtedy będziemy mieli dla dowolnego punktu

$$\varrho^2 = x^2 + y^2; \quad \frac{\partial \varrho}{\partial x} = \frac{x}{\varrho}; \quad \frac{\partial \varrho}{\partial y} = \frac{y}{\varrho};$$
$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{dV}{d\varrho} \cdot \frac{\partial \varrho}{\partial x} = \frac{dV}{d\varrho} \cdot \frac{x}{\varrho};$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{dV}{d\varrho} \cdot \frac{\partial \varrho}{\partial y} = \frac{dV}{d\varrho} \cdot \frac{y}{\varrho};$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{d^2 V}{d\varrho^2} \cdot \frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{dV}{d\varrho} \cdot \frac{y^2}{\varrho^3};$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{d^2 V}{\partial \varrho^2} \cdot \frac{y^2}{\varrho^2} + \frac{dV}{d\varrho} \cdot \frac{x^2}{\varrho^3}.$$

Wprowadzając te wartości do równania (1) i uwzględniając równanie (2), otrzymamy po uproszczeniu

$$\frac{d^2 V_\varrho}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{dV_\varrho}{d\varrho} = 0, \tag{3}$$

gdzie V_ϱ oznacza potencjał w punkcie odległym o ϱ od osi przewodu.

Zakładając w równaniu (3)

$$\frac{dV_\varrho}{d\varrho} = Z, \tag{4}$$

będziemy mieli

$$\frac{dZ}{d\varrho} + \frac{Z}{\varrho} = 0,$$

skąd

$$\frac{dZ}{Z} = -\frac{d\varrho}{\varrho},$$

$$\ln Z = -\ln \varrho + \ln A_1,$$

gdzie A_1 — stała dowolna; wtedy

$$Z = \frac{A_1}{\varrho}$$

i na podstawie (4)

$$\frac{dV_\varrho}{d\varrho} = \frac{A_1}{\varrho},$$

czyli

$$V_\varrho = A_1 \ln \varrho + A_2, \tag{5}$$

gdzie A_2 — druga stała dowolna.

Oznaczając przez V_1 potencjał własny (gdy nie ma wpływu otoczenia) na samym przewodzie, którego promień wynosi r, to znaczy dla $\varrho = r$, otrzymamy z (5)

$$V_1 = A_1 \ln r + A_2;$$

odejmując stronami ostatni wzór od wzoru (5), otrzymamy

$$V_\varrho = V_1 + A_1 \ln \frac{\varrho}{r}. \tag{6}$$

Dla określenia stałej A_1 musimy znać wartość potencjału jeszcze w jakiejkolwiek odległości, np. gdy dla $\varrho = R$ potencjał ma wartość V_2; wtedy ze wzoru (6) będziemy mieli

$$V_2 = V_1 + A_1 \ln \frac{R}{r},$$

$$A_1 = -\frac{V_1 - V_2}{\ln \frac{R}{r}},$$

$$V_\varrho = V_1 - \frac{V_1 - V_2}{\ln \frac{R}{r}} \ln \frac{\varrho}{r}. \tag{7}$$

Natężenie pola elektrycznego K, wywołanego przez ładunek równomiernie rozłożony na powierzchni walca (przewodu cylindrycznego), wyraża się wzorem

$$K = \frac{2Q}{\varepsilon \varrho},$$

gdzie Q — ładunek przypadający na 1 cm długości walca, ε — przenikalność dielektryczna względna środowiska, w którym się walec znajduje; ϱ — odległość rozpatrywanego punktu pola od osi walca.

Zwykle wzór na natężenie pola elektrycznego powstającego od ładunku równomiernie rozłożonego na powierzchni walca podaje się w postaci

$$K = \frac{Q}{2\pi \varrho \varepsilon},$$

gdzie Q jest wyrażone w kulombach, ε stanowi przenikalność dielektryczną bezwzględną. Przy zamianie kulombów na jednostki cgs elektrostatyczne i wprowadzeniu przenikalności dielektrycznej względnej musimy w ostatnim wzorze pomnożyć prawą stronę przez 4π, wówczas otrzymamy wyżej podany wzór na K w układzie *cgs* elektrostatycznym.

Ponieważ

$$K = -\frac{dV_\varrho}{d\varrho},$$

wobec czego

$$-\frac{dV_\varrho}{d\varrho} = \frac{2Q}{\varepsilon \varrho}. \tag{8}$$

Ze wzoru (7) znajdujemy

$$-\frac{dV_\varrho}{d\varrho} = \frac{V_1 - V_2}{\ln \frac{R}{\varrho}} \cdot \frac{1}{\varrho},$$

więc ze wzoru (8) otrzymamy

$$\frac{V_1 - V_2}{ln\frac{R}{r}} = \frac{2Q}{\varepsilon}. \tag{9}$$

Uwzględniając ostatnie równanie oraz wzór (7), możemy potencjał w punkcie znajdującym się w odległości ϱ od osi przewodu określić w sposób następujący:

$$V_\varrho = V_1 - \frac{2Q}{\varepsilon} ln\frac{\varrho}{r}, \tag{10}$$

gdzie V_1 stanowi potencjał własny przewodu, Q — ładunek przypadający na 1 cm długości, r — promień przewodu, ε — przenikalność dielektryczną środowiska otaczającego przewód.

Wzory (9) i (10) dadzą możność określania pojemności dla rozmaitych układów przewodów.

W elektrotechnice potencjał ziemi przyjęty jest jako równy zeru; wobec tego potencjał w dowolnym punkcie przy takim ujęciu traktowany jest jako różnica potencjałów danego punktu i ziemi, czyli jako napięcie pomiędzy punktem i ziemią.

§ 67
POJEMNOŚĆ KABLA JEDNOŻYŁOWEGO OBOŁOWIONEGO

Taki kabel można rozpatrywać jako kondensator cylindryczny, którego jedną okładzinę stanowi sam przewód, drugą zaś płaszcz ołowiany. Oznaczając promień przewodu przez r lub jego średnicę przez d, promień kabla pod płaszczem przez R lub jego średnicę przez D, odpowiednie potencjały przez V_1 i V_2, otrzymamy wprost ze wzoru (9) dla pojemności takiego kabla na 1 cm długości

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{\varepsilon}{2\,ln\frac{R}{r}} = \frac{\varepsilon}{2\,ln\frac{D}{d}};$$

wzór ten daje nam wartość pojemności w jednostkach układu elektrostatycznego, czyli w centymetrach; dla przejścia do układu elektromagnetycznego musimy uwzględnić, że

$$1F = 9 \cdot 10^{11}\,\text{cm} \text{ lub } 1\mu F = 9 \cdot 10^5\,\text{cm};$$

następnie zwykle obliczamy pojemność przewodów nie na 1 cm długości, lecz na 1 km = 10^5 cm i podajemy w μF; wobec tego będziemy mieli

$$C = \frac{\varepsilon}{18 \ln \frac{R}{r}} = \frac{\varepsilon}{18 \ln \frac{D}{d}}$$

lub, wprowadzając logarytmy dziesiętne, otrzymamy

$$C = \frac{0{,}0241\,\varepsilon}{\lg \frac{R}{r}} = \frac{0{,}0241\,\varepsilon}{\lg \frac{D}{d}} \frac{\mu F}{km}. \tag{11}$$

Przykład.

Kabel jednożyłowy obołowiony ma przewód o przekroju 16 mm²; średnica przewodu wynosi $d = 5{,}1$ mm, grubość izolacji papierowej 2 mm, wobec czego średnica kabla pod płaszczem wynosi 9,1 mm. Mamy

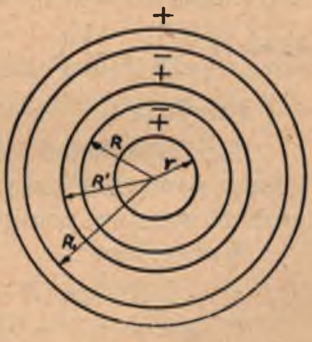
$$\frac{D}{d} = \frac{91}{51}; \quad \lg \frac{91}{51} = 0{,}251.$$

Przenikalność dielektryczna dla papieru impregnowanego $\varepsilon = 4{,}3$.

$$C = \frac{0{,}0241 \cdot 4{,}3}{0{,}251} = 0{,}413 \frac{\mu F}{km}.$$

§ 68

POJEMNOŚĆ KABLA JEDNOŻYŁOWEGO OPANCERZONEGO



Rys. 159

Kabel opancerzony posiada trzy metalowe powierzchnie cylindryczne: sam przewód, następnie płaszcz ołowiany, wreszcie opancerzenie żelazne (rys. 159).

Taki układ można rozpatrywać jako dwa kondensatory połączone w szereg. Oznaczając przez C_1 pojemność I kondensatora (przewód i płaszcz ołowiany), przez C_2 pojemność II kondensatora (płaszcz ołowiany i pancerz), będziemy mieli dla pojemności kabla

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}.$$

Oznaczając przez r, R, R', R_1 promienie przewodu pod płaszczem, nad płaszczem i pod pancerzem, otrzymamy na podstawie wzoru (11)

$$C_1 = \frac{0{,}0241\ \varepsilon_1}{lg\frac{R}{r}} \frac{\mu F}{km},$$

$$C_2 = \frac{0{,}0241\ \varepsilon_2}{lg\frac{R_1}{R'}} \frac{\mu F}{km},$$

gdzie ε_1 — przenikalność dielektryczna izolacji przewodu, zaś ε_2 — przenikalność dielektryczna materiału znajdującego się pomiędzy płaszczem ołowianym i pancerzem (zwykle impregnowana taśma papierowa i warstwa materiału włóknistego).

Wobec tego

$$C = \frac{0{,}0241}{\frac{1}{\varepsilon_1} lg\frac{R}{r} + \frac{1}{\varepsilon_2} lg\frac{R_1}{R'}} \frac{\mu F}{km}.$$

Jeżeli $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ (np. papier impregnowany i juta mają prawie równe przenikalności dielektryczne 4,3), wtedy

$$C = \frac{0{,}0241\ \varepsilon}{lg\frac{RR_1}{rR'}} \frac{\mu F}{km}. \qquad (12)$$

Porównując wzór (12) ze wzorem (11), możemy stwierdzić, że obecność drugiej okładziny metalowej zmniejsza pojemność kabla $\left(\frac{RR_1}{rR'} > \frac{R}{r}\right)$.

Przykład.

Ten sam kabel co w przykładzie poprzednim (§ 67) posiada jeszcze pancerz żelazny; grubość płaszcza ołowianego wynosi 2 mm, grubość warstwy pomiędzy ołowiem i żelazem wynosi również 2 mm.

Wobec tego

$r = 2{,}55$ mm, $R = 2{,}55 + 2 = 4{,}55$ mm,
$R' = 4{,}55 + 2 = 6{,}55$ mm,
$R_1 = 6{,}55 + 2 = 8{,}55$ mm,
$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 4{,}3$,

$$C = \frac{0{,}0241 \cdot 4{,}3}{lg\frac{455 \cdot 855}{255 \cdot 655}} = 0{,}279 \frac{\mu F}{km},$$

gdy tymczasem przy jednym płaszczu ołowianym pojemność wyniosła

$$0{,}413 \frac{\mu F}{km}.$$

§ 69

ROZKŁAD NAPIĘĆ NA OKŁADZINACH METALOWYCH KABLA OPANCERZONEGO

Na rozpatrzonym kablu z dwiema okładzinami metalowymi zbadajmy, jak się rozkłada napięcie pomiędzy przewodem i poszczególnymi okładzinami. Oznaczmy potencjały (względem ziemi), czyli napięcia na przewodzie, na płaszczu ołowianym i na pancerzu odpowiednio przez U, U_1, U_2, zaś pojemności, jak i poprzednio — przewodu względem płaszcza ołowianego przez C_1 oraz płaszcza ołowianego względem pancerza przez C_2. Oznaczmy dalej ładunek elektryczny, który mamy na przewodzie i tak samo na każdej z okładzin, przez Q.

Wtedy

$$Q = C_1 (U - U_1),$$

$$Q = C_2 (U_1 - U_2),$$

skąd

$$\frac{U - U_1}{U_1 - U_2} = \frac{C_2}{C_1}.$$

Z tego wzoru widzimy, że spadki napięcia w rozpatrywanych częściach kabla są odwrotnie proporcjonalne do pojemności tych części.

Jeżeli, co bywa przeważnie, pancerz jest połączony z ziemią i ma napięcie $= 0$, wtedy, zakładając w powyższym wzorze $U_2 = 0$, otrzymamy

$$\frac{U - U_1}{U_1} = \frac{C_2}{C_1},$$

skąd

$$U_1 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} U.$$

P r z y k ł a d.

Ten sam kabel co i poprzednio, o przekroju 16 mm², jest pod napięciem $U = 100$ woltów, pancerz uziemiony; mieliśmy

$$C_1 = 0{,}413 \frac{\mu F}{km},$$

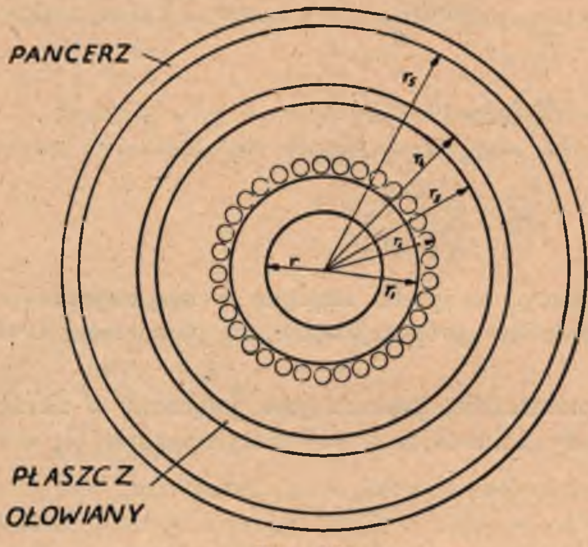
$$C_2 = \frac{0{,}0241 \cdot 4{,}3}{lg \dfrac{853}{655}} = 0{,}895 \frac{\mu F}{km},$$

wobec tego napięcie na ołowiu będzie

$$U_1 = \frac{0{,}413}{0{,}413 + 0{,}895} \cdot 100 = 31{,}6 \text{ wolta.}$$

To znaczy, że spadek napięcia od przewodu do płaszcza ołowianego wynosi 68,4 wolta, od płaszcza do pancerza — 31,6 wolta.

§ 70
POJEMNOŚĆ KABLA DWUŻYŁOWEGO KONCENTRYCZNEGO



Rys. 160

Przekrój takiego kabla z oznaczeniem promieni pokazany jest na rys. 160.

Dwa przewody, zewnętrzny i wewnętrzny, służą do prowadzenia tego samego prądu w dwóch przeciwnych kierunkach. Wobec tego potencjały na tych przewodach mają te same wartości i różnią się tylko znakiem.

Niech na jednym przewodzie potencjał będzie $+V$, na drugim zaś $-V$.

Ładunek przypadający na 1 cm długości przewodu wewnętrznego określimy ze wzoru (9)

$$Q = \frac{\varepsilon (V_1 - V_2)}{2\, ln \frac{r_1}{r}} = \frac{\varepsilon}{2} \frac{[V - (-V)]}{ln \frac{r_1}{r}} = \frac{\varepsilon V}{ln \frac{r_1}{r}}.$$

Wobec tego pojemność przewodu wewnętrznego będzie w centymetrach

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon}{ln \frac{r_1}{r}},$$

albo, po przejściu do zwykłych logarytmów i do jednostek praktycznych,

$$C_1 = \frac{0{,}0483\ \varepsilon}{lg\frac{r_1}{r}}\ \frac{\mu F}{km}.$$

Pojemność przewodu zewnętrznego stanowi sumę dwóch pojemności: jednej w stosunku do przewodu wewnętrznego — i ta pojemność ma tę samą wartość C_1, drugiej w stosunku do płaszcza ołowianego; ta druga pojemność według wzoru (11) będzie

$$C_0 = \frac{0{,}0241\ \varepsilon}{lg\frac{r_3}{r_2}}\ \frac{\mu F}{km},$$

a w razie istnienia jeszcze pancerza żelaznego będzie według wzoru (12)

$$C'_0 = \frac{0{,}0241\ \varepsilon}{lg\frac{r_3 r_5}{r_2 r_4}}\ \frac{\mu F}{km}.$$

Wobec tego pojemność przewodu zewnętrznego będzie przy jednym płaszczu ołowianym

$$C_2 = C_1 + C_0 = 0{,}0483\ \varepsilon \left| \frac{1}{lg\frac{r_1}{r}} + \frac{1}{2\,lg\frac{r_3}{r_2}} \right|,$$

a przy płaszczu i uziemieniu pancerza

$$C_2 = C_1 + C'_0 = 0{,}0483\ \varepsilon \left| \frac{1}{lg\frac{r_1}{r}} + \frac{1}{2\,lg\frac{r_3 r_5}{r_2 r_4}} \right|.$$

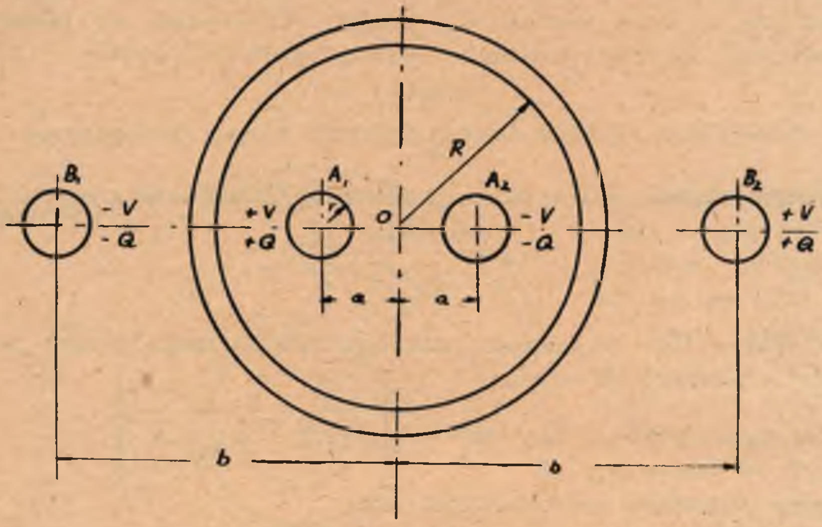
Niejednostajna pojemność obu przewodów w takim kablu powoduje to, że prądy ładowania będą w nich różne; oprócz tego straty w izolacji otaczającej przewody na histerezę dielektryczną, zależne od pojemności, również będą się różniły. Te okoliczności mogą wywoływać niepożądane zjawiska.

§ 71

POJEMNOŚĆ KABLA DWUŻYŁOWEGO SKRĘCONEGO

W przekroju (rys. 161) mamy dwa przewody (żyły), A_1 i A_2, okrągłe, o jednakowym promieniu r, symetrycznie położone z obu stron środka kabla O. Odległość osi tych przewodów od osi kabla oznaczmy przez a. Płaszcz ołowiany ma średnicę wewnętrzną R. Przez oba przewody płynie prąd o tej samej wartości, lecz o kierunkach przeciwnych. Ładunki na 1 cm długości i potencjały obu przewodów oznaczmy odpowiednio przez $\pm Q$, $\pm V$.

Lord Kelvin wykazał, że układ zawierający szereg naładowanych przewodów znajdujących się wewnątrz cylindrycznej powłoki metalowej można zastąpić układem równoważnym, w którym zamiast powłoki będziemy mieli tzw. elektryczne odbicia tych



Rys. 161

przewodów. Elektrycznym odbiciem jest przewód umyślony, znajdujący się poza powierzchnią przewodzącą; oś takiego przewodu leży w płaszczyźnie przechodzącej przez oś układu (kabla) i oś odpowiedniego przewodu w takiej odległości, że promień przekroju powłoki R stanowi średnią geometryczną pomiędzy odległościami od osi układu rzeczywistego przewodu a i elektrycznego odbicia b.

Dla ścisłości trzeba zaznaczyć, że odległości powinny być mierzone nie od geometrycznych osi przewodów, lecz od ich osi elektrycznych, czyli od linij, w których możemy skupić ładunki rozłożone na powierzchni przewodów, aby otrzymać takie same działanie zewnętrzne. Osie elektryczne przy niewielkich przekrojach przewodów znajdują się bardzo blisko od osi geometrycznych, wobec czego tej różnicy przy wyprowadzeniu wzorów praktycznych nie uwzględniamy.

Na tych elektrycznych odbiciach musimy mieć ładunki i potencjały te same co i na odpowiednich przewodach, lecz o znakach przeciwnych.

Na rys. 161 B_1 stanowi elektryczne odbicie przewodu A_1, na nim mamy $-Q$ i $-V$; B_2 stanowi odbicie przewodu A_2, na nim mamy $+Q$ i $+V$. Poza tym musi być spełniony warunek

$$R^2 = ab.$$

Pojemność każdej żyły znajdziemy dzieląc ładunek przez potencjał tej żyły. Każdy z przewodów posiada potencjał wypadkowy, stanowiący sumę potencjału własnego, powstającego od własnego ładunku (w przypuszczeniu, że wszystkie inne przewody są połączone z ziemią), oraz potencjałów powstających od ładunków znajdujących się na przewodach otaczających rozpatrywany przewód. Oznaczając potencjał własny każdego z dwóch przewodów przez $\pm V_1$, będziemy mogli określić wartość potencjału na rozpatrywanym przewodzie, powstającego od innych ładunków, stosując wzór (10):

$$V_\varrho = V_1 - \frac{2Q}{\varepsilon} \ln \frac{\varrho}{r}.$$

Rozpatrzmy przewód A_1.

Jego potencjał własny wynosi $+V_1$,

potencjał od ładunku na odbiciu B_1 $\quad -V_1 + \frac{2Q}{\varepsilon} \ln \frac{b-a}{r}$,

" " " " przewodzie A_2 $\quad -V_1 + \frac{2Q}{\varepsilon} \ln \frac{2a}{r}$,

" " " " odbiciu B_2 $\quad +V_1 - \frac{2Q}{\varepsilon} \ln \frac{b+a}{r}$.

Biorąc sumę tych potencjałów, otrzymamy faktyczny potencjał przewodu

$$V = \frac{2Q}{\varepsilon}\left[\ln\frac{b-a}{r} + \ln\frac{2a}{r} - \ln\frac{b+a}{r}\right]$$

albo

$$V = \frac{2Q}{\varepsilon} \ln\left[\frac{2a(b-a)}{r(b+a)}\right].$$

Na podstawie zależności $R^2 = ab$ mamy $b = \frac{R^2}{a}$ i wobec tego

$$V = \frac{2Q}{\varepsilon} \ln\left[\frac{2a(R^2-a^2)}{r(R^2+a^2)}\right];$$

stąd otrzymujemy pojemność jednej żyły w centymetrach na 1 cm długości

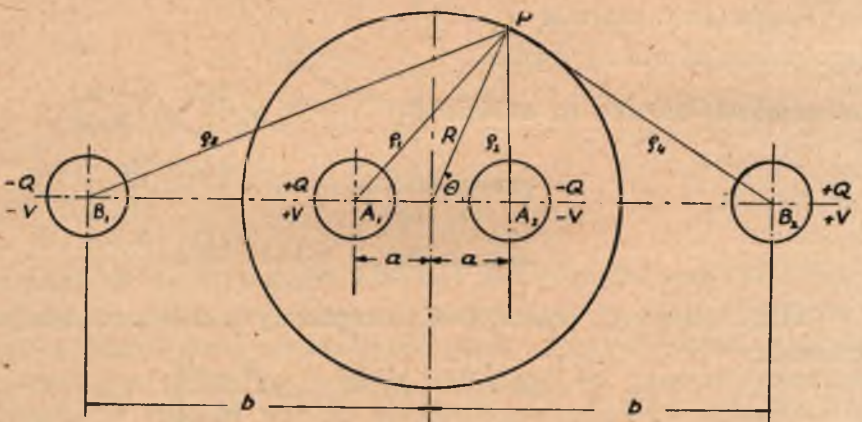
$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon}{2\ln\left[\frac{2a(R^2-a^2)}{r(R^2+a^2)}\right]}$$

lub
$$C = \frac{0{,}0241\,\varepsilon}{lg\left[\frac{2a\,(R^2 - a^2)}{r\,(R^2 + a^2)}\right]}\,\frac{\mu F}{km}.$$

Pojemność pary żył, czyli pojemność robocza w tym przypadku wypadnie 2 razy mniejsza, gdyż różnica potencjałów między żyłami wynosi $V - (-V) = 2\,V$, więc pojemność pary żył będzie
$$C = \frac{Q}{2\,V} = \frac{0{,}01205\,\varepsilon}{lg\left[\frac{2\,a\,(R^2 - a^2)}{r\,(R^2 + a^2)}\right]}\,\frac{\mu F}{km}.$$

Można wykazać, że w rozpatrywanym kablu, gdy potencjały na obu przewodach różnią się tylko znakami, na płaszczu ołowianym potencjał będzie równy 0.

W tym celu rozpatrzymy dowolny punkt P na płaszczu (rys. 162). Oznaczmy odległości tego punktu od osi A_1, A_2 i B_1, B_2 odpowiednio przez ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 i ϱ_4.



Rys. 162

Dla obliczenia potencjału V_p w punkcie P mamy:

potencjał od ładunku przewodu A_1 wynosi $V_1 - \frac{2Q}{\varepsilon}\,ln\frac{\varrho_1}{r}$,

„ „ „ A_2 „ $-V_1 + \frac{2Q}{\varepsilon}\,ln\frac{\varrho_2}{r}$,

„ „ „ B_1 „ $-V_1 + \frac{2Q}{\varepsilon}\,ln\frac{\varrho_3}{r}$,

„ „ „ B_2 „ $V_1 - \frac{2Q}{\varepsilon}\,ln\frac{\varrho_4}{r}$.

Suma tych potencjałów daje nam

$$V_p = \frac{2Q}{\varepsilon} \ln \frac{\varrho_2 \varrho_3}{\varrho_1 \varrho_4}.$$

Oznaczając kąt POA_2 przez Θ i spostrzegając, że $OP = R$, $OA_1 = OA_2 = a$, $OB_1 = OB_2 = b$, będziemy mieli

$$\varrho_1^2 = R^2 + a^2 + 2aR\cos\Theta,$$

$$\varrho_2^2 = R^2 + a^2 - 2aR\cos\Theta,$$

$$\varrho_3^2 = R^2 + b^2 + 2bR\cos\Theta,$$

$$\varrho_4^2 = R^2 + b^2 - 2bR\cos\Theta.$$

Ponieważ $b = \frac{R^2}{a}$, więc

$$\varrho_3^2 = R^2 + \frac{R^4}{a^2} + \frac{2R^3}{a}\cos\Theta = \frac{R^2}{a^2}(R^2 + a^2 + 2aR\cos\Theta) = \frac{R^2}{a^2}\varrho_1^2,$$

$$\varrho_4^2 = R^2 + \frac{R^4}{a^2} - \frac{2R^3}{a}\cos\Theta = \frac{R^2}{a^2}\varrho_2^2$$

albo

$$\varrho_3 = \frac{R}{a}\varrho_1,$$

$$\varrho_4 = \frac{R}{a}\varrho_2,$$

$$\frac{\varrho_2 \varrho_3}{\varrho_1 \varrho_4} = \frac{\varrho_2 \frac{R}{a} \varrho_1}{\varrho_1 \frac{R}{a} \varrho_2} = 1.$$

Wobec tego

$$V_p = \frac{2Q}{\varepsilon} \ln \frac{\varrho_2 \varrho_3}{\varrho_1 \varrho_4} = \frac{2Q}{\varepsilon} \ln 1 = 0.$$

Więc w dowolnym punkcie płaszcza ołowianego potencjał równy jest 0, czyli na płaszczu nie ma napięcia. Jasne jest, że wobec tego następne metalowe powłoki znajdujące się nad płaszczem, jak np. pancerz, nie mają już żadnego wpływu na pojemności kabla.

§ 72
POJEMNOŚĆ KABLA TRÓJŻYŁOWEGO SKRĘCONEGO PRĄDU TRÓJFAZOWEGO

W przekroju poprzecznym (rys. 163) trzy żyły A_1, A_2 i A_3 są ułożone symetrycznie względem osi O.

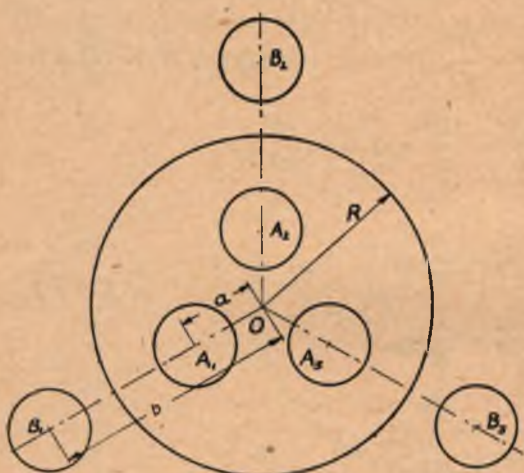
Promień każdej żyły $= r$, odległość osi żyły od osi kabla $= a$.

Promień kabla pod płaszczem ołowianym $= R$.

Elektryczne odbicia tych przewodów będą B_1, B_2 i B_3, których osie od osi kabla są w odległości b. Przy tym

$$ab = R^2.$$

Oznaczmy ładunki (w pewnej chwili) na przewodach oraz potencjały odpowiednio przez Q_1, Q_2 i Q_3, V_1, V_2 i V_3; te wielkości mogą mieć znaki dodatnie lub ujemne; wtedy na odbiciach będziemy mieli odpowiednio $-Q_1$, $-Q_2$, $-Q_3$, $-V_1$, $-V_2$, $-V_3$.



Rys. 163

Układ zawierający 3 przewody i płaszcz ołowiany zastępujemy więc układem zawierającym 3 przewody i 3 elektryczne ich odbicia. Określimy potencjał każdego z przewodów. Potencjał żyły A_1 stanowi sumę potencjałów powstających od własnego ładunku (równy V_1') oraz od ładunków innych przewodów. Oznaczmy dalej potencjały, które powstałyby na A_2 i A_3 od własnych ładunków przez V_2' i V_3'; na odbiciach będziemy mieli własne potencjały $-V_1'$, $-V_2'$ i $-V_3'$.

Określamy poszczególne potencjały ze wzoru

$$V_\varrho = V - \frac{2Q}{\varepsilon} ln \frac{\varrho}{r}.$$

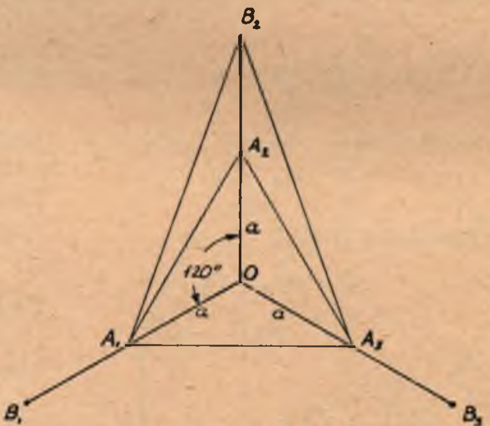
Mamy następujące geometryczne zależności (rys. 164)

$$A_1A_2 = A_1A_3 = A_2A_3 = A_1O\sqrt{3} = a\sqrt{3}.$$

$$A_1B_1 = OB_1 - OA_1 = b - a,$$
$$\overline{B_2A_1}^2 = \overline{OA_1}^2 + \overline{OB}_2^{\,2} - 2\overline{OA_1}\cdot\overline{OB_2}\cdot\cos 120^\circ = a^2 + b^2 + ab,$$
$$B_2A_1 = \sqrt{a^2 + b^2 + ab} = B_2A_3;$$

tak samo

$$B_3A_1 = B_3A_2 = B_1A_2 = B_1A_3 = \sqrt{a^2 + b^2 + ab}.$$



Rys. 164

Dla przewodu A_1

potencjał własny wynosi V_1',

potencjał od przewodu B_1 wynosi $-V_1' + \frac{2Q_1}{\varepsilon} ln \frac{b-a}{r}$,

„ „ „ A_2 „ $V_2' - \frac{2Q_2}{\varepsilon} ln \frac{a\sqrt{3}}{r}$,

„ „ „ B_2 „ $-V_2' + \frac{2Q_2}{\varepsilon} ln \frac{\sqrt{a^2+b^2+ab}}{r}$,

„ „ „ A_3 „ $V_3' - \frac{2Q_3}{\varepsilon} ln \frac{a\sqrt{3}}{r}$,

„ „ „ B_3 „ $-V_3' + \frac{2Q_3}{\varepsilon} ln \frac{\sqrt{a^2+b^2+ab}}{r}$.

Biorąc sumę, otrzymamy rzeczywisty potencjał przewodu A_1

$$V_1 = \frac{2Q_1}{\varepsilon} ln \frac{b-a}{r} + \frac{2Q_2}{\varepsilon} ln \frac{\sqrt{a^2+b^2+ab}}{a\sqrt{3}} +$$
$$+ \frac{2Q_3}{\varepsilon} ln \frac{\sqrt{a^2+b^2+ab}}{a\sqrt{3}} =$$
$$= \frac{2}{\varepsilon}\left[Q_1\, ln \frac{b-a}{r} + (Q_2+Q_3)\, ln \frac{\sqrt{a^2+b^2+ab}}{a\sqrt{3}}\right].$$

Analogicznie

$$V_2 = \frac{2}{\varepsilon}\left[Q_2 \, ln \frac{b-a}{r} (Q_1 + Q_3) \, ln \frac{\sqrt{a^2+b^2+ab}}{a\sqrt{3}}\right],$$

$$V_3 = \frac{2}{\varepsilon}\left[Q_3 \, ln \frac{b-a}{r} + (Q_1 + Q_2) \, ln \frac{\sqrt{a^2+b^2+ab}}{a\sqrt{3}}\right],$$

skąd

$$V_1 + V_2 + V_3 = \frac{2}{\varepsilon}(Q_1 + Q_2 + Q_3)\left\{ln \frac{b-a}{r} + 2 \, ln \frac{\sqrt{a^2+b^2+ab}}{a\sqrt{3}}\right\}.$$

Dla prądu trójfazowego przy jednakowym obciążeniu faz

$$V_1 + V_2 + V_3 = 0,$$

więc w tym przypadku również

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$$

albo

$$Q_2 + Q_3 = -Q_1.$$

Wobec tego

$$V_1 = \frac{2Q_1}{\varepsilon} \, ln\left(\frac{b-a}{r} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{a^2+b^2+ab}}\right);$$

ale $b = \dfrac{R^2}{a}$, więc $b - a = \dfrac{R^2 - a^2}{a}$;

$$\sqrt{a^2+b^2+ab} = \frac{1}{a}\sqrt{a^4 + a^2R^2 + R^4};$$

$$V_1 = \frac{2Q_1}{\varepsilon} \, ln \frac{(R^2-a^2)\,a\sqrt{3}}{r\sqrt{a^4+a^2R^2+R^4}} =$$

$$= \frac{Q_1}{\varepsilon} \, ln \frac{(R^2-a^2)^2 \,.\, 3a^2}{r^2(a^4+a^2R^2+R^4)} =$$

$$= \frac{Q_1}{\varepsilon} \, ln \frac{3a^2(R^2-a^2)^3}{r^2(R^6-a^6)}.$$

Stąd znajdujemy pojemność jednej żyły (fazy) jako iloraz ładunku Q_1 przez potencjał V_1 (napięcie fazowe) w centymetrach

$$C = \frac{\varepsilon}{ln \dfrac{3a^2}{r^2} \cdot \dfrac{(R^2-a^2)^3}{(R^6-a^6)}},$$

albo

$$C = \frac{0{,}0483\,\varepsilon}{lg \dfrac{3a^2}{r^2} \cdot \dfrac{(R^2-a^2)^3}{R^6-a^6}} \; \frac{\mu F}{km}.$$

Wobec symetrii trzech przewodów, pojemności żył są oczywiście jednakowe.

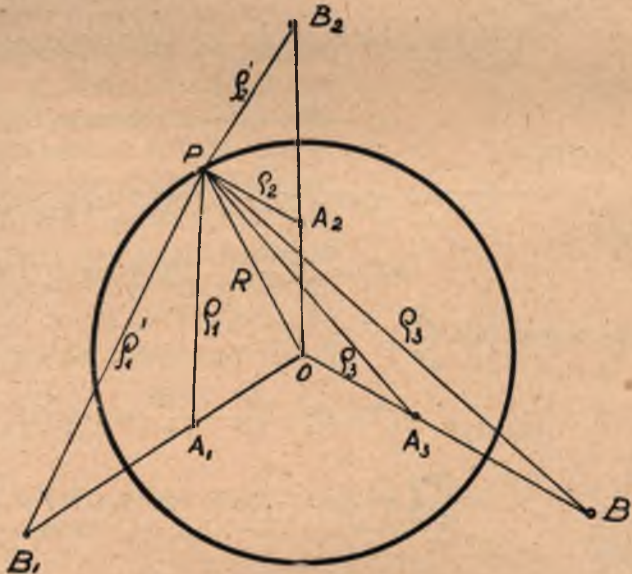
Przy prądzie trójfazowym, gdy spełniony jest warunek

$$V_1 + V_2 + V_3 = 0,$$

na płaszczu ołowianym napięcia nie będzie, to znaczy, że w dowolnym punkcie P płaszcza potencjał $V_p = 0$.

Rzeczywiście potencjał V_p znajdziemy jako sumę potencjałów powstających od ładunku przewodów A_1, B_1, A_2, B_2, A_3 i B_3. Oznaczmy (rys. 165)

$$A_1P = \varrho_1,$$
$$A_2P = \varrho_2,$$
$$A_3P = \varrho_3,$$
$$B_1P = \varrho_1',$$
$$B_2P = \varrho_2',$$
$$B_3P = \varrho_3'.$$



Rys. 165

Potencjał od ład. A_1 wynosi $V_1' - \frac{2\,Q_1}{\varepsilon}\, ln \frac{\varrho_1}{r}$,

" " " B_1 " $-V_1' + \frac{2\,Q_1}{\varepsilon}\, ln \frac{\varrho_1'}{r}$,

" " " A_2 " $V_2' - \frac{2\,Q_2}{\varepsilon}\, ln \frac{\varrho_2}{r}$,

" " " B_2 " $-V_2' + \frac{2\,Q_2}{\varepsilon}\, ln \frac{\varrho_2'}{r}$,

" " " A_3 " $V_3' - \frac{2\,Q_3}{\varepsilon}\, ln \frac{\varrho_3}{r}$,

" " " B_3 " $-V_3' + \frac{2\,Q_3}{\varepsilon}\, ln \frac{\varrho_3'}{r}$.

Suma daje nam

$$V_P = \frac{2}{\varepsilon}\left[Q_1 \ln \frac{\varrho_1'}{\varrho_1} + Q_2 \ln \frac{\varrho_2'}{\varrho_2} + Q_3 \ln \frac{\varrho_3'}{\varrho_3}\right].$$

Znajdziemy wartości $\frac{\varrho_1'}{\varrho_1}$, $\frac{\varrho_2'}{\varrho_2}$ i $\frac{\varrho_3'}{\varrho_3}$.

Z $\triangle OA_1P$:

$$A_1P^2 = OP^2 + OA_1^2 - 2 \cdot OP \cdot OA_1 \cos A_1OP,$$

czyli

$$\varrho_1^2 = R^2 + a^2 - 2aR \cos A_1OP;$$

z $\triangle OB_1P$:

$$B_1P^2 = OP^2 + OB_1^2 - 2OP \cdot OB_1 \cos A_1OP;$$

czyli

$$\varrho_1'^2 = R^2 + b^2 - 2bR \cos A_1OP;$$

ale wobec $b = \frac{R^2}{a}$,

$$\varrho_1'^2 = R^2 + \frac{R^4}{a^2} - \frac{2R^3}{a} \cos A_1OP =$$

$$= \frac{R^2}{a^2}\left(R^2 + a^2 - 2aR \cos A_1OP\right) = \frac{R^2}{a^2} \cdot \varrho_1^2,$$

więc

$$\frac{\varrho_1'}{\varrho_2} = \frac{R}{a};$$

analogicznie znajdziemy

$$\frac{\varrho_2'}{\varrho_2} = \frac{\varrho_3'}{\varrho_3} = \frac{R}{a},$$

więc

$$V_P = \frac{2}{\varepsilon}\left(Q_1 + Q_2 + Q_3\right) \ln \frac{R}{a}.$$

Dla prądu trójfazowego przy jednakowym obciążeniu faz

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0,$$

więc

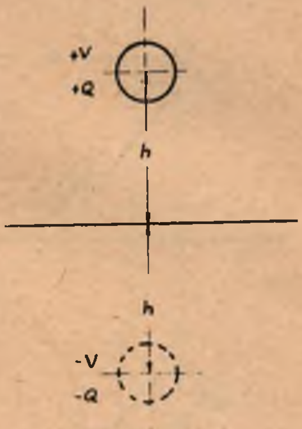
$$V_P = 0.$$

Na tej podstawie możemy stwierdzić, że przy takim prądzie trójfazowym pojemność kabla trójżyłowego nie zależy od żadnych powierzchni metalowych, znajdujących się nad płaszczem ołowianym.

§ 73

POJEMNOŚĆ PRZEWODU NAPOWIETRZNEGO POJEDYNCZEGO (DRUGI PRZEWÓD ZIEMIA)

Układ zawierający przewód cylindryczny i przewód w postaci powierzchni płaskiej, według teorii lorda Kelvina, możemy zastąpić układem zawierającym dwa przewody cylindryczne, z których drugi będzie odbiciem elektrycznym, znajdującym się po drugiej stronie płaszczyzny w takiej samej od niej odległości co i dany przewód, czyli stanowiący jakby zwierciadlane odbicie pierwszego. Oznaczając przez h odległość osi przewodu od ziemi (rys. 166), przez r jego promień, przez $\pm V$ i $\pm Q$ potencjały i ładunki (na 1 cm długości) przewodów, rzeczywistego i jego odbicia, oraz przez $\pm V'$ potencjały własne tych przewodów, będziemy mieli na zasadzie wzoru (10)



Rys. 166

dla danego przewodu:

potencjał własny V',

" od elek. odbicia $(\varrho = 2h)$ $-V' + \frac{2Q}{\varepsilon} ln \frac{2h}{r}$,

a więc suma

$$V = \frac{2Q}{\varepsilon} ln \frac{2h}{r};$$

stąd znajdujemy pojemność przewodu na 1 cm długości, uwzględniając, że dla powietrza $\varepsilon = 1$, w centymetrach

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{1}{2\, ln \frac{2h}{r}}$$

albo

$$C = \frac{0{,}0241}{lg \frac{2h}{r}} \; \frac{\mu F}{km}.$$

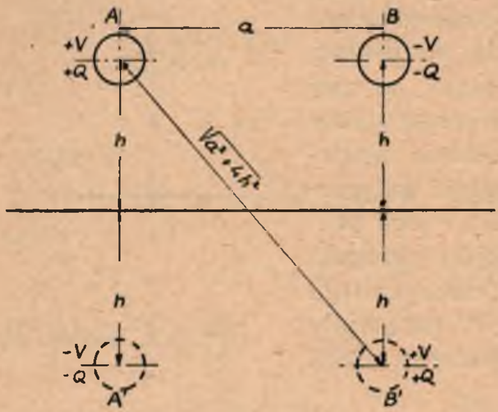
Jest to pojemność przewodu względem ziemi; mamy z nią do czynienia wówczas, gdy źródło prądu włączone jest między przewód a ziemię.

§ 74

POJEMNOŚĆ DWÓCH RÓWNOLEGŁYCH DO SIEBIE PRZEWODÓW NAPOWIETRZNYCH

Tutaj możemy rozpatrzyć dwa przypadki:

I — gdy osie obu przewodów leżą w płaszczyźnie poziomej, i II — gdy osie te leżą w płaszczyźnie pionowej.



Rys. 167

W obu przypadkach mamy na myśli dwa przewody należące do wspólnego obwodu i zamiast powierzchni ziemi wprowadzimy elektryczne odbicia rozpatrywanych przewodów.

W przypadku I (rys. 167) oba przewody A i B są w odległości a od siebie oraz na jednakowej wysokości h nad ziemią. Takie same odległości mamy dla odbić A' i B'.

Potencjał na każdym z przewodów, np. A, znajdziemy, mając potencjał własny przewodu A $\quad V'$,

„ od ładunku B $\quad -V' + 2Q\,ln\,\frac{a}{r}$,

„ „ „ A' $\quad -V' + 2Q\,ln\,\frac{2h}{r}$,

„ „ „ B' $\quad V' - 2Q\,ln\,\frac{\sqrt{a^2+4h^2}}{r}$;

biorąc sumę, otrzymamy

$$V = 2Q\,ln\,\frac{2ah}{r\sqrt{a^2+4h^2}} = 2Q\,ln\,\frac{a}{r\sqrt{1+\left(\frac{a}{2h}\right)^2}},$$

skąd pojemność każdego przewodu w cm

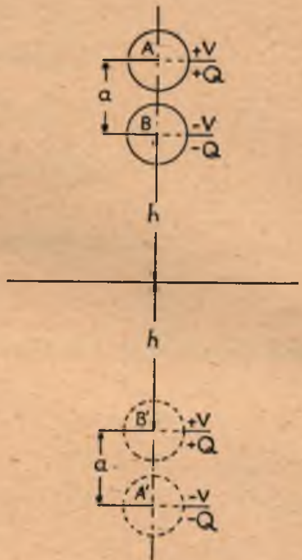
$$C = \frac{Q}{V} = \frac{1}{2\,ln\,\frac{a}{r\sqrt{1+\left(\frac{a}{2h}\right)^2}}}.$$

Ponieważ odległość między przewodami a jest zwykle znacznie mniejsza od podwójnej wysokości zawieszenia $2h$, więc najczęściej odrzuca się wyraz $\frac{a}{2h}$ i używa się wzoru uproszczonego

$$C = \frac{1}{2\,ln\frac{a}{r}}$$

lub

$$C = \frac{0{,}0241}{lg\frac{a}{r}}\ \frac{\mu F}{km}.$$



Rys. 168

Pojemność linii dwuprzewodowej, gdzie między przewodami różnica potencjałów wynosi $2V$, wypadnie dwa razy mniejsza.

W przypadku II (rys. 168) oba przewody A i B są zawieszone na rozmaitych wysokościach $a + h$ i h. Dla obliczenia potencjałóww A i B mamy

na przewodzie A

potencjał własny	V'
potencjał od ładunku B	$-V' + 2Q\,ln\frac{a}{r}$,
„ „ „ B'	$V' - 2Q\,ln\frac{a+2h}{r}$,
„ „ „ A'	$-V' + 2Q\,ln\frac{2a+2h}{r}$;

na przewodzie B

potencjał własny	$-V'$,
„ od ładunku A	$V' - 2Q\,ln\frac{a}{r}$,
„ „ „ B'	$V' - 2Q\,ln\frac{2h}{r}$,
„ „ „ A'	$-V' + 2Q\,ln\frac{a+2h}{r}$.

Wobec tego

$$V_A = +V = 2Q\,ln\frac{2a(a+h)}{r(a+2h)} =$$

$$= 2Q\,ln\frac{2ah\left(1+\frac{a}{h}\right)}{2rh\left(1+\frac{a}{2h}\right)} \cong 2Q\,ln\frac{a}{r};$$

$$V_B = -V = -2Q\,ln\frac{2ah}{r(a+2h)} =$$

$$= -2Q\,ln\frac{2ah}{2rh\left(1+\frac{a}{2h}\right)} \cong -2Q\,ln\frac{a}{r},$$

skąd pojemność każdego przewodu w cm

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{1}{2\,ln\frac{a}{r}}$$

lub

$$C = \frac{0{,}0241}{lg\frac{a}{r}}\,\frac{\mu F}{km},$$

czyli pojemność jest taka sama jak w przypadku *I*.

§ 75

POJEMNOŚĆ TRZECH RÓWNOLEGŁYCH PRZEWODÓW NAPOWIETRZNYCH PRĄDU TRÓJFAZOWEGO

Rozpatrujemy najpierw układ z trzech przewodów I, II i III (rys. 169), symetrycznie ułożonych, przeznaczonych do przenoszenia prądu trójfazowego.

Dla wyprowadzenia wzoru przybliżonego, mając na względzie, że odległość między przewodami a jest nieznaczna w stosunku do wysokości zawieszenia h (liczonej od środka koła przechodzącego przez środki przekroju przewodów), będziemy przyjmowali odległość między każdym przewodem i każdym odbiciem za równą $2h$. Oznaczając przez V_1', V_2', V_3' własne potencjały przewodów oraz przez Q_1, Q_2 i Q_3 ładunki ich na 1 cm długości, będziemy mieli dla przewodu I potencjał własny

„ od ładunku I' $-V_1' + 2Q_1 \ln \frac{2h}{r}$,

„ „ „ II $V_2' - 2Q_2 \ln \frac{a}{r}$,

„ „ „ II' $-V_2' + 2Q_2 \ln \frac{2h}{r}$,

„ „ „ III $V_3' - 2Q_3 \ln \frac{a}{r}$,

„ „ „ III' $-V_3' + 2Q_3 \ln \frac{2h}{r}$,

skąd
$$V_1 = 2(Q_1 + Q_2 + Q_3) \ln \frac{2h}{r} - 2(Q_2 + Q_3) \ln \frac{a}{r}.$$

Ale dla prądu trójfazowego przy jednakowym obciążeniu faz

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0,\ Q_2 + Q_3 = -Q_1,$$

więc
$$V_1 = 2Q_1 \ln \frac{a}{r}$$

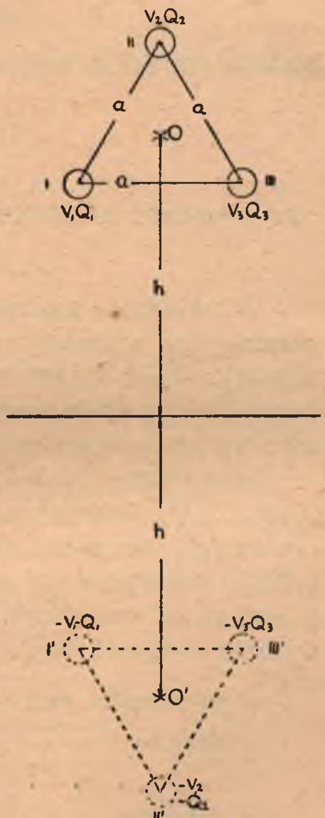
i analogicznie
$$V_2 = 2Q_2 \ln \frac{a}{r},$$

$$V_3 = 2Q_3 \ln \frac{a}{r},$$

Wobec tego pojemność każdego przewodu (fazy) na 1 cm długości w cm będzie
$$C = \frac{1}{2 \ln \frac{a}{r}}$$

lub
$$C = \frac{0{,}0241}{lg \frac{a}{r}} \frac{\mu F}{km},$$

a więc taka sama jak i w przypadku dwóch równoległych przewodów.



Rys. 169

W przypadku, gdy trzy przewody prądu trójfazowego są ułożone na jednej prostej poziomej w równych odstępach, pojemność środkowego przewodu wypada większa od pojemności przewodów skrajnych. W praktyce stosuje się w tym przypadku tak zwane przeplatanie przewodów, polegające na tym, że linię lub jej część dzieli się na trzy równe odcinki i w końcu pierwszego i drugiego odcinka zmienia się położenie każdego z przewodów (faz); kolejność faz jest następująca:

1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2

i każda faza w równych odstępach otrzymuje wszystkie trzy położenia. W ten sposób układ niesymetryczny zbliża się do układu symetrycznego i będzie tym bliższy, im krótsze są odcinki przeplatane. Często dla odległości między fazami bierze się średnią geometryczną z odpowiednich wartości, czyli w rozpatrywanym przypadku

$$a_{śr} = \sqrt[3]{a \cdot a \cdot 2a} = a\sqrt[3]{2},$$

gdzie a stanowi odległość między dwoma najbliższymi przewodami.

§ 76

POJEMNOŚĆ CZĄSTKOWA I POJEMNOŚĆ ROBOCZA W LINIACH ELEKTRYCZNYCH

W układach wieloprzewodowych znajdujących się pod prądem poszczególne przewody posiadają na ogół różne ładunki elektryczne. Każdy z tych ładunków wpływa na wszystkie przewody w ten sposób, że na tych przewodach powstaną potencjały, których wartości są proporcjonalne do poszczególnych ładunków.

Rozpatrzmy układ zawierający n przewodów z ładunkami $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$. Załóżmy na chwilę, że wszystkie przewody, z wyjątkiem pierwszego, nie posiadają ładunków, że zatem mamy do czynienia tylko z ładunkiem Q_1; wówczas potencjały (względem ziemi), które powstaną na wszystkich przewodach, proporcjonalne do Q_1, możemy wyrazić w sposób następujący:

w pierwszym przewodzie $a_{11} Q_1$,
w drugim „ $a_{21} Q_1$,
. . . .
w ostatnim „ $a_{n1} Q_1$,

gdzie $a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1}$ oznaczają współczynniki niezależne od ładunków.

Zakładając następnie, że mamy tylko ładunek Q_2 na drugim przewodzie, otrzymamy dla potencjałów powstających na przewodach wartości $a_{12}Q_2$, $a_{22}Q_2$, ..., $a_{n2}Q_2$ itd.; dla ostatniego ładunku Q_n — $a_{1n}Q_n$, $a_{2n}Q_n$ ... $a_{nn}Q_n$.

Gdy wszystkie ładunki działają jednocześnie, otrzymamy w rezultacie na przewodach potencjały, które stanowią sumę potencjałów powstających od poszczególnych ładunków; oznaczając te potencjały przez v_1, v_2, ..., v_n będziemy mieli

$$\begin{aligned}
v_1 &= a_{11}Q_1 + a_{12}Q_2 + \ldots + a_{1n}Q_n,\\
v_2 &= a_{21}Q_1 + a_{22}Q_2 + \ldots + a_{2n}Q_n,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
v_n &= a_{n1}Q_1 + a_{n2}Q_2 + \ldots + a_{nn}Q_n.
\end{aligned}$$

Z tych n równań liniowych można wyznaczyć Q_1, Q_2, ..., Q_n w zależności od potencjałów v_1, v_2, ..., v_n, przy czym otrzymamy również funkcje liniowe o postaci

$$\begin{aligned}
Q_1 &= b_{11}v_1 + b_{12}v_2 + \ldots + b_{1n}v_n,\\
Q_2 &= b_{21}v_1 + b_{22}v_2 + \ldots + b_{2n}v_n,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
Q_n &= b_{n1}v_1 + b_{n2}v_2 + \ldots + b_{nn}v_n.
\end{aligned}$$

Ostatnie wzory można przepisać inaczej, mianowicie

$$\left.\begin{aligned}
Q_1 &= C_{11}v_1 + C_{12}(v_1 - v_2) + C_{13}(v_1 - v_3) + \ldots + C_{1n}(v_1 - v_n),\\
Q_2 &= C_{22}v_2 + C_{21}(v_2 - v_1) + C_{23}(v_2 - v_3) + \ldots + C_{2n}(v_2 - v_n),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
Q_n &= C_{nn}v_n + C_{n1}(v_n - v_1) + C_{n2}(v_n - v_2) + \ldots + C_{n(n-1)}(v_n - v_{n-1}),
\end{aligned}\right| \quad (13)$$

gdzie, jak łatwo zauważyć,

$$\begin{aligned}
b_{11} &= C_{11} + C_{12} + C_{13} + \ldots + C_{1n},\\
b_{22} &= C_{22} + C_{21} + C_{23} + \ldots + C_{2n},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
b_{nn} &= C_{nn} + C_{n1} + C_{n2} + \ldots + C_{n(n-1)},\\
b_{12} &= -C_{12};\ b_{21} = -C_{21},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
b_{kl} &= -C_{kl};\ b_{lk} = -C_{lk}.
\end{aligned}$$

Pomiędzy każdą parą przewodów powstaje strumień indukcji elektrycznej, przy czym strumień idący np. z przewodu I do przewodu II jest równy co do wartości, lecz przeciwnie skierowany do strumienia idącego z przewodu II do przewodu I itd.; z tego wynika, że

$$C_{12}(v_1 - v_2) = -C_{21}(v_2 - v_1)$$

i ogólnie

$$C_{kl}(v_k - v_l) = -C_{lk}(v_l - v_k),$$

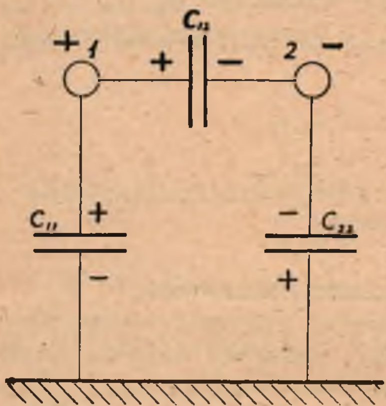
czyli

$$C_{12} = C_{21}$$

i ogólnie

$$C_{kl} = C_{lk}.$$

Wielkość C_{kl} nazywamy *pojemnością cząstkową* między przewodami k i l, przy czym jednym z przewodów może być ziemia.



Rys. 170

Łatwo zauważyć ze wzorów (13), że $C_{11}, C_{22}, \ldots, C_{nn}$ stanowią wartości ładunków na poszczególnych przewodach w przypadku, gdy potencjały $v_1, v_2, \ldots, v_n$ na wszystkich przewodach równe są 1.

Pojemność wypadkową układu zawierającego pojemności cząstkowe nazywamy *pojemnością roboczą* tego układu.

Tak np. dla linii dwuprzewodowej napowietrznej otrzymamy 3 pojemności cząstkowe (rys. 170): dwie, C_{11} i C_{22}, między każdym z przewodów i ziemią, i jedną, C_{12}, między przewodami. Pierwsze dwie są połączone w szereg, zaś C_{12} równolegle do poprzednich; wypadkowa pojemność takiego układu będzie

$$C = C_{12} + \frac{C_{11} C_{22}}{C_{11} + C_{22}}.$$

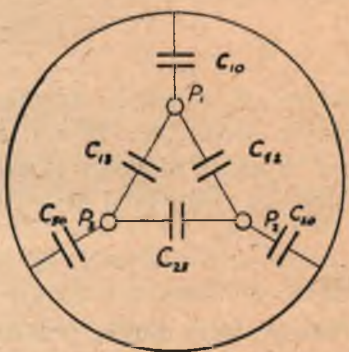
Gdy oba przewody są zawieszone na tej samej wysokości, wtedy $C_{11} = C_{22} = C_0$ i wypadkowa pojemność staje się równą

$$C = C_{12} + \frac{C_0}{2};$$

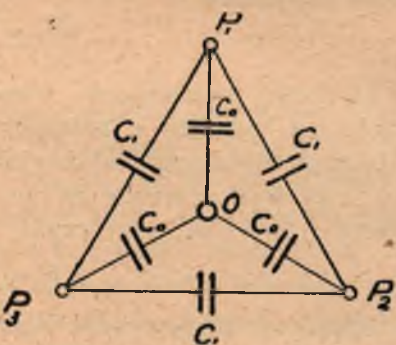
będzie to pojemność robocza rozpatrywanej linii dwuprzewodowej. Gdy przewody są zawieszone wysoko nad ziemią, pojemność C_0 ma wartość nieznaczną w porównaniu do pojemności C_{12}; wówczas pojemność robocza sprowadza się do pojemności między przewodami.

Na rys. 171 mamy układ trzech przewodów P_1, P_2 i P_3 otoczonych uziemionym płaszczem metalowym; spostrzegamy 6 pojemności cząstkowych: C_{10}, C_{20} i C_{30} między poszczególnymi przewodami i płaszczem oraz C_{12}, C_{13} i C_{23} między przewodami. Przy symetrycznym układzie $C_{10} = C_{20} = C_{30} = C_0$ oraz $C_{12} = C_{13} = C_{23} = C_1$.

Układ poprzedni można schematycznie przedstawić jak na rys. 172, gdzie punkt O odpowiada uziemieniu.



Rys. 171



Rys. 172

Oznaczając napięcia fazowe (między przewodem i uziemieniem) dla poszczególnych przewodów przez U_1, U_2 i U_3, otrzymamy dla prądu ładowania kondensatorów, pobieranego z pierwszego przewodu,

$$\hat{I}_c = \hat{U}_1 j\omega C_0 + (\hat{U}_1 - \hat{U}_2) j\omega C_1 + (\hat{U}_1 - \hat{U}_3) j\omega C_1 = \hat{U}_1 j\omega C_0 +$$
$$+ (2\hat{U}_1 - \hat{U}_2 - \hat{U}_3)\, j\omega C_1,$$

ale dla symetrycznego układu, przy jednakowym obciążeniu wszystkich trzech faz,

$$\hat{U}_1 + \hat{U}_2 + \hat{U}_3 = 0,$$
$$-\hat{U}_2 - \hat{U}_3 = \hat{U}_1,$$

wobec tego

$$\hat{I}_c = \hat{U}_1 j\omega (C_0 + 3C_1).$$

Analogiczne wzory otrzymalibyśmy dla pozostałych przewodów. Wyraz $C = C_0 + 3C_1$ stanowi w tym przypadku pojemność roboczą każdego przewodu.

§ 77

INDUKCYJNOŚĆ

Rozpatrzmy dowolny obwód, przez który przepływa prąd. Pod wpływem tego prądu powstaje pole magnetyczne i przez obwód przeniknie strumień magnetyczny. Iloraz tego strumienia magnetycznego przez prąd przepływający w obwodzie nazywamy indukcyjnością własną tego obwodu. Jeżeli w obwodzie płynie prąd I i całkowity strumień magnetyczny, objęty przez ten obwód i powstający pod wpływem tego prądu, będzie Φ, wówczas indukcyjność własna obwodu wypadnie

$$L = \frac{\Phi}{I}.$$

Liczbowo indukcyjność własna równa się wartości strumienia wywołanego prądem o natężeniu równym jednostce. W układzie elektromagnetycznym indukcyjność ma wymiar długości i wobec tego może być mierzona w cm. Praktyczną jednostką jest henr, oznaczany przez H, przy czym

$$1\,H = 10^9\,\text{cm}.$$

Będziemy rozpatrywali obwody zawierające długie przewody z materiałów magnetycznie obojętnych, jak miedź lub aluminium, dla których przenikalność magnetyczna względna równa jest 1. W tym przypadku L stanowi wielkość stałą, zależną tylko od geometrycznego układu i wymiarów przewodów.

§ 78

INDUKCYJNOŚĆ LINII DWUPRZEWODOWEJ

Dwa długie i jednakowe przewody I i II (rys. 173) o długości l i średnicy d znajdują się w odległości a (między osiami). Prostoliniowy przewód, po którym przepływa prąd I, daje pole magnetyczne, którego natężenie w odległości x będzie $H_x = \frac{2I}{x}$. Takie natężenie pola będziemy mieli we wszystkich punktach znajdujących się poza przewodem, czyli dla $x \geqslant \frac{d}{2}$. Dla określenia natężenia pola magnetycznego wewnątrz przewodu, czyli dla $x \leqslant \frac{d}{2}$, musimy brać pod uwagę nie cały prąd I rozłożony w przekroju poprzecznym przewodu, lecz tylko tę jego część, która odpowiada polu poprzecznego przekroju o promieniu x; oznaczając wartość tego prądu wewnątrz przekroju przez I_x, będziemy mieli

$$\frac{I_x}{I}=\frac{\pi x^2}{\pi\frac{d^2}{4}}=\frac{4x^2}{d^2},$$

skąd

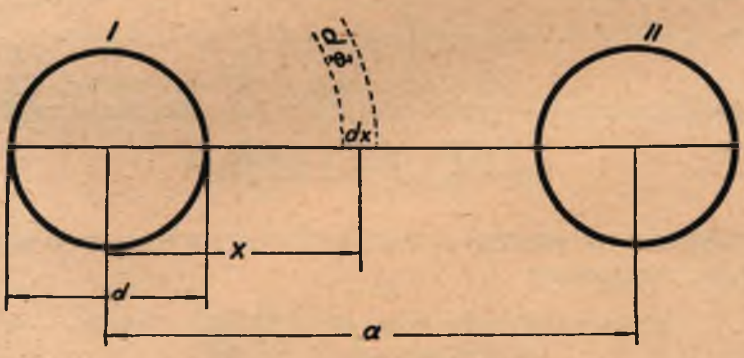
$$I_x=\frac{4x^2}{d^2}I.$$

Wobec tego natężenie pola wewnątrz przewodu w odległości x będzie

$$H_x=\frac{8x^2}{d^2}\,\frac{I}{x}=\frac{8x}{d^2}I. \tag{14}$$

Obliczmy strumień magnetyczny przenikający przez rozpatrywany obwód pod wpływem prądu przewodu I. Przeprowadźmy płaszczyznę przez osie przewodów i rozpatrzmy na tej płaszczyźnie w odległości x od przewodu I nieskończenie wąski pasek szerokości dx i długości l; natężenie pola w tym pasku będzie równe H_x.

Każdy z przewodów można rozpatrywać jako jeden zwój, przez który przepływa prąd I; natężenie prądu I_x stanowi część tego prądu odpowiadającą jakby $\frac{4x^2}{d^2}$ zwojom.



Rys. 173

Wobec tego strumień magnetyczny odpowiadający prądowi I, który oznaczamy przez Φ_1, otrzymamy w postaci

$$d\Phi_1=\frac{4x^2}{d^2}H_x l\,dx=\frac{4x^2}{d^2}\cdot\frac{8x}{d^2}Il\,dx,$$

czyli ostatecznie

$$d\Phi_1 = \frac{32x^3}{d^4} Il dx,$$

skąd

$$\Phi_1 = \frac{32Il}{d^4}\int_0^{\frac{d}{2}} x^3 dx = \frac{32Il}{d^4}\cdot\frac{d^4}{4 \cdot 16} = \frac{Il}{2}. \tag{15}$$

Druga część strumienia, znajdująca się zewnątrz przewodu, będzie

$$\Phi_2 = \int_{\frac{d}{2}}^{a} \frac{2Il}{x} dx = 2Il \ln\frac{2a}{d}.$$

Cały strumień od przewodu I będzie

$$\Phi_1 + \Phi_2 = Il\left(0{,}5 + 2\ln\frac{2a}{d}\right).$$

Rozpatrując teraz przewód II z takim samym prądem I, lecz o znaku przeciwnym, otrzymamy zupełnie taki sam strumień, okrążający przewód II w kierunku przeciwnym, a więc mający kierunek jednakowy z kierunkiem strumienia przewodu I w polu objętym przez rozpatrywany obwód. W ten sposób całkowity strumień działający na obwód będzie

$$\Phi = 2Il\left(0{,}5 + 2\ln\frac{2a}{d}\right),$$

skąd znajdujemy indukcyjność całej linii w jednostkach cgs, czyli w cm

$$L = \frac{\Phi}{I} = \left(1 + 4\ln\frac{2a}{d}\right)l. \tag{16}$$

Zakładając w tym wzorze $l = 1$ km $= 10^5$ cm i wyrażając L w $mH =$ $= 10^6$ cm, otrzymamy

$$L = \left(0{,}1 + 0{,}4\ln\frac{2a}{d}\right)\frac{mH}{km}. \tag{17}$$

albo po wprowadzeniu zwykłych logarytmów

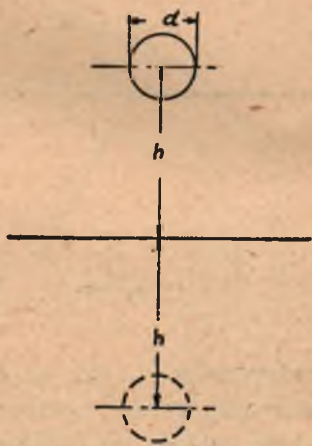
$$L = \left(0{,}1 + 0{,}92\lg\frac{2a}{d}\right)\frac{mH}{km} \tag{18}$$

Wzór ten może być zastosowany również do linii kablowej, zawierającej dwa jednożyłowe kable ołowione, lecz nie opancerzone.

Wzór nadaje się też do kabla dwużyłowego, skręconego, opancerzonego, żelazo pancerza bowiem bardzo nieznacznie mogłoby wpływać na indukcyjność takiej linii, gdyż prądy w obydwóch przewodach w każdej chwili mają wartości jednakowe, kierunki zaś przeciwne, więc nie powinno zachodzić większe magnesowanie się żelaza pancerza.

§ 79

INDUKCYJNOŚĆ LINII JEDNOPRZEWODOWEJ (DRUGI PRZEWÓD ZIEMIA)



Rys. 174

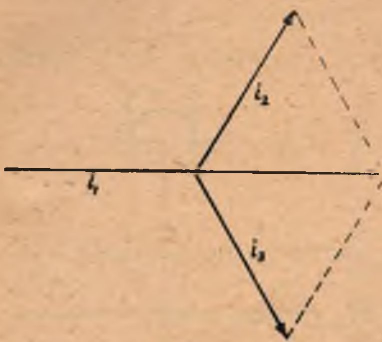
Układ taki można zastąpić za pomocą metody Lorda K e l v i n a przez linię dwuprzewodową (rys. 174), przy tym drugi umyślony przewód stanowi elektryczne odbicie danego przewodu. Oznaczając przez h wysokość zawieszenia przewodu nad ziemią, zaś przez d jego średnicę, otrzymamy odległość między przewodami $a = 2h$. Ponieważ w rzeczywistości mamy jeden przewód, który daje połowę strumienia całkowitego linii dwuprzewodowej, przeto we wzorze (18) musimy założyć $a = 2h$ i wszystko pomnożyć przez $\frac{1}{2}$; wobec tego dla rozpatrywanej linii

$$L = \left(0{,}05 + 0{,}46\ lg\,\frac{4h}{d}\right)\frac{mH}{km}.$$

§ 80

INDUKCYJNOŚĆ LINII TRÓJPRZEWODOWEJ PRĄDU TRÓJFAZOWEGO

Jeżeli mamy układ zawierający trzy przewody prądu trójfazowego, symetrycznie ułożone, wtedy we wszystkich trzech przewodach w każdej chwili będą płynęły prądy, których suma algebraiczna równa jest zeru. Z tego wynika, że w każdej chwili prąd w jednym z przewodów co do wartości swej równy jest sumie prądów płynących w dwóch pozostałych przewodach. Wobec tego w każdej chwili strumień magnetyczny wywołany przez dwa przewody równy jest strumieniowi wywołanemu przez trzeci przewód. Można więc uważać dwa przewody pod względem działania zewnętrznego za równoznaczne z trzecim i zamienić dwa przewody na jeden równoważny (rys. 175); linię dwuprzewodową otrzymamy wtedy, gdy na każdy przewód przypada połowa całkowitego strumienia magnetycznego. Możemy więc zastosować dla indukcyjności ten sam wzór (18), biorąc dla każdego przewodu połowę wartości, tj.



Rys. 175

$$L = \left(0{,}05 + 0{,}46\ lg \frac{2a}{d}\right) \frac{mH}{km}.$$

Taki wzór możemy stosować zarówno dla linii napowietrznej jak i do kabla trójżyłowego skręconego.

Gdy trzy przewody prądu trójfazowego nie stanowią układu symetrycznego i, jak to obecnie często się praktykuje, są ułożone na jednej prostej poziomej w równych odstępach, wówczas — tak jak to zostało już omówione w § 75 — stosuje się przeplatanie przewodów (faz). Wtedy oblicza się indukcyjność jak dla układu symetrycznego według wyżej podanego wzoru, przy czym dla odległości między przewodami bierze się często średnią geometryczną z odległości rzeczywistych; w tym przypadku

$$a_{śr} = a\sqrt[3]{2}.$$

§ 81

INDUKCYJNOŚĆ KABLA DWUŻYŁOWEGO KONCENTRYCZNEGO

Oznaczmy przez d średnicę wewnętrznego przewodu, zaś przez d_1 i d_2 średnicę wewnętrzną i zewnętrzną drugiego przewodu koncentrycznego (rys. 176).

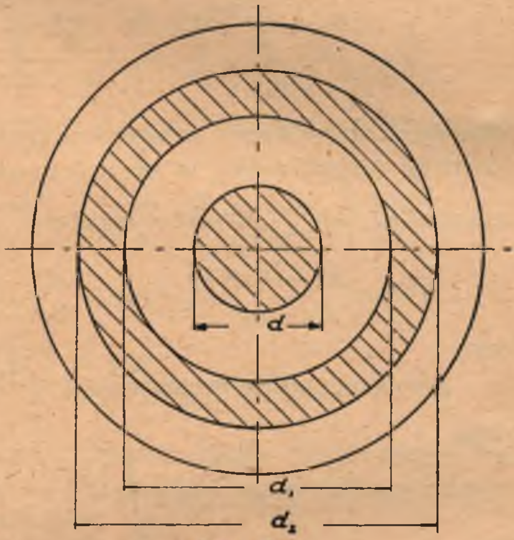
W dowolnym punkcie znajdującym się w odległości $x \leqslant \frac{d_1}{2}$ od osi kabla, natężenie pola magnetycznego będzie zależało wyłącznie od prądu wewnętrznego przewodu, ponieważ prąd zewnętrzny pola magnetycznego wewnątrz nie daje. Dla punktów zaś znajdujących się poza zewnętrznym przewodem, dla których $x \geqslant \frac{d_2}{2}$, natężenie pola magnetycznego będzie równe zeru; rzeczywiście, natężenie to będzie wypadkową dwóch natężeń pól, powstających od prądów $+I$ oraz $-I$ płynących w obu przewodach; pierwsze będzie równe $+\frac{2I}{x}$, drugie $-\frac{2I}{x}$, bo odległość mierzy się od osi przewodu, a w tym przypadku osie są wspólne.

Musimy więc rozpatrywać natężenie pola

1) dla $0 < x \leqslant \frac{d}{2}$,

2) dla $\frac{d}{2} \leqslant x \leqslant \frac{d_1}{2}$,

3) dla $\frac{d_1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{d_2}{2}$;



Rys. 176

w pierwszym przypadku, według wzoru (14),

$$H_x' = \frac{8xI}{d^2},$$

w drugim

$$H_x'' = \frac{2I}{x}.$$

Rys. 177

w trzecim zaś, to znaczy w masie zewnętrznego przewodu koncentrycznego, działa prąd wewnętrznego przewodu $+I$ oraz część prądu własnego (rys. 177), mianowicie

$$I_x = \frac{-I}{\frac{\pi d_2^2}{4} - \frac{\pi d_1^2}{4}} \cdot \pi \left(x^2 - \frac{d_1^2}{4}\right) = I \frac{d_1^2 - 4x^2}{d_2^2 - d_1^2};$$

wypadkowy prąd będzie

$$I_x' = I\left(1 + \frac{d_1^2 - 4x^2}{d_2^2 - d_1^2}\right) = I \frac{d_2^2 - 4x^2}{d_2^2 - d_1^2};$$

wobec tego

$$H_x''' = \frac{2I_x'}{x} = \frac{2I(d_2^2 - 4x^2)}{x(d_2^2 - d_1^2)}.$$

Dla obliczenia całkowitego strumienia magnetycznego, objętego dwoma przewodami kabla o długości l, obliczymy strumienie w oddzielnych częściach kabla. Dla wartości x od 0 do $\frac{d}{2}$, według wzoru (15)

$$\Phi_1 = \frac{Il}{2};$$

dla wartości x od $\frac{d}{2}$ do $\frac{d_1}{2}$

$$\Phi_2 = \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{d_1}{2}} H_x'' \, dx = 2Il \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{d_1}{2}} \frac{dx}{x} = 2Il \ln \frac{d_1}{d}.$$

Stosując rozumowanie przeprowadzone dla wzoru (15), określamy strumień magnetyczny w zewnętrznym przewodzie, gdy wartość x zmienia się od $\frac{d_1}{2}$ do $\frac{d_2}{2}$, w postaci

$$d\Phi_3 = \frac{d^2_2 - 4x^2}{d^2_2 - d_1^2} H_x''' \, l\,dx = \frac{d_2^2 - 4x^2}{d_2^2 - d_1^2} \cdot \frac{2Il(d_2^2 - 4x^2)}{x(d_2^2 - d_1^2)} dx,$$

czyli

$$d\Phi_3 = \frac{2Il}{(d_2^2 - d_1^2)^2} \cdot \frac{(d_2^2 - 4x^2)^2}{x} dx,$$

skąd

$$\Phi_3 = \frac{2Il}{(d_2^2 - d_1^2)^2} \int_{\frac{d_1}{2}}^{\frac{d_2}{2}} \frac{d_2^4 - 8d_2^2x^2 + 16x^4}{x} dx =$$

$$= \frac{2Il}{(d_2^2 - d_1^2)^2} \left[d_2^4 \ln \frac{d_2}{d_1} - 8d_2^2 \cdot \frac{1}{2} \frac{d_2^2 - d_1^2}{4} + 16 \cdot \frac{1}{4} \frac{d_2^4 - d_1^4}{16} \right] =$$

$$= \frac{2Il}{(d_2^2 - d_1^2)^2} \left[d_2^4 \ln \frac{d_2}{d_1} - d_2^2 (d_2^2 - d_1^2) + \frac{1}{4} (d_2^4 - d_1^4) \right] =$$

$$= 2Il \left[\frac{d_2^4}{(d_2^2 - d_1^2)^2} \ln \frac{d_2}{d_1} - \frac{d_2^2}{d_2^2 - d_1^2} + \frac{d_2^2 + d_1^2}{4(d_2^2 - d_1^2)} \right] =$$

$$= 2Il \left[\frac{d_2^4}{(d_2^2 - d_1^2)^2} \ln \frac{d_2}{d_1} - \frac{3d_2^2 - d_1^2}{4(d_2^2 - d_1^2)} \right] =$$

$$= 2Il \left[\frac{d_2^4}{(d_2^2 - d_1^2)^2} \ln \frac{d_2}{d_1} - \frac{d_2^2 - d_1^2 + 2d_2^2}{4(d_2^2 - d_1^2)} \right] =$$

$$= 2Il \left[\frac{d_2^4}{(d_2^2 - d_1^2)^2} \ln \frac{d_2}{d_1} - \frac{1}{4} - \frac{d_2^2}{2(d_2^2 - d_1^2)} \right].$$

Dodając do siebie strumienie Φ_1, Φ_2 i Φ_3, otrzymamy całkowity strumień magnetyczny, powstający w rozpatrywanym kablu

$$\Phi = \frac{Il}{2} + 2\,Il\,ln\frac{d_1}{d} + 2\,Il\left[\frac{d_2^4}{(d_2^2-d_1^2)^2}ln\frac{d_2}{d_1} - \frac{1}{4} - \frac{d_2^2}{2(d_2^2-d_1^2)}\right] =$$

$$= 2\,Il\left[\frac{1}{4} + ln\frac{d_1}{d} + \frac{d_2^4}{(d_2^2-d_1^2)^2}ln\frac{d_2}{d_1} - \frac{1}{4} - \frac{d_2^2}{2(d_2^2-d_1^2)}\right] =$$

$$= 2\,Il\left[ln\frac{d_1}{d} + \frac{d_2^4}{(d_2^2-d_1^2)^2}ln\frac{d_2}{d_1} - \frac{d_2^2}{2(d_2^2-d_1^2)}\right],$$

skąd

$$L = \frac{\Phi}{I} = 2\,l\left[ln\frac{d_1}{d} + \frac{d_2^4}{(d_2^2-d_1^2)^2}ln\frac{d_2}{d_1} - \frac{d_2^2}{2(d_2^2-d_1^2)}\right],$$

zaś dla $l = 1$ km i L wyrażonego w mH, po wprowadzeniu zwykłych logarytmów,

$$L = \left[0.46\left(lg\frac{d_1}{d} + \frac{d_2^4}{(d_2^2-d_1^2)^2}lg\frac{d_2}{d_1}\right) - \frac{0,1\,d_2^2}{d_2^2-d_1^2}\right]\frac{mH}{km}.$$

§ 82

ROZSZERZENIE DZIAŁU O PRĄDACH WIELOFAZOWYCH

Rozkład układów niesymetrycznych prądu trójfazowego był rozpatrzony w § 27, str. 105 i n. Przytoczymy tu zasadnicze wzory. Ustaliliśmy, że niesymetryczny układ trzech wektorów $\hat{R}$, $\hat{S}$ i $\hat{T}$ (rys. 178) można rozłożyć na trzy grupy wektorów składowych układu symetrycznego.

Rys. 178

$$\hat{R} = \hat{R}_0 + \hat{R}_1 + \hat{R}_2 \qquad (1)$$

$$\hat{S} = \hat{S}_0 + \hat{a}^2\hat{R}_1 + \hat{a}\hat{R}_2 \qquad (2)$$

$$\hat{T} = \hat{T}_0 + \hat{a}\hat{R}_1 + \hat{a}^2\hat{R}_2, \qquad (3)$$

gdzie

$$\hat{a} = e^{j\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + j\frac{1}{2}\sqrt{3},$$

$$\hat{a}^2 = e^{j\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - j\frac{1}{2}\sqrt{3},$$

$$\hat{a}^3 = 1; \quad 1 + \hat{a} + \hat{a}^2 = 0.$$

W powyższych wzorach (1), (2) i (3) możemy wyróżnić trzy grupy wektorów, a mianowicie:

$$\hat{R}_0,\ \hat{R}_0,\ \hat{R}_0,$$

$$\hat{R}_1,\ \hat{a}^2\hat{R}_1,\ \hat{a}\hat{R}_1,$$

$$\hat{R}_2,\ \hat{a}\hat{R}_2,\ \hat{a}\hat{R}^2_2.$$

Każda z tych grup przedstawia układ symetryczny, przy czym pierwsza stanowi jeden wektor, druga odpowiada normalnemu symetrycznemu układowi prądu trójfazowego, trzecia zaś grupa różni się od poprzedniej tylko zmienioną kolejnością wektorów.

Często nazywają pierwszą grupę układem zerowym, drugą — układem współbieżnym, trzecią — układem przeciwbieżnym.

Wektory składowe $\hat{R}_1$, $\hat{R}_2$ i $\hat{R}_0$ wyrażamy przy pomocy wektorów danych w sposób następujący:

$$\hat{R}_0 = \frac{1}{3}(\hat{R} + \hat{S} + \hat{T}) \tag{4}$$

$$\hat{R}_1 = \frac{1}{3}(\hat{R} + \hat{a}\,\hat{S} + \hat{a}^2\hat{T}) \tag{5}$$

$$\hat{R}_2 = \frac{1}{3}(\hat{R} + \hat{a}^2\hat{S} + \hat{a}\,\hat{T}). \tag{6}$$

W obwodach prądów zmiennych mamy przeważnie do czynienia z siłami elektromotorycznymi, napięciami i prądami. Będziemy oznaczali te wielkości przy pomocy odpowiednich wskaźników; a więc dla wektorów układu niesymetrycznego, które oznaczyliśmy ogólnie przez $\hat{R}$, i $\hat{S}$, $\hat{T}$ będziemy pisali $\hat{E}_R$, $\hat{E}_S$, $\hat{E}_T$, $\hat{U}_R$, $\hat{U}_S$, $\hat{U}_T$, $\hat{I}_R$, $\hat{I}_S$, $\hat{I}_T$, zaś składowe symetryczne $\hat{R}_0$, $\hat{R}_1$, $\hat{R}_2$ będziemy odpowiednio oznaczali przez $\hat{E}_0$, $\hat{E}_1$, $\hat{E}_2$, $\hat{U}_0$. $\hat{U}_1$, $\hat{U}_2$, $\hat{I}_0$, $\hat{I}_1$, $\hat{I}_2$. W ten sposób otrzymamy następujące wzory np. dla napięcia.

$$\hat{U}_R = \hat{U}_0 + \hat{U}_1 + \hat{U}_2,$$

$$\hat{U}_S = \hat{U}_0 + \hat{a}^2\hat{U}_1 + \hat{a}\,\hat{U}_2,$$

$$\hat{U}_T = \hat{U}_0 + \hat{a}\hat{U}_1 + \hat{a}^2\hat{U}_2.$$

$$\hat{U}_0 = \frac{1}{3}(\hat{U}_R + \hat{U}_S + \hat{U}_T),$$

$$\hat{U}_1 = \frac{1}{3}(\hat{U}_R + \hat{a}\,\hat{U}_S + \hat{a}^2\hat{U}_T),$$

$$\hat{U}_2 = \frac{1}{3}(\hat{U}_R + \hat{a}^2\hat{U}_S + \hat{a}\,\hat{U}_T).$$

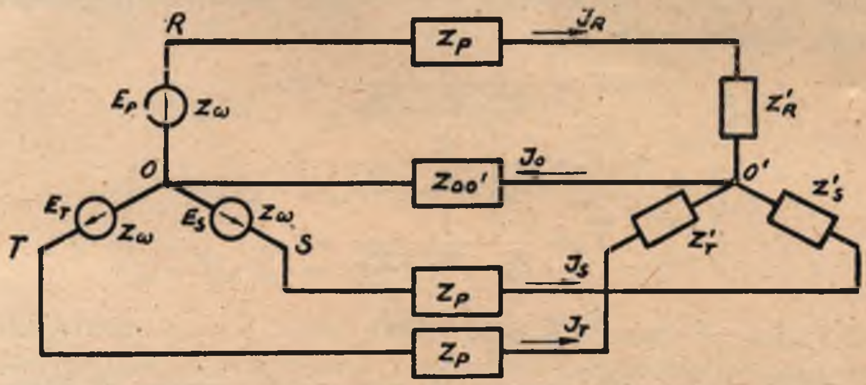
i analogiczne wzory dla siły elektromotorycznej i natężenia prądu.

Obecnie zastosujemy metodę składowych symetrycznych w obwodach prądu trójfazowego.

§ 83

ZASILANIE NIESYMETRYCZNE

Mając dany niesymetryczny układ sił elektromotorycznych lub napięć źródła, należy wyznaczyć prądy przewodowe, znając wszystkie oporności obwodu. W tym celu rozpatrzmy układ gwiazdowy z przewodem zerowym. Dla układu trójkątnego stosujemy znaną metodę Kennely'ego przekształcania trójkąta w równoważną gwiazdę (rys. 179). *SEM* fazowe E_R, E_S, E_T stanowią układ niesymetryczny. Należy wyznaczyć prądy przewodowe I_R, I_S, I_T, I_0.



Rys. 179

Składowe symetryczne rozpatrywanego układu *SEM* będą [wzory (4), (5), (6)]:

$$\hat{E}_0 = \frac{1}{3}(\hat{E}_R + \hat{E}_S + \hat{E}_T),$$

$$\hat{E}_1 + \frac{1}{3}(\hat{E}_R + \hat{a}\hat{E}_S + \hat{a}^2\hat{E}_T),$$

$$\hat{E}_2 = \frac{1}{3}(\hat{E}_R + \hat{a}^2\hat{E}_S + \hat{a}\hat{E}_T);$$

każdą z danych *SEM* można wyrazić przy pomocy składowych symetrycznych w sposób następujący [wzory (1), (2), (3)]:

$$\hat{E}_R = \hat{E}_0 + \hat{E}_1 + \hat{E}_2,$$
$$\hat{E}_S = \hat{E}_0 + \hat{a}^2\hat{E}_1 + \hat{a}\hat{E}_2,$$
$$\hat{E}_T = \hat{E}_0 + \hat{a}\hat{E}_1 + \hat{a}^2\hat{E}_2.$$

Jak wiemy z poprzedniego, grupa składowych $\hat{E}_0$, $\hat{E}_0$, $\hat{E}_0$, stanowiących właściwie jeden wektor, nazywana jest układem zerowym, grupy $\hat{E}_1$, $\hat{a}^2\hat{E}_1$, $\hat{a}\hat{E}_2$ układem współbieżnym, zaś grupa $\hat{E}_2$, $\hat{a}\hat{E}_2$, $\hat{a}^2\hat{E}_2$ układem przeciwbieżnym.

Zacznijmy od rozpatrzenia działania układu współbieżnego $\hat{E}_1$, $\hat{a}^2\hat{E}_1$, $\hat{a}\hat{E}_1$.

W § 29 str. 112, 113 dla układu gwiazdowego z przewodem zerowym (prądu trójfazowego) był wyprowadzony wzór (10), dający napięcie między punktami zerowymi źródła i odbiornika w postaci

$$\hat{U}_{00'} = -\frac{\hat{E}_1\hat{Y}_1 + \hat{E}_2\hat{Y}_2 + \hat{E}_3\hat{Y}_3}{\hat{Y}_1 + \hat{Y}_2 + \hat{Y}_3 + \hat{Y}_0},$$

gdzie $\hat{Y}_1$, $\hat{Y}_2$, $\hat{Y}_3$ i $\hat{Y}_0$ oznaczają przewodności pozorne odpowiednich części układu, czyli

$$\hat{Y}_1 = \frac{1}{\hat{Z}_w + \hat{Z}_P + \hat{Z}_R} = \hat{Y}_R,$$

$$\hat{Y}_2 = \frac{1}{\hat{Z}_w + \hat{Z}_P + \hat{Z}_S} = \hat{Y}_S,$$

$$\hat{Y}_3 = \frac{1}{\hat{Z}_w + \hat{Z}_P + \hat{Z}_T} = \hat{Y}_T,$$

$$\hat{Y}_0 = \frac{1}{\hat{Z}_{00'}} = \hat{Y}_{00'}.$$

W naszym przypadku zamiast $\hat{E}_2$ mamy $\hat{a}^2\hat{E}_1$, zamiast $\hat{E}_3$ mamy $\hat{a}\hat{E}_1$; wobec tego spadek napięcia na przewodzie zerowym wynosi

$$\hat{U}_{00'} = -\frac{\hat{E}_1\hat{Y}_R + \hat{a}^2\hat{E}_1\hat{Y}_S + \hat{a}\hat{E}_1\hat{Y}_T}{\hat{Y}_R + \hat{Y}_S + \hat{Y}_T + \hat{Y}_{00'}} = -\frac{\hat{E}_1(\hat{Y}_R + \hat{a}^2\hat{Y}_S + \hat{a}\hat{Y}_T)}{\hat{Y}_R + \hat{Y}_S + \hat{Y}_T + \hat{Y}_{00'}}.$$

Przewodności, które wprowadziliśmy do ostatnich wzorów, można rozłożyć na składowe, odpowiadające składowym symetrycznym niesymetrycznego układu, mianowicie

$$\hat{Y}_0 = \frac{1}{3}(\hat{Y}_R + \hat{Y}_S + \hat{Y}_T),$$

$$\hat{Y}_1 = \frac{1}{3}(\hat{Y}_R + a\hat{Y}_S + \hat{a}^2\hat{Y}_T),$$

$$\hat{Y}_2 = \frac{1}{3}(\hat{Y}_R + a^2\hat{Y}_S + \hat{a}\hat{Y}_T);$$

wtedy

$$\hat{Y}_R + \hat{a}^2\hat{Y}_S + \hat{a}\hat{Y}_T = 3\hat{Y}_2; \quad \hat{Y}_R + \hat{Y}_S + \hat{Y}_T = 3\hat{Y}_0;$$

wówczas dla napięcia między punktami zerowymi otrzymamy wzór

$$\hat{U}_{00} = -\frac{3\hat{Y}_2\hat{E}_1}{3\hat{Y}_0 + \hat{Y}_{00'}}.$$

Znak (—) w ostatnim wzorze wskazuje na to, że kierunek napięcia, licząc od punktu zerowego odbiornika, jest przeciwny do kierunku prądu założonego pierwotnie (rys. 179); jeżeli punkt zerowy odbiornika ma potencjał wyższy od potencjału punktu zerowego źródła, wówczas napięcie zgodne z kierunkiem prądu wyrazi się wzorem

$$\hat{U}_{00'} = \frac{3\hat{Y}_2\hat{E}_1}{3\hat{Y}_0 + \hat{Y}_{00'}}.$$

Prądy przewodowe, które dla składowych współbieżnego układu oznaczymy przez I_R', I'_S, I'_T oraz $I'_{00'}$, będą

$$\hat{I}_R' = (\hat{E}_1 - \hat{U}'_{00'})\,\hat{Y}_R = \hat{Y}_R\left(1 - \frac{3\hat{Y}_2}{3\hat{Y}_0 + \hat{Y}_{00'}}\right)\hat{E}_1$$

$$\hat{I}_S' = (\hat{a}^2\hat{E}_1 - \hat{U}_{00'})\,\hat{Y}_S = \hat{Y}_S\left(\hat{a}^2 - \frac{3\hat{Y}_2}{3\hat{Y}_0 + \hat{Y}_{00'}}\right)\hat{E}_1$$

$$\hat{I}_T' = (\hat{a}\hat{E}_1 - \hat{U}'_{00'})\,\hat{Y}_T = \hat{Y}_T\left(\hat{a} - \frac{3\hat{Y}_2}{3\hat{Y}_0 + \hat{Y}_{00'}}\right)\hat{E}_1$$

$$\hat{I}'_{00'} = \hat{Y}_{00'}\,\hat{U}_{00'} = \frac{3\hat{Y}_2\hat{Y}_{00'}}{3\hat{Y}_0 + \hat{Y}_{00'}}\hat{E}_1.$$

Rozpatrzmy teraz działanie układu przeciwbieżnego: $\hat{E}_2$, $\hat{a}\hat{E}_2$, $\hat{a}^2\hat{E}_2$. Analogicznie do poprzednich rozumowań znajdziemy dla napięcia między punktami zerowymi

$$\hat{U}''_{00'} = \frac{\hat{Y}_R\hat{E}_2 + \hat{Y}_S\hat{a}\hat{E}_2 + \hat{Y}_T\hat{a}^2\hat{E}_2}{\hat{Y}_R + \hat{Y}_S + \hat{Y}_T + \hat{Y}_{00'}} = \frac{3\hat{Y}_1}{3\hat{Y}_0 + \hat{Y}_{00'}}\hat{E}_2.$$

Prądy przewodowe

$$\hat{I}_R'' = \hat{Y}_R(\hat{E}_2 - \hat{U}_{00'}) = \hat{Y}_R\left(1 - \frac{3\hat{Y}_1}{3\hat{Y}_0 + \hat{Y}_{00'}}\right)\hat{E}_2,$$

$$\hat{I}_S'' = \hat{Y}_S(\hat{a}E_2 - \hat{U}''_{00'}) = \hat{Y}_S\left(\hat{a} - \frac{3\hat{Y}_1}{3\hat{Y}_0 + \hat{Y}_{00'}}\right)\hat{E}_2,$$

$$\hat{I}_T'' = \hat{Y}_T(\hat{a}^2E_2 - \hat{U}''_{00'}) = \hat{Y}_T\left(\hat{a}^2 - \frac{3\hat{Y}_1}{3\hat{Y}_0 + \hat{Y}_{00'}}\right)\hat{E}_2,$$

$$\hat{I}''_{00'} = \hat{Y}_{00'}\,\hat{U}''_{00'} = \frac{3\hat{Y}_1\hat{Y}_{00'}}{3\hat{Y}_0 + \hat{Y}_{00'}}\hat{E}_2.$$

Działanic układu zerowego $\hat{E}_0$, $\hat{E}_0$, $\hat{E}_0$ rozpatrzymy w sposób następujący. Z schematu (rys. 180) napięcie między punktami zerowymi

$$\hat{U}'''_{00'} = \frac{\hat{E}_0(\hat{Y}_R + \hat{Y}_S + \hat{Y}_T)}{\hat{Y}_R + \hat{Y}_S + \hat{Y}_T + \hat{Y}_{00'}} = \frac{3\hat{Y}_0}{3\hat{Y}_0 + \hat{Y}_{00'}}\hat{E}_0.$$

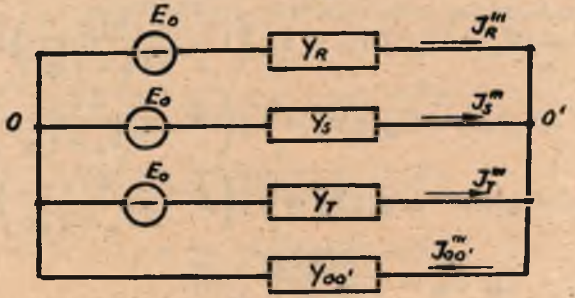
Prądy przewodowe

$$I_R''' = \hat{Y}_R(\hat{E}_0 - \hat{U}'''_{00'}) = \hat{Y}_R\left(1 - \frac{3\hat{Y}_0}{3\hat{Y}_0 + \hat{Y}_{00'}}\right)\hat{E}_0,$$

$$I_S''' = \hat{Y}_S(\hat{E}_0 - \hat{U}'''_{00'}) = \hat{Y}_S\left(1 - \frac{3\hat{Y}_0}{3\hat{Y}_0 + \hat{Y}_{00'}}\right)\hat{E}_0,$$

$$I_T''' = \hat{Y}_T(\hat{E}_0 - \hat{U}'''_{00'}) = \hat{Y}_T\left(1 - \frac{3\hat{Y}_0}{3\hat{Y}_0 + \hat{Y}_{00'}}\right)\hat{E}_0,$$

$$I'''_{00'} = \hat{U}_{00'}\hat{Y}_{00'} = \frac{3\hat{Y}_0\hat{Y}_{00'}}{3\hat{Y}_0 + \hat{Y}_{00'}}\hat{E}_0.$$



Rys. 180

Rzeczywiste prądy przewodowe otrzymamy jako sumę prądów od poszczególnych składowych

$$\hat{I}_R = \hat{I}_R' + \hat{I}_R'' + \hat{I}_R''',$$
$$\hat{I}_S = \hat{I}_S' + \hat{I}_S'' + \hat{I}_S''',$$
$$\hat{I}_T = \hat{I}_T' + \hat{I}_T'' + \hat{I}_T'''.$$

§ 84

ZASTOSOWANIE PRAW KIRCHHOFFA DO SKŁADOWYCH SYMETRYCZNYCH

Rozpatrzmy schemat (rys. 181), gdzie I_R, I_S, I_T stanowią prądy dopływające, zaś I_R', I_S', I_T'; I_R'', I_S'', I_T'' prądy odpływające, przy czym wszystkie prądy stanowią układy niesymetryczne prądu trójfazowego.

Stosując do węzłów I prawo K i r c h h o f f a, będziemy mieli

$$\hat{I}_R - \hat{I}_R' - \hat{I}_R'' = 0,$$
$$\hat{I}_S - \hat{I}_S' - \hat{I}_S'' = 0.$$
$$\hat{I}_T - \hat{I}_T' - \hat{I}_T'' = 0,$$

Niech składowe symetryczne będą

dla $\hat{I}_R$: $\hat{I}_0$, $\hat{I}_1$, $\hat{I}_2$,

dla $\hat{I}_R'$: $\hat{I}'_0$, $\hat{I}_1'$, $\hat{I}_2'$,

dla $\hat{I}_R''$: $\hat{I}_0''$, $\hat{I}_1''$, $\hat{I}_2''$.

Podstawiając te składowe do układu równań na I prawo Kirchhoffa i biorąc pod uwagę podstawowe wzory (1), (2) i (3) otrzymamy

$$(\hat{I}_0 + \hat{I}_1 + \hat{I}_2) - (\hat{I}_0' + \hat{I}_1' + \hat{I}_2') - (\hat{I}_0'' + \hat{I}_1'' + \hat{I}_2'') = 0,$$
$$(\hat{I}_0 + \hat{a}^2\hat{I}_1 + \hat{a}\hat{I}_2) - (\hat{I}_0' + \hat{a}^2\hat{I}_1' + \hat{a}\hat{I}_2') - (\hat{I}_0'' + \hat{a}^2\hat{I}_1'' + \hat{a}\hat{I}_2'') = 0,$$
$$(\hat{I}_0 + \hat{a}\hat{I}_1 + \hat{a}^2\hat{I}_2) - (\hat{I}_0' + \hat{a}\hat{I}_1' + \hat{a}^2\hat{I}_2') - (\hat{I}_0'' + \hat{a}\hat{I}_1'' + \hat{a}^2\hat{I}_2'') = 0;$$

lub po przegrupowaniu

$$(\hat{I}_0 - \hat{I}_0' - \hat{I}_0'') + (\hat{I}_1 - \hat{I}_1' - \hat{I}_1'') + (\hat{I}_2 - \hat{I}_2' - \hat{I}_2'') = 0,$$
$$(\hat{I}_0 - \hat{I}_0' - \hat{I}_0'') + \hat{a}^2(\hat{I}_1 - \hat{I}_1' - \hat{I}_1'') + \hat{a}(\hat{I}_2 - \hat{I}_2' - \hat{I}_2'') = 0,$$
$$(\hat{I}_0 - \hat{I}_0' - \hat{I}_0'') + \hat{a}(\hat{I}_1 - \hat{I}_1' - \hat{I}_1'') + \hat{a}^2(\hat{I}_2 - \hat{I}_2' - \hat{I}_2'') = 0.$$

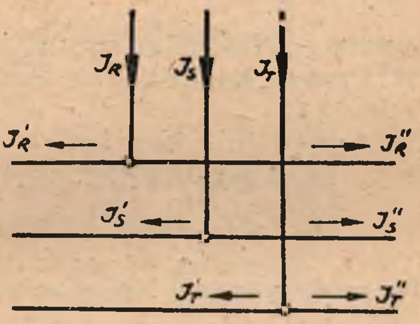
Dodając stronami te równania i biorąc pod uwagę, że $1 + \hat{a} + \hat{a}^2 = 0$, otrzymamy

$$\hat{I}_0 - \hat{I}_0' - \hat{I}_0'' = 0.$$

Mnożąc drugie równanie przez $\hat{a}$, trzecie przez $\hat{a}^2$ i dodając stronami, będziemy mieli

$$\hat{I}_1 - \hat{I}_1' - \hat{I}_1'' = 0;$$

wreszcie, mnożąc drugie równanie przez $\hat{a}^2$, trzecie przez $\hat{a}$ i dodając, otrzymamy



Rys. 181

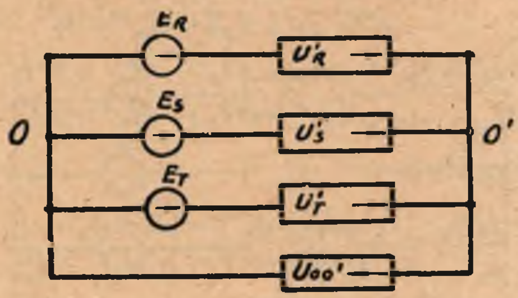
$$\hat{I}_2 - \hat{I}_2' - \hat{I}_2'' = 0.$$

W ten sposób stwierdziliśmy, że I prawo Kirchhoffa można zastosować do składowych symetrycznych.

Aby dowieść, że i II prawo Kirchhoffa można stosować do składowych symetrycznych, rozpatrzmy schemat (rys. 182). Działają trzy *SEM* E_R, E_S, E_T w układzie niesymetrycznym; napięcia na odbiornikach oznaczymy odpowiednio przez U_R', U_S', U_T', zaś napięcie między punktami zerowymi źródła i odbiornika niech będzie U_{00}'. Stosując do poszczególnych obwodów zawierających jedną *SEM* oraz przewód zerowy II prawo Kirchhoffa, otrzymamy

$$\hat{E}_R = \hat{U}_R' + \hat{U}_{00}',$$
$$\hat{E}_S = \hat{U}_S' + \hat{U}_{00}',$$
$$\hat{E}_T = \hat{U}_T + \hat{U}_{00}'.$$

Składowe symetryczne *SEM* niech będą $\hat{E}_0$, $\hat{E}_1$, $\hat{E}_2$; napięć $\hat{U}_0'$, $\hat{U}_1'$, $\hat{U}_2'$. Podstawiając składowe symetryczne do powyższych



Rys. 182

równań i porządkując wyrazy, analogicznie do poprzednich wzorów na I prawo Kirchhoffa, otrzymamy

$$(\hat{E}_0 + \hat{E}_1 + \hat{E}_2) - (\hat{U}_0' + \hat{U}_1' + \hat{U}_2') - \hat{U}'_{00'} = 0,$$
$$(\hat{E}_0 + \hat{a}^2\hat{E}_1 + \hat{a}\hat{E}_2) - (\hat{U}_0' + \hat{a}^2\hat{U}_1' + \hat{a}\hat{U}_2') - \hat{U}'_{00'} = 0,$$
$$(\hat{E}_0 + \hat{a}\hat{E}_1 + \hat{a}^2\hat{E}) - (\hat{U}_0' + \hat{a}\hat{U}_1' + \hat{a}^2\hat{U}_2') - \hat{U}_{00'} = 0.$$

Po przegrupowaniu wyrazów można napisać

$$(\hat{E}_0 - \hat{U}_0' - \hat{U}_{00}') + (\hat{E}_1 - \hat{U}_1') + (\hat{E}_2 - \hat{U}_2') = 0,$$
$$(\hat{E}_0 - \hat{U}_0' - \hat{U}_{00}') + \hat{a}^2(\hat{E}_1 - \hat{U}_1') + \hat{a}^2(\hat{E}_2 - \hat{U}_2') = 0,$$
$$(\hat{E}_0 - \hat{U}_0' - \hat{U}_{00}') + \hat{a}(\hat{E}_1 - \hat{U}_1') + \hat{a}^2(\hat{E}_2 - \hat{U}_2') = 0.$$

Postępując tak jak poprzednio, otrzymamy

$$\hat{E}_0 = \hat{U}_0' + \hat{U}_{00}',$$
$$\hat{E}_1 = \hat{U}_1',$$
$$\hat{E}_2 = \hat{U}_2';$$

co odpowiada II prawu Kirchhoffa w zastosowaniu do składowych symetrycznych.

§ 85

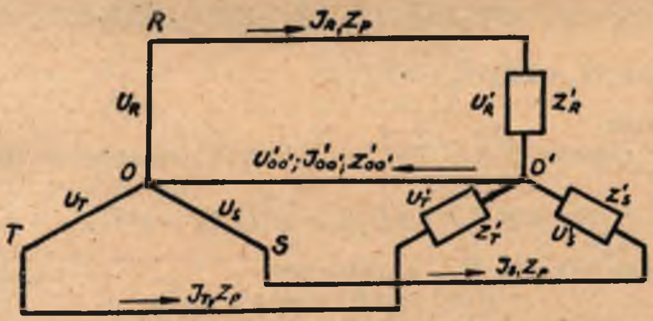
WYZNACZENIE SKŁADOWYCH SYMETRYCZNYCH NAPIĘCIA NA ODBIORNIKU NIESYMETRYCZNYM

Dla danych prądów przewodowych określamy składowe symetryczne, według podstawowych wzorów (4), (5) i (6).

$$\hat{I}_0 = \frac{1}{3}(\hat{I}_R + \hat{I}_S + \hat{I}_T),$$

$$\hat{I}_1 = \frac{1}{3}(\hat{I}_R + \hat{a}\hat{I}_S + \hat{a}^2\hat{I}_T),$$

$$\hat{I}_2 = \frac{1}{3}(\hat{I}_R + \hat{a}^2\hat{I}_S + \hat{a}\hat{I}_T).$$



Rys. 183

Poza tym, na podstawie II prawa Kirchhoffa,

$$\hat{I}_{00'} = \hat{I}_R + \hat{I}_S + \hat{I}_T = 3\hat{I}_0.$$

Wprowadzamy składowe symetryczne oporności pozornych

$$\hat{Z}_0' = \frac{1}{3}(\hat{Z}_R' + \hat{Z}_S' + \hat{Z}_T'),$$

$$\hat{Z}_1' = \frac{1}{3}(\hat{Z}_R' + \hat{a}\hat{Z}_S' + \hat{a}^2\hat{Z}_T'),$$

$$\hat{Z}_2' = \frac{1}{3}(\hat{Z}_R' + \hat{a}^2\hat{Z}_S' + \hat{a}\hat{Z}_T').$$

Niech poszukiwane napięcia na odbiorniku mają składowe U_0', U_1', U_2', wówczas będziemy mieli

$$\hat{U}_0' = \frac{1}{3}(\hat{U}_R' + \hat{U}_S' + \hat{U}_T') = \frac{1}{3}(\hat{I}_R\hat{Z}_R' + \hat{I}_S\hat{Z}_S' + \hat{I}_T\hat{Z}_T'),$$

ale

$$\hat{I}_R = \hat{I}_0 + \hat{I}_1 + \hat{I}_2,$$

$$\hat{I}_S = \hat{I}_0 + \hat{a}^2\hat{I}_1 + \hat{a}\hat{I}_2,$$

$$\hat{I}_T = \hat{I}_0 + \hat{a}\hat{I}_1 + \hat{a}^2\hat{I}_2;$$

więc

$$\hat{U}_0' = \frac{1}{3}\left[(\hat{I}_0+\hat{I}_1+\hat{I}_2)\,\hat{Z}_R' + (\hat{I}_0+\hat{a}^2\hat{I}_1+\hat{a}\hat{I}_2)\,\hat{Z}_S' + (\hat{I}_0+\hat{a}\hat{I}_1+\hat{a}^2\hat{I}_2)\hat{Z}_T'\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left[(\hat{Z}_R'+\hat{Z}_S'+\hat{Z}_T')\,\hat{I}_0 + (\hat{Z}_R'+\hat{a}^2\hat{Z}_S'+\hat{a}\hat{Z}_T')\,\hat{I}_1 + (\hat{Z}_R'+\hat{a}\hat{Z}_S'+\hat{a}^2\hat{Z}_T')\,\hat{I}_2\right] =$$

$$= \frac{1}{3}(3\hat{Z}_0'\hat{I}_0 + 3\hat{Z}_2'\hat{I}_1 + 3\hat{Z}_1'\hat{I}_2);$$

czyli ostatecznie

$$\hat{U}_0' = \hat{Z}_0'\hat{I}_0 + \hat{Z}_2'\hat{I}_1 + \hat{Z}_1'\hat{I}_2 \tag{7}$$

Analogicznie otrzymamy

$$\hat{U}_1' = \frac{1}{3}(\hat{U}_R' + \hat{a}\,\hat{U}_S' + \hat{a}^2\,\hat{U}_T') = \frac{1}{3}(\hat{I}_R\hat{Z}_R' + \hat{a}\,\hat{I}_S\hat{Z}_S' + \hat{a}^2\,\hat{I}_T\hat{Z}_T') =$$

$$= \frac{1}{3}\left[(\hat{Z}_R'+\hat{a}\hat{Z}_S'+\hat{a}^2\hat{Z}_T')\,\hat{I}_0 + (\hat{Z}_R'+\hat{Z}_S'+\hat{Z}_T')\hat{I}_1 + (\hat{Z}_R'+\hat{a}^2\hat{Z}_S'+\hat{a}\hat{Z}_T')\right]\hat{I}_2 =$$

$$= \frac{1}{3}(3\hat{Z}_1'\hat{I}_0 + 3\hat{Z}_0'\hat{I}_1 + 3\hat{Z}_2'\hat{I}_2)$$

i ostatecznie

$$\hat{U}_1' = \hat{Z}_1'\hat{I}_0 + \hat{Z}_0'\hat{I}_1 + \hat{Z}_2'\hat{I}_2; \tag{8}$$

następnie

$$\hat{U}_2' = \frac{1}{3}(\hat{U}_R' + \hat{a}^2\,\hat{U}_S' + \hat{a}\,\hat{U}_T') = \frac{1}{3}(\hat{I}_R\hat{Z}_R' + \hat{a}^2\,\hat{I}_S\hat{Z}_S' + \hat{a}\hat{I}_T\hat{Z}_T')$$

i postępując jak dla $\hat{U}_1'$, znajdziemy

$$\hat{U}_2' = \hat{Z}_2'\hat{I}_0 + \hat{Z}_1'\hat{I}_1 + \hat{Z}_0'\hat{I}_2. \tag{9}$$

Biorąc pod uwagę, że napięcie między punktami zerowymi

$$\hat{U}'_{00}{}' = \hat{I}_{00}'\hat{Z}'_{00}{}' = 3\hat{I}_0\hat{Z}'_{00}{}' \tag{10}$$

oraz oznaczając oporność pozorną każdego z przewodów fazowych przez Z_P, otrzymamy, stosując II prawo Kirchhoffa, dla napięć u źródła

$$\hat{U}_R = \hat{U}_R' + \hat{I}_R\hat{Z}_P + \hat{U}_{00}',$$

$$\hat{U}_S = \hat{U}_S' + \hat{I}_S\hat{Z}_P + \hat{U}_{00}',$$

$$\hat{U}_T = \hat{U}_T' + \hat{I}_T\hat{Z}_P + \hat{U}_{00}'.$$

Przy uwzględnieniu wzoru (10), składowe symetryczne napięć na zaciskach źródła wynoszą

$$\hat{U}_0 = \frac{1}{3}(\hat{U}_R+\hat{U}_S+\hat{U}_T) = \frac{1}{3}\left[(\hat{U}_R'+\hat{U}_S'+\hat{U}_T') + (\hat{I}_R+\hat{I}_S+\hat{I}_T)\hat{Z}_P + 9\hat{I}_0\hat{Z}_{00}'\right] =$$

$$= \frac{1}{3}(3\hat{U}_0' + 3\hat{I}_0 Z_P + 9\hat{I}_0\hat{Z}'_{00}{}') = \hat{U}_0' + (\hat{Z}_P + 3\hat{Z}'_{00}{}')\,\hat{I}_0,$$

$$\hat{U}_1 = \frac{1}{3}(\hat{U}_R + \hat{a}\,\hat{U}_S + \hat{a}^2\,\hat{U}_T) = \frac{1}{3}\left[(\hat{U}_R' + \hat{a}\hat{U}_S' + \hat{a}^2\,\hat{U}_T') + \right.$$

$$\left. + (\hat{I}_R + \hat{a}\,\hat{I}_S + \hat{a}^2\,\hat{I}_T)\,\hat{Z}_0 + (\hat{U}_{00}' + \hat{a}\hat{U}_{00}' + \hat{a}^2\,\hat{U}_{00}')\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left[3\hat{U}_1' + 3\hat{I}_1\hat{Z}_P) + \hat{U}_{00}'(1 + \hat{a} + \hat{a}^2)\right] = \hat{U}_1' + \hat{I}_1\hat{Z}_P,$$

$$\hat{U}_2 = \frac{1}{3}(\hat{U}_R + \hat{a}^2\hat{U}_S + \hat{a}\hat{U}_T) = \frac{1}{3}\Big[(\hat{U}_R' + \hat{a}^2\hat{U}_S' + \hat{a}\hat{U}_T')\Big] +$$
$$+ (\hat{I}_R + \hat{a}^2\hat{I}_S + \hat{a}\hat{I}_T)\hat{Z}_P + \hat{U}_{00}'(1 + \hat{a}^2 + \hat{a}) =$$
$$= \frac{1}{3}(3\hat{U}_2' + 3\hat{I}_2\hat{Z}_P) = \hat{U}_2' + \hat{I}_2\hat{Z}_P.$$

Ostatnie wzory można napisać inaczej, uwzględniając wartości $\hat{U}_0'$, $\hat{U}_1'$ i $\hat{U}_2'$ z wzorów (7), (8) i (9).

$$\hat{U}_0 = \hat{Z}_0'\hat{I}_0 + \hat{Z}_2'\hat{I}_1 + \hat{Z}_1'\hat{I}_2 + (\hat{Z}_P + 3\hat{Z}'_{00}')\hat{I}_0 =$$
$$= (3\hat{Z}'_{00}' + \hat{Z}_0' + \hat{Z}_P)\hat{I}_0 + \hat{Z}_2'\hat{I}_1 + \hat{Z}'_1\hat{I}_2, \tag{11}$$

$$\hat{U}_1 = \hat{Z}'_1\hat{I}_0 + \hat{Z}_0'\hat{I}_1 + \hat{Z}_2'\hat{I}_2 + \hat{I}_1\hat{Z}_P =$$
$$= \hat{Z}_1'\hat{I}_0 + (\hat{Z}_0' + \hat{Z}_P)\hat{I}_1 + \hat{Z}_2'\hat{I}_2, \tag{12}$$

$$\hat{U}_2 = \hat{Z}_2'\hat{I}_0 + \hat{Z}_1'\hat{I}_1 + \hat{Z}_0'\hat{I}_2 + \hat{Z}_P\hat{I}_2 =$$
$$= \hat{Z}_2'\hat{I}_0 + \hat{Z}_1'\hat{I}_1 + (Z_0' + \hat{Z}_P)\hat{I}_2 \tag{13}$$

Gdyby w układzie gwiazdowym nie było przewodu zerowego, czyli $I_{00}' = 0$, wówczas

$$\hat{I}_R + \hat{I}_S + \hat{I}_T = 0,$$

wobec czego

$$\hat{I}_0 = \frac{1}{3}(\hat{I}_R + \hat{I}_S + \hat{I}_T) = 0$$

i w wyżej rozpatrzonych wzorach nastąpią odpowiednie uproszczenia.

§ 86

WYZNACZENIE SKŁADOWYCH SYMETRYCZNYCH PRĄDÓW I_0, I_1, I_2 DLA OLBIORNIKA TRÓJFAZOWEGO NIESYMETRYCZNEGO

Napięcia na odbiorniku niesymetrycznym $\hat{U}_R'$, $\hat{U}_S'$, $\hat{U}_T'$ wyrażamy przy pomocy składowych symetrycznych $\hat{U}_0'$, $\hat{U}_1'$, $\hat{U}_2'$.

$$\left.\begin{aligned} \hat{U}_R' &= \hat{U}_0' + \hat{U}_1' + \hat{U}_2' \\ \hat{U}_S' &= \hat{U}_0' + \hat{a}^2\hat{U}_1' + \hat{a}\hat{U}_2' \\ \hat{U}_T' &= \hat{U}_0' + \hat{a}\hat{U}_1' + \hat{a}^2\hat{U}_2'. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Oznaczając przewodności pozorne poszczególnych faz odbiornika przez $\hat{Y}_R'$, $\hat{Y}_S'$, $\hat{Y}_T'$, otrzymamy dla prądów przewodowych

$$\left.\begin{aligned} \hat{I}_R &= \hat{U}_R'\hat{Y}_R', \\ \hat{I}_S &= \hat{U}_S'\hat{Y}_S', \\ \hat{I}_T &= \hat{U}_T'\hat{Y}_T'. \end{aligned}\right| \tag{15}$$

Dodając stronami ostatnie wzory i biorąc pod uwagę (14), otrzymamy

$$\hat{I}_R + \hat{I}_S + \hat{I}_T = \hat{U}_R' \hat{Y}_R' + \hat{U}_S' \hat{Y}_S' + \hat{U}_T' \hat{Y}_T' =$$
$$= (\hat{U}_0' + \hat{U}_1' + \hat{U}_2') \hat{Y}_R' + (\hat{U}_0' + \hat{a}^2 \hat{U}_1' + \hat{a} \hat{U}_2') \hat{Y}_S' +$$
$$+ (\hat{U}_0' + \hat{a} \hat{U}_1' + \hat{a}^2 \hat{U}_2') \hat{Y}_T' = (\hat{Y}_R' + \hat{Y}_S' + \hat{Y}_T') \hat{U}_0' +$$
$$+ (\hat{Y}_R' + \hat{a}^2 \hat{Y}_S' + \hat{a} \hat{Y}_T') \hat{U}_1' + (\hat{Y}_R' + \hat{a} \hat{Y}_S' + \hat{a}^2 \hat{Y}_T') \hat{U}_2'. \tag{16}$$

Oznaczając składowe symetryczne przewodności pozornych poszczególnych faz odbiornika przez $\hat{Y}_0'$, $\hat{Y}_1'$, $\hat{Y}_2'$, mamy

$$\hat{Y}_R' + \hat{Y}_S' + \hat{Y}_T' = 3 \hat{Y}_0',$$
$$\hat{Y}_R' + \hat{a} \hat{Y}_S' + \hat{a}^2 \hat{Y}_T' = 3 \hat{Y}_1',$$
$$\hat{Y}_R' + \hat{a}^2 \hat{Y}_S' + \hat{a} \hat{Y}_T' = 3 \hat{Y}_2'.$$

Następnie

$$\hat{I}_R + \hat{I}_S + \hat{I}_T = 3 \hat{I}_0.$$

Podstawiając te wartości do wzoru (16), otrzymamy

$$3 \hat{I}_0 = 3 \hat{Y}_0' \hat{U}_0' + 3 \hat{Y}_2' \hat{U}_1' + 3 \hat{Y}_1' \hat{U}_2',$$

skąd

$$\hat{I}_0 = \hat{Y}_0' \hat{U}_0' + \hat{Y}_2' \hat{U}_1' + \hat{Y}_1' \hat{U}_2'. \tag{17}$$

Jeżeli porównamy ten wzór z wzorem (7), zobaczymy pewną analogię: jeżeli we wzorze (7) zamienimy $\hat{I}_0$, $\hat{I}_1$, $\hat{I}_2$ przez $\hat{U}_0'$, $\hat{U}_1'$, $\hat{U}_2'$, oraz $\hat{Z}_0'$, $\hat{Z}_1'$, $\hat{Z}_2'$ przez $\hat{Y}_0'$, $\hat{Y}_1'$, $\hat{Y}_2'$, to otrzymamy wzór (17). Stosując dla znalezienia $\hat{I}_1$ i $\hat{I}_2$ tę samą metodę co dla znalezienia poprzednio $\hat{U}_0'$, $\hat{U}_1'$ i $\hat{U}_2'$, otrzymamy analogicznie do wzorów (8) (9)

$$\hat{I}_1 = \hat{Y}_1' \hat{U}_0' + \hat{Y}_0' \hat{U}_1' + \hat{Y}_2' \hat{U}_2', \tag{18}$$
$$\hat{I}_2 = \hat{Y}_2' \hat{U}_0' + \hat{Y}_1' \hat{U}_1' + \hat{Y}_0' \hat{U}_2'. \tag{19}$$

§ 87

MOC W NIESYMETRYCZNYCH UKŁADACH PRĄDU TRÓJFAZOWEGO WYRAŻONA PRZY POMOCY SKŁADOWYCH SYMETRYCZNYCH

Jak rozpatrzono w przykładach zastosowania metody symbolicznej w § 14, str. 65 i n., moc pozorną można przedstawić w ten sposób, że jeden z wektorów napięcia lub natężenia prądu należy podstawić w postaci liczby zespolonej sprzężonej; np. gdy napięcie wyrazimy wzorem

$$\hat{U} = U e^{j\alpha} = U (\cos \alpha + j \sin \alpha),$$

gdzie a stanowi kąt, który wektor $\hat{U}$ tworzy z osią podstawową, wtedy liczbą sprzężoną będzie

$$U\,(\cos a - j \sin a);$$

nazwijmy ten wektor wektorem sprzężonym z wektorem $\hat{U}$ i dla odróżnienia oznaczmy wektor sprzężony stawiając nad U daszek odwrócony, a więc

$$\check{U} = U\,(\cos a - j \sin a) = U e^{-ja}.$$

Wtedy moc pozorna prądu w ujęciu symbolicznym wyrazi się wzorem

$$\check{U}\hat{I} \text{ lub } \hat{U}\check{I}.$$

W razie rozkładania niesymetrycznych układów prądu trójfazowego na składowe symetryczne, przy stosowaniu wektorów sprzężonych, zmieni się porządek wektorów w układach współbieżnych i przeciwbieżnych, wobec czego

$$\begin{aligned}
\check{U}_R &= \check{U}_0 + \check{U}_1 + \check{U}_2,\\
\check{U}_S &= \check{U}_0 + \hat{a}\check{U}_1 + \hat{a}^2\check{U}_2,\\
\check{U}_T &= \check{U}_0 + \hat{a}^2\check{U}_1 + \hat{a}\check{U}_2.
\end{aligned}$$

Moc pozorną całego układu niesymetrycznego otrzymamy jako sumę mocy pozornych poszczególnych faz. Oznaczając przez $\hat{P}_Z$ moc pozorną całego układu, zaś przez $\hat{P}_{ZR}$, $\hat{P}_{ZS}$, $\hat{P}_{ZT}$, moce pozorne fazowe, będziemy mieli

$$\hat{P}_Z = \hat{P}_{ZR} + \hat{P}_{ZS} + \hat{P}_{ZT};$$

ale

$$\hat{P}_{ZR} = \check{U}_R \hat{I}_R; \quad \hat{P}_{ZS} = \check{U}_S \hat{I}_S; \quad \hat{P}_{ZT} = \check{U}_T \hat{I}_T.$$

Po podstawieniu zamiast napięć i prądów fazowych — ich wartości, wyrażonych przy pomocy składowych symetrycznych, otrzymamy

$$\begin{aligned}
\hat{P}z &= (\check{U}_0+\check{U}_1+\check{U}_2)\,(\hat{I}_0+\hat{I}_1+\hat{I}_2) + (\check{U}_0+\hat{a}\check{U}_1+\hat{a}^2\check{U}_2)\,(\hat{I}_0+\hat{a}^2\hat{I}_1+\hat{a}\hat{I}_2) +\\
&\quad + (\check{U}_0 + \hat{a}^2\check{U}_1 + \hat{a}\check{U}_2)\,(\hat{I}_0 + \hat{a}\hat{I}_1 + \hat{a}^2\hat{I}_2) =\\
&= 3\check{U}_0\hat{I}_0 + \check{U}_0\hat{I}_1\,(1 + \hat{a}^2 + \hat{a}) + \check{U}_0\hat{I}_2\,(1 + \hat{a} + \hat{a}^2) +\\
&\quad + \check{U}_1\hat{I}_0\,(1 + \hat{a} + \hat{a}^2) + 3\check{U}_1\hat{I}_1 + \check{U}_1\hat{I}_2\,(1 + \hat{a}^2 + \hat{a}) +\\
&\quad + \check{U}_2\hat{I}_0\,(1 + \hat{a}^2 + \hat{a}) + \check{U}_2\hat{I}_1\,(1 + \hat{a} + \hat{a}^2) + 3\,\check{U}_2\hat{I}_2,
\end{aligned}$$

i ostatecznie

$$\hat{P}_Z = 3\,(\check{U}_0\hat{I}_0 + \check{U}_1\hat{I}_1 + \check{U}_2\hat{I}_2).$$

Moc pozorną można wyrazić symbolicznie w postaci

$$P_Z = P + jP_X,$$

gdzie P — moc czynna, zaś P_X — moc bierna.

Ponieważ moc czynna wyraża się iloczynem wartości skutecznych napięcia i natężenia prądu przez cosinus przesunięcia kąta fazowego prądu względem napięcia, zaś moc bierna tym iloczynem przez sinus kąta przesunięcia fazowego, więc oznaczając przez $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ kąty przesunięcia fazowego prądów $\hat{I}_0$, $\hat{I}_1$, $\hat{I}_2$ względem odpowiednich napięć, otrzymamy

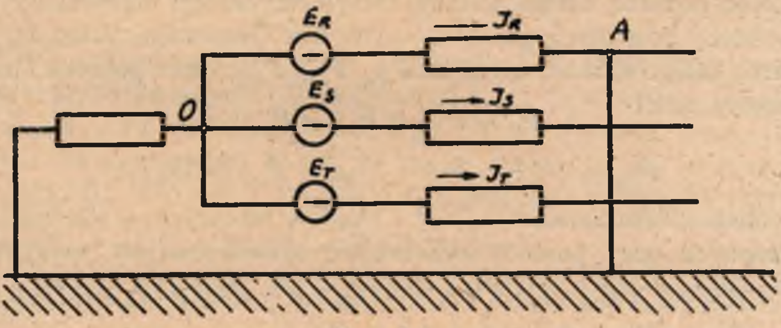
$$P = 3\,(U_0 I_0 \cos\varphi_0 + U_1 I_1 \cos\varphi_1 + U_2 I_2 \cos\varphi_2),$$
$$P_X = 3\,(U_0 I_0 \sin\varphi_0 + U_1 I_1 \sin\varphi_1 + U_2 I_2 \sin\varphi_2).$$

§ 88

ZASTOSOWANIE METODY SKŁADOWYCH SYMETRYCZNYCH DO OBLICZANIA PRĄDÓW ZWARCIA

Ograniczymy się do rozpatrzenia zjawisk zwarcia w układach prądu trójfazowego tylko dla symetrycznych układów gwiazdowych, przy czym punkt zerowy źródła połączony jest z ziemią przez pewną oporność.

a) Zwarcie z ziemią jednego z przewodów (np. przewodu R w punkcie A, rys. 184).



Rys. 184

Oznaczmy składowe symetryczne oporności pozornych, licząc do miejsca zwarcia przez $\dot{Z}_0$, $\dot{Z}_1$, $\dot{Z}_2$; *SEM* fazowe prądnicy, działające w takim układzie symetrycznym, mają równe wartości skuteczne, czyli

$$\hat{E}_R = \hat{E}_S = \hat{E}_T = \hat{E}.$$

Składowe symetryczne *SEM* będą

$$\hat{E}_0 = 0;\ \hat{E}_1 = \hat{E};\ \hat{E}_2 = 0,$$

gdyż przy symetrii nie mogą wystąpić składowe układu zerowego i przeciwbieżnego.

Wskutek zwarcia fazy R z ziemią w punkcie A, napięcia fazowe w tym punkcie tworzą układ niesymetryczny; napięcia te $\hat{U}_R$, $\hat{U}_S$, $\hat{U}_T$ wyrazimy przy pomocy ich składowych symetrycznych $\hat{U}_0$, $\hat{U}_1$, $\hat{U}_2$; składowe symetryczne prądów przewodowych $\hat{I}_R$, $\hat{I}_S$, $\hat{I}_T$ będą $\hat{I}_0$, $\hat{I}_1$, $\hat{I}_2$. Biorąc pod uwagę, że w miejscu zwarcia $\hat{U}_R = 0$, następnie w porównaniu z prądem zwarcia $\hat{I}_R$ prądy $\hat{I}_S$ i $\hat{I}_T$ są nieznaczne i w tym przypadku można założyć, że $\hat{I}_S = 0$ oraz $\hat{I}_T = 0$, wtedy, stosując II prawo Kirchhoffa do składowych symetrycznych, będziemy mieli

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \hat{I}_0\hat{Z}_0 + \hat{U}_0, \\ \hat{E} &= \hat{I}_1\hat{Z}_1 + \hat{U}_1, \\ 0 &= \hat{I}_2\hat{Z}_2 + \hat{U}_2. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Dodając stronami ostatnie równania, otrzymamy

$$\hat{E} = \hat{I}_0\hat{Z}_0 + \hat{I}_1\hat{Z}_1 + \hat{I}_2\hat{Z}_2 + \hat{U}_0 + \hat{U}_1 + \hat{U}_2,$$

ale

$$\hat{U}_0 + \hat{U}_1 + \hat{U}_2 = \hat{U}_R = 0,$$

więc

$$\hat{E} = \hat{I}_0\hat{Z}_0 + \hat{I}_1\hat{Z}_1 + \hat{I}_2\hat{Z}_2. \tag{21}$$

Z wzorów

$$\begin{aligned} \hat{I}_R &= \hat{I}_0 + \hat{I}_1 + \hat{I}_2, \\ \hat{I}_S &= \hat{I}_0 + \hat{a}^2\hat{I}_1 + \hat{a}\hat{I}_2 = 0, \\ \hat{I}_T &= \hat{I}_0 + \hat{a}\hat{I}_1 + \hat{a}^2\hat{I}_2 = 0, \end{aligned}$$

otrzymamy dodając stronami

$$3\hat{I}_0 = \hat{I}_R.$$

Z pierwszego z powyższych równań wynika

$$\hat{I}_1 + \hat{I}_2 = 2\hat{I}_0,$$

zaś z drugiego i trzeciego z tych równań

$$\begin{gathered} \hat{I}_0 + \hat{a}^2\hat{I}_1 + \hat{a}\hat{I}_2 = \hat{I}_0 + \hat{a}\hat{I}_1 + \hat{a}^2\hat{I}_2, \\ \hat{I}_1(\hat{a}^2 - \hat{a}) = \hat{I}_2(\hat{a}^2 - \hat{a}), \\ \hat{I}_1 = \hat{I}_2, \end{gathered}$$

a więc

$$\hat{I}_1 + \hat{I}_2 = 2\hat{I}_1 = 2\hat{I}_2 = 2\hat{I}_0,$$

czyli

$$\hat{I}_0 = \hat{I}_1 = \hat{I}_2 = \frac{\hat{I}_R}{3}.$$

Na tej podstawie wzór (21) daje nam

$$\hat{E} = \frac{\hat{I}_R}{3}(\hat{Z}_0 + \hat{Z}_1 + \hat{Z}_2),$$

skąd

$$\hat{I}_R = \frac{3\hat{E}}{\hat{Z}_0 + \hat{Z}_1 + \hat{Z}_2}.$$

W ten sposób, przy wiadomych wartościach $\dot{Z}_0, \dot{Z}_1, \dot{Z}_2$ oraz *SEM* $\hat{E}$, został określony prąd zwarcia w rozpatrywanym przypadku.

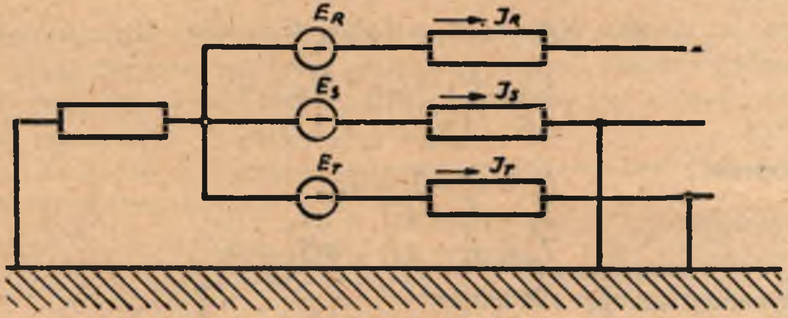
Możemy również łatwo znaleźć składowe symetryczne napięć w miejscu zwarcia. Z wzorów (20)

$$\hat{U}_0 = -\hat{I}_0 \dot{Z}_0 = -\frac{\hat{I}_R \dot{Z}_0}{3} = -\frac{\hat{E} \dot{Z}_0}{\dot{Z}_0 + \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2},$$

$$\hat{U}_1 = \hat{E} - \hat{I}_1 \dot{Z}_1 = \hat{E} - \frac{\hat{I}_R \dot{Z}_1}{3} = \frac{\hat{E}(\dot{Z}_0 + \dot{Z}_2)}{\dot{Z}_0 + \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2},$$

$$\hat{U}_2 = -\hat{I}_2 \dot{Z}_2 = -\frac{\hat{I}_R \dot{Z}_2}{3} = -\frac{\hat{E} \dot{Z}_2}{\dot{Z}_0 + \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2}.$$

b) Zwarcie z ziemią dwóch przewodów.



Rys. 185

Załóżmy, że zwarcie z ziemią nastąpiło równocześnie w dwóch fazach, np. S i T (rys. 185). Należy wyznaczyć prądy zwarcia $\hat{I}_S$ i $\hat{I}_T$, przy czym zakładamy, jak poprzednio, że w stosunku do wartości prądów zwarcia inne prądy można pominąć, czyli

$$\hat{I}_R = 0.$$

W punktach uziemionych napięcia

$$\hat{U}_S = 0 \quad \text{i} \quad \hat{U}_T = 0.$$

Wobec tego składowe symetryczne napięć będą

$$\hat{U}_0 = \frac{1}{3}(\hat{U}_R + \hat{U}_S + \hat{U}_T) = \frac{\hat{U}_R}{3},$$

$$\hat{U}_1 = \frac{1}{3}(\hat{U}_R + \hat{a}\hat{U}_S + \hat{a}^2\hat{U}_T) = \frac{\hat{U}_R}{3},$$

$$\hat{U}_2 = \frac{1}{3}(\hat{U}_R + \hat{a}^2\hat{U}_S + \hat{a}\hat{U}_T) = \frac{\hat{U}_R}{3};$$

czyli wszystkie składowe symetryczne napięć są sobie równe. Stosując II prawo Kirchhoffa, otrzymamy również układ równań (20), a uwzględniając, że $\hat{U}_0 = \hat{U}_1 = \hat{U}_2 = \frac{\hat{U}_R}{3}$, otrzymamy

$$\hat{I}_0 \dot{Z}_0 + \frac{\hat{U}_R}{3} = 0,$$

$$\hat{I}_1 \dot{Z}_1 + \frac{\hat{U}_R}{3} = \hat{E},$$

$$\hat{I}_2 \dot{Z}_2 + \frac{\hat{U}_R}{3} = 0;$$

skąd

$$\hat{I}_0 = -\frac{\hat{U}_R}{3\dot{Z}_0},$$

$$\hat{I}_1 = \frac{\hat{E}}{\dot{Z}_1} - \frac{\hat{U}_R}{3\dot{Z}_1},$$

$$\hat{I}_2 = -\frac{\hat{U}_R}{3\dot{Z}_2};$$

a ponieważ

$$\hat{I}_0 + \hat{I}_1 + \hat{I}_2 = \hat{I}_R = 0 \text{ (z założenia)},$$

przeto

$$\frac{\hat{U}_R}{3\dot{Z}_0} + \frac{\hat{U}_R}{3\dot{Z}_1} + \frac{\hat{U}_R}{3\dot{Z}_2} = \frac{\hat{E}}{\dot{Z}_1},$$

skąd

$$\frac{\hat{U}_R}{3} = \frac{\hat{E}}{\dot{Z}_1\left(\frac{1}{\dot{Z}_0} + \frac{1}{\dot{Z}_1} + \frac{1}{\dot{Z}_2}\right)};$$

czyli

$$\hat{U}_0 = \hat{U}_1 = \hat{U}_2 = \frac{\hat{E}}{\dot{Z}_1\left(\frac{1}{\dot{Z}_0} + \frac{1}{\dot{Z}_1} + \frac{1}{\dot{Z}_2}\right)}.$$

Składowe symetryczne prądów są

$$\hat{I}_0 = -\frac{\hat{U}_R}{3\dot{Z}_0} = -\frac{\hat{E}\dot{Z}_2}{\dot{Z}_0\dot{Z}_1 + \dot{Z}_1\dot{Z}_2 + \dot{Z}_0\dot{Z}_2},$$

$$\hat{I}_1 = \frac{\hat{E}}{\dot{Z}_1} - \frac{\hat{U}_R}{3\dot{Z}_1} = \frac{\hat{E}(\dot{Z}_0 + \dot{Z}_2)}{\dot{Z}_0\dot{Z}_1 + \dot{Z}_1\dot{Z}_2 + \dot{Z}_0\dot{Z}_2},$$

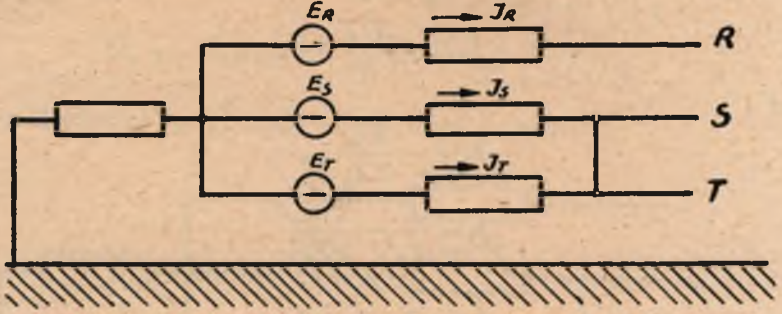
$$\hat{I}_2 = -\frac{\hat{U}_R}{3\dot{Z}_2} = -\frac{\hat{E}\dot{Z}_0}{\dot{Z}_0\dot{Z}_1 + \dot{Z}_1\dot{Z}_2 + \dot{Z}_0\dot{Z}_2}.$$

Mając składowe symetryczne prądów, możemy obliczyć prądy $\hat{I}_S$ i $\hat{I}_T$, gdyż

$$\hat{I}_S = \hat{I}_0 + \hat{a}^2\hat{I}_1 + \hat{a}\,\hat{I}_2,$$
$$\hat{I}_T = \hat{I}_0 + \hat{a}\,\hat{I}_1 + \hat{a}^2\hat{I}_2.$$

c) Zwarcie między dwoma przewodami.

Przypuśćmy, że zwarcie nastąpiło między przewodami S i T (rys. 186). Zakładamy, jak poprzednio, $I_R = 0$



Rys. 186

Napięcia fazy S i fazy T są sobie równe

$$\hat{U}_S = \hat{U}_T.$$

Rozpatrując zamknięty, z powodu połączenia punktów S i T, obwód i stosując I prawo Kirchhoffa, otrzymamy

$$\hat{I}_S + \hat{I}_T = 0.$$

Wreszcie

$$\hat{U}_S = \hat{U}_T = \hat{U}_0 + \hat{a}^2\hat{U}_1 + \hat{a}\,\hat{U}_2 = \hat{U}_0 + \hat{a}\,\hat{U}_1 + \hat{a}^2\hat{U}_2.$$

Z ostatniego równania wynika

$$(\hat{a}^2 - \hat{a})\,\hat{U}_1 = (\hat{a}^2 - \hat{a})\,\hat{U}_2,$$
$$\hat{U}_1 = \hat{U}_2.$$

Wiemy, że

$$\hat{I}_R = \hat{I}_0 + \hat{I}_1 + \hat{I}_2 = 0$$

oraz

$$\hat{I}_S = -\hat{I}_T,$$

czyli

$$\hat{I}_0 + \hat{a}^2\hat{I}_1 + \hat{a}\,\hat{I}_2 = -(\hat{I}_0 + \hat{a}\,\hat{I}_1 + \hat{a}^2\hat{I}_2),$$

skąd

$$2\hat{I}_0 + (\hat{a}^2 + \hat{a})\,\hat{I}_1 + (\hat{a} + \hat{a}^2)\,\hat{I}_2 = 0,$$

ale

$$\hat{a}^2 + \hat{a} = -1,$$

więc ostatni wzór przybiera postać

$$2\hat{I}_0 - \hat{I}_1 - \hat{I}_2 = 0$$

albo

$$3\hat{I}_0 - (\hat{I}_0 + \hat{I}_1 + \hat{I}_2) = 0;$$

wyrażenie w nawiasach równe jest zeru, więc otrzymamy

$$\hat{I}_0 = 0$$
$$\hat{I}_1 = -\hat{I}_2.$$

Na podstawie wzorów (20), dla symetrycznego układu źródła, będziemy mieli

$$0 = \hat{I}_0\hat{Z}_0 + \hat{U}_0,$$
$$\hat{E} = \hat{I}_1\hat{Z}_1 + \hat{U}_1,$$
$$0 = \hat{I}_2\hat{Z}_2 + \hat{U}_2;$$

z pierwszego z tych równań znajdziemy

$$\hat{U}_0 = 0$$

Następnie, biorąc pod uwagę, że $\hat{U}_1 = \hat{U}_2$ oraz że $\hat{I}_1 = -\hat{I}_2$, z ostatnich dwóch równań otrzymamy

$$\hat{I}_1 = -\hat{I}_2 = \frac{\hat{E}}{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2}$$
$$\hat{U}_1 = \hat{U}_2 = \frac{\hat{E}\hat{Z}_2}{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2}.$$

Znając składowe symetryczne prądów i napięć, możemy obliczyć prądy $\hat{I}_S$ i $\hat{I}_T$ oraz napięcia $\hat{U}_S = \hat{U}_T$.

Uwaga. Przy obliczaniu prądów zwarcia w przypadkach b) i c) natkniemy się na następujące wyrażenia:

$$1 - a^2; \quad a - a^2; \quad a - 1.$$

Wyrażenia te obliczymy, pamiętając, że

$$\hat{a} = -\frac{1}{2} + j\frac{1}{2}\sqrt{3}.$$
$$\hat{a}^2 = -\frac{1}{2} - j\frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

czyli

$$1-a^2=\frac{3}{2}+j\frac{1}{2}\sqrt{3}=\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+j\,\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+j\sin\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\;e^{j\frac{\pi}{6}};$$

$$a-a^2=j\sqrt{3}=\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{2}+j\sin\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{3}\;e^{j\frac{\pi}{2}};$$

$$a-1=-\frac{3}{2}+j\frac{1}{2}\sqrt{3}=\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+j\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+j\sin\frac{5\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\;e^{j\frac{5\pi}{6}}.$$

ROZDZIAŁ JEDENASTY

PRZEWODY DŁUGIE

§ 89

WIELKOŚCI CHARAKTERYSTYCZNE

Dotychczas w obwodach prądu zmiennego zakładaliśmy, że oporność czynna, pojemność i indukcyjność są skupione w poszczególnych miejscach obwodu. W urządzeniach elektrycznych mamy często do czynienia z tymi wielkościami rozłożonymi w przewodach wzdłuż obwodu. W przewodach krótkich, łączących źródła z odbiornikiem, wpływ pojemności i indukcyjności samych przewodów jest zwykle nieznaczny, natomiast w przewodach dłuższych musimy te wielkości uwzględniać w obliczeniach.

Zajmiemy się tylko przypadkiem, gdy rozłożenie pojemności i indukcyjności wzdłuż całej linii jest równomierne.

Przy znacznej długości przewodów należy się liczyć jeszcze ze stratami spowodowanymi przez niedoskonałość izolacji, przez tak zwaną histerezę dielektryczną, wreszcie przez wyładowanie elektryczności, czyli tak zwany ulot, w rozmaitych postaciach aż do powstania korony świetlnej. Straty te, o których była mowa w § 40, powodują upływ prądu i ten prąd upływowy I_u, spowodowany napięciem U, określa się wzorem

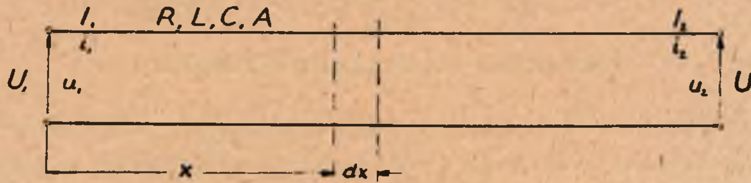
$$I_u = A U,$$

gdzie współczynnik proporcjonalności A nazywa się *upływnością linii*.

Oporność rzeczywistą, indukcyjność, pojemność i upływność przewodu podajemy w odniesieniu do jednostki długości linii (w praktyce na 1 km) i oznaczamy przez R, L, C i A. Linia zatem o długości l posiada oporność rzeczywistą Rl, indukcyjność Ll, pojemność Cl i upływność Al.

§ 90
RÓWNANIA ZASADNICZE

Rozpatrzmy linię dwuprzewodową, na początku której (u źródła) wartości chwilowe napięcia i prądu wypływającego na linię są u_1 i i_1, zaś wartości skuteczne $\hat{U}_1$ i $\hat{I}_1$; na końcu (u odbiornika) oznaczmy te wielkości odpowiednio przez u_2, i_2, $\hat{U}_2$ i $\hat{I}_2$ (rys. 187). Rozpatrzmy odcinek tej linii nieskończenie małej długości dx, odległy o x od jej początku. Niech wartości chwilowe napięcia i prądu w tym miejscu będą u i i, skuteczne $\hat{U}$ i $\hat{I}$. Oporność, indukcyjność, pojemność i upływność odcinka dx będą miały wartości Rdx, Ldx, Cdx i Adx.



Rys. 187

Napięcie u i prąd i są funkcjami dwóch zmiennych: czasu t oraz odległości x. Na rozpatrywanym odcinku dx zachodzi zmiana wartości zarówno napięcia jak i natężenia prądu. Idąc w kierunku dodatnim, tj. od strony źródła do odbiornika, będziemy mieli na początku tego odcinka napięcie u i prąd i, w końcu odcinka zaś napięcie $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$ oraz prąd $i + \frac{\partial i}{\partial x} dx$. Zmiana tych wielkości wyniesie wobec tego dla napięcia

$$u - \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right) = -\frac{\partial u}{\partial x} dx;$$

dla prądu

$$i - \left(i + \frac{\partial i}{\partial x} dx\right) = -\frac{\partial i}{\partial x} dx.$$

Zmiana napięcia spowodowana jest napięciami powstającymi na oporności rzeczywistej i opornością indukcyjnej badanego odcinka i równa się sumie tych napięć.

Możemy więc napisać

$$-\frac{\partial u}{\partial x} dx = Rdx \,.\, i + Ldx \cdot \frac{\partial i}{\partial t}\cdot$$

Zmiana wartości natężenia prądu równa się sumie prądu upływu i prądu pojemnościowego odcinka dx. Pierwszy równy jest $A\,dx \cdot u$, drugi $C\,dx \cdot \frac{\partial u}{\partial t}$. Wobec tego będziemy mieli

$$-\frac{\partial i}{\partial x}dx = A\,dx \cdot u + C\,dx\frac{\partial u}{\partial t}.$$

Z tych równań, po skróceniu przez dx, otrzymamy

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = Ri + L\frac{\partial i}{\partial t}; \tag{1}$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = Au + C\frac{\partial u}{\partial t}. \tag{2}$$

§ 91
ROZWIĄZANIE METODĄ SYMBOLICZNĄ

Równania powyższe będziemy rozwiązywali ogólnie przy badaniu prądów nieustalonych. Dla prądów ustalonych możemy zagadnienie znacznie uprościć. Rozpatrując mianowicie prąd sinusoidalny, możemy zamiast wartości chwilowych wprowadzić wartości skuteczne, stosując metodę symboliczną. Wartości skuteczne, jako niezależne od czasu, będą funkcjami tylko odległości x, więc zamiast równań o pochodnych cząstkowych otrzymamy równania o pochodnych zwykłych.

W tym celu do równań (1) i (2) stosujemy metodę symboliczną, wprowadzając wartości skuteczne napięcia $\hat{U}$ i natężenia prądu $\hat{I}$ w odległości x od początku linii; zakładając, że prądy ustalone są sinusoidalne (w przeciwnym razie wzory stosujemy do każdej harmonicznej), będziemy mieli

$$\hat{u} = \hat{U}\sqrt{2}\,e^{j\omega t},\quad \hat{i} = \hat{I}\sqrt{2}\,e^{j\omega t};$$

wtedy z równań (1) i (2) otrzymamy

$$-\frac{d\hat{U}}{dx}\sqrt{2}\,e^{j\omega t} = R\hat{I}\sqrt{2}\,e^{j\omega t} + j\omega L\hat{I}\sqrt{2}\,e^{j\omega t},$$

$$-\frac{d\hat{I}}{dx}\sqrt{2}\,e^{j\omega t} = A\hat{U}\sqrt{2}\,e^{j\omega t} + j\omega C\hat{U}\sqrt{2}\,e^{j\omega t}.$$

skąd po skróceniu

$$-\frac{d\hat{U}}{dx} = (R + j\omega L)\,\hat{I}, \tag{3}$$

$$-\frac{d\hat{I}}{dx} = (A + j\omega C)\,\hat{U}. \tag{4}$$

W celu otrzymania równań zawierających tylko jedną niewiadomą funkcję bierzemy pochodne względem x, co nam da

$$-\frac{d^2\hat{U}}{dx^2} = (R + j\omega L)\frac{d\hat{I}}{dx}; \tag{5}$$

$$-\frac{d^2\hat{I}}{dx^2} = (A + j\omega C)\frac{d\hat{U}}{dx}, \tag{6}$$

i podstawiamy wartości $\frac{d\hat{I}}{dx}$ i $\frac{d\hat{U}}{dx}$, otrzymane ze wzorów (3) i (4). Wtedy będziemy mieli

$$\frac{d^2\hat{U}}{dx^2} = (R + j\omega L)(A + j\omega C)\,\hat{U}; \tag{7}$$

$$\frac{d^2\hat{I}}{dx^2} = (R + j\omega L)(A + j\omega C)\,\hat{I}. \tag{8}$$

W tych wzorach $\hat{U}$ i $\hat{I}$ czynią zadość temu samemu równaniu różniczkowemu w postaci

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = k^2 y, \tag{9}$$

gdzie

$$k = \sqrt{(R + j\omega L)(A + j\omega C)}; \tag{10}$$

jego równanie charakterystyczne

$$z^2 = k^2$$

ma dwa pierwiastki

$$z_1 = +k, \qquad z_2 = -k$$

i daje całkę ogólną

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx},$$

gdzie C_1 i C_2 są to stałe dowolne, e — podstawa logarytmów naturalnych.

W ten sposób całka ogólna równania będzie

$$\hat{U} = C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx}. \tag{11}$$

Z równania (8) moglibyśmy napisać również dla $\hat{I}$ analogiczne rozwiązanie, w którym mielibyśmy dwie inne stałe dowolne. Dogodniej będzie uniknąć wprowadzenia nowych stałych dowolnych, otrzymując $\hat{I}$ bezpośrednio ze wzoru (3)

$$\hat{I} = \frac{-\frac{d\hat{U}}{dx}}{(R + j\omega L)}.$$

Ale ze wzoru (11)

$$\frac{d\hat{U}}{dx} = kC_1 e^{kx} - kC_2 e^{-kx},$$

więc

$$\hat{I} = \frac{-k(C_1 e^{kx} - C_2 e^{-kx})}{R + j\omega L}.$$

Podstawiając wartość k ze wzoru (10), otrzymamy

$$\hat{I} = \frac{-\sqrt{(R + j\omega L)(A + j\omega C)}}{R + j\omega L} \cdot (C_1 e^{kx} - C_2 e^{-kx}) =$$

$$= \sqrt{\frac{A + j\omega C}{R + j\omega L}} (-C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx}). \qquad (12)$$

Wzory (11) i (12) można przekształcić jeszcze inaczej, biorąc pod uwagę, że wykładnik potęgi k jest na ogół liczbą zespoloną; możemy założyć

$$k = \sqrt{(R + j\omega L)(A + j\omega C)} = a + jb.$$

Dla odnalezienia spółczynników a i b podnosimy obie strony do kwadratu:

$$AR - \omega^2 LC + j\omega(AL + RC) = a^2 - b^2 + j2ab,$$

skąd

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= AR - \omega^2 LC, \\ 2ab &= \omega(AL + RC). \end{aligned} \qquad (13)$$

Następnie w ostatnich równaniach podnosimy obie strony do kwadratu i dodajemy

$$\begin{array}{l} + \begin{array}{l} a^4 - 2a^2 b^2 + b^4 = A^2 R^2 - 2\omega^2 ARLC + \omega^4 L^2 C^2; \\ \quad 4a^2 b^2 \qquad\quad = \omega^2 A^2 L^2 + 2\omega^2 ARLC + \omega^2 R^2 C^2; \end{array} \\ \hline (a^2 + b^2)^2 = A^2(R^2 + w^2 L^2) + \omega^2 C^2 (R^2 + \omega^2 L^2) = \\ \qquad = (A^2 + \omega^2 C^2)(R^2 + \omega^2 L^2). \end{array}$$

Wyciągając pierwiastek z obu stron powyższego równania otrzymamy

$$a^2 + b^2 = \sqrt{(A^2 + \omega^2 C^2)(R^2 + \omega^2 L^2)}. \qquad (14)$$

Dodając i odejmując stronami równania (13) i (14), dzieląc następnie przez 2 i wyciągając pierwiastek, otrzymamy

$$a = \sqrt{\frac{1}{2}\left\{\sqrt{(A^2+\omega^2C^2)(R^2+\omega^2L^2)} + AR - \omega^2LC\right\}}; \tag{15}$$

$$b = \sqrt{\frac{1}{2}\left\{\sqrt{(A^2+\omega^2C^2)(R^2+\omega^2L^2)} - AR + \omega^2LC\right\}}. \tag{16}$$

Na zasadzie wzoru E u l e r a możemy napisać

$$e^{kx} = e^{ax+jbx} = e^{ax}(\cos bx + j\sin bx),$$

$$e^{-kx} = e^{-ax-jbx} = e^{-ax}(\cos bx - j\sin bx).$$

Oznaczmy

$$\sqrt{\frac{R+j\omega L}{A+j\omega C}} = \hat{Z}. \tag{17}$$

Symbol $\hat{Z}$ nazywamy *opornością falową.*

Podstawiając powyższe wzory do równań (11) i (12), otrzymamy

$$\hat{U} = C_1 e^{ax}(\cos bx + j\sin bx) + C_2 e^{-ax}(\cos bx - j\sin bx), \tag{18}$$

$$\hat{I}\hat{Z} = -C_1 e^{ax}(\cos bx + j\sin bx) + C_2 e^{-ax}(\cos bx - j\sin bx). \tag{19}$$

§ 92

STAŁE CAŁKOWANIA

Załóżmy, że mamy dane napięcie i prąd na początku linii, mianowicie dla $x = 0$

$$\hat{U} = \hat{U}_1, \quad \hat{I} = \hat{I}_1.$$

Wtedy wzory (18) i (19) dają

$$\hat{U}_1 = C_1 + C_2,$$

$$\hat{I}_1\hat{Z} = -C_1 + C_2,$$

skąd

$$C_2 = \frac{\hat{U}_1 + \hat{I}_1\hat{Z}}{2}, \quad C_1 = \frac{\hat{U}_1 - \hat{I}_1\hat{Z}}{2},$$

więc ostatecznie

$$\hat{U} = \frac{1}{2}\left\{(\hat{U}_1 - \hat{I}_1\hat{Z})e^{ax}(\cos bx + j\sin bx) + \right.$$

$$\left. + (\hat{U}_1 + \hat{I}_1\hat{Z})e^{-ax}(\cos bx - j\sin bx)\right\}; \tag{20}$$

$$\hat{I}\hat{Z} = \frac{1}{2}\left\{-(\hat{U}_1 - \hat{I}_1\hat{Z})e^{ax}(\cos bx + j\sin bx) + \right.$$

$$\left. + (\hat{U}_1 + I_1\hat{Z})e^{-ax}(\cos bx - j\sin bx)\right\}. \tag{21}$$

Często przy projektowaniu linii elektrycznej zadane są napięcie i prąd w miejscu zużycia energii, czyli $\hat{U}_2$ i $\hat{I}_2$. W tym przypadku dogodniej jest obliczać odległość x nie od początku linii, lecz od jej końca. Również stałe C_1 i C_2 należy wtedy określić przez $\hat{U}_2$ i $\hat{I}_2$. W takim razie we wzorach (18) i (19) trzeba x zmienić na $-x$, gdyż sposób rozumowania przy wyprowadzaniu tych wzorów pozostanie ten sam, tylko odległość odmierza się w kierunku przeciwnym. Warunki dla określenia stałych C_1 i C_2 będą następujące: dla $x = 0$, $\hat{U} = \hat{U}_2$; $\hat{I} = \hat{I}_2$. Zmieniając we wzorach (18) i (19) znak przy x i zakładając $x = 0$ i odpowiednie wartości $\hat{U}$ i $\hat{I}$, będziemy mieli

$$\hat{U}_2 = C_1 + C_2,$$

$$\hat{I}_2\dot{Z} = C_2 - C_1,$$

skąd

$$C_2 = \frac{\hat{U}_2 + \hat{I}_2\dot{Z}}{2}, \qquad C_1 = \frac{\hat{U}_2 - \hat{I}_2\dot{Z}}{2}.$$

i po podstawieniu tych wartości do wzorów (18) i (19)

$$\hat{U} = \frac{1}{2}\Big\{(\hat{U}_2 + \hat{I}_2\dot{Z})\, e^{ax}(\cos bx + j\sin bx) +$$

$$+ (\hat{U}_2\,\hat{I} - {}_2\dot{Z})\, e^{-ax}(\cos bx - j\sin bx)\Big\}, \tag{22}$$

$$\hat{I}\dot{Z} = \frac{1}{2}\Big\{(\hat{U}_2 + \hat{I}_2\dot{Z})\, e^{ax}(\cos bx + j\sin bx) -$$

$$-(\hat{U}_2 - \hat{I}_2\dot{Z})\, e^{-ax}(\cos bx - j\sin bx)\Big\}. \tag{23}$$

W dalszych zagadnieniach będziemy przeważnie korzystali z tych ostatnich wzorów.

Wzory (20) (21) (22) i (23) można napisać w innej postaci wprowadzając funkcje hiperboliczne

Ponieważ

$$e^{\pm ax}(\cos bx \pm j\sin bx) = e^{\pm kx},$$

następnie

$$\frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2} = \cosh kx,$$

$$\frac{e^{kx} - e^{-kx}}{2} = \sinh kx.$$

otrzymamy z (20) i (21)

$$\hat{U} = \hat{U}_1 \cosh kx - \hat{I}_1 \hat{Z} \sinh kx, \tag{24}$$

$$\hat{I}\hat{Z} = -\hat{U}_1 \sinh kx + \hat{I}_1 \hat{Z} \cosh kx, \tag{25}$$

oraz z (22) i (23)

$$\hat{U} = \hat{U}_2 \cosh kx + \hat{I}_2 \hat{Z} \sinh kx, \tag{26}$$

$$\hat{I}\hat{Z} = \hat{U}_2 \sinh kx + \hat{I}_2 \hat{Z} \cosh kx. \tag{27}$$

§ 93
FALE NAPIĘCIA I PRĄDU

W równaniach powyższych $\hat{U}_2$ oraz $\hat{I}_2 \hat{Z}$ są wektorami; ich sumy i różnice są zatem też wektorami. Oznaczmy

$$\frac{1}{2}(\hat{U}_2 + \hat{I}_2\hat{Z}) = \hat{P}_1, \tag{28}$$

$$\frac{1}{2}(\hat{U}_2 - \hat{I}_2\hat{Z}) = \hat{P}_2. \tag{29}$$

Wartości chwilowe wielkości P_1 i P_2 mają przebieg sinusoidalny, gdyż taki przebieg mają wartości chwilowe wielkości składowych.

Możemy więc napisać dla wartości chwilowych P_1 i P_2

$$p_1 = P_{1m} \sin(\omega t + \psi_1), \quad p_2 = P_{2m} \sin(\omega t + \psi_2).$$

Równania (22) i (23) po uwzględnieniu (28) i (29) przyjmą postać

$$\hat{U} = \hat{P}_1 e^{ax} \cdot e^{jbx} + \hat{P}_2 e^{-ax} e^{-jbx},$$

$$\hat{I}\hat{Z} = \hat{P}_1 e^{ax} e^{jbx} - \hat{P}_2 e^{-ax} e^{-jbx};$$

przechodząc od wartości skutecznych do wartości chwilowych i biorąc pod uwagę, że mnożenie wektorów $\hat{P}_1$ i $\hat{P}_2$ przez $e^{\pm jbx}$ powoduje przesunięcie tych wektorów o kąt $\pm\, bx$, otrzymamy

$$u = P_{1m} e^{ax} \sin(\omega t + \psi_1 + bx) + P_{2m} e^{-ax} \sin(\omega t + \psi_2 - bx), \tag{30}$$

$$iZ = P_{1m} e^{ax} \sin(\omega t + \psi_1 + bx) - P_{2m} e^{-ax} \sin(\omega t + \psi_2 - bx). \tag{31}$$

Wartość chwilowa napięcia prądu oraz iloczyn wartości chwilowej jego natężenia przez oporność falową linii są sumą względnie różnicą dwóch wyrazów postaci

$$P_m e^{\pm ax} \sin(\omega t + \psi \pm bx).$$

W każdym z nich jeden czynnik P_m ma wartość stałą (niezależną od czasu ani od przestrzeni); drugi $e^{\pm ax}$ zależy jedynie od odległości. Wobec tego wartość największa (amplituda) napięcia oraz natężenia prądu jest funkcją tylko odległości. Argument $(\omega t + \psi \pm bx)$ zależy zarówno od odległości jak od czasu i zmienia się okresowo; to samo wobec tego można powiedzieć o wartościach napięcia oraz natężenia prądu, inaczej mówiąc, napięcie i natężenie prądu wzdłuż linii rozchodzą się falowo.

Przystąpimy do obliczenia długości i szybkości tych fal. Dla znalezienia długości zbadamy, w jakiej odległości znajdują się najbliższe punkty, w których składniki napięcia lub prądu w dowolnej chwili mają tę samą fazę. Na to trzeba, żeby argumenty funkcji sinusoidalnych różniły się o 2π. Przypuśćmy, że argument $\omega t + \psi \pm bx$ wzrośnie o 2π, kiedy x wzrośnie o λ; wtedy

$$\omega t + \psi \pm b(x + \lambda) = \omega t + \psi \pm bx \pm 2\pi,$$

$$\pm b\lambda = \pm 2\pi,$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{b}. \tag{32}$$

To znaczy, że wartości składników napięcia oraz natężenia prądu są w jednakowej fazie w punktach, których najbliższa odległość wynosi $\lambda = \frac{2\pi}{b}$, czyli taka jest długość fali napięcia lub prądu; b nazywamy *współczynnikiem długości fali.*

Dla znalezienia prędkości rozchodzenia się fal załóżmy, że w danym punkcie x w pewnej chwili t mamy określoną fazę składników napięcia lub prądu i że tę samą fazę mamy po czasie dt w punkcie odległym o dx, czyli w czasie $t + dt$ i w punkcie $x + dx$. Przyrównując argumenty w obu przypadkach, otrzymamy

$$\omega t + \psi \pm bx = \omega(t + dt) + \psi \pm b(x + dx),$$

$$\omega t + \psi \pm bx = \omega t + \omega dt + \psi \pm bx \pm bdx,$$

skąd

$$\omega dt = \pm b dx.$$

Prędkość rozchodzenia się fali

$$v = \frac{dx}{dt} = \pm \frac{\omega}{b}.$$

Pomijając znak,

$$v = \frac{\omega}{b} = \frac{2\pi f}{b} = \frac{2\pi}{bT} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f. \tag{33}$$

gdzie f oznacza częstotliwość, T — okres prądu zmiennego. Wynika stąd, że prędkość rozchodzenia się fali równa się iloczynowi długości fali przez częstotliwość prądu zmiennego; inaczej, w ciągu jednego okresu prąd przebiega długość jednej fali. Znak przy prędkości v wskazuje na kierunek rozchodzenia się fali: w kierunku dodatnich x, czy też ujemnych.

Rozpatrując wzór (22) widzimy, że dla napięcia $\hat{U}$ otrzymujemy sumę dwóch fal, przebiegających w rozmaitych kierunkach z jednakową prędkością; jedna fala przebiega od początku linii do jej końca, druga odwrotnie. Pierwsza nazywa się *falą główną,* druga — *falą odbitą*. Czynnik $e^{\pm ax}$ wskazuje, że amplituda, czyli wartość największa, zmienia się w zależności od odległości; a jest to *współczynnik tłumienia*. Dla prądu $\hat{I}$, jak widać ze wzoru (23), otrzymujemy różnicę dwóch fal, przebiegających tak samo jak fale napięcia w dwóch przeciwnych kierunkach, lecz ich amplitudy są zmniejszone w stosunku oporności charakterystycznej $\hat{Z}$. Współczynnik $k = a + jb$ nazywamy *stałą rozchodzenia się fal.*

W literaturze elektrotechnicznej spotykamy oznaczenia γ dla stałej rozchodzenia się fal, β dla stałej tłumienia i α dla współczynnika długości fali; ten ostatni nazywają również współczynnikiem fazowym. Wtedy mamy wzór

$$\gamma = \beta + j\alpha.$$

Współczynnik tłumienia wielkości fizycznych przyjęto określać przez logarytm ilorazu dwóch wartości rozpatrywanej wielkości, np. logarytm ilorazu dwóch napięć, dwóch prądów itp. Gdy stosujemy logarytmy naturalne, otrzymujemy rezultat w „neperach"; w ten sposób

$$a = lg_n \frac{u_1}{u_2} \text{ neperów}$$

stanowi współczynnik tłumienia napięcia; z tego wynika, że

$$\frac{u_1}{u_2} = e^a.$$

Oprócz tego została wprowadzona inna jednostka tłumienia z zastosowaniem logarytmów dziesiętnych z określenia współczynnika tłumienia mocy; jednostkę tę nazwano „bel", przy czym w użyciu dogodniejszym okazał się „decybel", czyli 0,1 bela; mamy więc

$$a = 10 \lg_{10} \frac{P_1}{P_2} \text{ decybelów.}$$

Ponieważ moc jest proporcjonalna do kwadratu napięcia lub prądu, przeto współczynnik tłumienia napięcia wyrażony w decybelach będzie

$$a' = 20\, lg_{10} \frac{u_1}{u_2} \text{ decybelów,}$$

czyli

$$\frac{u_1}{u_2} = 10^{\frac{a'}{20}};$$

przez porównanie tego samego ilorazu, wyrażonego przez a i przez a', znajdziemy

$$10^{\frac{a'}{20}} = e^a,$$

$$\frac{a'}{20} = a\, lg_{10} e$$

skąd

$$a' = 20\, a\, lg_{10} e = 8{,}686\, a;$$

z tego wynika, że

$$1 \text{ neper} = 8{,}686 \text{ decybelów.}$$

§ 94
LINIA BEZ STRAT

Dla bliższego zbadania otrzymanych wzorów rozpatrzymy najpierw rozchodzenie się prądu w linii bez strat, to jest takiej, w której nie ma oporności rzeczywistej ani upływności, a jedynie indukcyjność i pojemność. A więc

$$R = 0, \qquad A = 0. \tag{34}$$

Oporność falowa takiej linii będzie

$$\dot{Z} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{A + j\omega C}} = \sqrt{\frac{j\omega L}{j\omega C}} = \sqrt{\frac{L}{C}} = Z; \tag{35}$$

w tym przypadku jest ona liczbą rzeczywistą. Znajdźmy spółczynniki a i b

$$a = \sqrt{\frac{1}{2}\left\{\sqrt{(A^2 + \omega^2 C^2)(R^2 + \omega^2 L^2)} + AR - \omega^2 LC\right\}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}\left\{\sqrt{\omega^2 C^2 \cdot \omega^2 L^2} - \omega^2 LC\right\}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left\{\omega^2 LC - \omega^2 LC\right\}} = 0, \tag{36}$$

$$b = \sqrt{\frac{1}{2}\left\{\sqrt{(A^2 + \omega^2 C^2)(R^2 + \omega^2 L^2)} - AR + \omega^2 LC\right\}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}\left\{\sqrt{\omega^2 C^2 \cdot \omega^2 L^2} + \omega^2 LC\right\}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left\{\omega^2 LC + \omega^2 LC\right\}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2} \cdot 2\omega^2 LC} = \sqrt{\omega^2 LC} = \omega\sqrt{LC}. \tag{37}$$

Wobec tego

$$e^{ax} = e^{-ax} = e^{0} = 1,$$

czyli nie ma tłumienia. Prędkość rozchodzenia się fal

$$v = \frac{\omega}{b} = \frac{\omega}{\omega\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{38}$$

nie zależy od częstotliwości prądu.

W liniach napowietrznych indukcyjność jest większa, pojemność zaś mniejsza niż w liniach kablowych.

Prędkość rozchodzenia się fal w liniach napowietrznych jest bliska prędkości światła, czyli ok. 3.10^5 km/sek; w liniach kablowych jest ona mniejsza i wynosi $(1,2$ do $1,6).10^5$ km/sek.

Przy częstotliwości $f = 50$, przeważnie spotykanej w urządzeniach prądu silnego, długość fali dla linii napowietrznej

$$\lambda = vT \simeq 300\,000 \cdot \frac{1}{50} \simeq 6000 \text{ km}$$

dorównywa długości promienia ziemskiego. Przy częstotliwości $f = 3000$, którą mamy np. w liniach telefonicznych,

$$\lambda = vT \simeq 300\,000 \cdot \frac{1}{3000} \simeq 100 \text{ km.}$$

Równania (22) i (23) w przypadku linii bez strat przekształcą się wobec $e^{ax} = e^{-ax} = 1$; $\dot{Z} = Z$ na

$$\hat{U} = \frac{1}{2}\left\{\left(\hat{U}_2 + \hat{I}_2 Z\right)\left(\cos bx + j\sin bx\right) + \left(\hat{U}_2 - \hat{I}_2 Z\right)\left(\cos bx - j\sin bx\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{2\hat{U}_2 \cos bx + 2j\hat{I}_2 Z \sin bx\right\} = \hat{U}_2 \cos bx + j\hat{I}_2 Z \sin bx,$$

$$\hat{I}Z = \frac{1}{2}\left\{\left(\hat{U}_2 + \hat{I}_2 Z\right)\left(\cos bx + j\sin bx\right) - \left(\hat{U}_2 - \hat{I}_2 Z\right)\left(\cos bx - j\sin bx\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{2\hat{I} Z \cos bx + 2j\hat{U}_2 \sin bx\right\} = \hat{I}_2 Z \cos bx + j\hat{U}_2 \sin bx,$$

czyli ostatecznie

$$\hat{U} = \hat{U}_2 \cos bx + j\hat{I}_2 Z \sin bx, \tag{39}$$

$$\hat{I}Z = \hat{I}_2 Z \cos bx + j\hat{U}_2 \sin bx. \tag{40}$$

Wartości $\hat{U}$ i $\hat{I}$ z wyprowadzonych wzorów możemy znaleźć albo sposobem analitycznym, stosując metodę symboliczną, albo też sposobem wykreślnym.

Stosując metodę symboliczną, musimy najpierw na podstawie wiadomych L i C obliczyć oporność falową Z według wzoru (35) oraz spółczynnik długości fali b ze wzoru (37); następnie dla wiadomej odległości x obliczamy bx i znajdujemy $\cos bx$ i $\sin bx$. Napięcie $\hat{U}_2$, prąd $\hat{I}_2$ i współczynnik mocy $\cos\varphi_2$ na odbiorniku zakładamy jako wiadome. Za podstawowy kierunek wektorów najdogodniej jest wziąć kierunek wektora $\hat{U}_2$; argumentem symbolu $\hat{I}_2$ będzie więc kąt φ_2 mierzony od podstawowego kierunku wektora $\hat{U}_2$. Oznaczając przez ψ niewiadomy kąt pomiędzy $\hat{U}$ i $\hat{U}_2$ oraz przez ψ' kąt pomiędzy $\hat{I}$ i $\hat{U}_2$, otrzymamy na podstawie wzorów (39)i (40)

$$\hat{U} = U_2 \cos bx + j I_2 Z \sin bx (\cos\varphi_2 + j \sin\varphi_2) =$$

$$= (U_2 \cos bx - I_2 Z \sin bx \sin\varphi_2) + j I_2 Z \sin bx \cos\varphi_2,$$

$$\hat{I} Z = I_2 Z \cos bx (\cos\varphi_2 + j \sin\varphi_2) + j U_2 \sin bx =$$

$$= I_2 Z \cos bx \cos\varphi_2 + j (I_2 Z \cos bx \sin\varphi_2 + U_2 \sin bx),$$

skąd

$$U = \sqrt{(U_2 \cos bx - I_2 Z \sin bx \sin\varphi_2)^2 + (I_2 Z \sin bx \cos\varphi_2)^2},$$

$$tg\,\psi = \frac{I_2 Z \sin bx \cos\varphi_2}{U_2 \cos bx - I_2 Z \sin bx \sin\varphi_2}.$$

$$IZ = \sqrt{(I_2 Z \cos bx \cos\varphi_2)^2 + (I_2 Z \cos bx \sin\varphi_2 + U_2 \sin bx)^2},$$

$$\operatorname{tg}\psi' = \frac{I\, Z \cos bx \sin\varphi_2 + U_2 \sin bx}{I_2 Z \cos bx \cos\varphi_2}$$

Kąt φ pomiędzy $\hat{I}$ i $\hat{U}$ znajdziemy mając kąty ψ i ψ', mianowicie

$$\varphi = \psi' - \psi.$$

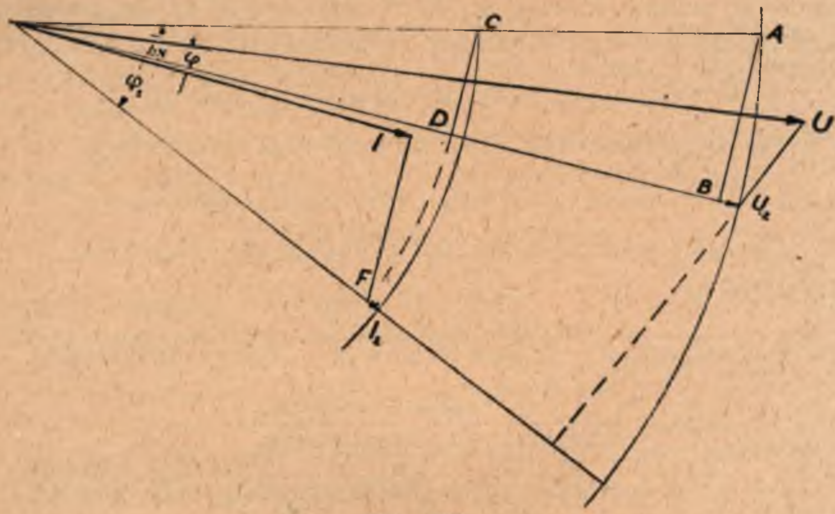
Bardzo łatwo możemy znaleźć napięcie $\hat{U}$ i prąd $\hat{I}$ sposobem wykreślnym. W tym celu z dowolnego punktu O (rys. 188) przeprowadzamy dowolną linię prostą jako kierunek $\hat{U}_2$ i na niej odmierzamy w odpowiedniej skali odcinek $OU_2 = U_2$. Pod kątem φ_2 do tego wektora przeprowadzamy kierunek $\hat{I}_2$ i w tym kierunku odmierzamy odcinek $OI_2 = \hat{I}_2 Z$; oczywiście mnożenie wektora przez oporność charakterystyczną Z, która w tym przypadku jest wielkością rzeczywistą, daje nam wektor $\hat{I}_2 Z$, którego kierunek jest taki sam co i kierunek wektora $\hat{I}_2$. Następnie z punktu O pod kątem bx do $\hat{U}_2$ przeprowadzamy prostą, na której odmierzamy $OA = U_2$ i $OC = I_2 Z$, zataczając w tym celu łuki koła o promieniu

OU_2 i OI_2 aż do przecięcia tej prostej. Z punktów A i C opuszczamy prostopadłe AB i CD na OU_2. Oczywiście

$$OB = U_2 \cos bx, \quad OD = I_2 Z \cos bx,$$

$$AB = U_2 \sin bx, \quad CD = I_2 Z \sin bx;$$

znaleźliśmy więc wartości (moduły) wektorów wchodzących do wzorów (39) i (40), teraz musimy wykonać wskazane w tych wzo-



Rys. 188

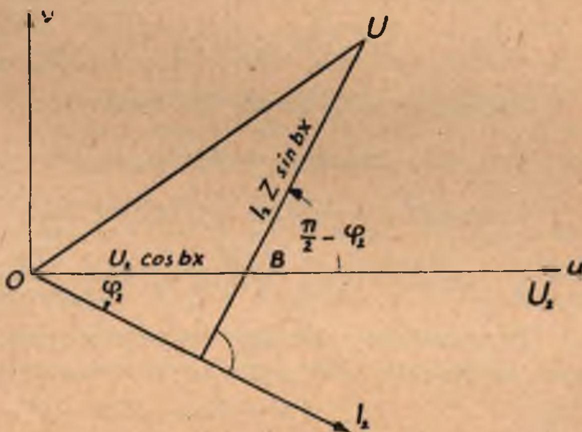
rach działania geometryczne, uwzględniając również kierunki wektorów.

Na podstawie wzoru (39) dla otrzymania $\hat{U}$ musimy do $\hat{U}_2 \cos bx$ dodać geometrycznie $jI_2Z \sin bx$; pierwszy z tych wektorów ma kierunek U_2, więc odcinek OB odpowiada wektorowi $\hat{U}_2 \cos bx$ i co do wartości, i co do kierunku.

Drugi wektor ma wartość $I_2Z \sin bx$, odmierzoną odcinkiem CD, ale kierunek wektora $\hat{I}_2Z \sin bx$ musi być zgodny z kierunkiem OI_2, zaś kierunek wektora $j\hat{I}_2Z \sin bx$ musi być wzięty pod kątem prostym naprzód do kierunku $O\hat{I}_2$; z tego wynika, że od punktu B, końca wektora $\hat{U}_2 \cos bx$, przęprowadzamy wektor $BU = j\hat{I}_2Z \sin bx$ prostopadle do OI_2 i równy co do wartości odcinkowi CD; łącząc O z U, otrzymujemy wektor $OU = \hat{U}$.

Analogicznie, na podstawie wzoru (40), do $\hat{I}_2Z \cos bx$ musimy dodać geometrycznie $j\hat{U}_2 \sin bx$. Wektor $\hat{I}_2Z \cos bx$ ma kierunek

OI_2; przerzucając odcinek $OD = I_2 Z \cos bx$ na ten kierunek, otrzymamy $OF = \hat{I}_2 Z \cos bx$, do tego wektora dodajemy geometrycznie $FI = j\hat{U}_2 \sin bx$, mianowicie odcinek $FI = AB = U_2 \sin bx$; wektor zaś $j\hat{U}_2 \sin bx$ powinien być przeprowadzony pod kątem prostym naprzód względem wektora $\hat{U}_2$, więc kierunek BA i takiż sam kierunek FI odpowiada kierunkowi $j\hat{U}_2 \sin bx$; łącząc wreszcie punkt I z O, otrzymamy wektor $OI = \hat{I}Z$. Za pomocą kątomierza możemy łatwo zmierzyć kąt $\varphi = \sphericalangle UOI$ przesunięcia fazy $\hat{I}$ względem $\hat{U}$.



Rys. 189

Miejscem geometrycznym końców wektora $\hat{U}$ na powyższym wykresie przy zmianie kąta bx od 0 do 2π jest elipsa. Dla przekonania się o tym wprowadźmy do rys. 188 prostokątny układ współrzędnych (u, v), umieszczając jego początek w punkcie O (rys. 189). i kierując oś u wzdłuż OU_2.

Wtedy

$$\sphericalangle UBU_2 = \frac{\pi}{2} - \varphi_2.$$

Oznaczając współrzędne zmiennego punktu U przez (u, v) będziemy mieli

$$u = OB + BU \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_2\right) = U_2 \cos bx + I_2 Z \sin bx \sin \varphi_2, \tag{I}$$

$$v = BU \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_2\right) = I_2 Z \sin bx \cos \varphi_2. \tag{II}$$

Z tych równań rugujemy zmienną niezależną x. Z równania (II)

$$\sin bx = \frac{v}{I_2 Z \cos \varphi_2},$$

$$\cos bx = \sqrt{1 - \sin^2 bx} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{I_2^2 Z^2 \cos^2 \varphi_2}}.$$

Podstawiamy znalezione wartości do równania (I):

$$u = U_2\sqrt{1 - \frac{v^2}{I_2^2 Z^2 \cos^2\varphi_2}} + I_2 Z \sin\varphi_2 \cdot \frac{v}{I_2\, Z \cos\varphi_2},$$

$$u = U_2\sqrt{1 - \frac{v^2}{I_2^2\, Z \cos^2\varphi_2}} + v \operatorname{tg}\varphi_2,$$

$$u - v \operatorname{tg}\varphi_2 = U_2\sqrt{1 - \frac{v^2}{I_2^2\, Z \cos^2\varphi_2}}.$$

Podnosimy obie strony do kwadratu:

$$u^2 - 2\, uv \operatorname{tg}\varphi_2 + v^2 \operatorname{tg}^2\varphi_2 = U_2^2 - \frac{U_2^2\, v^2}{I_2^2 Z^2 \cos^2\varphi_2}.$$

Przenosimy wszystkie wyrazy na lewą stronę:

$$u^2 - 2uv \operatorname{tg}\varphi_2 + v^2\left(\operatorname{tg}^2\varphi_2 + \frac{U_2^2}{I_2^2 Z^2 \cos^2\varphi_2}\right) - U_2^2 = 0.$$

Otrzymaliśmy równanie drugiego stopnia, nie zawierające zmiennych w stopniu pierwszym, czyli równanie typu

$$A u^2 + B uv + C v^2 + F = 0.$$

Takie równanie przedstawia elipsę, jeżeli

$$B^2 - 4AC < 0 \text{ oraz } F < 0.$$

W naszym przypadku

$$B^2 - 4AC = 4 \operatorname{tg}^2\varphi_2 - 4 \operatorname{tg}^2\varphi_2 - \frac{4\, U_2^2}{I_2^2 Z^2 \cos^2\varphi_2} = -\frac{4\, U_2^2}{I_2^2 \cos^2\varphi_2} < 0,$$

$$F = -U_2^2 < 0;$$

wobec czego wnioskujemy, że równanie nasze przedstawia elipsę.

W szczególnym przypadku odbiornika bezindukcyjnego i bezpojemnościowego, względnie odbiornika dającego rezonans napięć, mamy:

$$\varphi_2 = 0, \quad \operatorname{tg}\varphi_2 = 0, \quad \cos\varphi_2 = 1.$$

Wtedy równanie nasze przyjmie postać

$$u^2 + v^2 \frac{U_2^2}{I_1^2 Z^2} = U_2^2$$

albo

$$\frac{u^2}{U_2^2} + \frac{v^2}{I_2^2 Z^2} = 1,$$

to znaczy, że półosiami otrzymanej elipsy są U_2 i $I_2 Z$.

Gdy przy tym wyjątkowo $I_2 Z = U_2$, zamiast elipsy otrzymujemy koło. Napięcie i prąd mają wtedy wzdłuż całej linii wartość stałą.

§ 95

LINIA BEZ STRAT W STANIE JAŁOWYM I W STANIE ZWARCIA

Stan, w którym linia nie jest obciążona, to znaczy odbiornik nie jest włączony do końca linii, nazywamy *stanem jałowym*. W tym przypadku $I_2 = 0$. Napięcie w końcu linii zależne jest od napięcia na jej początku, więc w stanie jałowym moglibyśmy, zmieniając napięcie na początku, osiągnąć dowolną wartość napięcia na końcu; dobierzmy taką wartość napięcia na początku, aby, w stanie jałowym, w końcu napięcie stało się równe U_2, które mamy przy obciążeniu; oznaczmy wtedy napięcie na początku przez U_{10} i nazwijmy je napięciem na początku w stanie jałowym. Przy takim napięciu na początku linii popłynie prąd, którego natężenie oznaczymy przez I_{10}; będzie to prąd na początku w stanie jałowym. Dla dowolnego punktu linii w odległości x od jej końca napięcie i natężenie prądu w stanie jałowym niech wynoszą U_0 i I_0, wtedy, zakładając we wzorach (39) i (40) $\hat{I}_2 = 0$, otrzymamy

$$\hat{U}_0 = \hat{U}_2 \cos bx, \tag{41}$$

$$\hat{I}_0 Z = j\hat{U}_2 \sin bx \tag{42}$$

Największa wartość napięcia zachodzi dla $\cos bx = \pm 1$, $bx = 0$, $\pi, 2\pi, \ldots, k\pi$, gdzie k — liczba całkowita, czyli dla $x = 0, \frac{\pi}{b}, \frac{2\pi}{b}, \ldots \frac{k\pi}{b}$, Ponieważ długość fali na podstawie wzoru (33) wynosi $\lambda = \frac{2\pi}{b}$, przeto napięcie będzie miało największe wartości na końcu linii oraz w odległościach od końca linii, wynoszących całkowity iloraz połowy długości fali. W liniach prądu silnego, których długość jest zwykle mniejsza od połowy długości fali, napięcie wzrasta od początku linii ku końcowi, gdzie jest największe. Zjawisko to po raz pierwszy było spostrzeżone w kablu koncentrycznym przez inżyniera Ferranti na wystawie w Londynie i dlatego nazywa się zjawiskiem Ferrantiego.

Widzimy następnie, że prąd w stanie jałowym wyprzedza napięcie o kąt prosty, czyli o $^1/_4$ okresu, otrzymując największą wartość tam, gdzie wartość napięcia przechodzi przez 0, i odwrotnie, wartość 0 tam, gdzie napięcie przechodzi przez swoją największą wartość.

Stan, w którym końce linii są ze sobą połączone bezpośrednio, czyli bez oporności, nazywamy *stanem zwarcia*. W tym przypadku napięcie $U_2 = 0$. Natężenie prądu w końcu linii będzie zależne od napięcia, które przyłożymy na początku. Dobierzmy taką wartość napięcia na początku, aby w stanie zwarcia natężenie prądu płynącego w końcu linii stało się równe I_2, które byśmy mieli przy obciążeniu. Oznaczmy to napięcie na początku przez U_{1z}; nazwiemy je napięciem na początku w stanie zwarcia. Przy tym napięciu na początku linii popłynie prąd, którego natężenie oznaczymy przez I_z; nazwiemy go prądem na początku w stanie zwarcia. Dla dowolnego punktu linii w odległości x od jej końca napięcie i natężenie prądu w stanie zwarcia oznaczymy przez $\hat{U}_z$ i $\hat{I}_z$; wtedy, zakładając we wzorach (39) i (40) $\hat{U}_2 = 0$, otrzymamy

$$\hat{U}_z = j\hat{I}_2 Z \sin bx, \tag{43}$$

$$\hat{I}_z Z = \hat{I}_2 Z \cos bx. \tag{44}$$

Największa wartość prądu zachodzi dla $\cos bx = 1$, czyli na końcu linii oraz w odległościach wynoszących całkowity iloraz połowy długości fali.

Widzimy, że prąd w stanie zwarcia opóźnia się względem napięcia o kąt prosty, czyli o $^1/_4$ okresu, otrzymuje, podobnie jak poprzednio, największą wartość tam, gdzie wartość napięcia przechodzi przez 0, i odwrotnie, otrzymuje wartość 0 tam, gdzie napięcie przechodzi przez swoją największą wartość.

W obydwu rozpatrzonych przypadkach wektory napięć i prądów nie zmieniają swoich kierunków, inaczej mówiąc, napięcie oraz prąd mają wzdłuż całej linii tę samą fazę; zamiast elipsy otrzymujemy na wykresie linię prostą. Napięcie i prąd zmieniają tylko swoje wartości w zależności od odległości x, tworząc w ten sposób fale stojące.

Takie samo zjawisko otrzymamy również w przypadku, gdy pomiędzy napięciem i prądem w końcu linii istnieje różnica faz równa 90°, to znaczy $\cos \varphi_2 = 0$, wtedy bowiem we wzorach (39) i (40) wektory $j\hat{I}_2 Z$ będą miały kierunek wektora napięcia $\hat{U}_2$, a wektory $j\hat{U}_2$ kierunek wektora prądu $\hat{I}_2$; zarówno więc dla napięcia jak i dla prądu otrzymamy jako wykres linię prostą.

Zestawiając przypadki, gdy w linii bez strat otrzymuje się fale stojące dla napięcia i prądu, możemy wyprowadzić wniosek, że takie zjawisko ma miejsce, gdy 1) $\hat{I}_2 = 0$, 2) $\hat{U}_2 = 0$ i 3) $\cos\varphi_2 = 0$, to znaczy, gdy

$$U_2 I_2 \cos \varphi_2 = 0,$$

czyli wtedy, gdy w końcu linii nie jest oddawana energia.

Z porównania wzorów (39), (41) i (43) oraz (40), (42) i (44) wynika, że

$$\hat{U} = \hat{U}_0 + \hat{U}_z,$$

$$\hat{I}Z = \hat{I}_0 Z + \hat{I}Z_z,$$

$$\hat{I} = \hat{I}_0 + \hat{I}_z.$$

To znaczy, że napięcie, względnie prąd, w stanie obciążenia są równe sumie napięć, względnie prądów, w stanie jałowym i w stanie zwarcia.

§ 96

LINIA NIEODKSZTAŁCAJĄCA

Zbadajmy teraz jako szczególny przypadek linię, której oporność rzeczywista, indukcyjność, upływność i pojemność tworzą proporcję

$$\frac{R}{L} = \frac{A}{C}, \tag{45}$$

skąd

$$AL = RC;$$

oporność falowa takiej liniii będzie

$$\dot{Z} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{A + j\omega C}} = \sqrt{\frac{L\left(\frac{R}{L} + j\omega\right)}{C\left(\frac{A}{C} + j\omega\right)}} = \sqrt{\frac{L}{C}} = Z;$$

jest ona wielkością rzeczywistą i równa się oporności falowej linii bez strat o takiejże indukcyjności i pojemności.

Obliczmy ze wzorów (14) i (15) spółczynniki a i b

$$a = \sqrt{\frac{1}{2}\left\{AR - \omega^2 LC + \sqrt{(A^2 + \omega^2 C^2)(R^2 + \omega^2 L^2)}\right\}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}\left\{AR - \omega^2 LC + \sqrt{\omega^2 C^2\left(1 + \frac{A^2}{\omega^2 C^2}\right) \cdot \omega^2 L^2\left(1 + \frac{R^2}{\omega^2 L^2}\right)}\right\}};$$

z proporcji (45) mamy

$$\frac{R^2}{\omega^2 L^2} = \frac{A^2}{\omega^2 C^2}, \qquad 1 + \frac{R^2}{\omega^2 L^2} = 1 + \frac{A^2}{\omega^2 C^2},$$

więc
$$a=\sqrt{\frac{1}{2}\left\{AR-\omega^2LC+\omega^2LC\sqrt{\left(1+\frac{R^2}{\omega^2L^2}\right)^2}\right\}}=$$
$$=\sqrt{\frac{1}{2}\left\{AR-\omega^2LC+\omega^2LC\left(1+\frac{R^2}{\omega^2L^2}\right)\right\}}=$$
$$=\sqrt{\frac{1}{2}\left\{AR+\omega^2LC\left(-1+1+\frac{R^2}{\omega^2L^2}\right)\right\}}=\sqrt{\frac{1}{2}\left\{AR+\frac{CR^2}{L}\right\}}.$$

Z proporcji (45)
$$A=\frac{RC}{L},\quad AR=\frac{CR^2}{L},$$

wobec czego
$$a=\sqrt{\frac{1}{2}\left\{\frac{CR^2}{L}+\frac{CR^2}{L}\right\}}=\sqrt{\frac{CR^2}{L}}=R\sqrt{\frac{C}{L}}. \tag{46}$$

Ponieważ
$$Z=\sqrt{\frac{L}{C}},$$

więc
$$a=\frac{R}{Z}. \tag{47}$$

Spółczynnik tłumienia linii równy jest stosunkowi jej oporności rzeczywistej do oporności falowej i niezależny od ω.

$$b=\sqrt{\frac{1}{2}\left\{\omega^2LC-AR+\sqrt{(A^2+\omega^2C^2)(R^2+\omega^2L^2)}\right\}}=$$
$$=\sqrt{\frac{1}{2}\left\{\omega^2LC-AR+\sqrt{A^2\left(1+\frac{\omega^2C^2}{A^2}\right)R^2\left(1+\frac{\omega^2L^2}{R^2}\right)}\right\}}=$$
$$=\sqrt{\frac{1}{2}\left\{\omega^2LC-AR+AR\sqrt{\left(1+\frac{\omega^2C}{A^2}\right)\left(1+\frac{\omega^2L^2}{R^2}\right)}\right\}}.$$

Z proporcji (45) mamy
$$\frac{\omega^2L^2}{R^2}=\frac{\omega^2C^2}{A^2},$$

więc
$$b=\sqrt{\frac{1}{2}\left\{\omega^2LC-AR+AR\sqrt{\left(1+\frac{\omega^2L^2}{R^2}\right)^2}\right\}}=$$
$$=\sqrt{\frac{1}{2}\left\{\omega^2LC-AR+AR\left(1+\frac{\omega^2L^2}{R^2}\right)\right\}}=$$
$$=\sqrt{\frac{1}{2}\left\{\omega^2LC+AR\left(-1+1+\frac{\omega^2L^2}{R^2}\right)\right\}}=$$
$$=\sqrt{\frac{1}{2}\left\{\omega^2LC+\omega^2\frac{AL^2}{R^2}\right\}}.$$

Z proporcji (45) mamy

$$\frac{AL}{R} = C, \qquad \frac{AL^2}{R} = CL,$$

więc

$$b = \sqrt{\frac{1}{2}\left\{\omega^2 LC + \omega^2 LC\right\}} = \sqrt{\omega^2 LC} = \omega\sqrt{LC}. \tag{48}$$

Współczynnik długości fali linii czyniącej zadość proporcji (45) równy jest temu współczynnikowi linii bez strat o takiej samej indukcyjności i pojemności. Równe zatem będą również długości oraz prędkości fali w obu przypadkach.

Równania (22) i (23) przy uwzględnieniu, że Z jest liczbą rzeczywistą, przybierają postać

$$\begin{aligned}\hat{U} = \frac{1}{2}\Big\{&(\hat{U}_2 + \hat{I}_2 Z)\, e^{ax} (\cos bx + j \sin bx) + \\ &+ (\hat{U}_2 - \hat{I}_2 Z)\, e^{-ax} (\cos bx - j \sin bx)\Big\}\end{aligned} \tag{49}$$

$$\begin{aligned}\hat{I}Z = \frac{1}{2}\Big\{&(\hat{U}_2 + \hat{I}_2 Z)\, e^{ax} (\cos bx + j \sin bx) - \\ &- (\hat{U}_2 - \hat{I}_2 Z)\, e^{-ax} (\cos bx - j \sin bx)\Big\}.\end{aligned} \tag{50}$$

Rozpatrzmy linię w stanie jałowym. Oznaczmy, jak i poprzednio, napięcie i natężenie prądu w odległości x od końca przez $\hat{U}_0$ i $\hat{I}_0$. Podstawiając do powyższych wzorów $\hat{I}_2 = 0$, znajdziemy

$$\hat{U}_0 = \frac{1}{2}\hat{U}_2\Big\{e^{ax} (\cos bx + j \sin bx) + e^{-ax} (\cos bx - j \sin bx)\Big\}, \tag{51}$$

$$\hat{I}_0 Z = \frac{1}{2}\hat{U}_2\Big\{e^{ax} (\cos bx + j \sin bx) - e^{-ax} (\cos bx - j \sin bx)\Big\}. \tag{52}$$

Rozpatrzmy następnie linię w stanie zwarcia, oznaczając analogicznie napięcie i prąd przez $\hat{U}_z$ i $\hat{I}_z$. Podstawiając $\hat{U}_2 = 0$, otrzymamy

$$\hat{U}_z = \frac{1}{2}\hat{I}_2 Z\Big\{e^{ax} (\cos bx + j \sin bx) - e^{-ax} (\cos bx - j \sin bx)\Big\}, \tag{53}$$

$$\hat{I}_z Z = \frac{1}{2}\hat{I}_2 Z\Big\{e^{ax} (\cos bx + j \sin bx) + e^{-ax} (\cos bx - j \sin bx)\Big\}. \tag{54}$$

Bezpośrednio z porównania wzorów (49), (51) i (53) oraz (50) (52) i (54) wynika, że

$$\hat{U} = \hat{U}_0 + \hat{U}_z \tag{55}$$

oraz

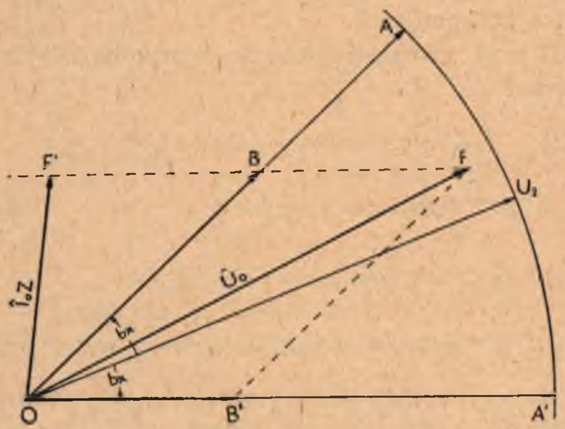
$$\hat{I}Z = \hat{I}_0 Z + \hat{I}_z Z,$$

$$\hat{I} = \hat{I}_0 + \hat{I}_z. \tag{56}$$

Napięcie oraz prąd w danym punkcie linii w stanie obciążenia są równe sumie napięć, względnie prądów, w tym punkcie w stanie jałowym i w stanie zwarcia.

Zależność wyrażona we wzorach (55) i (56) pozwala nam zastosować metodę wykreślną znajdowania napięcia i prądu w dowolnym miejscu linii.

Opieramy się na spostrzeżeniu, że w każdym ze wzorów (51), (52), (53) i (54) na $\hat{U}_0$, $\hat{I}_0$, $\hat{U}_z$ i $\hat{I}_z$ występuje tylko jeden z wektorów $\hat{U}_2$ lub $\hat{I}_2$, poza tym tylko funkcje wykładnicze i zespolone trygonometryczne.



Rys. 190

Przede wszystkim obliczamy analitycznie wartości a i b współczynników tłumienia i długości fali, następnie dla danej odległości x wartości funkcji wykładniczej e^{ax} i e^{-ax} oraz kąta bx.

Odmierzamy teraz w odpowiedniej skali, w kierunku, który bierzemy jako kierunek podstawowy, napięcie końca linii $\hat{U}_2$ (rys. 190). Niech to będzie odcinek OU_2. Z punktu O zataczamy koło promieniem OU_2 i odmierzamy od OU_2 w obie strony przy punkcie O kąty bx.

Ramiona tych kątów przetną koło w punktach A i A':

$$\sphericalangle U_2OA = bx,$$

$$\sphericalangle U_2OA' = -bx.$$

OA i OA' stanowią wektory, określone w sposób następujący:

$$\widehat{OA} = U_2(\cos bx + j \sin bx),$$

$$\widehat{OA'} = U_2(\cos bx - j \sin bx).$$

Mnożymy teraz U_2 przez $\frac{1}{2} e^{ax}$ i $\frac{1}{2} e^{-ax}$ i odmierzamy otrzymane iloczyny na liniach OA i OA' jako OB i OB'. Będzie więc

$$\hat{OB} = \frac{1}{2} U_2 e^{ax} (\cos bx + j \sin bx),$$

$$\hat{OB'} = \frac{1}{2} U_2 e^{-ax} (\cos bx - j \sin bx).$$

Budujemy sumę tych wektorów OF i ich różnicę OF', czyli

$$\hat{OF} = \hat{OB} + \hat{OB'}.$$

$$\hat{OF'} = \hat{OB} - \hat{OB'}.$$

Więc

$$\hat{OF} = \frac{1}{2} U_2 e^{ax} (\cos bx + j \sin bx) + \frac{1}{2} U_2 e^{-ax} (\cos bx - j \sin bx).$$

$$\hat{OF'} = \frac{1}{2} U_2 e^{ax} (\cos bx + j \sin bx) - \frac{1}{2} U_2 e^{-ax} (\cos bx - j \sin bx).$$

Porównując otrzymane wzory ze wzorami (51) i (52) widzimy, że

$$\hat{OF} = \hat{U}_0,$$

$$\hat{OF'} = \hat{I}_0 Z.$$

W ten sposób znaleźliśmy napięcie i prąd w dowolnym miejscu linii w stanie jałowym. Przystąpimy teraz do znalezienia tych samych wielkości w stanie zwarcia.

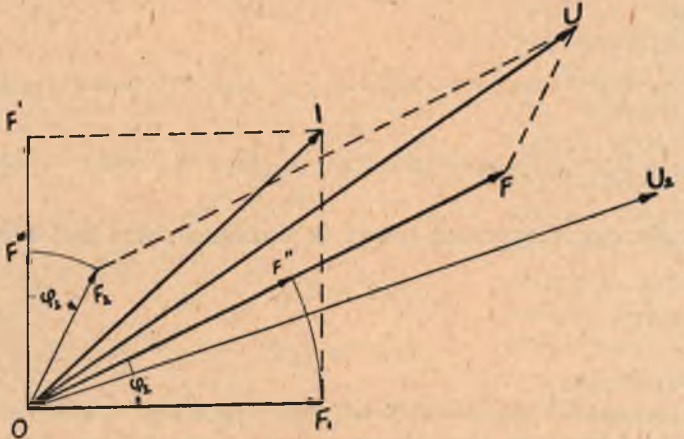
Porównując wzory (54) i (53) na prąd i napięcie w stanie zwarcia ze wzorami (51) i (52) na napięcie i prąd w stanie jałowym, widzimy, że prąd i napięcie w stanie zwarcia zupełnie tak samo zależą od prądu końca linii, jak napięcie i prąd w stanie jałowym od napięcia końca linii. Dla ich znalezienia powinniśmy wykonać wykres zupełnie podobny do porzedniego, odmierzając wektor $\hat{I}_2 Z$ zamiast wektora $\hat{U}_2$. Korzystając z tego samego wykresu, powinniśmy skalę zmienić w stosunku $\frac{U_2}{I_2 Z}$, następnie kierunek każdego z wektorów powinien być przesunięty o kąt φ_2, ponieważ wektor $\hat{I}_2 Z$ tworzy taki kąt z wektorem $\hat{U}_2$.

W ten sposób wektory $\hat{OF}$ i $\hat{OF'}$ w nowej skali i przesunięte o kąt φ_2 dadzą nam prąd i napięcie w danym punkcie w stanie zwarcia.

$$\hat{OF} = \hat{I}_z Z, \quad \hat{OF'} = \hat{U}_z.$$

Aby przy pomocy rozważanego wykresu znaleźć napięcie i prąd w danym punkcie linii w stanie zwykłego obciążenia, postępujemy w następujący sposób (rys. 191).

Mnożymy długość wektorów OF i OF' przez stosunek $\frac{I_0 Z}{U_2}$ i odmierzamy w tych samych kierunkach jako OF'' i OF'''. Wektory OF'' i OF''' przedstawiają co do wielkości (ale nie kierunku) w skali pierwotnego wykresu prąd i napięcie w stanie zwarcia. Obracamy je teraz około punktu O we właściwym kierunku o kąt φ_2 do położenia OF_1 o OF_2. Wektory OF_1 i OF_2 stanowią wektory



Rys. 191

prądu i napięcia w stanie zwarcia. Budujemy sumę wektorów $\widehat{OF}$ i $\widehat{OF_2}$ równą $\widehat{OU}$ oraz sumę wektorów $\widehat{OF'}$ i $\widehat{OF_1}$ równą $\widehat{OI}$. Wtedy

$$\widehat{OU} = \widehat{OF} + \widehat{OF_2} = \hat{U}_0 + \hat{U}^z = \hat{U},$$

$$\widehat{OI} = \widehat{OF'} + \widehat{OF_1} = \hat{I}_0 Z + \hat{I}_z Z = \hat{I} Z.$$

Znaleźliśmy zatem wykreślnie napięcie i prąd w dowolnym miejscu linii.

Zauważymy jeszcze, że dla różnych odległości x punkty B i B' w wykresie (rys. 190) leżą na spirali logarytmicznej.

Rzeczywiście

$$OB = \frac{1}{2} U_2 e^{ax}, \qquad OB' = \frac{1}{2} U_2 e^{-ax}.$$

W współrzędnych biegunowych $bx = a$ dla OB, zaś $-bx = a$ dla OB' stanowią kąty biegunowe. U_2, a i b mają wartości stałe;

oznaczając promień wodzący OB, względnie OB', przez r, $\frac{1}{2}U_2 = k$, $\frac{a}{b} = m$, będziemy mieli dla OB

$$r = ke^{ax} = ke^{\frac{a}{b}\alpha} = ke^{m\alpha};$$

dla OB'

$$r = ke^{-ax} = ke^{\frac{a}{b}\alpha} = ke^{m\alpha}.$$

Są to równania spirali logarytmicznej.

W liniach kablowych, zwłaszcza telefonicznych i telegraficznych, indukcyjność L oraz upływność A są na ogół nieznaczne i można te wielkości założyć równe zeru, co czynił W. Thomson przy rozpatrywaniu przenoszenia prądów telegraficznych w kablach. Wówczas ze wzorów (15), (16) i (17) otrzymamy

$$a = \sqrt{\frac{1}{2}R\omega C}, \quad b = \sqrt{\frac{1}{2}R\omega C}, \quad \dot{Z} = \sqrt{\frac{R}{j\omega C}} = \sqrt{\frac{R}{\omega C}}\, e^{-j\frac{\pi}{4}}.$$

Jak widzimy, oporność falowa w tym przypadku jest odwrotnie proporcjonalna do pierwiastka kwadratowego pulsacji ω, a więc i częstotliwości, z czego wynika, że im większa częstotliwość, tym mniejsze jest napięcie potrzebne dla otrzymania tego samego prądu. Natomiast spółczynnik tłumienia wzrasta ze wzrostem częstotliwości. Argument oporności wynosi —45°, z czego wynika że prąd wyprzedza napięcie o kąt 45°. Okoliczność, że tłumienie zależne jest od częstotliwości, wpływa niekorzystnie przy rozmowach telefonicznych i w ogóle przy przesyłaniu dźwięków po liniach kablowych.

Dla wielkich częstotliwości spółczynnik tłumienia w przybliżeniu będzie uzależniony tylko od stałych linii, mianowicie ze wzoru (15) będziemy mieli

$$a = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\omega^2 LC\left(1+\frac{R^2}{\omega^2 L^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{A^2}{\omega^2 C^2}\right)^{\frac{1}{2}} + AR - \omega^2 LC\right]}.$$

Rozwijając w szereg dwumiany w nawiasach i podniesione do potęgi $\frac{1}{2}$, otrzymamy

$$\left(1+\frac{R^2}{\omega^2 L^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\frac{R^2}{\omega^2 L^2} + \ldots.$$

$$\left(1+\frac{A^2}{\omega^2 C^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\frac{A^2}{\omega^2 C^2} + \ldots;$$

przy założeniu, że ω ma wartość wielką, możemy odrzucić te człony szeregu, które zawierają wyższe potęgi ω^2, i przyjąć, że

$$\left(1+\frac{R^2}{\omega^2L^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{A^2}{\omega^2C^2}\right)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}\frac{R^2}{\omega^2L^2}+\frac{1}{2}\frac{A^2}{\omega^2C^2}.$$

Wtedy

$$a=\sqrt{\frac{1}{4}R^2\frac{C}{L}+\frac{1}{4}A^2\frac{L}{C}+\frac{1}{2}AR}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{4}\left(R\sqrt{\frac{C}{L}}+A\sqrt{\frac{L}{C}}\right)^2}=\frac{1}{2}\left[R\sqrt{\frac{C}{L}}+A\sqrt{\frac{L}{C}}\right].$$

Jak widać z ostatniego wzoru, tłumienie zależy od stosunku $\frac{L}{C}$ i można znaleźć taką zależność między stałymi liniami, aby spółczynnik tłumienia był najmniejszy. Zakładając w ostatnim wzorze

$$\sqrt{\frac{L}{C}}=x,$$

napiszemy

$$a=\frac{1}{2}\left(Ax+\frac{R}{x}\right),$$

skąd

$$\frac{da}{dx}=\frac{1}{2}\left(A-\frac{R}{x^2}\right);$$

przyrównując tę pochodną do zera i biorąc pod uwagę, że $x>0$, znajdziemy

$$x=\sqrt{\frac{L}{C}}=\sqrt{\frac{R}{A}};$$

ponieważ druga pochodna $\frac{d^2a}{dx^2}$ staje się większa od zera, przeto znaleziona wartość x odpowiada minimum funkcji a, tłumienie więc będzie najmniejsze, gdy

$$\frac{L}{C}=\frac{R}{A},$$

wtedy

$$a=\sqrt{RA}.$$

Ponieważ w liniach kablowych L i A są małe, przeto w znacznym stopniu

$$\frac{L}{C}<\frac{R}{A};$$

dla zmniejszenia więc tłumienia należy zwiększyć indukcyjność L. Pupin zaproponował w tym celu włączanie cewek indukcyjnych w kablach telefonicznych w odległości $1^1/_2 - 2$ km. Krarup zaleca pokrywanie kabla cienkim drutem ze stopu żelaza z niklem, posiadającego znaczną przenikalność magnetyczną.

§ 97
PRZYPADEK OGÓLNY

Zbadajmy teraz linię w przypadku ogólnym, kiedy oporność, upływność, indukcyjność i pojemność nie są powiązane żadnymi zależnościami. Jak wiadomo, oporność falowa linii jest wtedy liczbą zespoloną. Znajdźmy jej moduł Z i argument α:

$$\hat{Z} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{A + j\omega C}} = Z(\cos\alpha + j\sin\alpha),$$

$$\frac{R + j\omega L}{A + j\omega C} = Z^2(\cos 2\alpha + j\sin 2\alpha),$$

$$\frac{(R + j\omega L)(A - j\omega C)}{A^2 + \omega^2 C^2} = Z^2(\cos 2\alpha + j\sin 2\alpha),$$

$$\frac{AR + \omega^2 LC + j\omega(AL - RC)}{A^2 + \omega^2 C^2} = Z^2(\cos 2\alpha + j\sin 2\alpha);$$

stąd otrzymujemy

$$Z^2\cos 2\alpha = \frac{AR + \omega^2 LC}{A^2 + \omega^2 C^2},$$

$$Z^2\sin 2\alpha = \omega\frac{AL - RC}{A^2 + \omega^2 C^2},$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \omega\cdot\frac{AL - RC}{AR + \omega^2 LC},$$

$$Z^4 = \frac{(AR + \omega^2 LC)^2 + \omega^2(AL - RC)^2}{(A^2 + \omega^2 C^2)^2},$$

skąd ostatecznie

$$Z = \sqrt[4]{\frac{R^2 + \omega^2 L^2}{A^2 + \omega^2 C^2}}, \tag{57}$$

$$\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\omega\frac{AL - RC}{AR + \omega^2 LC}. \tag{58}$$

Argument α oporności falowej ma znak taki sam jak licznik we wzorze (58), ponieważ mianownik jest zawsze dodatni; wobec tego

$$\alpha > 0 \text{ przy } AL > RC,$$
$$\alpha < 0 \text{ przy } AL < RC.$$

W szczególnym przypadku, gdy $AL = RC$ lub gdy $R = 0$ i $A = 0$, argument jest zerem i wtedy oporność falowa jest liczbą rzeczywistą.

Napięcie i prąd w dowolnym miejscu linii wyznacza się z ogólnych wzorów (22) i (23)

$$\hat{U} = \frac{1}{2}\Big\{(\hat{U}_2 + \hat{I}_2\hat{Z})\, e^{ax}(\cos bx + j\sin bx) + \\ + (\hat{U}_2 - \hat{I}_2\hat{Z})\, e^{-ax}(\cos bx - j\sin bx)\Big\}, \tag{59}$$

$$\hat{I}\hat{Z} = \frac{1}{2}\Big\{(\hat{U}_2 + \hat{I}_2\hat{Z})\, e^{ax}(\cos bx + j\sin bx) - \\ - \hat{U}_2 - \hat{I}_2\hat{Z})\, e^{-ax}(\cos bx - j\sin bx)\Big\}. \tag{60}$$

Rozpatrzmy, podobnie jak w § 96, linie w stanie jałowym. Stosując te same oznaczenia co tam, znajdziemy ($\hat{I}_2 = 0$)

$$\hat{U}_0 = \frac{1}{2}\hat{U}_2\Big\{e^{ax}(\cos bx + j\sin bx) + e^{-ax}(\cos bx - j\sin bx)\Big\}, \tag{61}$$

$$\hat{I}_0\hat{Z} = \frac{1}{2}\hat{U}_2\Big\{e^{ax}(\cos bx + j\sin bx) - e^{-ax}(\cos bx - j\sin bx\Big\}. \tag{62}$$

Tak samo dla stanu zwarcia ($\hat{U}_2 = 0$)

$$\hat{U}_z = \frac{1}{2}\hat{I}_2\hat{Z}\Big\{e^{ax}(\cos bx + j\sin bx) - e^{-ax}(\cos bx - j\sin bx\Big\}, \tag{63}$$

$$\hat{I}_z\hat{Z} = \frac{1}{2}\hat{I}_2\hat{Z}\Big\{e^{ax}(\cos bx + j\sin bx) + e^{-ax}(\cos bx - j\sin bx)\Big\}. \tag{64}$$

Bezpośrednio z porównania wzorów (59), (61) i (63) oraz (60), (62) i (64) wynika, że i w tym przypadku słuszne są wzory

$$\hat{U} = \hat{U}_0 + \hat{U}_z,$$
$$\hat{I} = \hat{I}_0 + \hat{I}_z.$$

Prąd $\hat{I}_2$ końca linii jest odchylony od takiegoż napięcia $\hat{U}_2$ o kąt φ_2; iloczyn $\hat{I}_2\hat{Z}$ będzie więc przesunięty względem $\hat{U}_2$ o kąt $\varphi_2 + \alpha$.

Z rozważań tych wynika, że sposób wykreślnego wyznaczania napięcia i prądu w dowolnym miejscu linii jest zupełnie taki sam jak w przypadku podanym w § 96. Należy tylko uwzględnić, że kąt między kierunkami napięcia końca linii i iloczynem prądu końca linii przez jej oporność falową jest nie φ_2, lecz $(\varphi_2 + \alpha)$, więc na rys. 191 wektory OF'' i OF''' powinny być przesunięte o kąt $(\varphi_2 + \alpha)$.

§ 98

OBLICZENIE STAŁYCH LINII NA PODSTAWIE POMIARÓW DOKONANYCH W STANIE JAŁOWYM I W STANIE ZWARCIA

Wszystkie stałe linii: oporność, upływność, indukcyjność i pojemność, mogą być obliczone, jeżeli wiadome są oporności pozorne linii, odpowiadające stanowi jałowemu i stanowi zwarcia. Wielkości te mogą być podane przez fabrykę (np. dla kabli) lub też określone zapomocą pomiarów; w tym celu wystarczy zmierzyć na początku linii moc, napięcie i natężenie prądu przy dowolnym napięciu oraz kąt przesunięcia fazy prądu względem napięcia, najpierw w przypadku, gdy linia jest w stanie jałowym, następnie, gdy linia jest w stanie zwarcia; na podstawie tych pomiarów znajdujemy odpowiednie oporności pozorne. Oznaczając przez $\hat{Z}_0$ i $\hat{Z}_z$ wartości oporności pozornych linii w stanie jałowym i w stanie zwarcia, zaś przez φ_0 i φ_z kąty przesunięcia fazy odpowiednich prądów względem napięć, mierzone w kierunku od napięć, będziemy mieli dla argumentów symboli $\hat{Z}_0$ i $\hat{Z}_z$ kąty $-\varphi_0$ i $-\varphi_z$.

$$\hat{Z}_0 = Z_0 (\cos\varphi_0 - j \sin\varphi_0) = Z_0 e^{-j\varphi_0}, \tag{65}$$

$$\hat{Z}_z = Z_z (\cos\varphi_z - j \sin\varphi_z) = Z_z e^{-j\varphi_z}. \tag{66}$$

Na podstawie wzorów (26) i (27) mamy na początku linii, czyli na odległości $x = l$, mierzonej od końca, następujące wartości napięcia $\hat{U}_1$ i prądu $\hat{I}_1$, gdy w końcu wartości te wynoszą $\hat{U}_2$ i $\hat{I}_2$,

$$\hat{U}_1 = \hat{U}_2 \cosh kl + \hat{I}_2 \hat{Z} \sinh kl, \tag{67}$$

$$\hat{I}_1 \hat{Z} = \hat{U}_2 \sinh kl + \hat{I}_2 \hat{Z} \cosh kl. \tag{68}$$

Oznaczając dla stanu jałowego, gdy w końcu linii napięcie ma wartość $\hat{U}_2$, zaś natężenie prądu równe jest zeru, napięcie i prąd na początku przez $\hat{U}_{10}$ i $\hat{I}_{10}$, następnie dla stanu zwarcia, gdy napięcie w końcu równe jest zeru, zaś natężenie ma wartość $\hat{I}_2$, napięcie i prąd na początku przez $\hat{U}_{1z}$ i $\hat{I}_{1z}$, otrzymamy ze wzorów (67) i (68), zakładając kolejno $\hat{I}_2 = 0$ oraz $\hat{U}_2 = 0$,

$$\hat{U}_{10} = \hat{U}_2 \cosh kl, \tag{69}$$

$$\hat{I}_{10}\hat{Z} = \hat{U}_2 \sinh kl, \tag{70}$$

$$\hat{U}_{1z} = \hat{I}_2\hat{Z} \sinh kl, \tag{71}$$

$$\hat{I}_{1z}\hat{Z} = \hat{I}_2\hat{Z} \cosh kl. \tag{72}$$

Dzieląc stronami (69) przez (70) oraz (71) przez (72) otrzymamy

$$\frac{\hat{U}_{10}}{\hat{I}_{10}\hat{Z}} = \operatorname{cotgh} kl,$$

$$\frac{\hat{U}_{1z}}{\hat{I}_{1z}\hat{Z}} = \operatorname{tgh} kl;$$

ale

$$\frac{\hat{U}_{10}}{\hat{I}_{10}} = \hat{Z}_0, \quad \frac{\hat{U}_{1z}}{\hat{I}_{1z}} = \hat{Z}_z$$

wobec czego

$$\hat{Z}_0 = \hat{Z} \operatorname{cotgh} kl, \tag{73}$$

$$\hat{Z} = \hat{Z} \operatorname{tgh} kl. \tag{74}$$

skąd przez pomnożenie i dzielenie otrzymujemy

$$\hat{Z}^2 = \hat{Z}_0\hat{Z}_z,$$

$$(\operatorname{tgh} kl)^2 = \frac{\hat{Z}_z}{\hat{Z}_0};$$

wreszcie

$$\hat{Z} = \sqrt{Z_0 Z_z}, \tag{75}$$

$$\operatorname{tgh} kl = \sqrt{\frac{Z_z}{Z_0}}. \tag{76}$$

Ponieważ

$$\operatorname{tgh} kl = \frac{e^{kl} - e^{-kl}}{e^{kl} + e^{-kl}} = \frac{e^{2kl} - 1}{e^{2kl} + 1},$$

więc

$$e^{2kl} = \frac{1 + \operatorname{tgh} kl}{1 - \operatorname{tgh} kl} = \frac{1 + \sqrt{\frac{\hat{Z}_z}{\hat{Z}_0}}}{1 - \sqrt{\frac{\hat{Z}_z}{Z_0}}} = \frac{\sqrt{\hat{Z}_0} + \sqrt{\hat{Z}_z}}{\sqrt{Z_0} - \sqrt{\hat{Z}_z}}. \tag{77}$$

Biorąc wartości $\hat{Z}_0$ i $\hat{Z}_z$ ze wzorów (65) i (66), będziemy mieli

$$e^{2kl} = \frac{\sqrt{Z_0} e^{-j\frac{\varphi_0}{2}} + \sqrt{Z_z}\, e^{-j\frac{\varphi_z}{2}}}{\sqrt{Z_0} e^{-j\frac{\varphi_0}{2}} - \sqrt{Z_z}\, e^{-j\frac{\varphi_z}{2}}};$$

mnożąc licznik i mianownik przez

$$\sqrt{Z_0}\, e^{j\frac{\varphi_0}{2}} - \sqrt{Z_z}\, e^{j\frac{\varphi_z}{2}},$$

otrzymamy

$$e^{2kl} = \frac{Z_0 - Z_z - \sqrt{Z_0 Z_z}\left[e^{j\frac{(\varphi z - \varphi_0)}{2}} - e^{-j\frac{(\varphi z - \varphi_0)}{2}}\right]}{Z_0 + Z_z - \sqrt{Z_0 Z_z}\left[e^{j\frac{(\varphi z - \varphi_0)}{2}} + e^{-j\frac{(\varphi z - \varphi_0)}{2}}\right]}.$$

Zważywszy, że $k = a + jb$, i zamieniając funkcje wykładnicze na funkcje trygonometryczne według wzorów E u l e r a, napiszemy

$$e^{2al}(\cos 2bl + j \sin 2bl) = \frac{Z_0 - Z_z - j\, 2\sqrt{Z_0 Z_z}\sin\left(\frac{\varphi_z - \varphi_0}{2}\right)}{Z_0 + Z_z - 2\sqrt{Z_0 Z_z}\cos\left(\frac{\varphi_z - \varphi_0}{2}\right)},$$

skąd

$$e^{4al} = \frac{(Z_0 - Z_z)^2 + 4\, Z_0 Z_z \sin^2\left(\frac{\varphi_z - \varphi_0}{2}\right)}{\left[Z_0 + Z_z - 2\sqrt{Z_0 Z_z}\cos\left(\frac{\varphi_z - \varphi_0}{2}\right)\right]^2} = M,$$

$$\operatorname{tg} 2bl = -\frac{2\sqrt{Z_0 Z_z}\sin\left(\frac{\varphi_z - \varphi_0}{2}\right)}{Z_0 - Z_z} = N;$$

przez odpowiednie działania otrzymujemy

$$a = \frac{1}{4l} \ln M, \quad b = \frac{1}{2l} \operatorname{arctg} N;$$

w ten sposób obliczamy spółczynnik tłumienia a oraz spółczynnik długości fali b.

Następnie dla znalezienia oporności falowej $\hat{Z}$ wprowadzamy do wzoru (75) wartości $\hat{Z}_0$ i $\hat{Z}_z$ z (65) i (66), wtedy

$$\hat{Z} = \sqrt{Z_0 Z_z e^{-j\frac{(\varphi_0 + \varphi z)}{2}}} = \sqrt{Z_0 Z_z}\left[\cos\left(\frac{\varphi_0 + \varphi_z}{2}\right) - j \sin\left(\frac{\varphi_0 + \varphi_z}{2}\right)\right]. \quad (78)$$

Ale na podstawie wzorów (10) i (17)

$$\sqrt{(R + j\omega L)(A + j\omega C)} = a + jb,$$

$$\sqrt{\frac{R + j\omega L}{A + j\omega C}} = \hat{Z},$$

więc

$$R + j\omega L = (a + jb)\,\hat{Z},$$

$$A + j\omega C + = \frac{a + jb}{\hat{Z}};$$

biorąc wartość $\dot{Z}$ ze wzoru (78), otrzymamy

$$R + j\omega L = (a + jb)\sqrt{Z_0 Z_z}\left[\cos\left(\frac{\varphi_0 + \varphi_z}{2}\right) - j\sin\left(\frac{\varphi_0 + \varphi_z}{2}\right)\right],$$

$$A + j\omega C = (a + jb)\frac{1}{\sqrt{Z_0 Z_z}}\left[\cos\left(\frac{\varphi_0 + \varphi_z}{2}\right) + j\sin\left(\frac{\varphi_0 + \varphi_z}{2}\right)\right];$$

przyrównując w tych wzorach części rzeczywiste i części urojone, znajdujemy

$$R = \sqrt{Z_0 Z_z}\left[a\cos\frac{\varphi_0 + \varphi_z}{2} + b\sin\frac{\varphi_0 + \varphi_z}{2}\right],$$

$$L = \frac{\sqrt{Z_0 Z_z}}{\omega}\left[b\cos\frac{\varphi_0 + \varphi_z}{2} - a\sin\frac{\varphi_0 + \varphi_z}{2}\right],$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{Z_0 Z_z}}\left[a\cos\frac{\varphi_0 + \varphi_z}{2} - b\sin\frac{\varphi_0 + \varphi_z}{2}\right],$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{\omega Z_0 Z_z}}\left[b\cos\frac{\varphi_0 + \varphi_z}{2} + a\sin\frac{\varphi_0 + \varphi_z}{2}\right].$$

W ten sposób możemy obliczyć stałe linii, mając wartości $\dot{Z}_0$, $\dot{Z}_z$, φ_0 i φ_z.

§ 99

WZORY DLA NAPIĘĆ I PRĄDÓW, OPARTE NA WŁASNOŚCIACH LINII W STANIE JAŁOWYM I W STANIE ZWARCIA. WSPÓŁCZYNNIK LINIOWY

Rozpatrując wzory (69) i (72) spostrzegamy, że

$$\frac{\dot{U}_{10}}{\dot{U}_2} = \frac{\dot{I}_{1z}}{\dot{I}_2} = \cosh kl;$$

ponieważ $k = a + jb$ jest na ogół liczbą zespoloną, więc i $\cosh kl$ musi być również liczbą zespoloną; oznaczmy

$$\cosh kl = \dot{S};$$

wprowadzając do naszych wzorów ten współczynnik, musimy go traktować jako liczbę zespoloną; nazywamy go *współczynnikiem liniowym*.

Możemy więc powyższe wzory przepisać w postaci

$$\frac{\dot{U}_{10}}{\dot{U}_2} = \frac{\dot{I}_{1z}}{\dot{I}_2} = \dot{S}. \tag{79}$$

Niech σ będzie kątem przesunięcia fazy $\hat{U}_{10}$ względem $\hat{U}_2$ lub, co jest jednoznaczne, $\hat{I}_1$, względem $\hat{I}_2$; kąt ten będzie więc argumentem współczynnika liniowego w ujęciu symbolicznym; wówczas

$$\hat{S} = S e^{j\sigma} = S(\cos\sigma + j\sin\sigma).$$

Moduł S i argument σ możemy określić przez spółczynniki a i b oraz długość linii l w sposób następujący. Z założenia wynika, że

$$\hat{S} = \cosh kl = \frac{e^{kl} + e^{-kl}}{2} = \frac{e^{(a+jb)l} + e^{-(a+jb)l}}{2}$$

albo

$$S(\cos\sigma + j\sin\sigma) = \frac{e^{al} + e^{-al}}{2}\cos bl + j\frac{e^{al} - e^{-al}}{2}\sin bl =$$

$$= \cosh al \,.\, \cosh bl + j\sinh al \,.\, \sin bl,$$

skąd

$$S = \sqrt{\cosh^2 al \cdot \cos^2 bl + \sinh^2 al \cdot \sin^2 bl} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2(\cosh 2al + \cos 2bl)},$$

$$\operatorname{tg}\sigma = \operatorname{tgh} al \,.\, \operatorname{tg} bl.$$

Chcąc określić $\hat{S}$ przez oporności pozorne linii w stanie jałowym i w stanie zwarcia, napiszemy

$$\hat{S} = \cosh kl = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{tgh}^2 kl}};$$

biorąc wartość $\operatorname{tgh} kl$ ze wzoru (76), będziemy mieli

$$\hat{S} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\hat{Z}_z}{\hat{Z}_0}}} = \sqrt{\frac{\hat{Z}_0}{\hat{Z}_0 - \hat{Z}_z}}; \tag{80}$$

stąd

$$\hat{S}^2 = \frac{\hat{Z}_0}{\hat{Z}_0 - \hat{Z}_z} = \frac{Z_0 e^{-j\varphi_0}}{Z_0 e^{-j\varphi_0} - Z_z e^{-j\varphi_z}} = \frac{Z_0}{Z_0 - Z_z e^{-j(\varphi_z - \varphi_0)}};$$

mnożąc licznik i mianownik przez $Z_0 - Z_z e^{j(\varphi_z - \varphi_0)}$ otrzymamy

$$\hat{S}^2 = \frac{Z_0 [Z_0 - Z_z e^{j(\varphi_z - \varphi_0)}]}{Z_0^2 + Z_z^2 - Z_0 Z_z [e^{j(\varphi_z - \varphi_0)} + e^{-j(\varphi_z - \varphi_0)}]};$$

zamieniając funkcje wykładnicze funkcjami trygonometrycznymi i biorąc pod uwagę, że

$$\hat{S}^2 = S^2(\cos\sigma + j\sin\sigma)^2 = S^2(\cos 2\sigma + j\sin 2\sigma),$$

będziemy mieli

$$\hat{S}^2 (\cos 2\sigma + j \sin 2\sigma) = \frac{Z_0[Z_0 - Z_z \cos(\varphi_z - \varphi_0) - j\, Z_z \sin(\varphi_z - \varphi_0)]}{Z_0^2 + Z_z^2 - 2\, Z_0 Z_z \cos(\varphi_z - \varphi_0)},$$

skąd

$$S^4 = \frac{Z_0^2 \{[Z_0 - Z_z \cos(\varphi_z - \varphi_0)]^2 + Z_z^2 \sin^2(\varphi_z - \varphi_0)\}}{[Z_0^2 + Z_z^2 - 2 Z_0 Z_z \cos(\varphi_z - \varphi_0)]^2} =$$

$$= \frac{Z_0^2}{Z_0^2 - Z_z^2 - 2\, Z_0 Z \cos(\varphi_z - \varphi_0)};$$

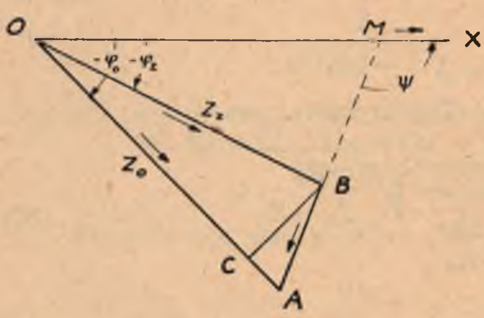
$$S = \frac{\sqrt{Z_0}}{\sqrt[4]{Z_0^2 + Z_z^2 - 2 Z_0 Z_z \cos(\varphi_z - \varphi_0)}}, \tag{81}$$

$$\operatorname{tg} 2\sigma = - \frac{Z_z \sin(\varphi_z - \varphi_0)}{Z_0 - Z_z \cos(\varphi_z - \varphi_0)}. \tag{82}$$

Ten sam rezultat można otrzymać geometrycznie. Wychodząc ze wzoru

$$\hat{S}^2 = \frac{\hat{Z}_0}{\hat{Z}_0 - \hat{Z}_z},$$

przeprowadzamy dowolny kierunek OX (rys. 192), odkładamy z punktu O pod kątami $(-\varphi_0)$ oraz $(-\varphi_z)$ $OA = Z_0$, $OB = Z_z$; wówczas



Rys. 192

$$BA = \hat{Z}_0 - \hat{Z}_z,$$

$$\sphericalangle MOA = -\varphi_0,$$

$$\sphericalangle MOB = -\varphi_z;$$

oznaczając przez ψ kąt BMX, który tworzy BA z OX, będziemy mieli

$$\hat{Z}_0 = OA \cdot e^{-j\varphi_0},$$

$$\hat{Z}_0 - \hat{Z}_z = BA \cdot e^{j\psi},$$

wobec czego

$$\hat{S}^2 = \frac{\hat{Z}_0}{\hat{Z}_0 - \hat{Z}_z} = \frac{OA}{BA} e^{-j(\varphi_0 + \psi)},$$

skąd

$$S^2 = \frac{OA}{BA},$$

$$2\sigma = -(\varphi_0 + \psi).$$

Wprowadzenie współczynnika liniowego $\hat{S}$ pozwala na uproszczenie wzorów uzależniających napięcia i prądy na początku linii od napięć i prądów w jej końcu; ze wzoru (79) mamy

$$\hat{U}_{10} = \hat{U}_2 \hat{S}, \qquad \hat{I}_{1z} = \hat{I}_2 \hat{S},$$

następnie

$$\frac{\hat{U}_{1z}}{\hat{I}_{1z}} = \hat{Z}_z, \text{ czyli } \hat{U}_{1z} = \hat{I}_{1z}\hat{Z}_z = \hat{I}_2 \hat{Z}_z \hat{S},$$

$$\frac{\hat{U}_{10}}{\hat{I}_{10}} = \hat{Z}_0, \quad \text{czyli} \quad \hat{I}_{10} = \frac{\hat{U}_{10}}{\hat{Z}_0} = \frac{\hat{U}_2 \hat{S}}{\hat{Z}_0}.$$

Ponieważ

$$\hat{U}_1 = \hat{U}_{10} + \hat{U}_{1z},$$

$$\hat{I}_1 = \hat{I}_{10} + \hat{I}_{1z},$$

więc po podstawieniu odpowiednich wartości otrzymamy

$$\hat{U}_1 = \hat{S}\,(\hat{U}_2 + \hat{I}_2 \hat{Z}_z), \tag{83}$$

$$\hat{I}_1 = \hat{S}\left(\hat{I}_2 + \frac{\hat{U}_2}{\hat{Z}_0}\right) \tag{84}$$

albo

$$\frac{\hat{U}_1}{\hat{S}} = \hat{U}_2 + \hat{I}_2 \hat{Z}_z, \tag{85}$$

$$\frac{\hat{I}_1}{\hat{S}} = \hat{I}_2 + \frac{\hat{U}_2}{\hat{Z}_0}. \tag{86}$$

Wzory te są identyczne ze wzorami (47) i (48); (75) i (76); (97) i (98) z §§ 58, 59 i 61, wyprowadzonymi dla czwórników symetrycznych. Z tego wynika, że długa linia elektryczna z równomiernie rozłożonymi stałymi stanowi symetryczny czwórnik.

Przy rozwiązywaniu powyższych równań metodą symboliczną, gdy chodzi o znalezienie wartości napięcia $\hat{U}_1$, prądu $\hat{I}_1$ oraz współczynnika mocy $\cos\varphi_1$, gdzie φ_1 stanowi kąt przesunięcia fazy prądu $\hat{I}_1$ względem napięcia $\hat{U}_1$, musimy oprócz danych $\hat{U}_2$, $\hat{I}_2$ i φ_2 mieć wartości $\hat{Z}_0$, $\hat{Z}_z$ oraz kąty φ_0 i φ_z; z tych danych obliczamy $\hat{S}$ według wzoru (81); określenie argumentu σ jest w tym przypadku zbyteczne, gdyż kąt φ_1 pomiędzy $\hat{I}_1$ i $\hat{U}_1$ jest taki sam co i pomiędzy $\frac{\hat{I}_1}{\hat{S}}$ i $\frac{\hat{U}_1}{\hat{S}}$; wystarczy więc obliczenie kątów pomiędzy $\frac{\hat{I}_1}{\hat{S}}$ i $\hat{U}_2$ oraz pomiędzy $\frac{\hat{U}_1}{\hat{S}}$ i $\hat{U}_2$, wtedy różnica tych kątów da nam wartość φ_1.

W poprzednich wzorach oporności $\hat{Z}_0$ i $\hat{Z}_z$ odpowiadały całej długości linii l. Czasami zachodzi potrzeba przerachowania tych wielkości, podanych dla określonej długości l, na inną długość l' takiej samej linii. Oznaczmy poszukiwane oporności pozorne, odpowiadające długości l', przez $\hat{Z}_0'$ i $\hat{Z}_z'$; na podstawie wzorów (73) i (74) będziemy mieli

$$\hat{Z}_0' = \hat{Z} \operatorname{cotgh} kl', \tag{87}$$

$$\hat{Z}_z' = \hat{Z} \operatorname{tgh} kl'. \tag{88}$$

gdzie według wzoru (75)

$$\hat{Z} = \sqrt{\hat{Z}_0 \hat{Z}_z}$$

jest wielkością niezależną od długości linii, lecz tylko od stałych R, L, A, C oraz ω. Dla określenia funkcji hiperbolicznych we wzorach (87) i (88) mamy

$$\operatorname{tgh} kl' = \frac{e^{2kl'} - 1}{e^{2kl'} + 1}, \tag{89}$$

$$\operatorname{cotgh} kl' = \frac{e^{2kl'} + 1}{e^{2kl'} - 1}; \tag{90}$$

z drugiej strony ze wzoru (77)

$$e^{2kl'} = \frac{\sqrt{\hat{Z}_0} + \sqrt{\hat{Z}_z}}{\sqrt{\hat{Z}_0} - \sqrt{\hat{Z}_z}};$$

oznaczając w skróceniu

$$\frac{\sqrt{\hat{Z}_0} + \sqrt{\hat{Z}_z}}{\sqrt{\hat{Z}_0} - \sqrt{\hat{Z}_z}} = q,$$

mamy

$$e^{2kl} = q,$$

$$e^{2k} = q^{\frac{1}{l}},$$

$$e^{2kl'} = q^{\left(\frac{l'}{l}\right)}.$$

Podstawiając tę wartość do (89), (90), a następnie do (87) i (88), otrzymamy

$$\hat{Z}_0' = \sqrt{\hat{Z}_0 \hat{Z}_z \frac{q^{\frac{l'}{l}} + 1}{q^{\frac{l'}{l}} - 1}}, \tag{91}$$

$$\hat{Z}_z' = \sqrt{\hat{Z}_0 \hat{Z}_z \frac{q^{\frac{l'}{l}} - 1}{q^{\frac{l'}{l}} + 1}}. \tag{92}$$

Rozwiązując te wzory metodą symboliczną, znajdziemy moduły $\hat{Z}_0'$ i Z_z' oraz ich argumenty.

R O Z D Z I A Ł D W U N A S T Y

SZTUCZNE LINIE ELEKTRYCZNE

§ 100

UKŁADY ZASTĘPUJĄCE DŁUGĄ LINIĘ

Wzory dla napięć i prądów w długich liniach jednorodnych (z równomiernie rozłożonymi stałymi), jak to już stwierdziliśmy, są identyczne ze wzorami, które otrzymaliśmy dla obwodu symetrycznego; z tego wynika, że gdy chodzi nam wyłącznie o ustalenie zależności napięć i prądów w dwóch dowolnych punktach linii, np. na początku i na końcu, możemy zastąpić taką linię lub jej odcinek przez odpowiedni układ zawierający trzy oporności pozorne, z których dwie są sobie równe.

Dla znalezienia elementów czwórnika, który ma zastąpić długą linię, musimy znać oporności pozorne stanu jałowego i stanu zwarcia $\hat{Z}_0$ i $\hat{Z}_z$ oraz spółczynnik liniowy $\hat{S}$ rozpatrywanej linii (wzory 81 i 82 z § 92). Mając te dane obliczamy elementy czwórników według wzorów wyprowadzonych w §§ 58, 59 i 61:

dla czwórnika typu T (wzory 45 i 46)

$$\hat{Z}_1 = \hat{Z}_0 \frac{\hat{S}-1}{\hat{S}}, \tag{1}$$

$$\hat{Z}_2 = \frac{\hat{Z}_0}{\hat{S}}, \tag{2}$$

dla czwórnika typu Π (wzory 73 i 74)

$$\hat{Z}_1 = \hat{Z}_z \hat{S}, \tag{3}$$

$$\hat{Z}_2 = \hat{Z}_z \frac{\hat{S}}{\hat{S}-1}, \tag{4}$$

dla czwórnika krzyżowego (wzory 95 i 96)

$$\hat{Z}_1 = \hat{Z}_z \frac{\hat{S}-1}{\hat{S}}, \tag{5}$$

$$\hat{Z}_2 = \hat{Z}_z \frac{\hat{S}}{\hat{S}-1}. \tag{6}$$

Gdy chodzi o zrealizowanie sztucznego układu, zastępującego długą linię, za pomocą oporników, cewek indukcyjnych i kondensatorów, należy wziąć pod uwagę, że R, A, L i C w powyższych wzorach nie mogą mieć znaków ujemnych. Wówczas trzeba zbadać, czy zawsze jest możliwość zastąpienia takiej linii czwórnikiem typu T, Π lub krzyżowym. W tym celu rozpatrzmy wzory w § 97.

$$\hat{Z} = Z(\cos\alpha + j\sin\alpha),$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{Z^2}\frac{AR+\omega^2 LC}{A^2+\omega^2 C^2},$$

$$\sin 2\alpha = \frac{1}{Z^2}\,\omega\,\frac{AL-RC}{A^2+\omega^2 C^2}.$$

W rozpatrywanym przypadku $\cos 2\alpha$ ma zawsze wartość dodatnią, argument α może się zmieniać tylko w granicach

$$-\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{4},$$

przy czym znak α zależy od znaku wyrażenia $AL - RC$. Biorąc pod uwagę wzory (73) i (74) z § 91

$$\hat{Z}_0 = \hat{Z}\operatorname{cotgh} kl,$$

$$\hat{Z}_z = \hat{Z}\operatorname{tgh} kl,$$

otrzymamy dla układu T, na podstawie wzorów (1) i (2)),

$$\hat{Z}_1 = 2\hat{Z}\frac{\hat{S}-1}{\hat{S}}\operatorname{cotgh} kl$$

$$\hat{Z}_2 = \hat{Z}\frac{\operatorname{cotgh} kl}{\hat{S}},$$

gdzie $\hat{S} = \cosh kl$.

Dla układu Π, na podstawie wzorów (3) i (4),

$$\hat{Z}_1 = \hat{Z}\hat{S}\operatorname{tgh} kl,$$

$$\hat{Z}_2 = \frac{1}{2}\hat{Z}\frac{\hat{S}}{\hat{S}-1}\operatorname{tgh} kl.$$

Dla czwórnika krzyżowego, na podstawie wzorów (5) i (6),

$$\dot{Z}_1 = \dot{Z}_0 \frac{\dot{S}-1}{\dot{S}} = \dot{Z}\frac{\dot{S}-1}{\dot{S}} \operatorname{cotgh} kl \qquad \text{(jak dla typu } T\text{)}$$

$$\dot{Z}_2 = \dot{Z}_z \frac{\dot{S}}{\dot{S}-1} = \dot{Z}\frac{\dot{S}}{\dot{S}-1} \operatorname{tgh} kl \qquad \text{(jak dla typu } \Pi\text{)}$$

Po odpowiednim przekształceniu ostatnie wzory przyjmą postać dla układu T

$$\dot{Z}_1 = 2\dot{Z} \operatorname{tgh} \frac{kl}{2},$$

dla układu Π

$$\dot{Z}_2 = \frac{\dot{Z}}{\sinh kl};$$

$$\dot{Z}_1 = \dot{Z} \sinh kl,$$

$$\dot{Z}_2 = \frac{1}{2}\dot{Z}\frac{\sinh kl}{\cosh kl - 1}.$$

Dla czwórnika krzyżowego

$$\dot{Z}_1 = \dot{Z} \operatorname{tgh} \frac{kl}{2},$$

$$\dot{Z}_2 = \dot{Z} \operatorname{cotgh} \frac{kl}{2}.$$

Każda z oporności pozornych $\dot{Z}_1$ i $\dot{Z}_2$ składa się na ogół z oporności rzeczywistej R i oporności biernej X, czyli

$$\dot{Z}_1 = R_1 + jX_1; \qquad \dot{Z}_2 = R_2 + jX_2,$$

przy czym R_1 i $R_2 > 0$.

Podstawiając do powyższych wzorów

$$\dot{Z} = Z(\cos\alpha + j\sin\alpha) \text{ oraz } k = a + jb$$

i oddzielając części rzeczywiste od części urojonych, otrzymamy wartości oporności rzeczywistych w układzie T

$$R_1 = 2Z\frac{\cos\alpha \sinh al - \sin\alpha \sin bl}{\cosh al + \cos bl}$$

$$R_2 = Z\frac{\cos\alpha\cos bl \sinh al + \sin\alpha \sin bl \cosh al}{\text{co}^2\, bl \sinh^2 al + \sin^2 bl \cosh^2 al}.$$

Mianowniki w obu ostatnich wzorach są większe od zera, więc, aby R_1 i R_2 miały wartości dodatnie, wystarczy, aby były spełnione następujące warunki:

$$\cos\alpha \sinh al - \sin\alpha \sin bl > 0,$$

$$\cos\alpha \cos bl \sin \text{h}al + \sin\alpha \sin bl \cosh al > 0;$$

ale $\cos \alpha > 0$, jak to na początku było stwierdzone, przeto powyższe warunki możemy przepisać w postaci

$$f_1(l) = \sinh al - \operatorname{tg} \alpha \sin bl > 0$$

$$f_2(l) = \cos bl \sinh al + \operatorname{tg} \alpha \sin bl \cosh al > 0$$

Dla układu Π znajdziemy analogiczne warunki, które muszą być spełnione, w postaci:

$$f_3(l) = \sinh al + \operatorname{tg} \alpha \sin bl > 0$$

$$f_4(l) = \cos bl \sinh al - \operatorname{tg} \alpha \sin bl \cosh al > 0.$$

Dla czwórnika krzyżowego warunki, które muszą być spełnione, otrzymujemy w postaci

$$f_1(l) = f_3(l) = \sinh al - \operatorname{tg} \alpha \sin bl > 0$$

$$f_2(l) = f_4(l) = \cos bl \sinh al - \operatorname{tg} \alpha \sin bl \cosh al > 0$$

Te wyniki, dające możność określenia granic dla l, gdy wiadome są a, b i α, mają szczególne znaczenie w liniach, przy stosunkowo niewielkich długościach fali, jak na przykład w kablowych liniach telefonicznych, pupinizowanych, gdzie są stawiane w pewnych odstępach wzmacniaki, zawierające sztuczne układy, zastępujące odpowiednie odcinki linii rzeczywistej. Jako przykład rozpatrzmy linię telefoniczną kablową pupinizowaną. Dane dla tej linii są następujące:

R (łącznie z opornością cewek) $= 28\ \Omega/km$;

$L = 70\ mH/km$; $C = 0{,}0355\ \mu F/km$;

$A = 0{,}8\ \mu S/km$; $\omega = 5000\ \mathrm{S}^{-1}$

Znajdujemy z obliczenia

$$a = 0{,}01; \quad b = 0{,}25; \quad \alpha = 0.$$

Z powyższych wzorów otrzymujemy

$$f_1(l) = f_5(l) = \sinh al > 0,$$

$$f_2(l) = f_6(l) = \cos bl \sinh al > 0.$$

$$f_3(l) = \sinh al > 0,$$

$$f_4(l) = \cos bl \sinh al > 0.$$

Widzimy, że $f_1(l) = f_3(l) = f_5(l)$ oraz $f_2(l) = f_4(l) = f_6(l)$, to znaczy, że warunki zastąpienia rozpatrywanej linii sztucznym układem są jednakowe dla wszystkich trzech typów czwórników.

$f_1(l)$, $f_3(l)$ i $f_5(l)$ są zawsze większe od zera, zaś $f_2(l)$, $f_4(l)$ i $f_6(l)$ będą większe od zera w przypadku, gdy $\cos bl > 0$, czyli gdy

$$2n\pi < bl < \frac{\pi}{2} + 2n\pi,$$

oraz

$$\frac{3}{2}\pi + 2n\pi < bl < (n+1)2\pi;$$

albo

$$\frac{2n\pi}{b} < l < \frac{\pi}{2b} + \frac{2n\pi}{b},$$

$$\frac{3\pi}{2b} + \frac{2n\pi}{b} < l < (n+1)\frac{2\pi}{b}.$$

Po podstawieniu $b = 0{,}25$, będziemy mieli

$$25{,}12n < l < 6{,}28 + 25{,}12\,n,$$

$$18{,}84 + 25{,}12\,n < l < (n+1)\,25{,}12,$$

gdzie n oznacza dowolną liczbę całkowitą lub zero.
Podstawiając za n różne wartości, znajdziemy granice l, dla których można zastosować sztuczny układ:

dla $n = 0$

$$0 < l < 6{,}28,$$

$$18{,}84 < l < 25{,}12;$$

dla $n = 1$

$$25{,}12 < l < 31{,}40,$$

$$43{,}96 < l < 50{,}24;$$

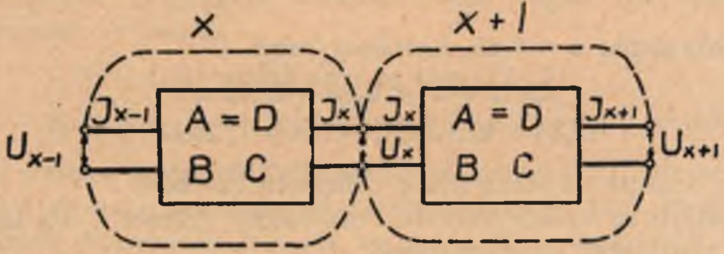
więc np. dla l, zawartych w granicach 6,28 km i 18,84 km lub w granicach 31,40 km i 43,96 km, nie można sporządzić układu ani T, ani Π, ani krzyżowego.

§ 101
LINIE ŁAŃCUCHOWE

Łącząc w szereg dowolną ilość czwórników otrzymamy układ zwany linią łańcuchową. Rozpatrzymy linie łańcuchowe, składające się z jednakowych, symetrycznych czwórników, czyli ogniw. Każde ogniwo zestawione jest według schematów poprzednio rozpatrzonych, a więc typu T (rys. 140), typu Π (rys. 141) albo typu krzyżowego (rys. 142).

Będziemy oznaczali przez n liczbę ogniw w łańcuchu, przez U i I, z odpowiednimi wskaźnikami, napięcie i natężenie prądu w końcu każdego ogniwa. U_0 i I_0 oznaczać będą napięcie i natężenie prądu na początku łańcucha, zaś U_n i I_n te same wielkości w końcu łańcucha, U_x i I_x oznaczać będą te wielkości dla ogniwa oznaczonego liczbą x.

W celu wyprowadzenia wzorów, dających wartości napięć i prądów w dowolnym ogniwie, rozpatrzmy dwa dowolne, sąsiednie ogniwa, oznaczone liczbami x i $x+1$. Oznaczmy stałe każdego czwórnika-ogniwa przez $A = D$; B i C. (rys. 193).



Rys. 193

Na podstawie podstawowych wzorów dla czwórnika symetrycznego możemy napisać:

$$\hat{U}_{x-1} = A\hat{U}_x + B\hat{I}_x, \tag{7}$$

$$\hat{I}_{x-1} = C\hat{U}_x + A\hat{I}_x, \tag{8}$$

$$\hat{U}_x = A\hat{U}_{x+1} + B\hat{I}_{x+1}, \tag{9}$$

$$\hat{I}_x = C\hat{U}_{x+1} + A\hat{I}_{x+1}, \tag{10}$$

z (7)

$$\hat{I}_x = \frac{\hat{U}_{x-1}}{B} - \frac{A}{B}\hat{U}_x, \tag{11}$$

z (9)

$$\hat{I}_{x+1} = \frac{\hat{U}_x}{B} - \frac{A}{B}\hat{U}_{x-1};$$

wstawiamy te wartości $\hat{I}_x$ i $\hat{I}_{x+1}$ do (10) i otrzymamy:

$$\frac{\hat{U}_{x-1}}{B} - \frac{A}{B}\hat{U}_x = C\hat{U}_{x+1} + \frac{A}{B}\hat{U}_x - \frac{A^2}{B}\hat{U}_{x+1},$$

skąd po uporządkowaniu:

$$\hat{U}_{x-1} - 2A\hat{U}_x + (A^2 - BC)\hat{U}_{x+1} = 0;$$

ale dla czwórnika symetrycznego (wzór 11 z § 56) $A^2 - BC = 1$, więc ostatecznie

$$\dot{U}_{x-1} - 2A\,\dot{U}_x + \dot{U}_{x-1} = 0. \tag{12}$$

Stała A dla poprzednio rozpatrzonych typów czwórników ma następujące wartości:

dla czwórnika typu T (wzór 50, § 58) $A = 1 + \dfrac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_2}$,

dla czwórnika typu Π (wzór 70, § 58) $A = 1 + \dfrac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_2}$,

dla czwórnika krzyżowego (wzór 94, § 58) $A = \dfrac{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2}{\dot{Z}_2 - \dot{Z}_1}$.

Równanie (12) jest równaniem różniczkowym; z powodu pewnej analogii z długą linią, będziemy szukali rozwiązania tego równania w postaci,

$$\dot{U}_x = K_1 e^{kx} + K_2 e^{-kx}, \tag{13}$$

gdzie K_1 i K_2 — stałe dowolne, k od x nie zależy; podstawiając w tym wzorze zamiast x najpierw $x-1$, następnie $x+1$, otrzymamy:

$$\dot{U}_{x-1} = K_1 e^{-k} e^{kx} + K_2 e^{k} e^{-kx}, \tag{14}$$

$$\dot{U}_{x+1} = K_1 e^{k} e^{kx} + K_2 e^{-k} e^{-kx}; \tag{15}$$

podstawiamy wartości $\dot{U}_{x-1}$, $\dot{U}_x$ i $\dot{U}_{x+1}$ do (12), wtedy:

$$K_1 e^{-k} e^{kx} + K_2 e^{k} e^{-kx} - 2A K_1 e^{kx} - 2A K_2 e^{-kx} + K_1 e^{k} e^{kx} + K_2 e^{-k} e^{-kx} = 0$$

albo

$$(K_1 e^{kx} + K_2 e^{-kx})\,(e^{k} + e^{-k} - 2A) = 0. \tag{16}$$

Z tego wzoru wynika, że wartość $\dot{U}_x$ z wzoru (13) będzie rozwiązaniem równania (12), gdy spełniony będzie warunek ujęty we wzorze (16); w tym wzorze pierwszy nawias może mieć dowolne wartości, wobec tego warunek będzie spełniony, gdy

$$e^{k} + e^{-k} = 2A,$$

czyli

$$\cos hk = A. \tag{17}$$

A dla rozpatrywanych czwórników jest na ogół liczbą zespoloną, wobec tego k będzie również liczbą zespoloną; oznaczymy

$$k = a + jb,$$

gdzie a i b — liczby rzeczywiste, wtedy:

$$\cosh k = \cos\,(a + jb) = \cosh a \cos b + j \sinh a \sin b; \tag{18}$$

oznaczmy w tym wzorze część rzeczywistą przez p, część urojoną przez q, to jest

$$p = \cosh a \cos b, \tag{19}$$

$$q = \sinh a \sin b, \tag{20}$$

$$\cosh k = p + jq. \tag{21}$$

Dla znalezienia wartości a i b podnosimy do kwadratu każdy z wyrazów we wzorach (19) i (20), otrzymamy

$$p^2 = \cosh^2 a \cos^2 b = (1 + \sinh^2 a)(1 - \sin^2 b),$$

$$q^2 = \sinh^2 a \sin^2 b.$$

Rozwiązując dwa ostatnie równania względem $\sinh^2 a$ i $\sin^2 b$, znajdujemy

$$\sinh^2 a = -\frac{1}{2}\left(1 - p^2 - q^2\right) + \sqrt{q^2 + \frac{1}{4}(1 - p^2 - q^2)}, \tag{22}$$

$$\sin^2 b = \frac{1}{2}\left(1 - p^2 - q^2\right) + \sqrt{V q^2 + \frac{1}{4}(1 - p^2 - q^2)}. \tag{23}$$

Przy rozwiązywaniu tych równań pod pierwiastkiem kwadratowym wzięliśmy tylko znak +, ponieważ niewiadome $\sinh^2 a$ i $\sin^2 b$ jako kwadraty liczb rzeczywistych muszą być liczbami dodatnimi, wartość zaś pierwiastka jest większa od bezwzględnej wartości wyrazu przed pierwiastkiem. Przez analogię do długiej linii jednorodnej współczynnik a nazwiemy *współczynnikiem tłumienia*, a współczynnik b, który wpływa na przesunięcie fazy, może być nazwany *współczynnikiem przesunięcia fazy*.

Dla znalezienia wzoru na natężenie prądu w dowolnym ogniwie, musimy rozpatrzeć oddzielnie każdy z typów ogniw, z których składa się linia łańcuchowa. Wychodząc z wzoru (11) i podstawiając wartości $\hat{U}_{x-1}$ i $\hat{U}_x$, znalezione ze wzorów (13) i (14), będziemy mieli:

$$\hat{I}_x = \frac{1}{B}\left[K_1 e^{-k} e^{kx} + K_2 e^k e^{kx} - AK_1 e^{kx} - AK_2 e^{-kx}\right],$$

$$\hat{I}_x = \frac{1}{B}\left[K_1 e^{kx}\left(e^{-k} - A\right) + K_2 e^{-kx}\left(e^k - A\right)\right]; \tag{24}$$

ale (wzór 17)

$$A = \cosh k = \frac{e^k + e^{-k}}{2};$$

obliczamy

$$e^{-k} - A = e^{-k} - \frac{e^k + e^{-k}}{2} = -\frac{e^k - e^{-k}}{2} = -\sinh k,$$

$$e^k - A = e^k - \frac{e^k + e^{-k}}{2} = \frac{e^k - e^{-k}}{2} = \sinh k,$$

wobec czego ze wzoru (24) otrzymamy

$$\hat{I}_x = \frac{\sinh k}{B}\left(K_2 e^{-kx} - K_1 e^{kx}\right). \tag{25}$$

Rozpatrzmy teraz kolejno 3 typy linii łańcuchowych:

Typ T

Według wzoru (50)

$$B = \frac{\hat{Z}_1^2 + 2\hat{Z}_1\hat{Z}_2}{\hat{Z}_2} = \hat{Z}_1\left(\frac{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2}{\hat{Z}_2} + 1\right) = \hat{Z}_1(A+1),$$

zaś na podstawie (17)

$$B = \hat{Z}_1(\cosh k + 1).$$

Podstawiając tę wartość do (25) otrzymamy

$$\hat{I}_x = \frac{\sinh k}{\hat{Z}_1(\cosh k + 1)}\left(K_2 e^{-kx} - K_1 e^{kx}\right),$$

ale

$$\sinh k = \frac{e^k - e^{-k}}{2} = \frac{\left(e^{\frac{k}{2}} + e^{-\frac{k}{2}}\right)\left(e^{\frac{k}{2}} - e^{-\frac{k}{2}}\right)}{2}$$

$$\cosh k + 1 = \frac{e^k + e^{-k} + 2}{2} = \frac{\left(e^{\frac{k}{2}} + e^{-\frac{k}{2}}\right)^2}{2},$$

$$\frac{\sinh k}{\cosh k + 1} = \frac{e^{\frac{k}{2}} - e^{-\frac{k}{2}}}{e^{\frac{k}{2}} + e^{-\frac{k}{2}}} = \frac{\sinh\frac{k}{2}}{\cosh\frac{k}{2}} = \operatorname{tgh}\frac{k}{2},$$

wobec czego

$$\hat{I}_x = \frac{1}{\hat{Z}_1}\operatorname{tgh}\frac{k}{2}\left(K_2 e^{-kx} - K_1 e^{kx}\right). \tag{26}$$

Oznaczmy

$$\hat{Z} = \frac{\hat{Z}_1}{\operatorname{tgh}\frac{k}{2}}; \tag{27}$$

na podstawie wzoru

$$\cosh k = 2\sinh^2\frac{k}{2} + 1$$

z uwzględnieniem, że

$$\cosh k = 1 + \frac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_2},$$

będziemy mieli

$$\sinh\frac{k}{2}=\sqrt{\frac{\dot{Z}_1}{2\dot{Z}_2}},$$

$$\cosh\frac{k}{2}=\sqrt{1+\sinh^2\frac{k}{2}}=\sqrt{\frac{\dot{Z}_1+2\dot{Z}_2}{2\dot{Z}_2}},$$

skąd

$$\operatorname{tgh}\frac{k}{2}=\sqrt{\frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_1+2\dot{Z}_2}};$$

wobec tego wzór (27) możemy napisać również w postaci:

$$\hat{Z}=\frac{\dot{Z}_1}{\sqrt{\dfrac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_1+2\dot{Z}_2}}}=\sqrt{\dot{Z}_1(\dot{Z}_1+2\dot{Z}_2)}. \tag{28}$$

Zestawiając wzory (13) i (26), otrzymamy w najogólniejszej postaci wyrażenia dla napięcia i prądu w dowolnym ogniwie:

$$\hat{U}_x=K_1e^{kx}+K_2e^{-kx}, \tag{29}$$

$$\hat{I}_x\hat{Z}=-K_1e^{kx}+K_2e^{-kx}; \tag{30}$$

wielkość $\hat{Z}$, odgrywającą rolę oporności, określoną wzorem (27) lub (28), przez analogię do długiej linii jednorodnej, nazwiemy *opornością falową linii łańcuchowej.*

Wchodzące do wzorów (29) i (30) stałe K_1 i K_2 możemy określić na podstawie wiadomych wartości napięcia i prądu w określonym miejscu; najczęściej wchodzą tu w grę te wielkości na początku i na końcu linii łańcuchowej. Ponieważ dla początku $x=0$, przeto ze wzorów (29) i (30) dla napięcia i prądu na początku otrzymamy

$$\hat{U}_0=K_1+K_2,$$

$$\hat{I}_0\hat{Z}=-K_1+K_2,$$

skąd

$$K_1=\frac{\hat{U}_0-\hat{I}_0\hat{Z}}{2},$$

$$K_2=\frac{\hat{U}_0+\hat{I}_0\hat{Z}}{2}.$$

Wobec tego z tychże wzorów (29) i (30) otrzymamy

$$\hat{U}_x=\frac{\hat{U}_0-\hat{I}_0\hat{Z}}{2}e^{kx}+\frac{\hat{U}_0+\hat{I}_0\hat{Z}}{2}e^{-kx}, \tag{31}$$

$$\hat{I}_x\hat{Z}=-\frac{\hat{U}_0-\hat{I}_0\hat{Z}}{2}e^{kx}+\frac{\hat{U}_0+\hat{I}_0\hat{Z}}{2}e^{-kx} \tag{32}$$

lub
$$\hat{U}_x = \hat{U}_0 \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2} - \hat{I}_0 \hat{Z} \frac{e^{kx} - e^{-kx}}{2}, \tag{33}$$
$$\hat{I}_x \hat{Z} = \hat{I}_0 \hat{Z} \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2} - \hat{U}_0 \frac{e^{kx} - e^{-kx}}{2}, \tag{34}$$

albo wreszcie w funkcjach hiperbolicznych
$$\hat{U}_x = \hat{U}_0 \cosh kx - \hat{I}_0 \hat{Z} \sinh kx, \tag{35}$$
$$\hat{I}_x \hat{Z} = \hat{I}_0 \hat{Z} \cosh kx - \hat{U}_0 \sinh kx. \tag{36}$$

Jak widać z tych wzorów, napięcie i prąd w dowolnym ogniwie jest wynikiem nakładania się dwóch fal idących naprzeciw siebie, z których jedna jest falą postępującą od początku do końca linii, druga falą odbitą od końca (rozumowania te same, jakie były przeprowadzone dla długiej linii jednorodnej). Gdy linia łańcuchowa ma bardzo dużo ogniw (teoretycznie nieskończenie dużo), wówczas fali odbitej nie ma, gdyż napięcie i prąd w końcu w tym przypadku muszą się równać zeru; wzory (29) i (30) wskazują, że powinno być wtedy
$$\hat{U}_x = K_2 e^{-kx},$$
$$\hat{I}_x \hat{Z} = K_2 e^{-kx},$$

skąd
$$\hat{Z} = \frac{\hat{U}_x}{\hat{I}_x},$$

a także
$$\hat{Z} = \frac{\hat{U}_0}{\hat{I}_0}; \tag{37}$$

ponieważ ostatni wyraz stanowi oporność pozorną łańcucha, więc w rozpatrywanym przypadku oporność pozorna łańcucha równa się oporności falowej.

Uwzględniając wzór (37) otrzymamy w danym przypadku, ponieważ fale ulegają jedynie tłumieniu, ze wzorów (31) i (32)
$$\left.\begin{aligned} \hat{U}_x &= \hat{U}_0 e^{-kx}, \\ \hat{I}_x &= \hat{I}_0 e^{-kx}; \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

dla końca łańcucha, gdy $x = n$,
$$\left.\begin{aligned} \hat{U}_n &= \hat{U}_0 e^{-kn}, \\ \hat{I}_n &= \hat{I}_0 e^{-kn}. \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

W wyżej wyprowadzonych wzorach ogólnych (31) do (36) nie wprowadzaliśmy oporności odbiornika włączonego w końcu ostatniego ogniwa. Rozpatrzmy teraz, jak się zmienią te wzory, gdy przyjmiemy pod uwagę warunki istniejące na końcu łańcucha.

Jeżeli linia łańcuchowa na końcu nie ma obciążenia, to znaczy jest w stanie jałowym, wtedy $\hat{I}_n = 0$; ze wzoru (36), zakładając $x = n$, otrzymamy

$$\hat{I}_0 \hat{Z} \cosh kn = \hat{U}_0 \sinh kn,$$

lub

$$\hat{I}_0 \hat{Z} = \hat{U}_0 \operatorname{tgh} kn; \tag{40}$$

po podstawieniu tej wartości $\hat{I}_0 \hat{Z}$ do wzoru (35) dla $x = n$, będziemy mieli

$$\hat{U}_n = \hat{U}_0 (\cosh kn - \sinh kn \cdot \operatorname{tgh} kn)$$

lub po uproszczeniu

$$\hat{U}_n = \frac{\hat{U}_0}{\cosh kn}. \tag{41}$$

Z ostatniego wzoru można w rozpatrywanym przypadku znaleźć napięcie w końcu łańcucha, gdy wiadome jest ono na początku, lub odwrotnie. Prąd w dowolnym ogniwie da się obliczyć wówczas z wzoru, który otrzymamy podstawiając (40) do (36), wtedy

$$\hat{I}_x = \hat{I}_0 \left(\cosh kx - \frac{\sinh kx}{\operatorname{tgh} kn}\right) =$$

$$= \hat{I}_0 \frac{\sinh k(n-x)}{\sinh kn}. \tag{42}$$

W przypadku, gdy linia łańcuchowa jest w stanie zwarcia, to znaczy końce ostatniego ogniwa są zwarte, wtedy $\hat{U}_n = 0$; z wzoru (35) otrzymujemy dla $x = n$

$$\hat{U}_0 \cosh kn + \hat{I}_0 \hat{Z} \sinh kn,$$

lub

$$\hat{U}_0 = \hat{I}_0 \hat{Z} \operatorname{tgh} kn; \tag{43}$$

podstawiając tę wartość $\hat{U}_0$ do (36) i zakładając $x = n$, otrzymamy

$$\hat{I}_n = \hat{I}_0 (\cosh kn - \sinh kn \,.\, \operatorname{tgh} kn),$$

lub po uproszczeniu

$$\hat{I}_n = \frac{\hat{I}_0}{\cosh kn}; \tag{44}$$

wzór ten daje zależność pomiędzy prądami na początku i w końcu łańcucha, gdy ostatnie ogniwo jest zwarte. Podstawiając wartość $\hat{I}_0 \hat{Z}$ ze wzoru (43) do wzoru (35), otrzymamy wzór dla napięcia w dowolnym ogniwie

$$\hat{U}_x = \hat{U}_0 \left(\cosh kx - \frac{\sinh kx}{\operatorname{tgh} kn}\right) = \hat{U}_0 \frac{\sinh k(n-x)}{\sinh kn}. \tag{45}$$

Z wzorów (40) i (43) możemy otrzymać oporności pozorne linii łańcuchowej, gdy ostatnie jej ogniwo jest w stanie jałowym lub w stanie zwarcia; oznaczając te oporności pozorne odpowiednio przez $\hat{Z}_0$ i $\hat{Z}_z$, otrzymamy znane z teorii długich linii jednorodnych wzory

$$\hat{Z}_0 = \hat{Z} \operatorname{cotgh} kn,$$
$$\hat{Z}_z = \hat{Z} \operatorname{tgh} kn.$$

Wzory (31) do (36) uzależniają napięcia i prądy w dowolnym ogniwie od napięcia i prądu na początku łańcucha; oczywiście można uzależnić rozpatrywane wielkości od napięcia i prądu w końcu: wtedy, zakładając we wzorach (29) i (30) $x = n$, otrzymamy

$$K_1 e^{kn} + K_2 e^{-kn} = \hat{U}_n,$$
$$-K_1 e^{kn} + K_2 e^{-kn} = \hat{I}_n \hat{Z},$$

skąd

$$K_1 = \frac{\hat{U}_n - \hat{I}_n \hat{Z}}{2} e^{-kn}, \quad K_2 = \frac{\hat{U}_n + \hat{I}_n \hat{Z}}{2} e^{kn},$$

wobec czego wzory dla napięcia i prądu po odpowiednich uproszczeniach przybiorą postać:

$$\hat{U}_x = \frac{\hat{U}_n + \hat{I}_n \hat{Z}}{2} e^{k(n-x)} + \frac{\hat{U}_n - \hat{I}_n \hat{Z}}{2} e^{-k(n-x)} =$$
$$= \hat{U}_n \cosh k(n-x) + \hat{I}_n \hat{Z} \sinh k(n-x), \tag{46}$$
$$\hat{I}_x \hat{Z} = \frac{\hat{U}_n + \hat{I}_n \hat{Z}}{2} e^{k(n-x)} - \frac{\hat{U}_n - \hat{I}_n \hat{Z}}{2} e^{-k(n-x)} =$$
$$= \hat{U}_n \sinh k(n-x) + \hat{I}_n \hat{Z} \cosh k(n-x); \tag{47}$$

z tych wzorów moglibyśmy otrzymać również wzory w przypadkach, gdy ostatnie ogniwo jest w stanie jałowym lub w stanie zwarcia, zakładając kolejno $\hat{I}_n = 0$ i $\hat{U}_n = 0$.

Rozpatrzmy teraz przypadek, gdy w końcu ostatniego ogniwa włączony jest odbiornik, którego oporność pozorna wynosi $\hat{Z}_n$. Wtedy będziemy mieli dodatkowy warunek $\hat{U}_n = \hat{I}_n \hat{Z}_n$.

Uwzględniając ten warunek we wzorach (46) i (47), otrzymamy

$$\hat{U}_x = \hat{U}_n \left[\cosh k(n-x) + \frac{\hat{Z}}{\hat{Z}_n} \sinh k(n-x)\right],$$
$$\hat{I}_x = \hat{I}_n \left[\cosh k(n-x) + \frac{\hat{Z}_n}{\hat{Z}} \sinh k(n-x)\right];$$

dla $x = 0$, tj. na początku łańcucha

$$\hat{U}_0 = \hat{U}_n\left(\cosh kn + \frac{\hat{Z}}{\hat{Z}_n}\sinh kn\right), \tag{48}$$

$$\hat{I}_0 = \hat{I}_n\left(\cosh kn + \frac{\hat{Z}_n}{\hat{Z}}\sinh kn\right). \tag{49}$$

Wzory te dają możność w najogólniejszym przypadku obliczenia stosunku napięć względnie prądów na początku i na końcu linii łańcuchowej o wiadomej liczbie ogniw i wiadomych opornościach $\hat{Z}_1$ i $\hat{Z}_2$ oraz $\hat{Z}_n$.

W przypadku szczególnym, gdy oporność odbiornika $\hat{Z}_n$ równa jest oporności falowej łańcucha $\hat{Z}$, czyli

$$\hat{Z}_n = \hat{Z},$$

z równań (48) i (49) otrzymamy

$$\hat{U}_0 = \hat{U}_n(\cosh kn + \sinh kn) = \hat{U}_n e^{kn},$$

$$\hat{I}_0 = \hat{I}n(\cosh kn + \sinh kn) = \hat{I}_n e^{kn},$$

albo

$$\hat{U}_n = \hat{U}_0 e^{-kn}; \quad \hat{I}_n = \hat{I}_0 e^{-kn};$$

wzory te są identyczne ze wzorami (39) dla linii łańcuchowej o nieskończenie dużej ilości ogniw; a więc gdy odbiornik posiada oporność równą oporności falowej łańcucha, linia o skończonej liczbie ogniw zachowuje się tak jak linia o nieskończenie dużej ilości ogniw.

Typ Π

Wychodząc z ogólnego wzoru (12) dla linii łańcuchowych, złożonych z czwórników symetrycznych, otrzymamy dla napięcia w dowolnym ogniwie, oznaczonym liczbą x, ten sam wzór (13), który mieliśmy dla typu T, przy czym stała A ma tę samą wartość, czyli

$$\cosh k = \cosh(a + jb) = A.$$

Wzory (19) do (23) pozostają w tym przypadku bez zmiany.

Inaczej będzie z wzorem na natężenie prądu w dowolnym ogniwie, ponieważ we wzorze (25)

$$\hat{I}_x = \frac{\sinh k}{B}\left(K_2 e^{-kx} - K_1 e^{kx}\right).$$

Stała B ma dla typu Π inną wartość, mianowicie (wzór 70) $\hat{B} = \hat{Z}_1$, wobec czego

$$\hat{I}_x = \frac{\sinh k}{\hat{Z}_1}\left(K_2 e^{-kx} - K e^{kx}\right).$$

Przez analogię do (30) opornością falową w tym przypadku będzie

$$\hat{Z} = \frac{\hat{Z}_1}{\sinh k} . \tag{50}$$

Otrzymujemy więc dla linii łańcuchowej typu Π te same wzory (29) i (30)

$$\hat{U}_x = K_1 e^{kx} + K_2 e^{-kx},$$

$$\hat{I}_x \hat{Z} = -K_1 e^{kx} + K_2 e^{-kx}.$$

Ponieważ warunki na początku i na końcu linii są dla obu typów te same, to znaczy, że napięcie i natężenie prądu dla $x = 0$ wynoszą $\hat{U}_0$ i $\hat{I}_0$, a dla $x = n$ wynoszą $\hat{U}_n$ i $\hat{I}_n$, przeto dla napięć i prądów otrzymamy zupełnie takie same wzory (31) do (49), jakie mieliśmy dla linii typu T. Różnica polega tylko na tym, że oporność falowa dla linii typu T określona jest wzorem (27), dla linii zaś typu Π wzorem (50). Ten ostatni wzór można przedstawić w innej postaci, mianowicie:

$$\sinh k = \sqrt{\cosh^2 k - 1} ,$$

ale

$$\cosh k = A = \frac{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2}{\hat{Z}_2},$$

więc

$$\sinh k = \sqrt{\left(\frac{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2}{\hat{Z}_2}\right)^2 - 1} = \sqrt{\left(\frac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_2}\right)^2 + 2\frac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_2}},$$

wtedy

$$\hat{Z} = \frac{\hat{Z}_1}{\sqrt{\left(\frac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_2}\right)^2 + 2\frac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_2}}} = \frac{\hat{Z}_1 \hat{Z}_2}{\sqrt{\hat{Z}_1 + 2\hat{Z}_1 \hat{Z}_2}} . \tag{51}$$

Typ krzyżowy

Dla czwórnika krzyżowego (wzór 93, § 61)

$$A = \frac{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2}{Z_2 - Z_1}; \qquad B = \frac{2\hat{Z}_1 \hat{Z}_2}{\hat{Z}_2 - \hat{Z}_1} .$$

Rozpatrując wzory (13) i (17) z § 94 widzimy, że pozostaną one bez zmiany, z tym, że

$$\cosh k = A = \frac{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2}{\hat{Z}_2 - \hat{Z}_1},$$

natomiast wzór na I_x (25) przyjmie postać

$$\hat{I} = \frac{\sinh k\,(\hat{Z}_2 - \hat{Z}_1)}{2\hat{Z}_1 \hat{Z}_2}\left(K_2 e^{-kx} - K_1 e^{kx}\right).$$

Ponieważ

$$\sinh k = \sqrt{\cosh^2 k - 1} = \sqrt{\left(\frac{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2}{\dot{Z}_2 - \dot{Z}_1}\right)^2 - 1} = \frac{\sqrt{4\dot{Z}_1 \dot{Z}_2}}{\dot{Z}_2 - \dot{Z}_1},$$

przeto

$$\frac{\sinh k\,(\dot{Z}_2 - \dot{Z}_1)}{2\dot{Z}_1 \dot{Z}_2} = \frac{\sqrt{4\dot{Z}_1 \dot{Z}_2}}{2\dot{Z}_1 \dot{Z}_2} = \frac{1}{\sqrt{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2}};$$

odwrotność tego wyrazu stanowi, jak widać, oporność falową:

$$\dot{Z} = \sqrt{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2}, \tag{52}$$

W ten sposób dla linii łańcuchowej typu krzyżowego otrzymujemy wzory ogólne

$$\dot{U}_x = K_1 e^{kx} + K_2 e^{-kx} \tag{53},$$

$$\dot{I}_x \dot{Z} = -K_1 e^{kx} + K_2 e^{-kx} \tag{54}$$

Wzory te są takie same jak wzory ogólne dla poprzednio rozpatrzonych typów linii łańcuchowych: również warunki dla określenia stałych dowolnych są takie same, więc wzory od (31) do (49) mają zastosowanie do linii łańcuchowych typu krzyżowego, z tym, że oporność falowa $\dot{Z}$ ma wartość podaną we wzorze (51).

§ 102

FILTRY ELEKTRYCZNE

Rozpatrzmy obwody liniowe, w których działają jednocześnie prądy o różnych częstotliwościach, fazach i wartościach maksymalnych. W zastosowaniach elektrotechniki, szczególnie w telekomunikacji, zachodzi potrzeba przepuszczenia do działania tylko części tych prądów. Układy, które pozwalają to uczynić, nazywamy *filtrami elektrycznymi*. Możemy tu odróżnić kilka rodzajów filtrów:

1) filtry, które przepuszczają prądy o częstotliwościach poniżej pewnej granicy; nazwiemy je *dolnoprzepustowymi;*

2) filtry, które przepuszczają prądy o częstotliwościach powyżej pewnej granicy; nazwiemy je *górnoprzepustowymi;*

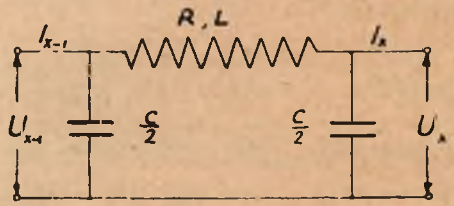
3) filtry, które przepuszczają prądy o częstotliwościach zawartych w pewnych granicach, czyli przepuszczające pewną wstęgę częstotliwości; nazwiemy je filtrami *wstęgowymi;*

4) filtry, które zatrzymują pewną wstęgę częstotliwości, czyli pochłaniają pewne fale, przepuszczając inne; nazwiemy *pochłaniaczami fal*.

Wszystkie tego rodzaju filtry można otrzymać stosując linie łańcuchowe o odpowiednio dobranych ogniwach.

Filtr dolnoprzepustowy

Rozpatrzmy linię łańcuchową typu Π, której dowolne ogniwo przedstawione jest na rys. 194. Stosując oznaczenia przyjęte dla czwórnika typu Π, będziemy mieli



Rys. 194

$$\hat{Z}_1 = R + j\omega L,$$

$$\hat{Z}_2 = \frac{2}{j\omega C}.$$

Stosując wzory (17) i (21) z § 94 oraz (70) z § 58, otrzymamy

$$p + jq = 1 + \frac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_2} = 1 + (R + j\omega L)\frac{j\omega C}{2} = 1 - \frac{\omega^2 LC}{2} + j\frac{R\omega C}{2},$$

skąd

$$p = 1 - \frac{\omega^2 LC}{2} \tag{55}$$

$$q = \frac{R\omega C}{2}. \tag{56}$$

Aby zbadać zachowanie się rozpatrzonej linii łańcuchowej przy rozmaitych częstotliwościach, dogodniej będzie wprowadzić tzw. częstotliwość, względnie pulsację, drgań swobodnych ogniwa. Gdy mamy obwód zamknięty, zawierający L i C $\left(\text{przy } R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}\right)$, przy czym zachodzi wyładowanie kondensatora, wówczas w takim obwodzie, który nazywamy obwodem oscylacyjnym, powstaje prąd drgający, czyli oscylacyjny; mówimy, że w obwodzie powstają drgania własne, które przy braku R byłyby swobodne o stałej amplitudzie, przy czym pulsacja takich drgań swobodnych wynosi

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \tag{57}$$

Jeżeli w naszym przykładzie rozpatrzymy jedno ogniwo jako obwód zamknięty i spostrzeżemy, że oba kondensantory, posiadające każdy pojemność równą $\frac{C}{2}$, są połączone szeregowo, więc pojemność wypadkowa w tym obwodzie ogniwa wynosi $\frac{C}{4}$, na podstawie wzoru (57) znajdziemy, że pulsacja drgań swobodnych ogniwa wynosi

$$\omega_0 = \frac{2}{\sqrt{LC}}. \tag{58}$$

Oznaczmy

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \eta, \tag{59}$$

wtedy

$$\omega = \omega_0 \eta = \frac{2}{\sqrt{LC}} \eta, \tag{60}$$

podstawiając tę wartość n do wzorów (55) i (56) i oznaczając dla skrócenia

$$R\sqrt{\frac{C}{L}} = \varrho, \tag{61}$$

znajdziemy

$$p = 1 - 2\eta^2, \tag{62}$$

$$q = \varrho\eta. \tag{63}$$

Dla ogniwa R, L i C muszą być dane, przy czym dla niezbyt wielkich częstotliwości wielkości te możemy uważać za stałe; wtedy p i q będą funkcjami tylko η; podstawiając te wartości p i q do wzorów (22) i (33), otrzymamy spółczynniki a i b jako funkcje η.

Szczególnie ważne jest rozpatrzenie zmiany spółczynnika tłumienia a przy zmianie częstotliwości, względnie η. Ponieważ zależność a od η stanowi funkcję bardzo skomplikowaną, przeto uprościmy nasze rozważanie w ten sposób, że wyraz $R\sqrt{\frac{C}{L}}$, który oznaczyliśmy przez ϱ, przyjmiemy jako bardzo mały, co zresztą w praktyce jest przeważnie bliskie rzeczywistości; wtedy dla niezbyt dużych wartości η możemy na podstawie wzoru (63) założyć, że q, będąc zawsze wielkością dodatnią, jest bliskie zeru; wówczas wzory (19) i (20) (§ 94) dadzą nam w przybliżeniu

$$\cosh a \ \cos b = p, \tag{64}$$

$$\sinh a \ \sin b = 0. \tag{65}$$

Ponieważ $p = 1 - 2\eta^2$, gdzie $\eta = \frac{\omega}{\omega_0}$, przeto łatwo zauważyć, że największa wartość dla p wynosi 1, gdy $\eta = 0$, czyli $\omega = 0$;

następnie dla $\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $p = 0$; dla $\eta = 1$, $p = -1$, zaś dla wszelkich wartości $\eta > 1$, $p < -1$. Zauważmy oprócz tego, że $\cosh a$ ma najmniejszą wartość równą 1 dla $a = 0$, poza tym zawsze jest większy od 1, natomiast $\sinh a$ ma najmniejszą wartość 0 dla $a = 0$ poza tym zawsze jest większy od 0 dla $a > 0$;

$$\text{gdy } \eta \leqslant 1, \quad \text{czyli } \omega \leqslant \omega_0,$$

wtedy

$$-1 \leqslant p \leqslant 1,$$

$$-1 \leqslant \cosh a \cos b \leqslant 1. \tag{66}$$

Wzór (65) wskazuje, że albo $a = 0$, albo $b = 0$ lub π, lecz warunkowi (66) wartość $a = 0$ zawsze czyni zadość przy wszelkich możliwych wartościach $\cos b$ (dla $b = 0$ lub π, również $a = 0$), przeto w rozpatrywanym przypadku $a = 0$, zaś b zmienia się od 0 do 180°; gdy $\eta > 1$, czyli $\omega > \omega_0$; wtedy $p < -1$.

Niech będzie $p = -k = -(2\eta^2 - 1)$, czyli $k = 2\eta^2 - 1 > 1$; wzory (64) i (65) dają wówczas

$$\cosh a \cos b = -k,$$

$$\sinh a \sin b = 0;$$

a nie może się równać 0, bo wtedy z pierwszego równania wypadłoby, że $\cos b = -k$ ma wartość bezwzględną większą od 1; wobec tego $b = 0$ lub π; z pierwszego równania wynika, że ponieważ $\cosh a > 1$, więc $\cos b$ powinno być ujemne, czyli $b = \pi$; wtedy $\cos b = -1$, zaś

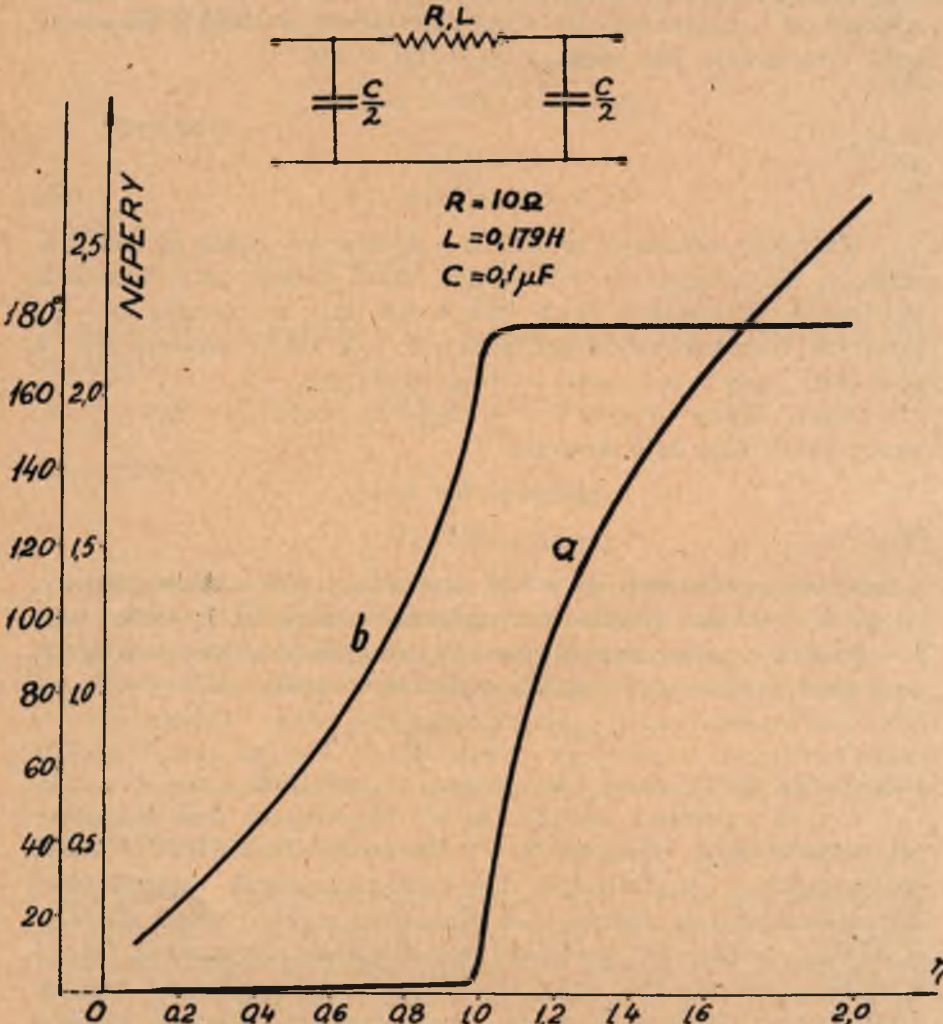
$$\cosh a = k = 2\eta^2 - 1,$$

skąd widać, że a rośnie, i to szybko, ze wzrostem η.

Z tych rozważań wynika, że w rozpatrzonej linii łańcuchowej współczynnik tłumienia $a = 0$ (w rzeczywistości bardzo mały) dla wszystkich częstotliwości nie przekraczających częstotliwości drgań swobodnych ogniwa i że tłumienie szybko rośnie dla częstotliwości większych; natomiast współczynnik przesunięcia fazy b wzrasta od zera do 180°, gdy częstotliwość zmienia się od zera do częstotliwości drgań swobodnych, i następnie przy dalszym wzroście częstotliwości ten współczynnik b pozostaje bez zmiany i stale jest równy 180°.

Na rys. 195 podany jest przebieg tych współczynników w zależności od η.

Za pomocą rozpatrzonego układu cewek i kondensatorów możemy więc oddzielić prądy, których częstotliwość przekracza częstotliwość drgań własnych ogniwa. Urządzenie tego rodzaju nazywamy filtrem elektrycznym. Filtr elektryczny, w którym, jak w naszym przypadku, cewki są połączone szeregowo, a konden-



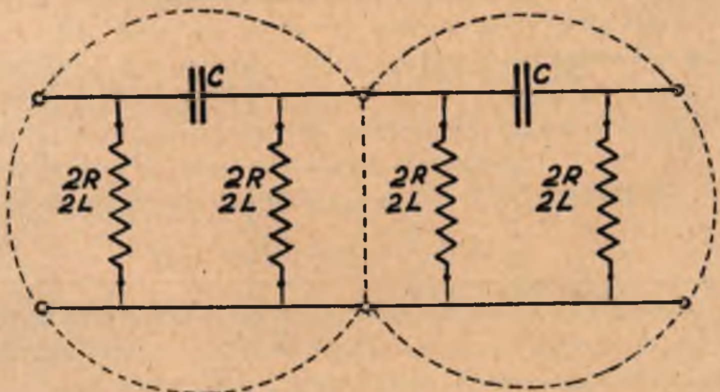
Rys. 195

satory równolegle, nazywamy *filtrem dolnoprzepustowym;* taki filtr przepuszcza bowiem prawie bez tłumienia prądy o częstotliwości mniejszej od częstotliwości drgań swobodnych, zatrzymując, czyli znacznie tłumiąc, prądy o większej częstotliwości.

Filtry elektryczne mają szerokie zastosowanie w elektrotechnice, gdy zachodzi potrzeba tłumienia prądów określonych częstotliwości, a więc w radiotechnice, w telefonii, w miernictwie, dla otrzymania możliwie sinusoidalnego prądu zmiennego itd.

Obszar częstotliwości, które filtr elektryczny przepuszcza, nazywamy widmem filtru. W rozpatrzonym przykładzie widmo obejmuje częstotliwości od 0 do częstotliwości drgań swobodnych ogniwa; oczywiście widmo będzie tym większe, im większa będzie ta częstotliwość drgań swobodnych, tę zaś ostatnią częstotliwość możemy dowolnie ustalić, dobierając we wzorze (71) odpowiednio L i C.

Filtr górnoprzepustowy. Innego rodzaju filtr stanowi linia łańcuchowa również typu Π, ułożona w ten sposób, że kondensatory są połączone ze sobą szeregowo, natomiast cewki włączone równolegle. Każde ogniwo złożone jest z kondensatora o pojemności C oraz dwóch cewek, których oporność i indukcyjność oznaczymy odpowiednio przez $2R$ i $2L$, a to z tego względu, że przy



Rys. 196

łączeniu dwóch ogniw otrzymamy wspólną oporność R i indukcyjność L (rys. 196).

W tym przypadku
$$\dot{Z}_1 = \frac{1}{j\omega C},$$
$$\dot{Z}_2 = 2(R + j\omega L).$$

Następnie
$$p + jq = 1 + \frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_2} = 1 + \frac{1}{2j\omega C(R + j\omega L)} =$$
$$= 1 - \frac{L}{2C(R^2 + \omega^2 L^2)} - j\frac{R}{2\omega C(R^2 + \omega^2 L^2)}$$

skąd

$$p = 1 - \frac{L}{2C(R^2 + \omega^2 L^2)}. \tag{67}$$

$$q = -\frac{R}{2\omega C(R^2 + \omega^2 L^2)}. \tag{68}$$

Rozpatrując pojedyncze ogniwo i nie uwzględniając oporności rzeczywistej, ustalimy pulsację drgań swobodnych ogniwa, gdy zważymy, że indukcyjność ogniwa, jako zamkniętego obwodu, wynosi $4L$, a pojemność C; na podstawie wzoru (57) ta pulsacja wyniesie

$$\omega_0 = \frac{1}{2\sqrt{LC}}. \tag{69}$$

Jeżeli oznaczymy

$$\eta = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \omega = \eta\omega_0 = \frac{\eta}{2\sqrt{LC}}, \quad \varrho = R\sqrt{\frac{C}{L}},$$

wtedy wzory (67) i (68) przybiorą postać następującą:

$$p = 1 - \frac{L}{2C(R^2 + \omega^2 L^2)} = 1 - \frac{1}{2\left(R^2 \frac{C}{L} + \omega^2 LC\right)} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2\left(\varrho^2 + \frac{\eta_2}{4}\right)},$$

$$q = -\frac{R}{2\omega C(R^2 + \omega^2 L^2)} = -\frac{R}{\frac{\eta}{\sqrt{LC}} C(R^2 + \omega^2 L^2)} =$$

$$= -\frac{R}{\eta\sqrt{\frac{C}{L}}(R^2 + \omega^2 L^2)} = -\frac{R\sqrt{\frac{C}{L}}}{\eta\left(R^2 \frac{C}{L} + \omega^2 LC\right)} = \frac{-\varrho}{\eta\left(\varrho^2 + \frac{\eta^2}{4}\right)},$$

czyli ostatecznie

$$p = 1 - \frac{2}{4\varrho^2 + \eta^2}, \tag{70}$$

$$q = -\frac{4\varrho}{4\varrho^2\eta + \eta^3}. \tag{71}$$

Dla zbadania własności rozpatrywanego filtru, jak i w poprzednim przykładzie, załóżmy, że $\varrho = R\sqrt{\frac{C}{L}}$ jest bardzo małe;

wtedy, jak to wynika z wzorów (83) i (84), będziemy mieli przybliżone wzory

$$p = 1 - \frac{2}{\eta^2}, \tag{72}$$

$$q = 0, \tag{73}$$

przy czym należy zwrócić uwagę, że q będąc bliskie zeru ma jednakże wartość ujemną. Przy takich wartościach p i q wzory (19) i (20) przybiorą postać

$$\cosh a \cos b = p = 1 - \frac{2}{\eta^2}, \tag{74}$$

$$\sinh a \sin b = 0. \tag{75}$$

Zbadajmy wartości a i b dla rozmaitych wartości η

gdy

$$\eta < 1, \text{ czyli } \omega < \omega_0,$$

$$p < -1, \text{ czyli } p = -k, \text{ gdzie } k > 1;$$

wtedy

$$\cosh a \cos b = -k,$$

$$\sinh a \sin b = 0,$$

skąd wynika, że a nie może się równać zeru; więc $\sin b = 0$, ale $\cos b$ powinno być ujemne, więc $\cos b = -1$; ponieważ jednakże, jak wyżej zaznaczyliśmy, q dąży do 0 pozostając liczbą ujemną i ponieważ w rozpatrywanym przypadku $\sinh a > 0$, przeto $\sin b$ powinien dążyć do zera pozostając ujemnym.

Z tych względów wypada, że $b = -180°$, natomiast

$$\cosh a = k = \frac{2}{\eta^2} - 1,$$

czyli że współczynnik a, znaczny przy małych wartościach η (małych częstotliwościach), stopniowo maleje i staje się równy 0 ($\cosh a = 1$). gdy $\eta = 1$, to znaczy dla częstotliwości równej częstotliwości drgań swobodnych ogniwa.

Gdy $\eta > 1$, czyli $\omega > \omega_0$, wtedy, jak widać z wzoru (72), p zmienia się w granicach $-1_{(\eta=1)}$ i $+1_{(\eta=\infty)}$, czyli

$$-1 \leqslant p \leqslant +1;$$

równania (74) i ((75) wskazują, że $\sin b$ nie może się równać zeru, gdyż wtedy $\cos b = \pm 1$, a ponieważ $\cosh a$ co najmniej może się równać 1, więc nie uczynilibyśmy zadość warunkowi dla p; pozostaje więc jedyna możliwość:

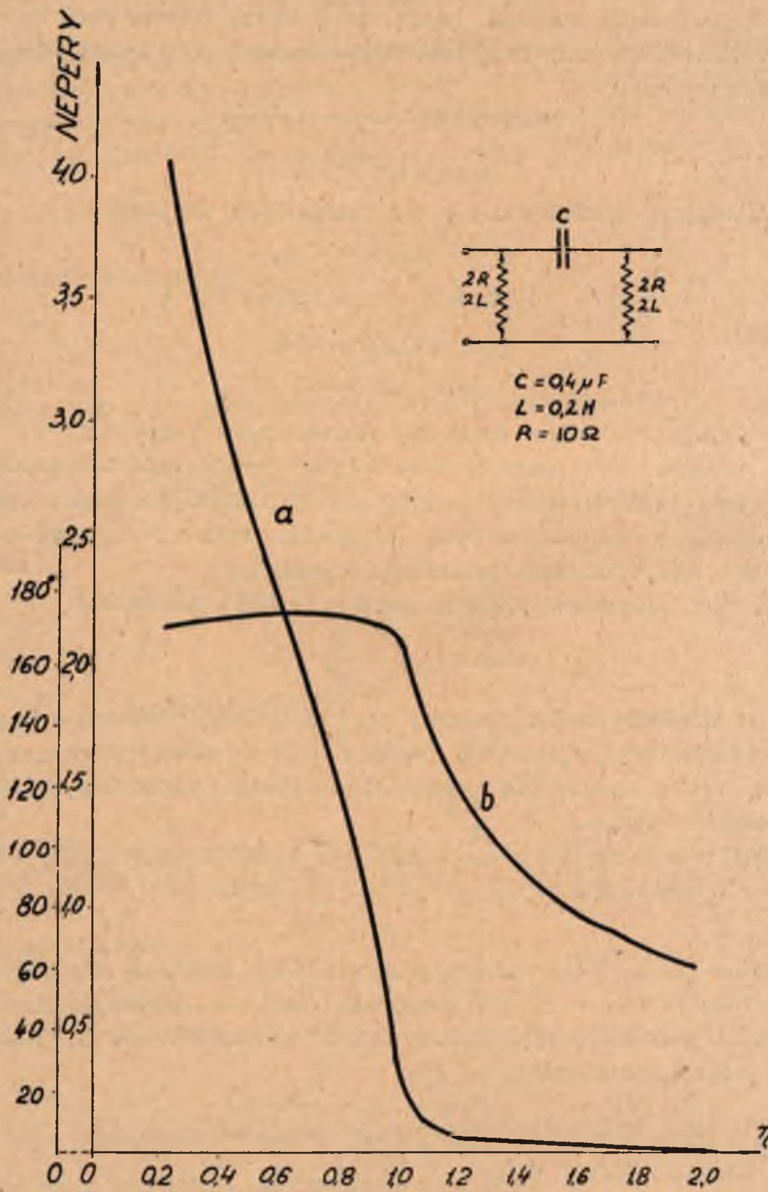
$$\sinh a = 0, \qquad a = 0;$$

wtedy $\cosh a = 1$ i z równania (87)

$$\cos b = p = 1 - \frac{2}{\eta^2},$$

czyli (po uwzględnieniu, że b powinno być ujemne) wnioskujemy, że b zmienia się w granicach od $-180°$ do $0°$.

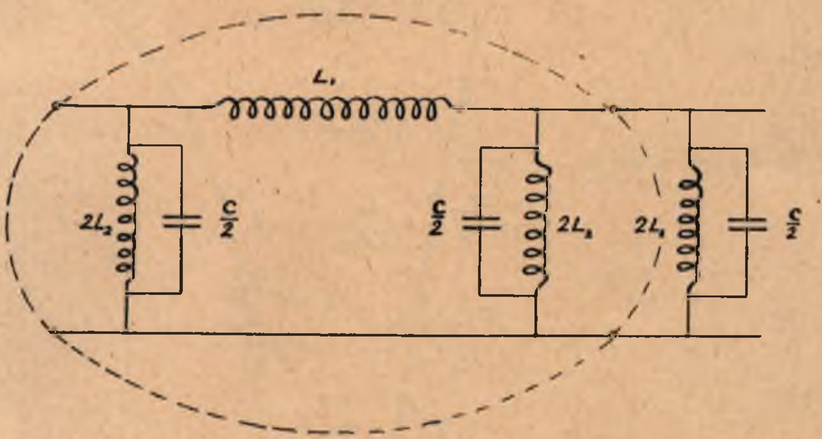
Z tych rozważań wynika, że rozpatrywany filtr, który nazwiemy *filtrem górnoprzepustowym,* tłumi prądy o częstotliwości mniejszej



Rys. 197

od częstotliwości drgań swobodnych ogniwa, natomiast przepuszcza prawie bez tłumienia prądy o częstotliwości wyższej. Na rys. 197 wskazany jest przebieg współczynników a i b w zależności od η w filtrze kondensatorowym.

Filtr wstęgowy. Przez odpowiednie połączenie cewek i kondensatorów można otrzymać również filtry, które będą prawie bez tłumienia przepuszczały prądy o częstotliwościach zawartych w określonych granicach lub będą tłumiły prądy określonej częstotliwości, przepuszczając swobodnie prądy inne. Osiągnąć można takie wyniki za pomocą bardzo wielu rozmaitych kombinacji; ograniczymy się do rozpatrywania kilku najbardziej charakterystycznych przykładów. W celu badania własności filtrów poprzednio rozpatrzonych zakładaliśmy, że oporność rzeczywista równa jest zeru; to samo uczynimy przy rozpatrywaniu następnych typów filtrów, od razu upraszczając wzory w założeniu, że $R = 0$.



Rys. 198

Rozpatrzmy najpierw filtr, którego ogniwo przedstawione jest na rys. 198. Jest to łańcuch typu Π, przy czym

$$\dot{Z}_1 = j\omega L_1$$

$$\dot{Z}_2 = \frac{4j\omega \cdot L_2 \dfrac{1}{j\omega C}}{2j\left(\omega L_2 - \dfrac{1}{\omega C}\right)} = \frac{2L_2}{Cj\left(\omega L_2 - \dfrac{1}{\omega C}\right)};$$

$$p + jq = 1 + \frac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_2} = 1 - \frac{\omega L_1 C\left(\omega L_2 - \dfrac{1}{\omega C}\right)}{2 L_2} =$$

$$= 1 - \frac{\omega^2 L_1 C}{2} + \frac{L_1}{2 L_2},$$

$$p = \cosh a \cos b = 1 - \frac{\omega^2 L_1 C}{2} + \frac{L_1}{2 L_2},$$

$$q = \sinh a \sin b = 0.$$

Tłumienia nie będzie, gdy $a = 0$, a więc gdy $\cosh a = 1$, wtedy

$$\cos b = 1 - \frac{\omega^2 L_1 C}{2} + \frac{L_1}{2 L_2};$$

wyraz ten może się zmieniać tylko w granicach $+1$ i -1; staje się on równy $+1$, gdy

$$\frac{\omega^2 L_1 C}{2} = \frac{L_1}{2 L_2},$$

czyli dla

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{C L_2}};$$

staje się on równy -1, gdy

$$-\frac{\omega^2 L_1 C}{2} + \frac{L_1}{2 L_2} = -2,$$

$$\omega^2 = \frac{4 L_2 + L_1}{L_1 L_2 C} = \frac{1 + 4\dfrac{L_2}{L_1}}{C L_2},$$

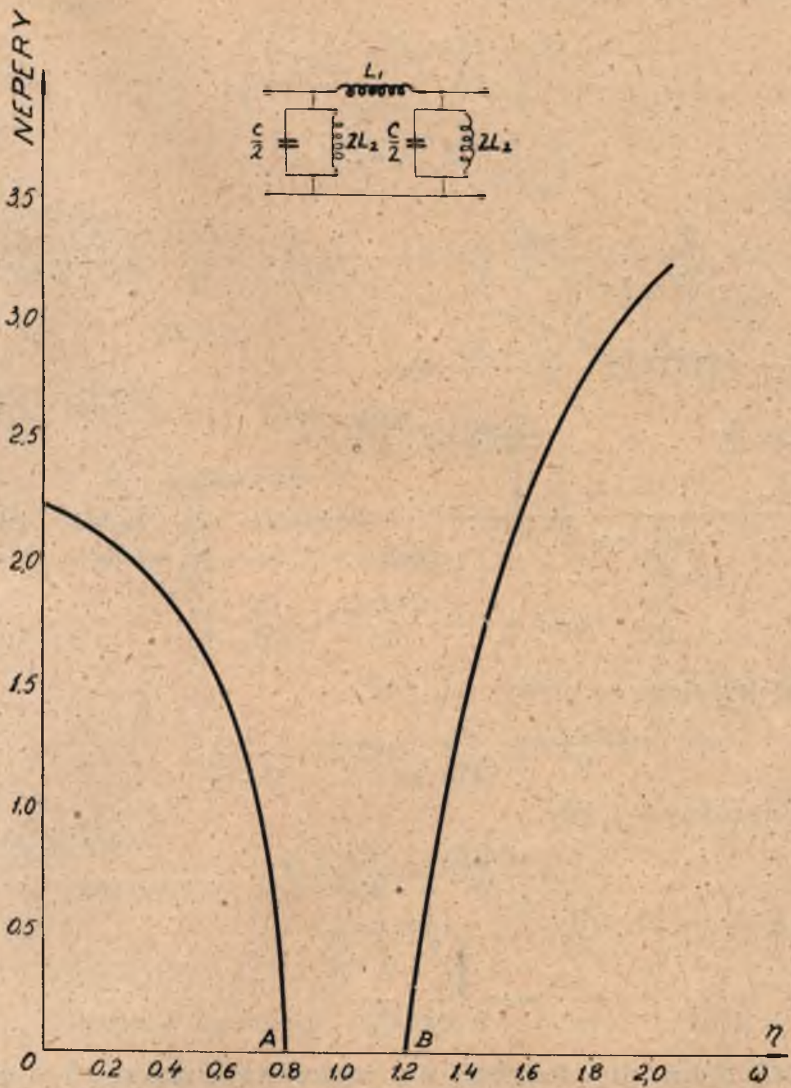
czyli

$$\omega = \frac{\sqrt{1 + 4\dfrac{L_2}{L_1}}}{\sqrt{C L_2}};$$

wynika więc, że $a = 0$, gdy pulsacja prądu zawarta jest w granicach

$$\frac{1}{\sqrt{C L_2}} \leqslant \omega \leqslant \frac{\sqrt{1 + 4\dfrac{L_2}{L_1}}}{\sqrt{C L_2}};$$

przez odpowiedni dobór ilorazu $\frac{L_2}{L_1}$ możemy więc zwęzić lub rozszerzyć granice częstotliwości prądów swobodnie przechodzących przez filtr.



Rys. 199

Wykres, charakteryzujący zmianę współczynnika tłumienia dla takiego filtru, pokazany jest na rys. 199. Obszar częstotliwości AB, dla których tłumienia nie ma, nazywamy wstęgą częstotliwości, a filtr tego typu — *filtrem wstęgowym*.

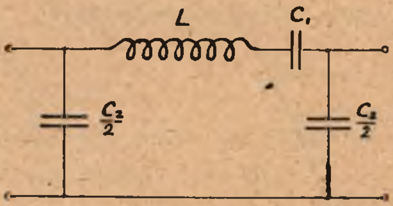
Otrzymamy również filtr wstęgowy biorąc ogniwa, jak na rys. 200; w tym przypadku

$$\hat{Z}_1 = j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C_1}\right),$$

$$\hat{Z}_2 = \frac{2}{j\omega C_2};$$

wtedy

$$p = 1 + \frac{\hat{Z}_1}{Z_2} = 1 - \frac{\omega C_2}{2}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C_1}\right) = 1 - \frac{\omega^2 L C_2}{2} + \frac{C_2}{2C_1},$$



Rys. 200

$$q = 0;$$

więc

$$\cosh a \cos b = 1 - \frac{\omega^2 L C_2}{2} + \frac{C_2}{2C_1}$$

$$\sinh a \sin b = 0.$$

Tłumienia nie będzie, gdy $\cosh a = 1$ $(a = 0)$, wtedy

$$\cos b = 1 - \frac{\omega^2 L C_2}{2} + \frac{C_2}{2C_1};$$

wyraz ten staje się równy $+1$, gdy

$$\frac{\omega^2 L C_2}{2} = \frac{C_2}{2C_1}, \text{ czyli } \omega = \frac{1}{\sqrt{LC_1}};$$

staje się równy -1, gdy

$$\frac{\omega^2 L C_2}{2} = \frac{C_2}{2C_1} + 2,$$

czyli

$$\omega = \frac{\sqrt{1 + 4\frac{C_1}{C_2}}}{\sqrt{LC_1}}.$$

Nie będzie więc tłumienia dla częstotliwości zawartych w granicach

$$\frac{1}{\sqrt{LC_1}} \leq \omega \leq \frac{\sqrt{1 + 4\frac{C_1}{C_2}}}{\sqrt{LC_1}};$$

granice te dają wstęgę częstotliwości przepuszczających prądy.

Rozpatrzmy teraz filtr, którego ogniwo utworzone jest jak na rys. 201.

Tutaj

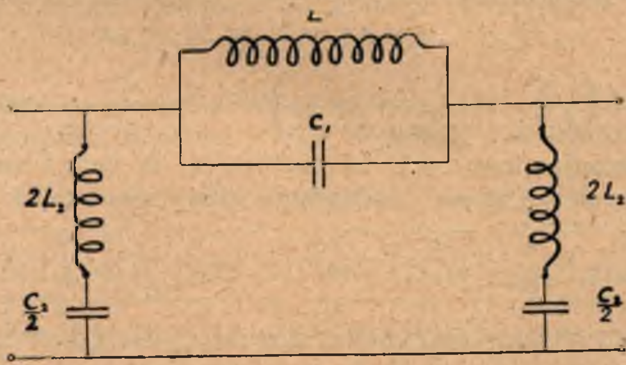
$$\hat{Z}_1 = \frac{j\omega L_1 \cdot \frac{1}{j\omega C_1}}{j\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right)} = \frac{L_1}{C_1 j\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right)}$$

$$\hat{Z}_2 = 2j\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right).$$

Wtedy

$$p = 1 + \frac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_2} = 1 - \frac{L_1}{2C_1\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right)\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right)},$$

$$q = 0;$$



Rys. 201

wobec tego

$$\cosh a \cos b = 1 - \frac{L_1}{2C_1\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right)\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right)},$$

$$\sinh a \sin b = 0.$$

Tłumienia nie będzie, gdy $\cosh a = 1$ $(a = 0)$, czyli

$$\cos b = 1 - \frac{L_1}{2C_1\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right)\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right)} =$$

$$= 1 - \frac{L_1 C_2 \omega^2}{2(\omega^2 L_1 C_1 - 1)(\omega^2 L_2 C_2 - 1)}.$$

Ze względu na możliwe wartości $\cos b$ ostatni ułamek może się zmieniać tylko w granicach od 0 do 2 lub po odrzuceniu 2 w mianowniku, w granicach od 0 do 4.

Powinno więc być

$$0 \leqslant \frac{L_1 C_2 \omega^2}{(\omega^2 L_1 C_1 - 1)(\omega^2 L_2 C_2 - 1)} \leqslant 4. \qquad (76)$$

Licznik rozpatrywanego wyrazu jest dodatni, więc i mianownik powinien być dodatni, to znaczy, że oba czynniki w mianowniku powinny mieć znaki jednakowe.

Dla znalezienia takich wartości ω, które by czyniły zadość powyższej nierówności, rozpatrzmy najpierw warunek

$$\frac{L_1 C_2 \omega^2}{(\omega^2 L_1 C_1 - 1)(\omega^2 L_2 C_2 - 1)} \leqslant 4,$$

skąd, przy uwzględnieniu, że mianownik jest dodatni, otrzymujemy

$$4(\omega^2 L_1 C_1 - 1)(\omega^2 L_2 C_2 - 1) - L_1 C_2 \omega^2 \geqslant 0$$

albo

$$\omega^4 - \left(\frac{1}{L_1 C_1} + \frac{1}{L_2 C_2} + \frac{1}{4 L_2 C_1}\right)\omega^2 + \frac{1}{L_1 L_2 C_1 C_2} \geqslant 0. \qquad (77)$$

Przyrównując lewą część tej nierówności do zera i rozwiązując równanie dwukwadratowe, znajdujemy cztery pierwiastki:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{L_1 C_1} + \frac{1}{L_2 C_2} + \frac{1}{4 L_2 C_1}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{L_1 C_1} + \frac{1}{L_2 C_2} + \frac{1}{4 L_2 C_1}\right)^2 - \frac{1}{L_1 L_2 C_1 C_2}}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{L_1 C_1} + \frac{1}{L_2 C_2} + \frac{1}{4 L_3 C_1}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{L_1 C_1} + \frac{1}{L_2 C_2} + \frac{1}{4 L_2 C_2}\right)^2 - \frac{1}{L_1 L_2 C_1 C_2}}$$

$$\omega_3 = -\omega_1,$$

$$\omega_4 = -\omega_2;$$

z tych pierwiastków pierwsze dwa są dodatnie, przy czym $\omega_2 > \omega_1$, zaś ostatnie dwa są ujemne i wobec tego nie odpowiadają warunkom zadania.

Uwzględniając znalezione pierwiastki możemy nierówność (77) przepisać w postaci

$$(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)(\omega + \omega_1)(\omega + \omega_2 \geqslant 0,$$

skąd wynika, że

$$(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2) \geqslant 0,$$

czyli

$$\omega \geqslant \omega_1 \quad \text{lub} \quad \omega \leqslant \omega_1$$

$$\text{i} \ \omega \geqslant \omega_2 \quad \text{lub} \quad \omega \leqslant \omega_2;$$

a ponieważ

$$\omega_2 > \omega_1,$$

więc powinno być

$$\omega \geqslant \omega_2$$

$$\omega \leqslant \omega_1.$$

Biorąc teraz pod uwagę drugi warunek

$$\frac{L_1 C_2 \omega^2}{(\omega^2 L_1 C_1 - 1)(\omega^2 L_2 C_2 - 1)} \geqslant 0,$$

widzimy, że warunek ten będzie spełniony przy wszelkich wartościach ω.

Zestawiając oba warunki wnioskujemy, że $a = 0$, to znaczy nie będzie tłumienia dla takich częstotliwości, gdy pulsacja zmienia się

$$\text{od } 0 \text{ do } \omega_1$$

$$\text{i od } \omega_2 \text{ do } \omega \to \infty,$$

natomiast zachodzi tłumienie dla pulsacji zawartych w granicach

$$\omega_1 < \omega < \omega_2;$$

przy tym łatwo zauważyć z wzoru na $\cosh a \cos b$, że $\cosh a$, a przez to i współczynnik tłumienia a staje się równy nieskończoności, gdy

$$\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} = 0, \qquad \text{czyli} \qquad \omega = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$$

oraz

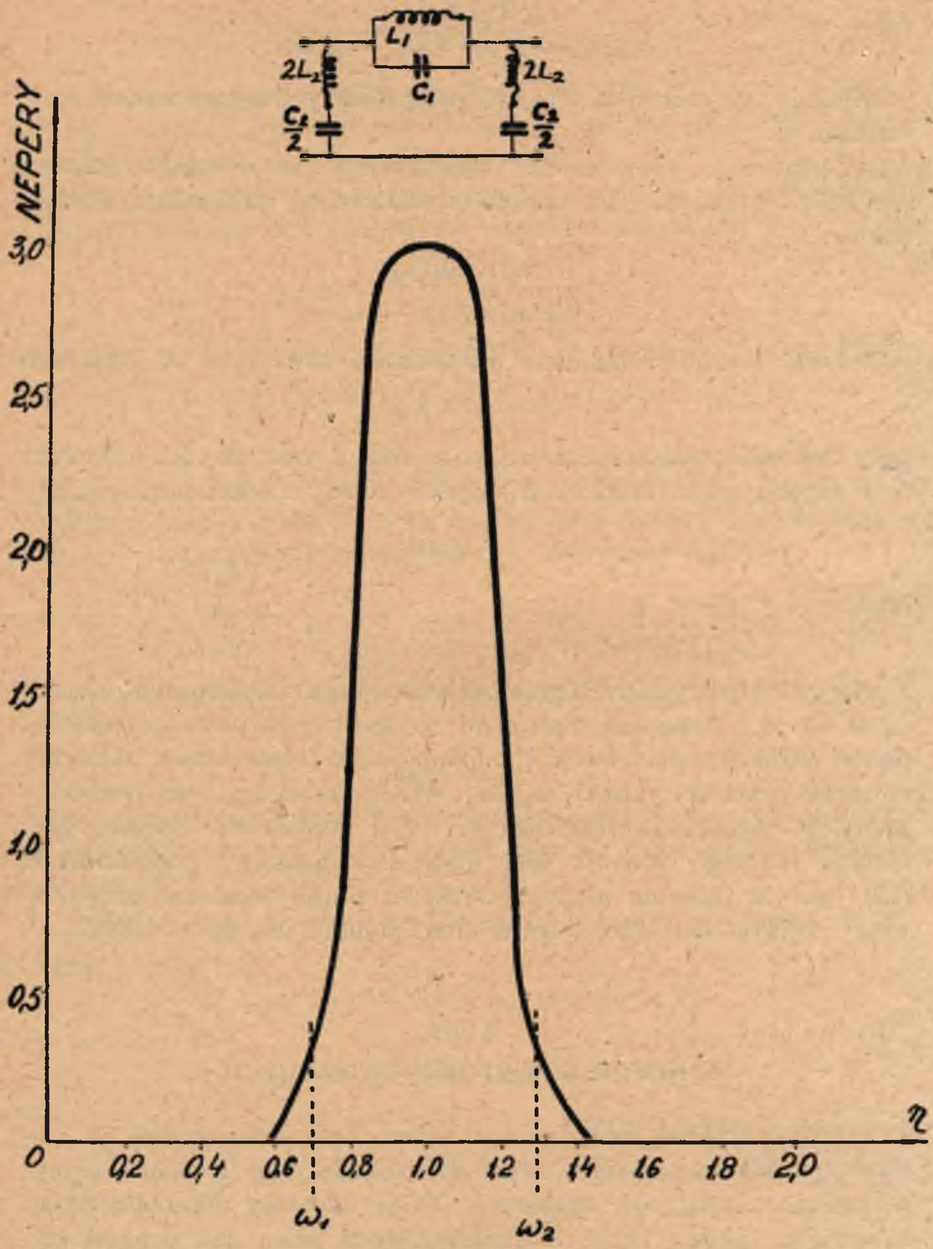
$$\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} = 0, \qquad \text{czyli} \qquad \omega = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}},$$

a więc w rozpatrywanych granicach współczynnik tłumienia wzrasta od 0 do ∞ i następnie maleje od ∞ do 0; gdy przez odpowiedni dobór indukcyjności cewek i pojemności kondensatorów zbliżymy do siebie wartości pulsacji ω_1 i ω_2, wtedy tłumieniu będą podlegały prądy o określonej częstotliwości, czyli określonej długości fali; dlatego też tego rodzaju filtr może być nazwany *pochłaniaczem fali* i ma za zadanie usunięcie wpływu prądu wiadomej częstotliwości. Wykres dla tego rodzaju filtru podany jest na rys. 202.

§ 103

ŁAŃCUCH IZOLATORÓW WISZĄCYCH

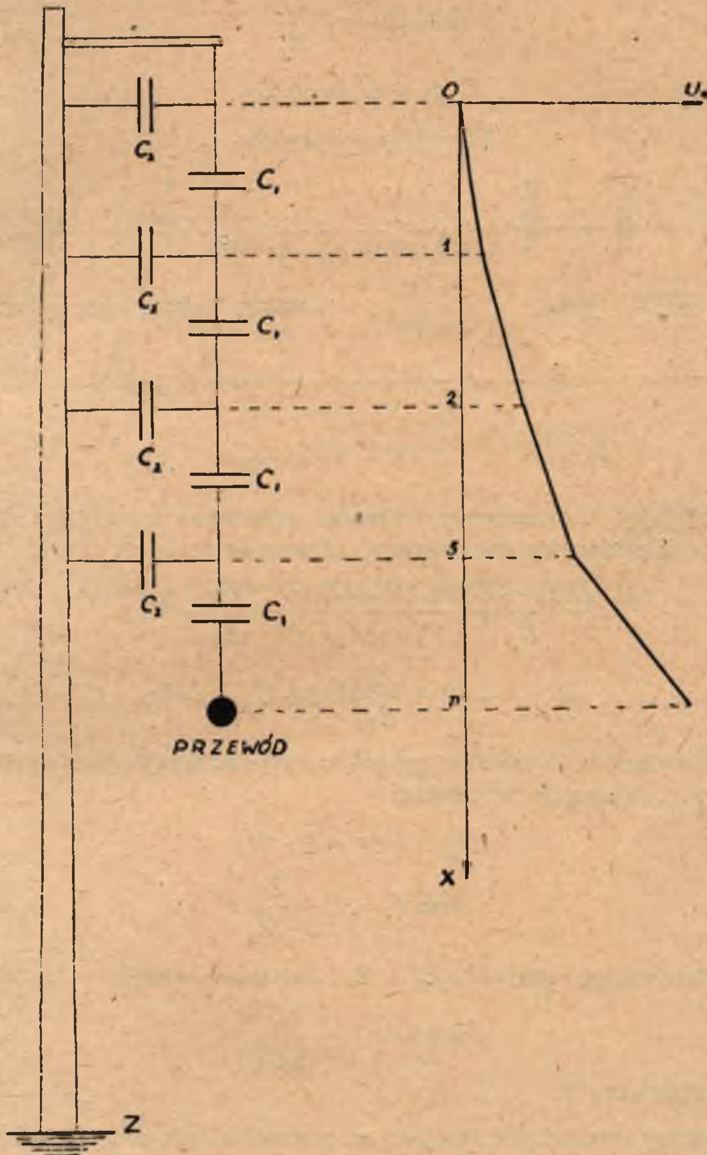
Jako przykład zastosowania teorii linii łańcuchowej w sieciach prądów wysokiego napięcia, rozpatrzymy rozkład napięć w łańcuchu izolatorów wiszących. Takie izolatory stanowią układ zawierający pewną liczbę n umieszczonych jeden nad drugim izolatorów; pierwszy z tych izolatorów jest przytwierdzony do słupa, do ostatniego izolatora przymocowany jest przewód o wysokim na-



L_1
C_1
$2L_2$
$2L_2$
$\frac{C_2}{2}$
$\frac{C_2}{2}$
NEPERY
3,0
2,5
2,0
1,5
1,0
0,5
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
1,2
1,4
1,6
1,8
2,0
η
ω_1
ω_2

Rys. 202

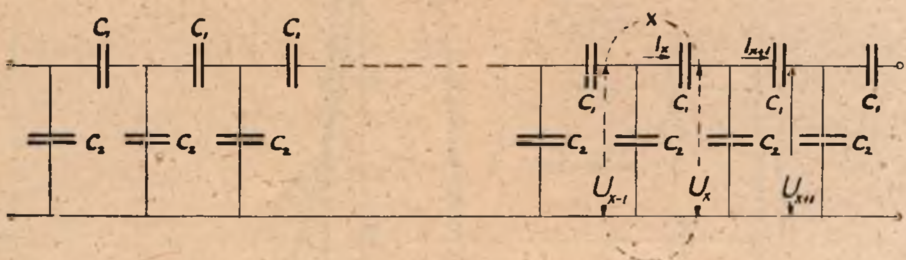
pięciu. W takim układzie mamy do czynienia tylko z pojemnościami, które rozpatrujemy albo pomiędzy każdym izolatorem i ziemią, albo pomiędzy poszczególnymi izolatorami. Oznaczając pierwszą pojemność przez C_2, drugą przez C_1, otrzymamy następujący schemat (rys. 203 albo rys. 204).



Rys. 203

Oznaczając
$$\hat{Z}_1 = \frac{1}{j\,\omega\,C_1},$$
$$\hat{Z}_2 = \frac{1}{j\,\omega\,C_2},$$

będziemy mieli
$$\hat{I}_x - \hat{I}_{x+1} = \frac{\hat{U}_x}{\hat{Z}_2},$$
$$\hat{U}_{x-1} - \hat{U}_x = \hat{I}_x \hat{Z}_1,$$
$$\hat{U}_x - \hat{U}_{x+1} = \hat{I}_{x+1} \hat{Z}_1.$$



Rys. 204

Określając z drugiego i trzeciego równania $\hat{I}_x$ i $\hat{I}_{x+1}$ i podstawiając te wartości do pierwszego, otrzymamy:
$$\frac{\hat{U}_{x-1} - \hat{U}_x}{\hat{Z}_1} - \frac{\hat{U}_x - \hat{U}_{x+1}}{\hat{Z}_1} - \frac{\hat{U}_x}{\hat{Z}_2} = 0;$$
$$\hat{U}_{x-1} - \left(2 + \frac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_2}\right)\hat{U}_x + \hat{U}_{x+1} = 0;$$
jest to równanie różniczkowe; podobne były rozwiązywane poprzednio; szukamy rozwiązania w postaci
$$\hat{U}_x = A\,e^{kx} + B\,e^{-kx}, \tag{78}$$
gdzie
$$\cosh k = 1 + \frac{\hat{Z}_1}{2\hat{Z}_2}.$$

Podstawiając wartości $\hat{Z}_1$ i $\hat{Z}_2$, będziemy mieli
$$\cosh k = 1 + \frac{C_2}{2\,C_1},$$
skąd znajdziemy k.

Możemy uważać, że miejsce na początku łańcucha ($x = o$), gdzie izolator jest przytwierdzony do słupa, jest uziemione, a więc napięcie względem ziemi wynosi 0; w końcu łańcucha mamy przewód pod napięciem U (względem ziemi).

Wobec tego, zakładając we wzorze (78) kolejno $x = 0$ i $x = n$, otrzymamy

$$A + B = 0,$$

$$A e^{kn} + B e^{-kn} = \hat{U},$$

skąd

$$B = -A,$$

$$A\,(e^{kn} - e^{-kn}) = \hat{U},$$

czyli

$$A = \frac{\hat{U}}{2\sinh kn},$$

$$B = -\frac{\hat{U}}{2\sinh kn}.$$

Podstawiając te wartości do (78), znajdujemy

$$U_x = \frac{U}{\sinh kn}\,\frac{(e^{kx} - e^{-kx})}{2} = \frac{U \sinh kx}{\sinh kn}.$$

Z tego wzoru możemy znaleźć napięcie na dowolnym izolatorze, którego numer, liczony od miejsca przytwierdzenia do słupa, wynosi x. Wykres rozkładu napięcia uwidoczniony jest na rys. 203.

R O Z D Z I A Ł T R Z Y N A S T Y

STANY NIEUSTALONE W OBWODACH ZE SKUPIONYMI: OPORNOŚCIĄ RZECZYWISTĄ, INDUKCYJNOŚCIĄ I POJEMNOŚCIĄ

§ 104

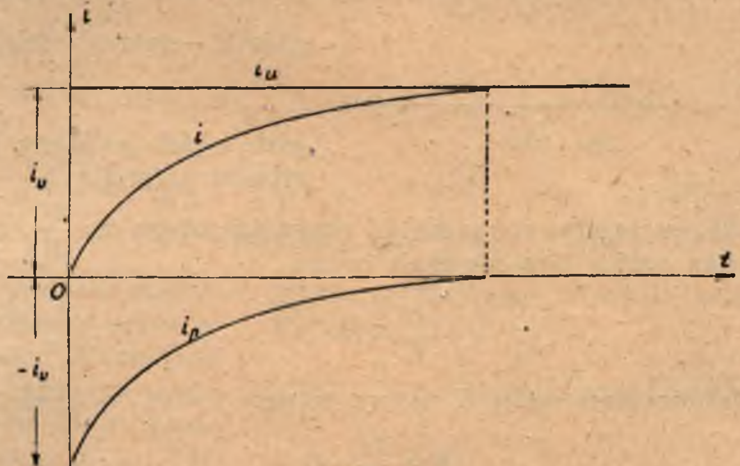
STANY USTALONE I NIEUSTALONE

Przy rozpatrywaniu obwodów elektrycznych, zarówno przy prądzie stałym jak i przy prądzie zmiennym, przeważnie mamy do czynienia z napięciami i natężeniami prądów, których wartości są ustalone, to znaczy, że albo wartości te pozostają bez zmiany, jak to ma miejsce przy prądzie stałym, albo stają się okresowo zmiennymi funkcjami czasu ze stałą wartością skuteczną — przy prądzie zmiennym. Każda zmiana warunków, w których się obwód znajduje, zmiana napięcia u źródła, zmiana oporności lub innej wielkości wchodzącej w skład obwodu — powoduje zmianę wartości, napięć i prądów. Przejście od jednej wartości do drugiej wymaga pewnego czasu, często bardzo małego, ale w ciągu tego czasu mogą zachodzić bardzo poważne zmiany w obwodzie, wywołujące skoki napięć, czyli tak zwane *przepięcia,* lub znaczny wzrost natężenia prądu — tak zwane *przetężenia:* mogą też powstawać przy tym drgania napięć i prądów, czyli tak zwane fale elektromagnetyczne.

Musimy więc w obwodach elektrycznych odróżniać wartości napięć i prądów w stanie ustalonym oraz w stanie nieustalonym. Przy wszelkich zmianach zachodzących w obwodzie będziemy mieli *stan nieustalony,* zanim napięcia i natężenia prądów nie osiągną swych granicznych wartości, odpowiadających stanowi ustalonemu. Możemy sobie wyobrazić, że w okresie przejściowym do wartości chwilowych napięć i prądów, odpowiadających stanowi ustalonemu, dodają się pewne przejściowe napięcia i prądy; w ten sposób wartości chwilowe tych wielkości w stanie nieustalonym możemy rozpatrywać jako sumę dwóch wartości chwilowych, które będziemy nazywali odpowiednio *wartością ustaloną* i *wartością przejściową,* odróżniając je wskaźnikami „u“ i „p“, wobec czego będziemy pisali

$$u = u_u + u_p,$$
$$i = i_u + i_p,$$

gdzie u i i oznaczają wartości chwilowe napięcia oraz natężenia prądu w stanie nieustalonym. Po upływie pewnego czasu wartości przejściowe stają się praktycznie równe zeru, wtedy wartości u i i otrzymują wartości u_u i i_u. Na rys. 205 podany jest przykład takiego



Rys. 205

ujęcia zjawiska w stanie nieustalonym dla natężenia prądu, którego wartość i zmienia się od zera do i_u. W tym okresie, w dowolnej chwili, wartość i stanowi sumę wartości i_u oraz i_p, przy czym wartości i_p w tym przykładzie są ujemne, zmieniając się od $-i_u$ do zera.

§ 105

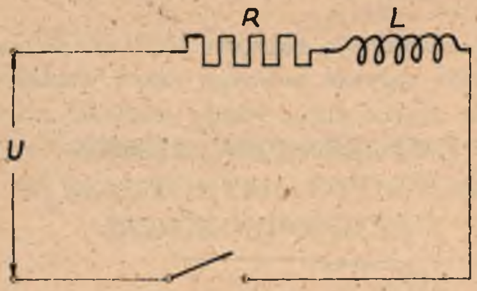
POWSTAWANIE I ZANIKANIE PRĄDU STAŁEGO W OBWODZIE Z OPORNOŚCIĄ I INDUKCYJNOŚCIĄ

Mamy obwód (rys. 206), w którym między zaciskami źródła istnieje napięcie prądu stałego o wartości U, oporność rzeczywista R i indukcyjność własna L.

W chwili zamknięcia takiego obwodu prądu jeszcze nie ma; licząc czas od tej chwili i oznaczając przez i wartość prądu w dowolnej chwili, będziemy mieli

$$Ri + L\frac{di}{dt} = U. \tag{1}$$

Całkujemy najpierw równanie uproszczone



Rys. 206

$$Ri + L\frac{di}{dt} = 0,$$

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L}dt,$$

$$\ln i = -\frac{R}{L}t + \ln K,$$

gdzie K — stała dowolna, skąd

$$i = Ke^{-\frac{R}{L}t},$$

gdzie e jest podstawą logarytmów naturalnych.

Całka szczególna równania (1) oczywiście równa się $\frac{U}{R}$, wobec tego całka ogólna tego równania będzie

$$i = \frac{U}{R} + Ke^{-\frac{R}{L}t}.$$

Dla określenia stałej K wiemy, że przy $t = 0$, $i = 0$, więc

$$K + \frac{U}{R} = 0,$$

$$K = -\frac{U}{R};$$

wobec tego

$$i = \frac{U}{R} - \frac{U}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L}t}. \tag{2}$$

Łatwo zauważyć, że w rozpatrywanym obwodzie dla stanu ustalonego natężenie prądu

$$i_u = \frac{U}{R},$$

a ponieważ

$$i = i_u + i_p,$$

więc z wzoru (2)

$$i_p = -\frac{U}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L}t} = -i_u \cdot e^{-\frac{R}{L}t}. \tag{3}$$

Ostatni wzór nazywa się wzorem Helmholtza; $\frac{R}{L}$ nazywamy *stałą tłumienia* zaś odwrotność, czyli $\frac{L}{R} = \tau$ nazywamy *stałą czasu;* im większe jest L i im mniejsze R, tym większa jest stała czasu τ, to znaczy, że więcej czasu potrzeba, aby prąd osiągnął praktycznie swą wartość graniczną.

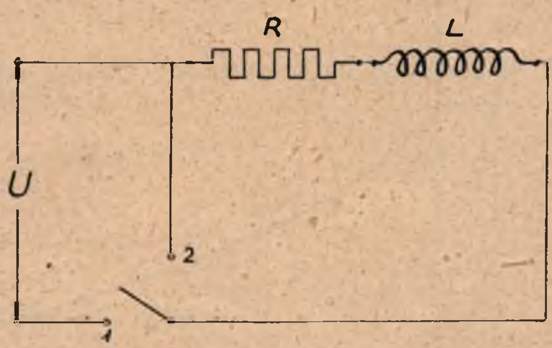
Przebieg i oraz i_p podany jest na rys. 205. Jak widać ze wzoru (3) prąd przejściowy dąży do zera przy t dążącym do nieskończoności.

Przy $$t = \frac{L}{R} = \tau, \quad i_p = -\frac{i_u}{e} \cong -0{,}37\, i_u;$$

przy

$$t = 2\tau, \quad i_p \cong -0{,}13\, i_u; \quad \text{przy } t = 3\tau, \quad i_p \cong -0{,}05\, i_u.$$

Gdy $e^{-\frac{R}{L}t} = 0{,}01$, czyli $e^{-\frac{t}{\tau}} = 0{,}01$, $t = t\ln_\varphi 100 \cong 4{,}6\,\tau$, wtedy $i_p = 0{,}01\, i_u$. Na przykład, gdy $\frac{L}{R} = 0{,}1$, wtedy po upływie czasu 0,46 sek natężenie prądu przejściowego wyniesie zaledwie 0,01 natężenia prądu ustalonego. W cewkach elektromagnesów τ może dochodzić do 1 sek, np. przy $L = 11 H$, $R = 11\ \Omega$, $\tau = 1$, wtedy po upływie 1 s prąd przejściowy wyniesie 0,37, po upływie 2 s 0,13; po upływie 3 s 0,05, a po upływie 4,6 s 0,01 natężenia prądu ustalonego.



Rys. 207

SEM indukcji własnej, powstająca w stanie nieustalonym wyrazi się wzorem

$$e_s = -L\frac{di}{dt} = -L\, i_u\, e^{-\frac{R}{L}t}; \quad \frac{R}{L} = -U e^{-\frac{R}{L}t};$$

widać z tego, że nie może ona w swej wartości bezwzględnej przekroczyć wartości napięcia U.

Rozpatrzmy ten sam obwód co poprzednio. Wyobraźmy sobie, że raptownie następuje zwarcie w ten sposób, że tworzy się zamknięty obwód z R i L bez napięcia U, np. przełącznik (rys. 207) przestawiamy z położenia 1 na 2. Niech takie zwarcie nastąpi w chwili, gdy natężenie prądu w obwodzie wynosiło I, i od tej chwili rozpoczniemy rachubę czasu; wtedy dla takiego obwodu będziemy mieli

$$Ri + L\frac{di}{dt} = 0,$$

czyli

$$i = Ke^{-\frac{R}{L}t},$$

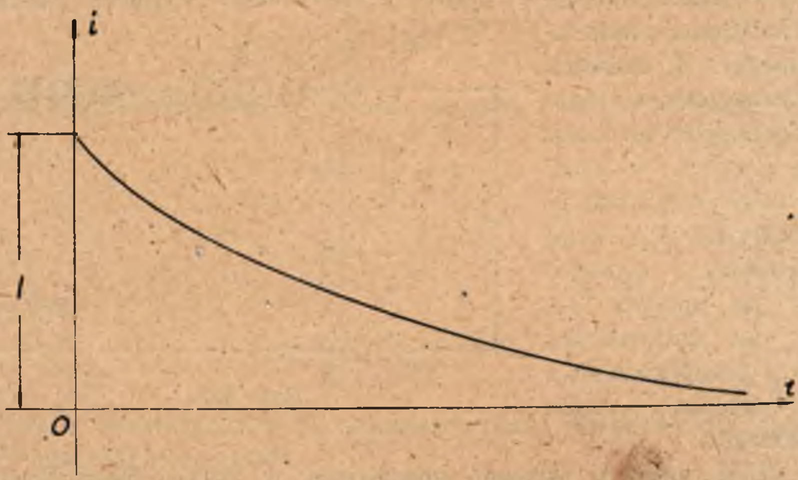
a ponieważ dla $t = 0$, $i = I$, przeto

$$K = I;$$

więc

$$i = i_p = Ie^{-\frac{R}{L}t}. \tag{4}$$

Widzimy więc, że w takim obwodzie powstanie tylko prąd



Rys. 208

przejściowy, zanikający, przy czym czas zanikania zależy od stałej tłumienia $\frac{R}{L}$ względnie od stałej czasu $\tau = \frac{L}{R}$.

Na rys. 208 podany jest przebieg takiego prądu.

Przy zanikaniu prądu *S E M* indukcji własnej będzie

$$e_s = -L\frac{di}{dt} = Ri = RIe^{-\frac{R}{L}t} = Ue^{-\frac{R}{L}t},$$

czyli nie przekracza wartości U napięcia źródła prądu stałego.

§ 106
ZMIANA OPORNOŚCI W OBWODZIE PRĄDU STAŁEGO

Jeżeli w poprzednio rozpatrywanym obwodzie (rys. 206) przy stałym napięciu prądu stałego U oporność zmieni swą wartość od R do R', wtedy prąd ustalony zmieni swą wartość od

$$i_u = I = \frac{U}{R} \text{ do } i_u' = I' = \frac{U}{R'};$$

dla nowego stanu obwodu będziemy mieli

$$R'i + L\frac{di}{dt} = U,$$

$$i = I' + Ke^{-\frac{R'}{L}t}.$$

Licząc czas od chwili zmiany oporności R na oporność R', będziemy mieli przy $t = 0$, $i = I$,
więc

$$K = I - I',$$

$$i = I' + (I - I')e^{-\frac{R'}{L}t},$$

skąd

$$i_p = (I - I')e^{-\frac{R'}{L}t}.$$

Podczas zmiany prądu od wartości I do wartości I', powstaje *S E M* indukcji własnej

$$e_s = -L\frac{di}{dt} = L\frac{(I - I')R'}{L}\cdot e^{-\frac{R'}{L}t} =$$

$$= U\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right)R'\cdot e^{-\frac{R'}{L}t} =$$

$$= U\left(\frac{R' - R}{R}\right)\cdot e^{-\frac{R'}{L}t}.$$

Oznaczając zmianę oporności $R' - R = \Delta R$, będziemy mieli

$$e_s = \frac{\Delta R}{R} \cdot U \cdot e^{-\frac{R'}{L}}.$$

Jak widać z tego wzoru, na wartość SEM indukcji własnej przy zmianie oporności wpływa stosunek $\frac{\Delta R}{R}$; L wpływa tylko na czas tłumienia.

Zrozumiałe jest wobec tego, że w opornikach musimy przechodzić od jednej oporności do drugiej nie od razu, lecz stopniowo, aby ΔR było $< R$, gdyż wtedy unikniemy raptownego skoku napięcia, spowodowanego SEM indukcji własnej.

§ 107

POWSTAWANIE I ZANIKANIE PRĄDU ZMIENNEGO W OBWODZIE Z OPORNOŚCIĄ RZECZYWISTĄ I INDUKCYJNOŚCIĄ

Przypuśćmy, że obwód z R i L zamknęliśmy w chwili, gdy faza napięcia prądu zmiennego równa jest ψ, to znaczy przy wartości chwilowej napięcia $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$ równej dla $t = 0$ $u = U_m \sin\psi$. Wtedy dla takiego obwodu

$$Ri + L\frac{di}{dt} = U_m \sin(\omega t + \psi);$$

dla prądu przejściowego otrzymamy, jak i poprzednio,

$$i_p = Ke^{-\frac{R}{L}t},$$

zaś prąd ustalony będzie, jak wiadomo,

$$i_u = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi),$$

gdzie

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L}{R}.$$

Wobec tego w stanie nieustalonym

$$i = i_u + i_p = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi) + Ke^{-\frac{R}{L}t}.$$

Ponieważ dla $t = 0$, $i = 0$,

więc

$$I_m \sin(\psi - \varphi) + K = 0,$$
$$K = -I_m \sin(\psi - \varphi)$$

i w ten sposób

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi) - I_m \sin(\psi - \varphi)\, e^{-\frac{R}{L}t}, \tag{5}$$

$$i_p = - I_m \sin(\psi - \varphi)\, e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Z ostatniego wzoru widzimy, że prąd przejściowy jest funkcją malejącą z biegiem czasu; nie ma go wcale, czyli ma on wartość zero, gdy $\psi = \varphi$, to znaczy wtedy, gdy w chwili zamykania obwodu prąd ustalony przechodzi przez wartość zero, ponieważ przy $t = 0$, $i_u = I_m \sin(\psi - \varphi) = 0$, natomiast największą wartość będzie miał prąd przejściowy, gdy $\psi - \varphi = \pm \frac{\pi}{2}$; wtedy przy $t = 0$ bezwzględna wartość największa prądu przejściowego będzie max $i_p = I_m$; będzie to miało miejsce wówczas, gdy również $i_u = I_m$, to znaczy, gdy w chwili zamykania obwodu prąd ustalony przechodzi przez swą największą wartość.

W stanie nieustalonym wartość prądu i, jak to widać ze wzoru (5), zależy nie tylko od czasu, lecz również od fazy ψ, którą ma napięcie w chwili zamknięcia obwodu. Największą wartość tego prądu otrzymamy dla tych wartości $\psi = \psi_0$, oraz $t = t_0$, przy których pierwsze pochodne cząstkowe i względem tych zmiennych stają się równe zeru. Dla określenia tych wartości mamy

$$\frac{\partial i}{\partial t} = I_m \omega \cos(\omega t + \psi - \varphi) + I_m \frac{L}{R} \sin(\psi - \varphi)\, e^{-\frac{R}{L}t}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial i}{\partial \psi} = I_m \cos(\omega t + \psi - \varphi) - I_m \cos(\psi - \varphi)\, e^{-\frac{R}{L}t}. \tag{7}$$

Przyrównując te pochodne do zera i dzieląc obie strony równań przez I_m, otrzymamy

$$\omega \cos(\omega t_0 + \psi_0 - \varphi) + \frac{R}{L} \sin(\psi_0 - \varphi)\, e^{-\frac{R}{L}t_0} = 0, \tag{8}$$

$$\cos(\omega t_0 + \psi_0 - \varphi) - \cos(\psi_0 - \varphi)\, e^{-\frac{R}{L}t_0}, \tag{9}$$

skąd przez porównanie

$$\frac{R}{\omega L} \sin(\psi_0 - \varphi) e^{-\frac{R}{L}t_0} = - \cos(\psi_0 - \varphi)\, e^{-\frac{R}{L}t_0},$$

$$\operatorname{tg}(\psi_0 - \varphi) = - \frac{\omega L}{R} = - \operatorname{tg}\varphi;$$

to ostatnie równanie w granicach jednego okresu daje dwie wartości dla ψ_0:

$$1)\ \psi_0 - \varphi = -\varphi, \quad \text{czyli} \quad \psi_0 = 0,$$
$$2)\ \psi_0 - \varphi = \pi - \varphi, \quad „ \quad \psi_0 = \pi.$$

Dla znalezienia t_0 podstawiamy do jednego z równań (8) lub (9) znalezione wartości ψ_0. Zarówno dla $\psi_0 = 0$ jak i dla $\psi = \pi$ otrzymamy

$$\cos(\omega t_0 - \varphi) = \frac{R}{\omega L} \sin\varphi\, e^{-\frac{R}{L} t_0}$$

lub, zamieniając $\frac{\omega L}{R}$ przez $\operatorname{tg}\varphi$,

$$\cos(\omega t_0 - \varphi) = \cos\varphi\, e^{-\frac{R}{L} t_0}. \tag{10}$$

Ponieważ kąt φ, stanowiący wartość bezwzględną przesunięcia fazy prądu względem napięcia w stanie ustalonym, jest mniejszy, względnie równy $\frac{\pi}{2}$, przeto prawa strona ostatniego wzoru jest większa od zera, względnie równa zeru; wobec tego powinno być

$$\cos(\omega t_0 - \varphi) \geqslant 0, \tag{11}$$

co w granicach jednego okresu daje

$$0 \leqslant \omega t_0 - \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, \tag{12}$$

albo

$$\frac{3}{2}\pi \leqslant \omega t_0 - \varphi \leqslant 2\pi. \tag{13}$$

Dla przekonania się, czy określone w ten sposób wartości ψ_0 i t_0 dają maksimum lub minimum funkcji i, musimy obliczyć dla tych wartości drugie pochodne cząstkowe tej funkcji; oznaczając

$$\left|\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}\right|_{\substack{\psi=\psi_0\\ t=t_0}} = A, \qquad \left|\frac{\partial^2 i}{\partial \psi^2}\right|_{\substack{\psi=\psi_0\\ t=t_0}} = C,$$

$$\left|\frac{\partial^2 i}{\partial t\, \partial \psi}\right|_{\substack{\psi=\psi_0\\ t=t_0}} = B,$$

będziemy mieli następujące warunki

gdy $\quad AC - B^2 > 0, \quad A$ i $C < 0$ — maximum,

gdy $\quad AC - B^2 > 0, \quad A$ i $C > 0$ — miminum.

Na podstawie wzorów (6) i (7) znajdujemy

$$A = -I_m \left[\omega^2 \sin(\omega t_0 + \psi_0 - \varphi) + \frac{R^2}{L^2} \sin(\psi_0 - \varphi)\, e^{-\frac{R}{L} t_0} \right],$$

$$C = -I_m \left[\sin(\omega t_0 + \psi_0 - \varphi) - \sin(\psi_0 - \varphi)\, e^{-\frac{R}{L} t_0} \right],$$

$$B = -I_m \left[\omega \sin(\omega t_0 + \psi_0 - \varphi) - \frac{R}{L} \cos(\psi_0 - \varphi)\, e^{-\frac{R}{L} t_0} \right].$$

Przy uwzględnieniu wzoru (10) oraz zamieniając $\frac{\omega L}{R}$ przez $\operatorname{tg} \varphi$, otrzymamy dla wartości $\psi_0 = 0$ oraz $\psi_0 = \pi$

$$A = \pm \frac{I_m \omega^2}{\sin \varphi} \cos \omega t_0 ,$$

$$C = \frac{I_m}{\cos \varphi} \sin \omega t_0 ,$$

$$B = \pm \frac{I_m \omega}{\sin \varphi} \cos \omega t_0 ,$$

gdzie pierwszy znak odpowiada $\psi_0 = 0$, drugi $\psi_0 = \pi$.

Dla obu wartości ψ_0:

$$AC - B^2 = -\frac{I_m \omega^2 \cos \omega t_0 \cdot \cos(\omega t_0 - \varphi)}{\sin^2 \varphi \cos \varphi}.$$

Ponieważ (wzór 9) $\cos(\omega t_0 - \varphi) \geqslant 0$, więc aby było możliwe $AC - B^2 > 0$, powinno być $\cos \omega t_0 < 0$, to znaczy w granicach jednego okresu

$$\frac{\pi}{2} < \omega t_0 < \pi \text{ lub } \pi < \omega t_0 < \frac{3}{2} \pi .$$

Ale w pierwszym przypadku

dla $\psi_0 = 0$, $A < 0$ i $C < 0$ istnieje maximum,

dla $\psi_0 = \pi$, $A > 0$ i $C > 0$ istnieje minimum,

w drugim przypadku

$$\left.\begin{array}{l} \text{dla } \psi_0 = 0,\ A < 0,\ C > 0 \\ \text{dla } \psi_0 = \pi,\ A > 0,\ C < 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{nie istnieje ani maximum,} \\ \text{ani minimum.} \end{array}$$

Wartość prądu i otrzymamy na podstawie wzoru (5):

$$\text{dla } \psi = 0,\ i = I_m \sin(\omega t - \varphi) + I_m \sin \varphi\, e^{-\frac{R}{L} t},$$

$$\text{dla } \psi = \pi,\ i = -I_m \sin(\omega t - \varphi) - I_m \sin \varphi\, e^{-\frac{R}{L} t},$$

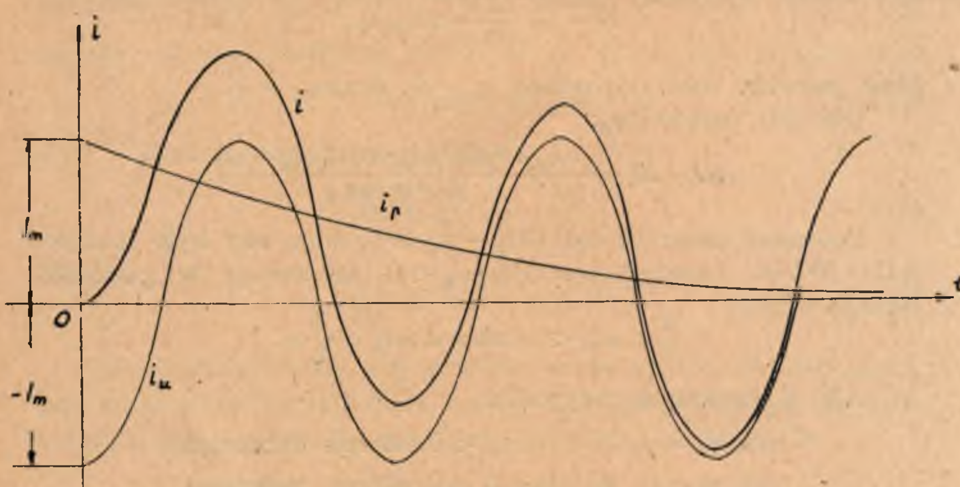
czyli dla obu wartości ψ

$$i = \pm I_m \left[\sin(\omega t - \varphi) + \sin\varphi \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \right];$$

największa wartość bezwzględna, która, jak poprzednio stwierdziliśmy, zachodzi dla wartości ωt, zawartej pomiędzy $\frac{\pi}{2}$ i π, w każdym razie jest mniejsza od $2I_m$, gdyż wyraz w nawiasach jest w tym wypadku mniejszy od 2.

Ostatecznie więc możemy stwierdzić, że w rozpatrywanym obwodzie, przy zamykaniu, może nastąpić wzrost prądu, czyli zjawisko przetężenia, gdy zamykanie następuje w chwili przejścia napięcia przez wartość 0 (faza 0 lub π); jednakże największa wartość tego prądu nie może przekroczyć podwójnej wartości prądu ustalonego w danym obwodzie.

Na rys. 209 podany jest przebieg prądu przejściowego i_p, prądu ustalonego i_u oraz prądu i w stanie nieustalonym dla $\cos\varphi = 0{,}19$,



Rys. 209

$\frac{R}{L} = 60$, w wypadku zamknięcia takiego obwodu w chwili, gdy napięcie przechodzi przez wartość 0 ($\psi = 0$).

Różnica pomiędzy zjawiskiem zanikania prądu stałego, rozpatrzonym w § 105, a zanikaniem prądu zmiennego polega tylko na tym, że w chwili zwarcia wartość prądu będzie zależna od fazy napięcia w tej samej chwili. Jeśli bowiem napięcie w chwili zwarcia przechodzi przez fazę ψ, to znaczy przy $t = 0$, $u = U_m \sin \psi$, wtedy prąd będzie miał wartość $i = I_m \sin(\psi - \varphi)$. Wobec tego wzór (4) przyjmie postać

$$i_p = I_m \sin(\psi - \varphi)\, e^{-\frac{R}{L}t};$$

z tego widać, że prąd zanika stopniowo, przy czym w przypadku $\psi = \varphi$, to znaczy, gdy prąd w chwili zwarcia przechodzi przez wartość zero, nie ma wcale prądu przejściowego.

§ 108

PRZERYWANIE OBWODU Z UWZGLĘDNIENIEM ZMIANY OPORNOŚCI NA WYŁĄCZNIKU

Przy przerywaniu obwodu oporność jego w krótkim zwykle okresie wyłączania wzrasta od pierwotnej wartości R do wartości bardzo wysokiej, którą praktycznie przyjmujemy jako nieskończenie wielką. Załóżmy, że zmiana oporności w zależności od czasu zachodzi na zasadzie wzoru Aronsa. Według tego wzoru, jeżeli oznaczymy przez t_0 czas użyty na wyłączenie, wartość chwilowa oporności R_t w chwili t, czyli po upływie t sekund od chwili rozpoczęcia wyłączania, wynosi

$$R_t = \frac{R}{1 - \frac{t}{t_0}}. \tag{14}$$

Wzór ten daje dla $t = 0$, $R_t = R$, zaś dla $t = t_0$, $R_t = \infty$. Przy takiej zmianie oporności w okresie wyłączania otrzymamy następujące równanie dla obwodu zawierającego R i L przy napięciu prądu stałego równym U:

$$i\frac{R}{1 - \frac{t}{t_0}} + L\frac{di}{dt} = U, \tag{15}$$

albo

$$\frac{di}{dt} + \frac{R t_0}{L(t_0 - t)}\, i = \frac{U}{L}.$$

Dla scałkowania tego równania zakładamy

$$i = xy, \tag{16}$$

gdzie x i y są funkcjami t; wtedy

$$x\frac{dy}{dt}+y\frac{dx}{dt}+\frac{Rt_0}{L(t_0-t)}xy=\frac{U}{L},$$

$$x\left[\frac{dy}{dt}+\frac{Rt_0}{L(t_0-t)}y\right]+y\frac{dx}{dt}=\frac{U}{L}; \tag{17}$$

funkcję y wybieramy w ten sposób, aby

$$\frac{dy}{dt}+\frac{Rt_0}{L(t_0-t)}y=0,$$

czyli

$$\frac{dy}{y}=-\frac{R}{L}\frac{t_0}{t_0-t}dt;$$

jedno z rozwiązań daje

$$ln\,y=\frac{R}{L}t_0\,ln\,(t_0-t)=ln\,(t_0-t)^{\frac{R}{L}t_0},$$

skąd

$$y=(t_0-t)^{\frac{R}{L}t_0}. \tag{18}$$

Wprowadzając taką wartość y do wzoru (17), otrzymamy

$$(t_0-t)^{\frac{R}{L}t_0}\frac{dx}{dt}=\frac{U}{L},$$

skąd

$$dx=\frac{U}{L}\frac{dt}{(t_0-t)^{\frac{R}{L}t_0}}.$$

Dla określenia x przez całkowanie musimy rozpatrzyć 2 przypadki:

$$1)\ \frac{R}{L}t_0\neq 1;\qquad 2)\ \frac{R}{L}t_0=1.$$

W przypadku I będziemy mieli

$$x=-\frac{U}{L}\frac{(t_0-t)^{-\frac{R}{L}t_0+1}}{-\frac{R}{L}t_0+1}+K,$$

gdzie K — stała dowolna, albo po uproszczeniu

$$x=\frac{U}{Rt_0-L}(t_0-t)^{1-\frac{R}{L}t_0}+K. \tag{19}$$

Zakładając wartości dla x i y ze wzorów (19) i (18), otrzymamy ze wzoru (16)

$$i = K(t_0 - t)^{\frac{R}{L}t_0} + \frac{U}{R t_0 - L}(t_0 - t). \tag{20}$$

Stałą K określimy z warunku, że w chwili rozpoczęcia wyłączania prąd miał pewną wartość I, to znaczy dla $t = 0$, $i = I$, wtedy ze wzoru (20) otrzymamy

$$K t_0^{\frac{R}{L}t_0} + \frac{U}{R t_0 - L} t_0 = I,$$

skąd

$$K = \left(I - \frac{U t_0}{R t_0 - L}\right) t_0^{-\frac{R}{L}t_0}.$$

Wobec tego ze wzoru (20) będziemy mieli

$$i = \left(I - \frac{U t_0}{R t_0 - L}\right)(t_0 - t)^{\frac{R}{L}t_0} \cdot t_0^{-\frac{R}{L}t_0} + \frac{U}{R t_0 - L}(t_0 - t) =$$

$$= \left(I - \frac{U t_0}{R t_0 - L}\right)\left(\frac{t_0 - t}{t_0}\right)^{\frac{R}{L}t_0} + \frac{U}{R t_0 - L}(t_0 - t). \tag{21}$$

W przypadku II otrzymujemy przez całkowanie

$$x = -\frac{U}{L} \ln(t_0 - t) + K;$$

wobec tego

$$i = K(t_0 - t) - \frac{U}{L}(t_0 - t)\ln(t_0 - t) = (t_0 - t)\left[K - \frac{U}{L}\ln(t_0 - t)\right].$$

Określamy stałą K, zakładając $t = 0$, $i = I$, wtedy

$$t_0\left(K - \frac{U}{L}\ln t_0\right) = I,$$

$$K = \frac{I}{t_0} + \frac{U}{L}\ln t_0,$$

$$i = (t_0 - t)\left[\frac{I}{t_0} + \frac{U}{L}\ln t_0 - \frac{U}{L}\ln(t_0 - t)\right] =$$

$$= (t_0 - t)\left(\frac{I}{t_0} + \frac{U}{L}\ln\frac{t_0}{t_0 - t}\right). \tag{22}$$

Prąd I, który mamy we wzorach (21) i (22), stanowi prąd w chwili rozpoczęcia wyłączania, to znaczy dla $t = 0$. Prąd ten może być prądem ustalonym lub też nieustalonym. Dla prądu ustalonego $I = \frac{U}{R}$, wówczas z wzoru (21) otrzymamy dla $\frac{R}{L} t_0 \neq 1$

$$i = I\left(1 - \frac{t_0}{t_0 - \frac{L}{R}}\right)\left(\frac{t_0 - t}{t_0}\right)^{\frac{R}{L}t_0} + I\,\frac{t_0 - t}{t_0 - \frac{L}{R}} =$$

$$= I\left[\frac{t_0 - t}{t_0 - \frac{L}{R}} - \frac{L}{(Rt_0 - L)}\left(\frac{t_0 - t}{t_0}\right)^{\frac{R}{L}t_0}\right], \tag{23}$$

zaś z wzoru (22) dla $\frac{R}{L} t_0 = 1$

$$i = I\,(t_0 - t)\left(\frac{1}{t_0} + \frac{R}{L}\ln\frac{t_0}{t_0 - t}\right). \tag{24}$$

Oporność na wyłączniku w czasie wyłączania będzie

$$R_t - R = \frac{R}{1 - \frac{t}{t_0}} - R = \frac{Rt}{t_0 - t},$$

zaś napięcie na wyłączniku w chwili t wyniesie

$$u_w = i\,\frac{Rt}{t_0 - t};$$

dla $\frac{R}{L} t_0 \gtrless 1$, biorąc wartość i ze wzoru (21) i zamieniając I przez $\frac{U}{R}$, otrzymamy

$$u_w = U\,\frac{t - \frac{L}{R}\frac{t}{t_0}\left(\frac{t_0 - t}{t_0}\right)^{\frac{R}{L}t_0 - 1}}{t_0 - \frac{L}{R}}. \tag{25}$$

Dla $\frac{R}{L} t_0 = 1$, na podstawie wzoru (22),

$$u_w = Ut\left(\frac{1}{t_0} + \frac{R}{L}\ln\frac{t_0}{t_0 - t}\right). \tag{26}$$

Zbadajmy teraz wzory (25) i (26), określając z nich wartość napięcia na wyłączniku w końcu wyłączania, to znaczy dla $t = t_0$.

Oznaczając to napięcie przez U_w, otrzymamy

w przypadku, gdy $\frac{R}{L} t_0 - 1 > 0$, z wzoru (25)

$$U_w = U \frac{t_0}{t_0 - \frac{L}{R}} = \frac{U \frac{R}{L} t_0}{\frac{R t_0}{L} - 1} = U + \frac{U}{\frac{R t_0}{L} - 1}, \tag{27}$$

czyli $U_w \geqslant U$; lecz U_w ma pewną wartość skończoną.

W przypadku, gdy $\frac{R}{L} t_0 - 1 < 0$, z tegoż wzoru (25), biorąc pod uwagę, że mianownik staje się ujemny, gdyż $t_0 < \frac{R}{L}$,

$$U_w = U \frac{t_0 - \infty}{t_0 - \frac{L}{R}} = \infty.$$

W przypadku, gdy $\frac{R}{L} t_0 - 1 = 0$, ze wzoru (26) otrzymamy

$$U_w = U t_0 \left(\frac{1}{t_0} + \frac{R}{L} ln \frac{t_0}{0} \right) = U + \infty = \infty.$$

Napięcie zatem na wyłączniku będzie zawsze większe niż napięcie z zewnątrz przyłożone. Teoretycznie — w dwóch ostatnich przypadkach wartość napięcia otrzymuje się nieskończenie wielką; w rzeczywistości — w tych przypadkach tworzy się iskra, trwająca tak długo, aż $\frac{R}{L} t_0 - 1$ staje się większe od 0. Praktycznie zatem zawsze $\frac{R}{L} t_0 > 1$ i najmniejszy okres czasu, po upływie którego następuje zupełne otwarcie obwodu, zależny jest od stosunku $\frac{L}{R}$: powinno być

$$t_0 > \frac{L}{R};$$

np. gdy $L = 1\ mH = 0{,}001\ H$, $R = 0{,}1\ \Omega$,

$$t_0 > 0{,}01 \text{ sek.}$$

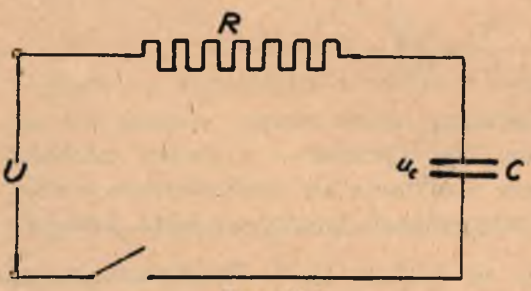
Jeżeli wyłączymy obwód np. w ciągu $t_0 = \frac{1}{80}$ sek, wtedy na podstawie wzoru (27) otrzymamy na wyłączniku napięcie

$$U_w = U\frac{\frac{1}{80}}{\frac{1}{80}-\frac{1}{100}} = 5\,U,$$

czyli 5 razy większe od napięcia źródła.

§ 109
ŁADOWANIE KONDENSATORA PRĄDEM STAŁYM PRZEZ OPORNOŚĆ RZECZYWISTĄ

Rozpatrzmy obwód (rys. 210), w którym pomiędzy zaciskami źródła mamy napięcie prądu stałego o wartości U, oporność rzeczywistą R oraz kondensator o pojemności C. Licząc czas od chwili zamknięcia takiego obwodu i oznaczając wartość chwilową napięcia na kondensatorze przez u_c oraz przez i natężenie prądu w stanie nieustalonym, będziemy mieli na zasadzie znanych wzorów:



Rys. 210

$$Ri + u_c = U,$$

$$i = C\frac{du_c}{dt};$$

w tym przypadku dla $t = 0$, $u_c = 0$.

Z ostatnich równań otrzymujemy

$$RC\frac{du_c}{dt} + u_c = U.$$

$$\frac{du_c}{u_c - U} = -\frac{dt}{RC},$$

$$ln\,(u_c - U) = -\frac{t}{RC} + ln\,K,$$

gdzie K — stała dowolna; wreszcie

$$u_c - U = Ke^{-\frac{t}{RC}},$$

$$u_c = U + Ke^{-\frac{t}{RC}}.$$

Zakładając w tym wzorze $t = 0$, $u_c = 0$, znajdujemy

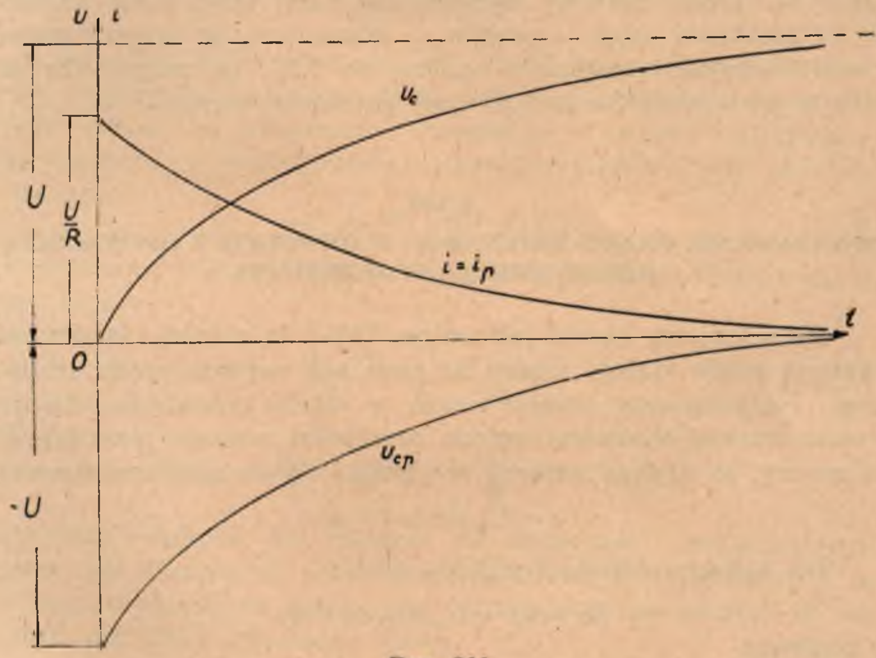
$$K = -U,$$

wobec czego

$$u_c = U - Ue^{-\frac{t}{RC}},$$

$$i = C\frac{du_c}{dt} = \frac{U}{R}e^{-\frac{t}{RC}};$$

ponieważ w stanie ustalonym napięcie na kondensatorze będzie



Rys. 211

równe U, prądu zaś wcale nie będzie, przeto dla wartości przejściowych otrzymujemy

$$u_{cp} = -Ue^{-\frac{t}{RC}},$$

$$i_p = \frac{U}{R}e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Widzimy, że obie te wielkości maleją stopniowo z biegiem czasu; RC stanowi w tym przypadku stałą czasu τ, od wartości której zależy okres czasu potrzebny, aby napięcie i prąd osiągnęły praktycznie swe wartości graniczne, to znaczy, aby nastąpił stan ustalony obwodu.

Na rys. 211 pokazany jest przebieg napięcia i prądu po zamknięciu obwodu, czyli w czasie ładowania kondensatora prądem stałym.

Ponieważ wzory wyprowadzone dla wartości przejściowych napięcia na kondensatorze oraz prądu ładującego kondensator są analogiczne do wzoru wyprowadzonego dla prądu przejściowego w obwodzie zawierającym oporność rzeczywistą i indukcyjność (wzór 3), przeto możemy wyprowadzić tutaj takie same wnioski co do zanikania napięć i prądów, a mianowicie, po upływie czasu $\tau = RC$ wartości przejściowe spadną do 0,37, po upływie 2τ do 0,13, a po upływie 3τ do 0,05 swej pierwotnej wartości itd.

§ 110

POWSTAWANIE PRĄDU ZMIENNEGO W OBWODZIE Z OPORNOŚCIĄ RZECZYWISTĄ I POJEMNOŚCIĄ

Rozpatrujemy obwód jak na rys. 210, z tą różnicą, że zamiast napięcia prądu stałego mamy na zaciskach napięcie prądu zmiennego. Rozpoczniemy liczenie czasu w chwili zamknięcia obwodu i niech wartość chwilowa napięcia przechodzi wówczas przez fazę ψ. to znaczy, że wartość napięcia w chwili t będzie określona wzorem

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi).$$

Dla takiego obwodu będziemy mieli

$$Ri + u_c = U_m \sin(\omega t + \psi),$$

a ponieważ

$$i = C\frac{du_c}{dt},$$

przeto

$$\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{RC}u_c = \frac{U_m}{RC}\sin(\omega t + \psi). \tag{28}$$

Rozwiązujemy najpierw równanie uproszczone

$$\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{RC}u_c = 0,$$

$$\frac{du_c}{u_c} = -\frac{dt}{RC},$$

skąd

$$\ln u_c = -\frac{t}{RC} + \ln K,$$

gdzie K — stała dowolna, i ostatecznie

$$u_c = K e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Łatwo zauważyć, iż otrzymana wartość u_c stanowi wartość przejściową, więc możemy napisać

$$u_{cp} = K e^{-\frac{t}{RC}}. \qquad (29)$$

Całkę szczególną równania (28), która daje nam napięcie ustalone, moglibyśmy znaleźć na podstawie znanych metod matematycznych; prędzej ją znajdziemy rozumując w sposób następujący: jak wiadomo, w rozpatrywanym obwodzie powstaje prąd ustalony o wartości

$$i_u = I_m \sin(\omega t + \psi + \varphi), \qquad (30)$$

przyśpieszony w fazie względem napięcia na zaciskach źródła o kąt φ, przy czym

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{1}{\omega C}}{R} = \frac{1}{R\omega C},$$

zaś

$$I_m = \frac{U_m}{Z}, \text{ gdzie } Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2};$$

następnie wiadomo, że napięcie na pojemności (kondensatorze) równe jest iloczynowi prądu przez oporność pojemnościową i że to napięcie względem prądu jest opóźnione o kąt prosty. W ten sposób dla stanu ustalonego mamy

$$u_{cu} = I_m \frac{1}{\omega C} \sin\left(\omega t + \psi + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{U_m}{Z\omega C}\cos(\omega t + \psi + \varphi).$$

Dodając do siebie wartości przejściową i ustaloną napięcia na kondensatorze, otrzymamy napięcie w stanie nieustalonym

$$u_c = u_{cp} + u_{cu} = K e^{-\frac{t}{RC}} - \frac{U_m}{Z\omega C}\cos(\omega t + \psi + \varphi).$$

Zakładając w tym wzorze $t = 0$, $u_c = 0$, otrzymamy

$$K = \frac{U_m}{Z\omega C}\cos(\psi + \varphi), \qquad (31)$$

wobec czego

$$u_c = \frac{U_m}{Z\omega C}\left[\cos\,(\psi+\varphi)\,e^{-\frac{t}{RC}} - \cos\,(\omega t+\psi+\varphi)\right]. \quad (32)$$

Łatwo jest zauważyć, że wyraz w nawiasach nie może być większy od dwóch, gdyż

$$|\cos\,(\psi+\varphi)\,| \leqslant 1,$$

$$|\cos\,(\omega t+\psi+\varphi)\,| \leqslant 1,$$

$$e^{-\frac{t}{RC}} \leqslant 1,$$

wobec tego

$$\max u_c = \frac{2\,U_m}{Z\omega C},$$

a ponieważ $\frac{U_m}{Z} \cdot \frac{1}{C}$ stanowi wartość maksymalną napięcia na kondensatorze w stanie ustalonym, przeto przyszliśmy do wniosku, że w stanie nieustalonym napięcie na kondensatorze nie może przekroczyć podwójnej wartości napięcia, które mamy w stanie ustalonym.

Na podstawie wzoru (29) po uwzględnieniu (31) mamy

$$u_{cp} = \frac{U_m}{Z\omega C}\cos\,(\psi+\varphi)\,e^{-\frac{t}{RC}};$$

stąd znajdujemy prąd przejściowy

$$i_p = C\frac{d\,u_{cp}}{dt} = -\frac{U_m}{Z}\,\frac{1}{R\omega C}\cos\,(\psi+\varphi)\,e^{-\frac{t}{RC}};$$

ponieważ

$$\frac{U_m}{Z} = I_m, \quad \frac{1}{R\omega C} = \operatorname{tg}\varphi,$$

więc

$$i_p = -I_m\,\operatorname{tg}\varphi\cos\,(\psi+\varphi)\,e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (33)$$

Dodając do siebie wartości prądów ze wzorów (30) i (33), otrzymamy prąd w stanie nieustalonym

$$i = i_u + i_p = I_m\sin\,(\omega t+\psi+\varphi) - I_m\,\operatorname{tg}\varphi\,\cos\,(\psi+\varphi)\,e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (34)$$

Łatwo stwierdzić z wzorów (32) i (33), że nie będziemy mieli ani napięcia przejściowego, ani prądu przejściowego, gdy

$$\psi+\varphi = \pm\frac{\pi}{2}.$$

Dla $t = 0$ wzór (34) daje

$$i = I_m [\sin (\psi + \varphi) - \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos (\psi + \varphi)] = \frac{I_m}{\cos\varphi} \sin \psi;$$

największą wartość prądu w tym przypadku otrzymamy wtedy, gdy $\psi = \frac{\pi}{2}$, to znaczy, gdy w chwili zamknięcia obwodu napięcie przechodzi przez wartość maksymalną; wtedy

$$\max i = \frac{I_m}{\cos\varphi} = \frac{Z}{R} I_m$$

Przy małym $\cos \varphi$, czyli przy małej oporności rzeczywistej w porównaniu do oporności pojemnościowej, prąd i może w znacznym stopniu przewyższać prąd, który pozostaje w stanie ustalonym, a chociaż tego rodzaju przetężenie trwa nadzwyczaj krótko, tym niemniej w wielu przypadkach wskazane jest włączanie dodatkowych oporników do czasu ustalenia się prądu lub stopniowe zwiększanie napięcia działającego w obwodzie.

Dla przykładu weźmiemy

$$R = 1\,\Omega, \quad C = 1\,\mu F, \quad f = 50 \text{ Hz}$$

Wtedy

$$Z = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{314 \cdot 10^{-6}}\right)^2} = 3185\,\Omega,$$

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z} = \frac{1}{3185}; \ \sin\varphi \cong 1; \ \operatorname{tg} \varphi = 3185 .$$

Dla $\psi = \frac{\pi}{2}$ oraz $t = 0$, $\max i = 3185\, I_m$.

Prąd przejściowy w tej chwili ma wartość $3184\, I_m$. Stała czasu $\tau = RC = 10^{-6}$ s. Wartość prądu przejściowego spadnie do wartości I_m po upływie czasu t_0, gdy

$$e^{-10^6 t_0} = \frac{1}{3184},$$

czemu odpowiada $t_0 = 8 \cdot 10^{-6}$ s.

Do wartości $0{,}001\, I_m$ prąd przejściowy spadnie już po upływie $15 \cdot 10^{-6}$ s.

§ 111
WYŁADOWANIE KONDENSATORA PRZEZ OPORNOŚĆ RZECZYWISTĄ

Jeżeli rozpatrzymy obwód zawierający oporność rzeczywistą i kondensator, który w pewnej chwili zostaje zwarty w ten sposób, że ładunek znajdujący się na kondensatorze stanowi jedyne źródło energii elektrycznej, wówczas następuje wyładowanie kondensatora. Oznaczmy wartość napięcia na kondensatorze w chwili takiego zwarcia przez U_c, niezależnie od tego, czy to napięcie powstało od prądu stałego lub zmiennego, zaś wartość chwilową napięcia po zwarciu przez u_c oraz prądu powstającego przy wyładowaniu kondensatora przez i. Będziemy mieli dla takiego obwodu

$$Ri = u_c;$$

ponieważ prąd wyładowania ma kierunek odwrotny do kierunku prądu ładowania, więc

$$i = -C\frac{du_c}{dt};$$

$$RC\frac{du_c}{dt} + u_c = 0,$$

skąd, jak poprzednio,

$$u_c = Ke^{-\frac{t}{RC}}.$$

Zakładając $t = 0$, $u_c = U_c$, będziemy mieli

$$K = U_c,$$

$$u_c = U_c e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Prąd wyładowania

$$i = -C\frac{du_c}{dt} = \frac{U_c}{R}e^{-\frac{t}{RC}}.$$

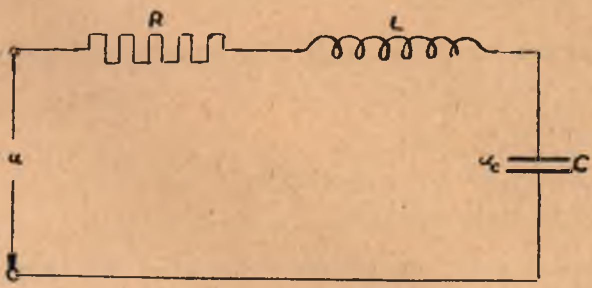
Widzimy więc, że w rozpatrywanym obwodzie zarówno napięcie na kondensatorze jak też i prąd wyładowania maleją stopniowo z biegiem czasu. Prędkość zanikania napięcia i prądu zależy od wartości stałej czasu $\tau = RC$.

§ 112

OBWÓD Z OPORNOŚCIĄ RZECZYWISTĄ, INDUKCYJNOŚCIĄ I POJEMNOŚCIĄ

Rozpatrując obwód jak na rys. 212, będziemy mieli w każdej chwili

$$Ri + L\frac{di}{dt} + u_c = u, \tag{35}$$



Rys. 212

$$i = C\frac{du_c}{dt}; \tag{36}$$

podstawiamy i z (36) do (35), wtedy

$$RC\frac{du_c}{dt} + LC\frac{d^2u_c}{dt^2} + u_c = u$$

albo

$$\frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{LC}u_c = \frac{1}{LC}u; \tag{37}$$

u może być napięciem o wartości stałej lub zmiennej.

Przy rozwiązywaniu równania (37) przede wszystkim musimy znaleźć całkę ogólną równania uproszczonego

$$\frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{LC}u_c = 0; \tag{38}$$

następnie musimy wyszukać całkę szczególną równania (37) i obie te znalezione całki dodać do siebie, wówczas otrzymamy całkę ogólną równania (37).

Przypomnijmy, że równanie różniczkowe liniowe rzędu drugiego o stałych współczynnikach typu

$$y'' + p_1y' + p_2y = 0$$

rozwiązać możemy w ten sposób, że piszemy algebraiczne równanie charakterystyczne

$$k^2 + p_1 k + p_2 = 0,$$

które po rozwiązaniu może dać pierwiastki

1) k_1 i k_2 — rzeczywiste i różne,

2) $k_1 = k_2 = k_0$ — rzeczywiste i równe,

3) $k_1 = m + nj$, $k_2 = m - nj$, gdzie $j = \sqrt{-1}$, w postaci liczb zespolonych sprzężonych.

Całki takiego równania będą w tych przypadkach

1) $y = A_1 e^{k_1 x} + A_2 e^{k_2 x}$, (39)

2) $y = e^{k_0 x}(A_1 + A_2 x)$, (40)

3) $y = e^{mx}(A_1 \sin nx + A_2 \cos nx)$, (41)

gdzie A_1 i A_2 — stałe dowolne.

Na tej podstawie, rozwiązując równanie (38), napiszemy równanie charakterystyczne w postaci

$$k^2 + \frac{R}{L}k + \frac{1}{LC} = 0,$$

skąd

$$k_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}, \tag{42}$$

$$k_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}. \tag{43}$$

Oczywiście, w zależności od tego, czy podpierwiastkowa jest większa od zera, równa zeru lub mniejsza od zera, otrzymamy każdy z trzech rozpatrzonych przypadków, a więc przy

$R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ pierwiastki będą rzeczywiste i różne,

$R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ pierwiastki będą rzeczywiste i równe,

$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ pierwiastki będą liczbami zespolonymi sprzężonymi.

Przypadek I.

$$R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Łatwo zauważyć, że oba pierwiastki k_1 i k_2 ze wzorów (42) i (43) mają wartości ujemne, przy czym wartość bezwzględna pierwiastka k_2 jest większa od wartości bezwzględnej pierwiastka k_1; oznaczając te wartości bezwzględne przez a_1 i a_2, czyli zakładając

$$k_1 = -a_1,$$
$$k_2 = -a_2,$$

gdzie a_1 i a_2 stanowią liczby dodatnie, przy czym $a_2 > a_1$, możemy na podstawie wzoru (39) napisać

$$u_c = A_1 e^{-a_1 t} + A_2 e^{-a_2 t}. \tag{44}$$

Przypadek II.

$$R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Jak widać ze wzorów (42) i (43),

$$k_1 = k_2 = -\frac{R}{2L} = -a,$$

gdzie $a = \frac{R}{2L}$ jest liczbą dodatnią.

Na podstawie wzoru (40) będziemy mieli

$$u_c = e^{-at}(A_1 + A_2 t). \tag{45}$$

Przypadek III.

$$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Pierwiastki ze wzorów (42) i (43) możemy wówczas przepisać w postaci

$$k_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \cdot \sqrt{-1}$$

$$k_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \cdot \sqrt{-1}$$

oznaczając

$$\frac{R}{2L} = a,$$

$$\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = \beta,$$

będziemy mieli

$$k_1 = -a + j\beta,$$

$$k_2 = -a - j\beta,$$

wobec tego na podstawie wzoru (41) otrzymamy

$$u_c = e^{-at}(A_1 \sin \beta t + A_2 \cos \beta t). \tag{46}$$

§ 113

WYŁADOWANIE KONDENSATORA APERIODYCZNE

Rozpatrzmy przypadek, gdy rozpatrywany obwód zawierający (rys. 212) R, L i C w pewnej chwili został zwarty. Wtedy nastąpi wyładowanie kondensatora posiadającego w początkowej chwili napięcie o określonej wartości, np. U_0, zaś prąd płynący będzie prądem wyładowania kondensatora, którego kierunek jest przeciwny do kierunku prądu płynącego przedtem od zewnętrznego źródła. Dla takiego obwodu będziemy mieli

$$\text{dla } t = 0,\ u_c = U_0,\ i = 0, \tag{47}$$

$$i = -C\frac{du_c}{dt}. \tag{48}$$

Wobec tego, że $u = 0$, zamiast równania (37) będziemy mieli równanie (38), dla którego mamy już znalezione całki ogólne, a więc

w przypadku I, według wzoru (44),

$$u_c = A_1 e^{-a_1 t} + A_2 e^{-a_2 t},$$

skąd

$$i = -C\frac{du_c}{dt} = A_1 C a_1 e^{-a_1 t} + A_2 C a_2 e^{-a_2 t};$$

zakładając w obu tych wzorach wartości ze wzorów (47), otrzymamy:

$$A_1 + A_2 = U_0,$$

$$A_1 a_1 + A_2 a_2 = 0,$$

skąd:

$$A_1 = \frac{a_2}{a_2 - a_1} U_0,$$

$$A_2 = -\frac{a_1}{a_2 - a_1} U_0.$$

Wobec tego:

$$u_c = \left\{ \frac{a_2}{a_2 - a_1} e^{-a_1 t} - \frac{a_1}{a_2 - a_1} e^{-a_2 t} \right\} U_0$$

albo

$$u_c = \frac{U_0}{a_2 - a_1} \left(a_2 e^{-a_1 t} - a_1 e^{-a_2 t} \right). \tag{49}$$

Biorąc pochodną u_c względem t, otrzymamy:

$$\frac{du_c}{dt} = \frac{U_0}{a_2 - a_1} \left(- a_1 a_2 e^{-a_1 t} + a_1 a_2 e^{-a_2 t} \right) =$$

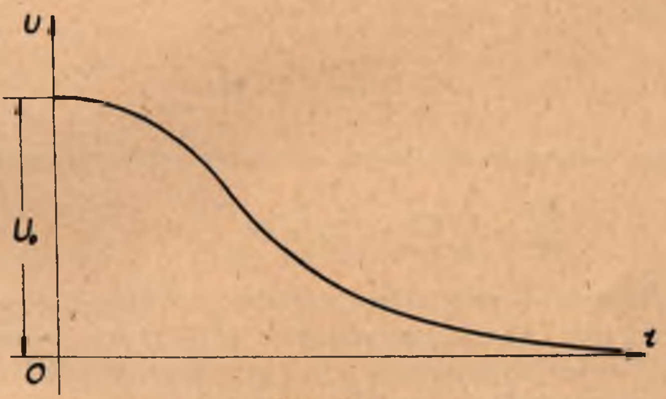
$$= \frac{a_1 a_2}{a_2 - a_1} U_0 \left(e^{-a_2 t} - e^{-a_1 t} \right); \tag{50}$$

ponieważ, jak to przedtem stwierdziliśmy, $a_2 > a_1$, przeto:

$$e^{-a_2 t} < e^{-a_1 t}$$

i wyraz w nawiasach wzoru (50) jest liczbą ujemną, zaś wyraz przed tym nawiasem jest liczbą dodatnią, więc

$$\frac{du_c}{dt} < 0;$$



Rys. 213

na tej podstawie stwierdzamy, że u_c jest funkcją malejącą z biegiem czasu i ma wartość zawsze dodatnią, gdyż

$$a_2 > a_1, \; e^{-a_1 t} > e^{-a_2 t}, \; a_2 e^{-a_1 t} > a_1 e^{-a_2 t},$$

więc najmniejsza jej wartość $= 0$, teoretycznie dla $t = \infty$ (rys. 213);

wartość prądu i znajdziemy na podstawie wzorów (48) i (50):

$$i = -C\frac{du}{dt} = -\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_2-\alpha_1}CU_0\left(e^{-\alpha_2 t} - e^{-\alpha_1 t}\right) =$$

$$= \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_2-\alpha_1}CU_0\left(e^{-\alpha_1 t} - e^{-\alpha_2 t}\right). \tag{51}$$

Dla zbadania tej funkcji bierzemy pochodną względem t:

$$\frac{di}{dt} = \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_2-\alpha_1}CU_0\left(\alpha_2 e^{-\alpha_2 t} - \alpha_1 e^{-\alpha_1 t}\right); \tag{52}$$

wyraz w nawiasach może być większy lub mniejszy od zera lub może się równać zeru, mianowicie $\frac{di}{dt} = 0$, jeżeli

$$\alpha_1 e^{-\alpha_1 t} = \alpha_2 e^{-\alpha_2 t}, \tag{53}$$

skąd

$$e^{(\alpha_2-\alpha_1)t} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1},$$

$$(\alpha_2-\alpha_1)t = l_n\frac{\alpha_2}{\alpha_1},$$

$$t = \frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}l_n\frac{\alpha_2}{\alpha_1} > 0. \tag{54}$$

Biorąc jeszcze raz pochodną we wzorze (52), otrzymamy

$$\frac{d^2 i}{dt^2} = \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_2-\alpha_1}CU_0\left(\alpha_1^2 e^{-\alpha_1 t} - \alpha_2^2 e^{-\alpha_2 t}\right). \tag{55}$$

Dla wartości t, przy której pierwsza pochodna staje się równą zeru, czyli gdy ma miejsce równanie (53), druga pochodna i ze wzoru (55) będzie ujemna, gdyż wyraz w nawiasach staje się mniejszy od zera; rzeczywiście, na podstawie wzoru (53)

$$\alpha_1^2 e^{-\alpha_1 t} - \alpha_2^2 e^{-\alpha_2 t} = \alpha_1^2 e^{-\alpha_1 t} - \alpha_1\alpha_2 e^{-\alpha_1 t} =$$

$$= \alpha_1 e^{-\alpha_1 t}(\alpha_1-\alpha_2) < 0,$$

gdyż $\alpha_1 < \alpha_2$.

Wobec tego przy znalezionej we wzorze (54) wartości t rozpatrywana funkcja i ze wzoru (51) otrzymuje wartość największą, ponieważ zaś $e^{-a_1 t} > e^{-a_2 t}$, przeto i zawsze jest większe od zera; tylko przy $t = \infty$, $i = 0$ oraz przy $t = 0$, $i = 0$ (rys. 214).

W przypadku II

$$R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}\cdot$$

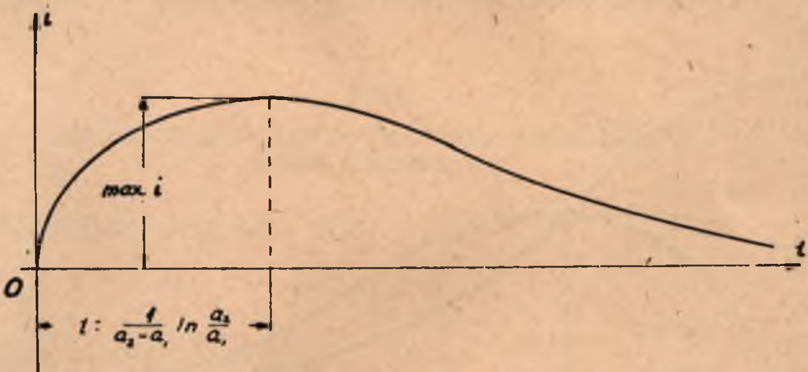
$$k_1 = k_2 = -\frac{R}{2L} = -a;$$

stosujemy wzór (45)

$$u_c = e^{-at}(A_1 + A_2 t), \tag{56}$$

skąd

$$i = -C\frac{du_c}{dt} = -Ce^{-at}\left(A_2 - A_1 a - A_2 a t\right); \tag{57}$$



Rys. 214

zakładając $t = 0$, $u_c = U_0$, $i = 0$,

będziemy mieli

$$A_1 = U_0,$$

$$A_2 - A_1 a = 0,$$

czyli

$$A_1 = U_0,$$

$$A_2 = aU_0.$$

Podstawiając te wartości do wzorów (56) i (57) otrzymamy

$$u_c = U_0(1 + at)e^{-at}, \tag{58}$$

$$i = Ca^2 t U_0 e^{-at};$$

wobec tego, że

$$C a^2 = C \frac{R^2}{4L^2},$$

zaś

$$R^2 = 4\frac{L}{C},$$

$$C a^2 = \frac{C}{4L^2} \cdot \frac{4L}{C} = \frac{1}{L},$$

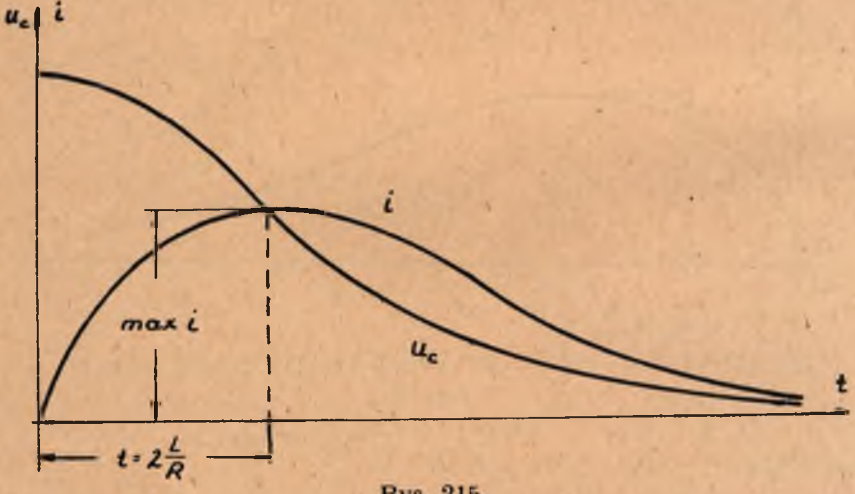
możemy napisać

$$i = \frac{U_0}{L} t e^{-at}; \tag{59}$$

u_c ze wzoru (58) jest funkcją malejącą, gdyż jej pochodna

$$\frac{du_c}{dt} = -a^2 t e^{-at} < 0,$$

więc napięcie na kondensatorze stopniowo zanika, natomiast prąd ze wzoru (59), tak samo jak w przypadku I, najpierw wzrasta, do-



Rys. 215

chodzi do swej największej wartości, po czym stopniowo zanika; łatwo to stwierdzić z następujących działań:

$$\frac{di}{dt} = \frac{U_0}{L} e^{-at} (1 - at).$$

Z równania

$$e^{-at} (1 - at) = 0$$

znajdujemy

$$t = \frac{1}{a};$$

przy tej wartości t druga pochodna

$$\left|\frac{d^2 i}{dt^2}\right|_{t=\frac{1}{a}} = \left|e^{-at}(a^2 t - 2a)\right|_{t=\frac{1}{a}} = -e^{-1} a < 0,$$

wobec czego stwierdzamy, że max i będzie przy

$$t = \frac{1}{a} = \frac{1}{\frac{R}{2L}} = 2\frac{L}{R};$$

wartość tego prądu największego będzie

$$\max i = \frac{U_0}{L} 2 \frac{L}{R} e^{-1} = \frac{2U_0}{Re} \cong 0{,}74 \frac{U_0}{R}.$$

Rys. 215 podaje przebieg u_c oraz i. W obu rozpatrzonych przypadkach wyładowanie zachodzi w sposób równomierny bez wahań i z tego powodu takie wyładowania możemy nazwać aperiodycznymi.

§ 114

WYŁADOWANIE KONDENSATORA OSCYLACYJNE WZÓR THOMSONA

Rozpatrzmy przypadek III:

$$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Na podstawie wzoru (46)

$$u_c = e^{-at}(A_1 \sin \beta t + A_2 \cos \beta t), \tag{60}$$

gdzie

$$a = \frac{R}{2L}, \quad \beta = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - a^2}.$$

Znajdujemy

$$i = -C\frac{du_c}{dt} = Ce^{-at}\Big\{a A_1 \sin \beta t +$$

$$+ aA_2 \cos \beta t + \beta A_2 \sin \beta t - \beta A_1 \cos \beta t\Big\}. \tag{61}$$

Zakładając we wzorach (60) i (61) $t = 0$, $u_c = U_0$, $i = 0$, otrzymamy

$$A_2 = U_0, \qquad aA_2 - \beta A_1 = 0,$$

skąd

$$A_1 = \frac{\alpha}{\beta} U_0,$$

$$A_2 = U_0;$$

wobec tego

$$u_c = \frac{U_0}{\beta} e^{-\alpha t} (\alpha \sin \beta t + \beta \cos \beta t),$$

$$i = C U_0 e^{-\alpha t} \frac{(\alpha^2 + \beta^2)}{\beta} \sin \beta t.$$

Ponieważ

$$\alpha \sin \beta t + \beta \cos \beta t = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \sin (\beta t + \delta),$$

gdzie

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\beta}{\alpha},$$

zaś

$$\alpha^2 + \beta^2 = \alpha^2 + \frac{1}{LC} - \alpha^2 = \frac{1}{LC},$$

przeto

$$u_c = \frac{U_0 e^{-\alpha t}}{\beta \sqrt{LC}} \sin (\beta t + \delta), \tag{62}$$

$$i = \frac{U_0 e^{-\alpha t}}{\beta L} \sin \beta t. \tag{63}$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\beta}{\alpha}, \quad \sin \delta = \beta \sqrt{LC}, \quad \cos \delta = \alpha \sqrt{LC}. \tag{64}$$

Łatwo jest zauważyć, że stosunek pomiędzy amplitudami u_c oraz i wynosi $\sqrt{\frac{L}{C}}$; prąd i jest opóźniony względem u_c o kąt $\delta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\beta}{\alpha}$.

Stwierdzamy, że napięcie na kondensatorze u_c oraz prąd i, płynący w obwodzie, mają przebieg nieco odmienny od przebiegu sinusoidalnego; różnica polega na tym, że na zmianę wartości tych wielkości ma wpływ funkcja wykładnicza $e^{-\alpha t}$; ta ostatnia, jako funkcja malejąca, tłumi zjawisko, doprowadzając wreszcie wartości do zera. Tego rodzaju przebieg można nazwać przebiegiem sinusoidalnym tłumionym. W naszym przypadku pulsację stanowi β częstotliwość zaś $f_w = \frac{\beta}{2\pi}$. W obwodzie zachodzą więc drgania napięcia i prądu, czyli oscylacje; drgania te nazywamy *własnymi,* dla odróżnienia od drgań *wymuszonych*, wywołanych napięciem prądu zmiennego, przyłożonym od zewnątrz źródła. Taki obwód nazywamy *obwodem oscylacyjnym.* Częstotliwość drgań własnych wyraża się wzorem

$$f_w = \frac{\beta}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}. \qquad (65)$$

Amplitudy napięcia na kondensatorze i prądu wynoszą

$$U_{cm} = \frac{U_0}{\beta\sqrt{LC}} e^{-\alpha t},$$

$$I_m = \frac{U_0}{\beta L} e^{-\alpha t}.$$

Iloraz tych amplitud, równy $\sqrt{\frac{L}{C}}$, możemy nazwać *opornością pozorną drgań własnych.*

Jak widzimy, amplitudy te stanowią funkcje malejące z biegiem czasu, i szybkość, z jaką one maleją, zależy od współczynnika tłumienia

$$\alpha = \frac{R}{2L}.$$

Ponieważ

$$\frac{du_c}{dt} = -\frac{i}{C},$$

więc na podstawie wzoru (63)

$$\frac{du_c}{dt} = -\frac{U_0 e^{-\alpha t}}{\beta LC} \sin \beta t;$$

pochodna ta staje się równą zeru dla wartości

$$\beta t = 0,\ \pi, \ldots,\ k\pi;$$

$$t = 0,\ \frac{\pi}{\beta},\ \ldots,\ k\frac{\pi}{\beta},$$

gdzie k — dowolna liczba całkowita; zaś druga pochodna

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} = \frac{U_0 e^{-\alpha t}}{\beta LC} [\alpha \sin \beta t - \beta \cos \beta t]$$

dla powyższych wartości będzie mniejsza od zera, gdy k jest równe zeru lub jest liczbą parzystą; natomiast druga pochodna będzie większa od zera, gdy k jest liczbą nieparzystą: będziemy mieli więc szereg największych i najmniejszych (największych dodatnich i ujemnych) wartości napięcia u_c, idących w równych odstępach czasu; wartości te maleją z biegiem czasu według prawa funkcji wykładniczej $e^{-\alpha t}$. Największą wartość będziemy mieli dla $t = 0$, wtedy ze wzoru (62)

$$\max u_c = \frac{U_0}{\beta\sqrt{LC}} \sin \delta,$$

a ponieważ (wzór 64) $\sin \delta = \beta\sqrt{LC}$, więc

$$\max u_c = U_0.$$

Napięcie więc na kondensatorze zmienia się według prawa sinusoidy tłumionej i posiada największą swą wartość w pierwszej chwili po rozpoczęciu się wyładowania kondensatora.

Dla prądu i ze wzoru (63)

$$\frac{di}{dt} = \frac{U_0 e^{-\alpha t}}{\beta L} (\beta \cos \beta t - \alpha \sin \beta t) =$$

$$= \frac{\alpha U_0 e^{-\alpha t}}{\beta L} (\cos \beta t \operatorname{tg} \delta - \sin \beta t) =$$

$$= -\frac{U_0 e^{-\alpha t}}{\operatorname{tg} \delta \cdot L \cos \delta} \sin (\beta t - \delta) =$$

$$= -\frac{U_0 e^{-\alpha t} \sin (\beta t - \delta)}{\sin \delta \cdot L}.$$

Pochodna ta staje się równą zeru, gdy

$$\sin (\beta t - \delta) = 0;$$

$$\beta t - \delta = k\pi \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$t = \frac{\delta}{\beta}, \quad \frac{\pi}{\beta} + \frac{\delta}{\beta}, \quad \frac{2\pi}{\beta} + \frac{\delta}{\beta} \ldots;$$

druga pochodna

$$\frac{d^2 i}{dt^2} = -\frac{U_0 e^{-\alpha t}}{\sin \delta \cdot L} [\beta \cos (\beta t - \delta) - \alpha \sin (\beta t - \delta)]$$

dla powyższych wartości $(\beta t - \delta)$ będzie ujemną, gdy $k = 0$ oraz gdy k jest liczbą parzystą, natomiast będzie dodatnią, gdy k jest liczbą nieparzystą. W ten sposób stwierdzamy, że również prąd wyładowania będzie przechodził przez szereg największych i najmniejszych wartości, zmieniając się oscylacyjnie według wzoru (63) Oczywiście, największą ze wszystkich wartości tego prądu otrzyma się dla najmniejszej wartości t, dającej maximum funkcji i, to znaczy dla

$$\beta t - \delta = 0,$$

$$t = \frac{\delta}{\beta}.$$

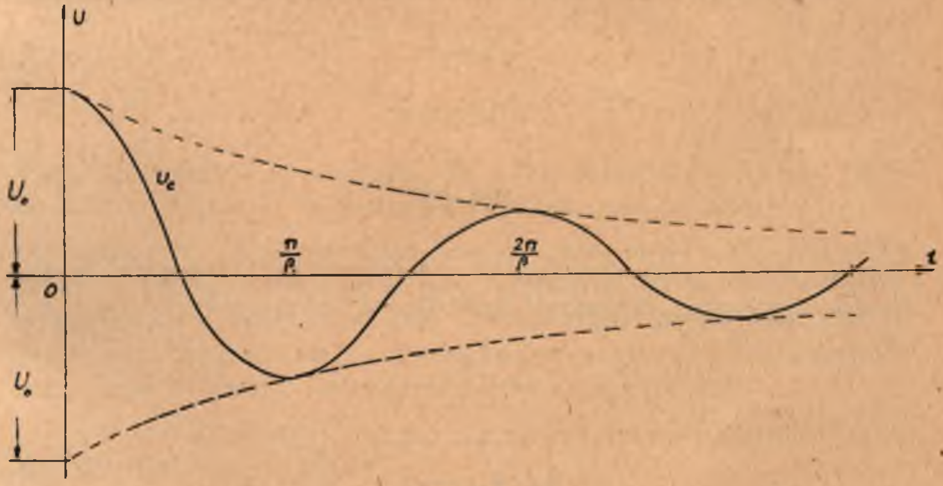
Wtedy ze wzoru (63)

$$\max i = \frac{U_0 e^{-\frac{\alpha}{\beta}\delta} \cdot \sin \delta}{\beta L},$$

a ponieważ $\sin \delta = \beta \sqrt{LC}$, więc

$$\max i = U_0 \sqrt{\frac{C}{L}} \cdot e^{-\frac{\alpha}{\beta}\delta}. \tag{66}$$

Przebieg napięcia u_c oraz prądu i w obwodzie oscylacyjnym podany jest na rys. 216 i rys. 217.



Rys. 216

Zarówno dla napięcia jak i dla prądu miarą tłumienia jest funkcja

$$e^{-\alpha t};$$

stosunek amplitud, odpowiadających zmianie czasu o cały okres T, wynosi

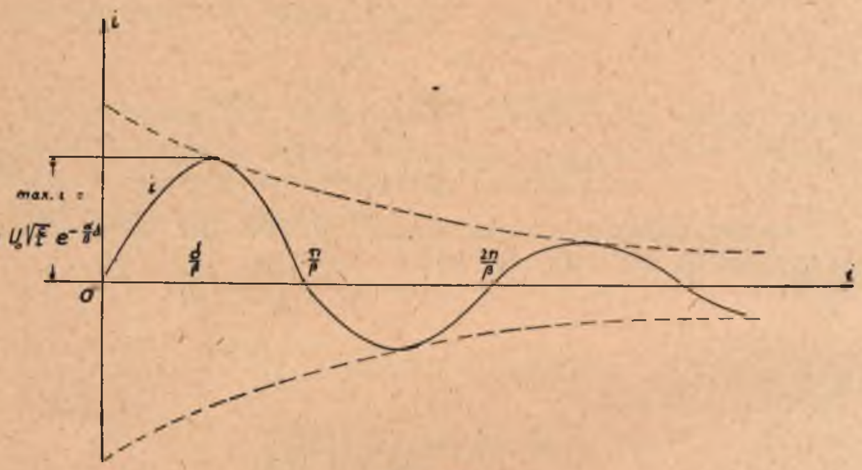
$$\frac{e^{-\alpha t}}{e^{-\alpha(t+T)}} = e^{\alpha T};$$

logarytm naturalny tego stosunku, równy

$$\lambda = aT = \frac{R}{2L} T,$$

nazywamy *logarytmicznym dekrementem tłumienia.*

Na szczególne uwzględnienie zasługuje przypadek, gdy R jest bardzo małe w porównaniu do L, tak iż praktycznie $\frac{R}{2L}$ można



Rys. 217

założyć równe zeru; powstające w tym przypadku drgania w obwodzie nazywamy *drganiami swobodnymi;* mamy więc

$$a = \frac{R}{2L} = 0,$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{LC} - a^2} = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\beta}{a} = \infty, \quad \delta = \frac{\pi}{2};$$

ze wzorów (62), (63) i (65) otrzymamy

$$u_c = U_0 \sin\left(\beta t + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$i = U_0 \sqrt{\frac{C}{L}} \sin \beta t,$$

$$\left. \begin{aligned} f_s &= \frac{\beta}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}, \\ T_s &= \frac{1}{f_s} = 2\pi\sqrt{LC}. \end{aligned} \right| \tag{67}$$

Jeżeli weźmiemy pod uwagę, że rezonans napięć w obwodzie zachodzi, gdy

$$\omega L = \frac{1}{\omega C},$$

czyli

$$\omega^2 = \frac{1}{LC},$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}},$$

to znaczy przy

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}},$$

$$T = 2\pi\sqrt{LC},$$

wtedy dojdziemy do wniosku, że częstotliwość drgań swobodnych odpowiada warunkowi rezonansu napięć.

Wzór (67) na okres drgań swobodnych obwodu oscylacyjnego znany jest jako wzór Thomsona, ponieważ był po raz pierwszy wyprowadzony przez Williama Thomsona, późniejszego lorda Kelvina; oczywiście że w rozpatrywanym przypadku tłumienia nie ma i drgania trwają, teoretycznie, czas nieograniczony.

Dla obwodów oscylacyjnych wprowadzony został termin *współczynnik tłumienia* w postaci

$$d = R\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Oznaczając pulsację drgań swobodnych takiego obwodu przez ω_s, przy czym

$$\omega_s = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

otrzymamy dla poprzednio rozpatrywanych współczynników α i β następujące zależności:

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{d}{2L\sqrt{\frac{C}{L}}} = \frac{d}{2\sqrt{LC}} = \frac{\omega_s d}{2}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{LC} - \alpha^2} = \sqrt{\omega_s^2 - \omega_s^2\left(\frac{d}{2}\right)^2} = \omega_s\sqrt{1 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}$$

§ 115

ŁADOWANIE KONDENSATORA PRĄDEM STAŁYM PRZEZ OPORNOŚĆ RZECZYWISTĄ I INDUKCYJNOŚĆ

Jeżeli przyłączymy obwód (rys. 212) do źródła prądu stałego o napięciu U, wówczas dla określenia napięcia na kondensatorze będziemy mieli na podstawie wzoru (37) równanie różniczkowe

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{LC} u_c = \frac{1}{LC} U, \tag{68}$$

zaś prąd płynący w obwodzie będzie określony wzorem (36)

$$i = C\frac{du_c}{dt}.$$

Całka szczególna równania (68) będzie $u_c = U$, co łatwo sprawdzić; wobec tego całkę ogólną tegoż równania otrzymamy dodając U do całek ogólnych równania uproszczonego (38), które znaleźliśmy już dla trzech rozmaitych przypadków.

Dla określenia stałych wchodzących do tych całek ogólnych będziemy mieli warunek graniczny

$$t = 0,\ u_c = 0,\ i = 0.$$

W ten sposób otrzymamy w przypadku I, gdy

$$R > 2\sqrt{\frac{L}{C}},$$

według wzoru (44)

$$u_c = A_1 e^{-\alpha_1 t} + A_2 e^{-\alpha_2 t} + U, \tag{69}$$

$$i = C\frac{du_c}{dt} = -\alpha_1 C A_1 e^{-\alpha_1 t} - \alpha_2 C A_2 e_2^{-\alpha_2 t}, \tag{70}$$

skąd przy $t = 0$

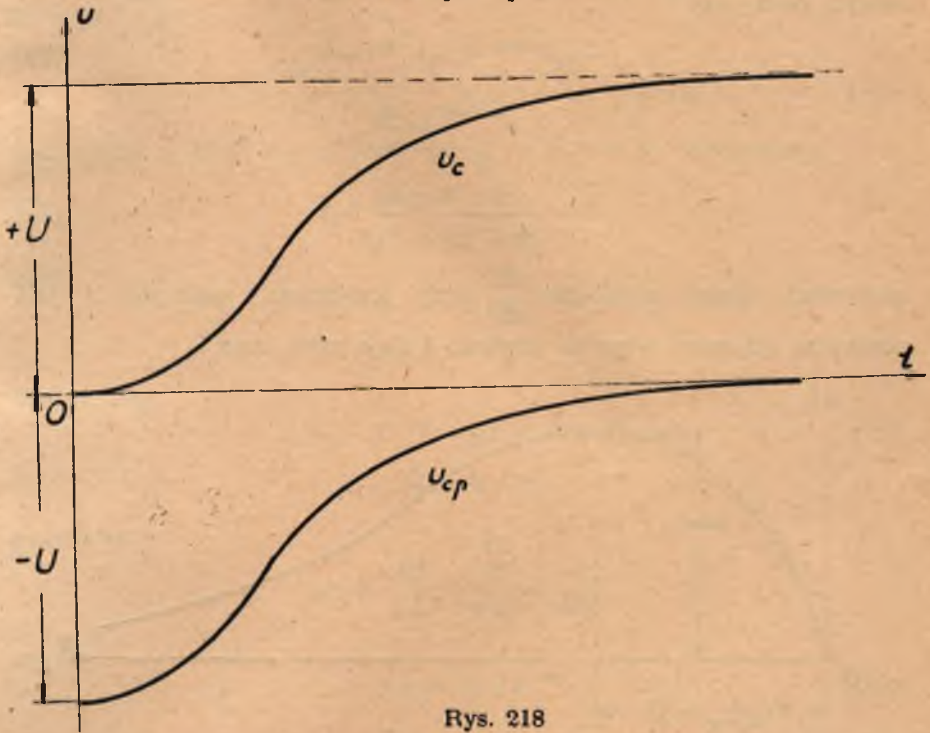
$$A_1 + A_2 = -U,$$

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 = 0.$$

Rozwiązując te równania, znajdziemy

$$A_1 = -\frac{a_2}{a_2 - a_1}\,U;$$

$$A_2 = \frac{a_1}{a_2 - a_1}\,U.$$



Rys. 218

Wobec tego

$$u_c = -\frac{U}{a_2 - a_1}\left\{+a_2 e^{-a_1 t} - a_1 e^{-a_2 t}\right\} + U. \tag{71}$$

Jeżeli porównamy pierwszy wyraz prawej strony tego wzoru ze wzorem (49), to spostrzegamy, że różni się on od tego ostatniego tylko znakiem; poprzednio już zbadaliśmy, że taka funkcja jest malejącą z biegiem czasu; wyraz ten stanowi napięcie przejściowe na kondensatorze, gdy wyraz drugi U stanowi napięcie ustalone

$$u_{cp} = -\frac{U}{a_2 - a_1}\left\{a_2 e^{-a_1 t} - a_1 e^{-a_2 t}\right\}. \qquad (72$$

Przebieg napięć uwidoczniony jest na rys. 218.

Prąd i znajdziemy podstawiając wartości stałych A_1 i A_2 do wzoru (70), wtedy

$$i = CU\frac{a_1 a_2}{a_2 - a_1}\left\{e^{-a_1 t} - e^{-a_2 t}\right\}; \tag{73}$$

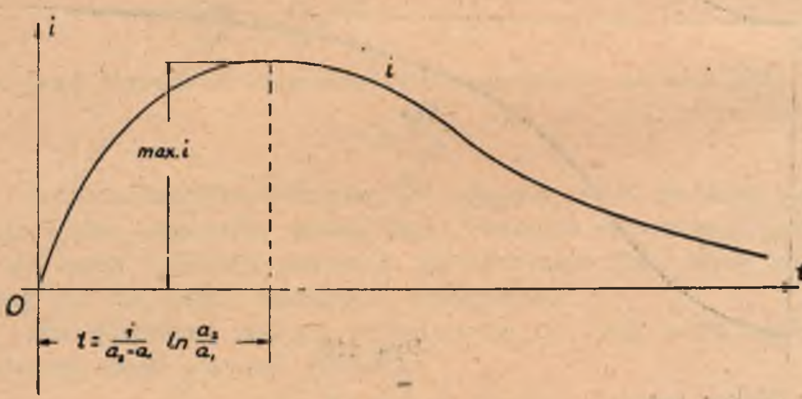
badając funkcję w nawiasach, znajdziemy, że pochodna $\frac{di}{dt}$ staje się równą zeru, gdy

$$-a_1 e^{-a_1 t} + a_2 e^{-a_2 t} = 0, \tag{74}$$

$$e^{(a_2 - a_1)t} = \frac{a_2}{a_1},$$

$$t = \frac{1}{a_2 - a_1} ln\frac{a_2}{a_1} > 0; \tag{75}$$

ponieważ druga pochodna $\frac{d^2 i}{dt^2}$ przy znalezionej wartości t jest mniejszą od zera, więc ta wartość t daje nam max i.



Rys. 219

Uwzględniając (73), (74) i (75), otrzymamy

$$\max i = CU\frac{a_1 a_2}{a_2 - a_1}\left\{e^{-a_1 t} - \frac{a_1}{a_2}e^{-a_1 t}\right\} =$$

$$= CU a_1 e^{-a_1 t} =$$

$$= CU a_1 e^{-\frac{a_1}{a_2 - a_1}\cdot ln\frac{a_2}{a_1}} \tag{76}$$

Rys. 219 podaje przebieg ładowania kondensatora.

W przypadku II, gdy

$$R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}\,,$$

według wzoru (56)

$$u_c = e^{-at}(A_1 + A_2 t) + U, \tag{77}$$

gdzie $a = \dfrac{R}{2L}$;

$$i = C\frac{du_c}{dt} = Ce^{-at}(A_2 - aA_1 - aA_2 t); \tag{78}$$

zakładając w tych wzorach $t = 0$, $u_c = 0$, $i = 0$, otrzymamy

$$A_1 = -U,$$

$$A_2 - aA_1 = 0,$$

skąd

$$A_1 = -U,$$

$$A_2 = -aU.$$

Wobec tego

$$u_c = -U(1 + at)e^{-at} + U, \tag{79}$$

$$i = UCa^2te^{-at};$$

ponieważ

$$a^2 = \frac{R^2}{4L^2} = \frac{\frac{4L}{C}}{4L^2} = \frac{1}{LC},$$

więc

$$i = \frac{U}{L}te^{-at} \tag{80}$$

We wzorze (77) pierwszy wyraz z prawej strony stanowi napięcie przejściowe u_{p}; jest to funkcja malejąca z biegiem czasu. Przebieg napięć podaje rys. 220.

Dla funkcji prądu znajdujemy, jak w analogicznym przypadku wyładowania (§ 106), max i przy

$$t = \frac{1}{a} = \frac{2L}{R},$$

czyli

$$\max i = \frac{U}{L}\cdot\frac{2L}{R}e^{-1} = \frac{2U}{Re} \cong 0{,}74\frac{U}{R}\,. \tag{81}$$

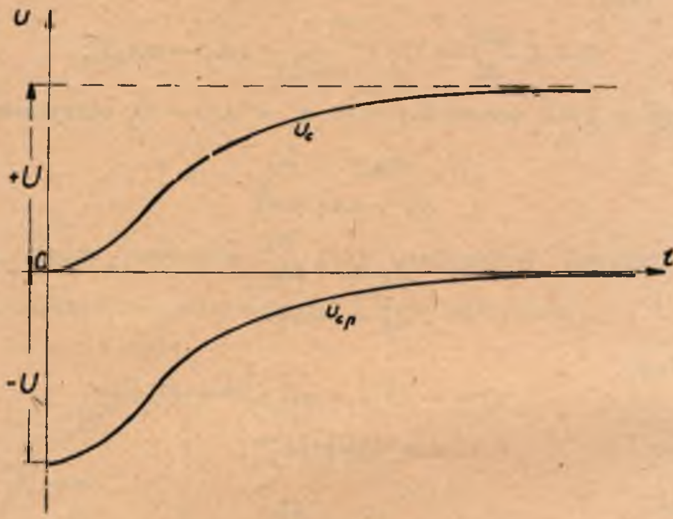
Przebieg prądu ładowania przedstawiony jest na rys. 221.

W przypadku III, gdy

$$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}},$$

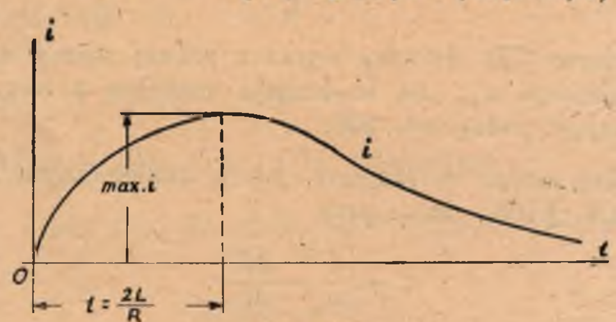
na podstawie wzoru (60)

$$u_c = e^{-\alpha t}(A_1 \sin \beta t + A_2 \cos \beta t) + U,$$



Rys. 220

$$i = C\frac{du_c}{dt} = Ce^{-\alpha t}\begin{Bmatrix} -\alpha A_1 \sin \beta t - \alpha A_2 \cos \beta t - \\ -\beta A_2 \sin \beta t + \beta A_1 \cos \beta t \end{Bmatrix}.$$



Rys. 221

Zakładając w tych wzorach

$$t = 0, \; u_c = 0, \; i = 0,$$

otrzymamy

$$A_2 = -U,$$

$$-\alpha A_2 + \beta A_1 = 0,$$

skąd

$$A_1 = -\frac{\alpha}{\beta} U; \qquad A_2 = -U;$$

wobec tego

$$u_c = -\frac{U}{\beta} e^{-\alpha t} (\alpha \sin \beta t + \beta \cos \beta t) + U,$$

$$i = C U e^{-\alpha t} \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta} \sin \beta t.$$

Mamy

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{1}{LC},$$

$$\alpha \sin \beta t + \beta \cos \beta t = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \sin (\beta t + \delta) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{LC}} \sin (\beta t + \delta),$$

gdzie

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\beta}{\alpha},$$

przeto

$$u_c = -\frac{U e^{-\alpha t}}{\beta \sqrt{LC}} \sin (\beta t + \delta) + U, \tag{82}$$

$$i = \frac{U e^{-\alpha t}}{\beta L} \sin \beta t. \tag{83}$$

Napięcie przejściowe na kondensatorze wynosi

$$u_{cp} = -\frac{U}{\beta \sqrt{LC}} e^{-\alpha t} \cdot \sin (\beta t + \delta) .$$

Jest to funkcja zupełnie ta sama jak i we wzorze (62), dla której znaleźliśmy, że maleje ona zmniejszając się sinusoidalnie, przechodząc przez szereg wartości największych dodatnich i ujemnych dla

$$t = 0, \frac{\pi}{\beta}, \frac{2\pi}{\beta}, \ldots$$

Najbliższą największą wartość dodatnią dla napięcia przejściowego otrzymamy, gdy $t = \frac{\pi}{\beta}$, wtedy bowiem

$$\sin (\beta t + \delta) = \sin (\pi + \delta) = -\sin \delta;$$

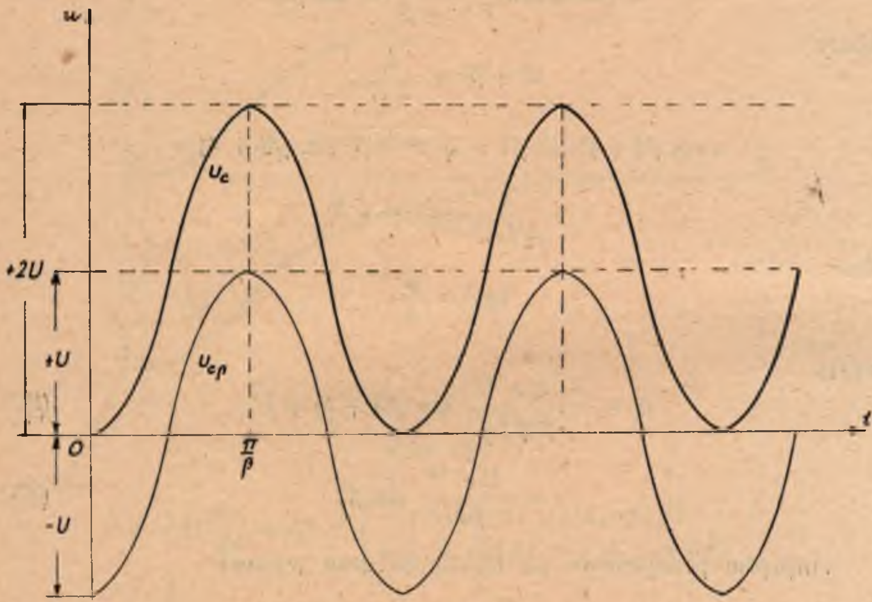
ponieważ

$$\sin\delta = \beta\sqrt{LC},$$

więc dla $t = \dfrac{\pi}{\beta}$ otrzymamy

$$\max u_c = \frac{U e^{-\alpha t}}{\beta\sqrt{LC}}\,\beta\sqrt{LC} + U =$$

$$= U\left(1 + e^{-\alpha t}\right) = U\left(1 + e^{-\frac{\alpha}{\beta}\pi}\right).$$



Rys. 222

Funkcja wykładnicza w nawiasie nie może być większa od 1, wobec tego możemy napisać

$$\max u_c \leqslant 2U.$$

Co się tyczy prądu i, to ponieważ wzór (83) jest zupełnie taki sam jak i wzór (63), otrzymamy więc największą jego wartość dla

$$t = \frac{\delta}{\beta}$$

$$\max i = U\sqrt{\frac{C}{L}}\, e^{-\frac{\alpha}{\beta}\delta}.$$

Na rys. 222 mamy przebieg napięcia na kondensatorze w przypadku, gdy α jest małe $\left(\frac{R}{2L} \simeq 0\right)$.

Przebieg prądu ładowania jest zupełnie taki sam jak przy wyładowaniu (rys. 217).

§ 116

POWSTAWANIE PRĄDU ZMIENNEGO W OBWODZIE Z OPORNOŚCIĄ RZECZYWISTĄ, INDUKCYJNOŚCIĄ I POJEMNOŚCIĄ

Niech w chwili t = 0, gdy zamykamy obwód z prądem zmiennym, napięcie na naciskach przechodzi przez fazę ψ; wartość chwilowa tego napięcia będzie określona wzorem

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi).$$

Na podstawie wzoru (37) równanie dla takiego obwodu będzie

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{LC} u_c = \frac{U_m}{LC} \sin(\omega t + \psi). \tag{84}$$

Oczywiście, przy rozwiązywaniu tego równania, tak samo jak poprzednio, będziemy mieli do rozpatrzenia trzy przypadki; jednakże w pierwszych dwóch przypadkach w porównaniu z tym, co mieliśmy przy prądzie stałym, nic szczególnego nie spostrzegamy, przejdziemy więc od razu do przypadku III, gdy

$$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}, \quad \alpha = \frac{R}{2L}, \quad \beta = \sqrt{\frac{1}{LC} - \alpha^2}, \quad \alpha^2 + \beta^2 = \frac{1}{LC}.$$

Całką ogólną równania uproszczonego będzie (wzór 46)

$$u_c = e^{-\alpha t}(A_1 \sin \beta t + A_2 \cos \beta t),$$

gdzie A_1 i A_2 — stałe dowolne; daje ona nam wartość napięcia przejściowego na kondensatorze; możemy napisać w postaci jednej funkcji sinusoidalnej

$$u_{cp} = e^{-\alpha t} M \sin(\beta t + \delta), \tag{85}$$

gdzie M i δ stanowią stałe dowolne.

Całkę szczególną równania (84) znajdziemy na podstawie takiego samego rozumowania, jakie stosowaliśmy w § 110, mianowicie określamy najpierw dla naszego obwodu prąd ustalony

$$i_u = \frac{U_m}{Z} \sin(\omega t + \psi - \varphi), \tag{86}$$

gdzie

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R};$$

mając wartość tego prądu, znajdujemy wartość napięcia ustalonego na kondensatorze

$$u_{cu} = \frac{U_m}{Z} \frac{1}{\omega C} \sin\left(\omega t + \psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right),$$

albo

$$u_{cu} = -\frac{U_m}{Z \omega C} \cos(\omega t + \psi - \varphi). \tag{87}$$

Ze wzoru (85) znajdujemy przejściowy prąd

$$i_p = C \frac{d u_{cp}}{dt} = C e^{-\alpha t} [\beta M \cos(\beta t + \delta) - \alpha M \sin(\beta t + \delta)]. \tag{88}$$

Ze wzorów (85) i (86) oraz (87) i (88) otrzymujemy wartości napięcia na kondensatorze i prądu w stanie nieustalonym

$$u_c = u_{cu} + u_{cp} = -\frac{U_m}{Z \omega C} \cos(\omega t + \psi - \varphi) + e^{-\alpha t} M \sin(\beta t + \delta), \tag{89}$$

$$i = i_u + i_p = \frac{U_m}{Z} \sin(\omega t + \psi - \varphi) +$$

$$+ C e^{-\alpha t} [\beta M \cos(\beta t + \delta) - \alpha M \sin(\beta t + \delta)]. \tag{90}$$

Zakładając w obu tych wzorach $t = 0$, $u_c = 0$, $i = 0$, otrzymamy

$$M \sin \delta = \frac{U_m}{Z \omega C} \cos(\psi - \varphi),$$

$$\alpha C M \sin \delta - \beta C M \cos \delta = \frac{U_m}{Z} \sin(\psi - \varphi);$$

podstawiając wartość $M \sin \delta$ z pierwszego wzoru do drugiego, znajdujemy

$$M \cos \delta = \frac{U_m}{Z \omega C} \left[\frac{\alpha}{\beta} \cos(\psi - \varphi) - \frac{\omega}{\beta} \sin(\psi - \varphi)\right].$$

Na tej podstawie obliczamy

$$M \sin(\beta t + \delta) = M \cos \delta \sin \beta t + M \sin \delta \cos \beta t =$$

$$= \frac{U_m}{Z \omega C} \left[\frac{\alpha}{\beta} \cos(\psi - \varphi) \sin \beta t - \frac{\omega}{\beta} \sin(\psi - \varphi) \sin \beta t + \cos(\psi - \varphi) \cos \beta t\right] =$$

$$=\frac{U_m}{Z\omega C}\left[\left(\frac{\alpha\sin\beta t+\beta\cos\beta t}{\beta}\right)\cos(\psi-\varphi)-\frac{\omega}{\beta}\sin(\psi-\varphi)\sin\beta t\right]=$$

$$=\frac{U_m}{Z\omega C}\left[\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\beta}\cos(\psi-\varphi)\sin(\beta t+\gamma)-\frac{\omega}{\beta}\sin(\psi-\varphi)\sin\beta t\right],$$

gdzie $\operatorname{tg}\gamma=\frac{\beta}{\alpha}$.

Następnie

$$M\cos(\beta t+\delta)=M\cos\delta\cos\beta t-M\sin\delta\sin\beta t=$$

$$=\frac{U_m}{Z\omega C}\left[\frac{\alpha}{\beta}\cos(\psi-\varphi)\cos\beta t-\frac{\omega}{\beta}\sin(\psi-\varphi)\cos\beta t-\cos(\psi-\varphi)\sin\beta t\right]=$$

$$=\frac{U_m}{Z\omega C}\left[-\cos(\psi-\varphi)\left(\frac{\beta\sin\beta t-\alpha\cos\beta t}{\beta}\right)-\frac{\omega}{\beta}\sin(\psi-\varphi)\cos\beta t\right]=$$

$$=-\frac{U_m}{Z\omega C}\left[\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\beta}\cos(\psi-\varphi)\sin(\beta t-\gamma')+\frac{\omega}{\beta}\sin(\psi-\varphi)\cos\beta t\right],$$

gdzie

$$\operatorname{tg}\gamma'=\frac{\alpha}{\beta}.$$

Podstawiając znalezione wartości $M\sin(\beta t+\delta)$ oraz $M\cos(\beta t+\delta)$ do wzorów (85) oraz (88), znajdujemy, uwzględniając, że

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\frac{1}{\sqrt{LC}},$$

$$u_{cp}=-e^{-\alpha t}\frac{U_m}{\beta ZC}\left[\sin(\psi-\varphi)\sin\beta t-\frac{\cos(\psi-\varphi)}{\omega\sqrt{LC}}\sin(\beta t+\gamma)\right], \tag{91}$$

gdzie

$$\operatorname{tg}\gamma=\frac{\beta}{\alpha},$$

oraz

$$i_p=e^{-\alpha t}\frac{U_m}{Z\omega}\left[-\frac{\cos(\psi-\varphi)}{\sqrt{LC}}\sin(\beta t-\gamma')-\omega\sin(\psi-\varphi)\cos\beta t-\right.$$

$$\left.-\frac{\alpha}{\beta\sqrt{LC}}\cos(\psi-\varphi)\sin(\beta t+\gamma)+\frac{\alpha}{\beta}\omega\sin(\psi-\varphi)\sin\beta t\right]=$$

$$=e^{-\alpha t}\frac{U_m}{Z\beta}\left\{\sin(\psi-\varphi)(\alpha\sin\beta t-\beta\cos\beta t)-\right.$$

$$\left.-\frac{\cos(\psi-\varphi)}{\omega\sqrt{LC}}\left[\alpha\sin(\beta t+\gamma)-\beta\sin(\beta t-\gamma')\right]\right\},$$

gdzie
$$\operatorname{tg} \gamma' = \frac{\alpha}{\beta};$$
ponieważ
$$\operatorname{tg} \gamma' = \operatorname{cotg} \gamma = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right),$$
przeto
$$\gamma' = \frac{\pi}{2} - \gamma,$$
więc
$$\sin(\beta t - \gamma') = -\cos(\beta t + \gamma);$$
następnie
$$\alpha \sin \beta t - \beta \cos \beta t = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \sin(\beta t - \gamma) = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sin(\beta t - \gamma),$$
$$\alpha \sin(\beta t + \gamma) - \beta \cos(\beta t + \gamma) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \sin(\beta t + \gamma - \gamma) = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sin \beta t,$$
więc ostatecznie
$$i_p = e^{-\alpha t} \frac{U_m}{Z\beta\sqrt{LC}} \left[\sin(\psi - \varphi) \sin(\beta t - \gamma) - \frac{\cos(\psi - \varphi)}{\omega\sqrt{LC}} \sin \beta t\right]. \quad (92)$$

Porównując wzory (91) i (92) na u_{cp} i i_p widzimy, że każda z tych wielkości określona jest przez dwie sinusoidy (dwie fale) z amplitudami malejącymi, zależnymi od stałej tłumienia $\alpha = \frac{R}{2L}$. Pulsacja tych sinusoid wynosi β, czyli ich częstotliwość $\frac{\beta}{2\pi}$; obie sinusoidy są przesunięte względem siebie o kąt γ, przy czym $\operatorname{tg} \gamma = \frac{\beta}{\alpha}$. Sinusoidy prądu są przesunięte względem odpowiednich sinusoid napięcia o kąt γ wstecz (prądy są opóźnione w fazie o kąt γ). Stosunek amplitudy napięcia do amplitudy prądu wynosi $\sqrt{\frac{L}{C}}$.

Wzór (91) można przepisać w postaci:
$$u_{cp} = -e^{-\alpha t} \frac{U_m}{\beta Z C} \left\{\left[\sin(\psi - \varphi) - \frac{\cos(\psi - \varphi) \cos \gamma}{\omega\sqrt{LC}}\right] \sin \beta t - \right.$$
$$\left. - \frac{\cos(\psi - \varphi) \sin \gamma}{\omega\sqrt{LC}} \cos \beta t\right\},$$
skąd widać, że amplituda tego napięcia równa jest
$$U_{cpm} = e^{-\alpha t} \frac{U_m}{\beta Z C} \sqrt{\sin^2(\psi - \varphi) + \frac{\cos^2(\psi - \varphi)}{\omega^2 LC} - \frac{2 \sin(\psi - \varphi) \cos(\psi - \varphi) \cos \gamma}{\omega\sqrt{LC}}};$$

ponieważ

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\gamma}} = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \frac{R\sqrt{LC}}{2L} = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}},$$

więc

$$U_{cpm} = \frac{e^{-\alpha t}U_m}{\beta ZC}\sqrt{\sin^2(\psi-\varphi)+\frac{\cos^2(\psi-\varphi)}{\omega^2 LC}-\frac{R}{2\omega L}\sin 2(\psi-\varphi)} =$$

$$= \frac{e^{-\alpha t}U_m}{\beta ZC}\sqrt{1-\cos^2(\psi-\varphi)\left(1-\frac{1}{\omega^2 LC}\right)-\frac{R}{2\omega L}\sin 2(\psi-\varphi)}\,. \qquad (93)$$

W analogiczny sposób przepiszemy wzór (92)

$$i_p = \frac{e^{-\alpha t}U_m}{Z\beta\sqrt{LC}}\left\{\left[\sin(\psi-\gamma)-\cos\gamma-\frac{\cos(\psi-\varphi)}{\omega\sqrt{LC}}\right]\sin\beta t-\right.$$

$$\left.-\sin(\psi-\varphi)\sin\gamma\cos\beta t\right\},$$

skąd znajdujemy amplitudę prądu przejściowego

$$I_{pm} = \frac{e^{-\alpha t}U_m}{Z\beta\sqrt{LC}}\sqrt{\sin^2(\psi-\varphi)+\frac{\cos^2(\psi-\varphi)}{\omega^2 LC}-\frac{2\sin(\psi-\varphi)\cos(\psi-\varphi)\cos\gamma}{\omega\sqrt{LC}}}$$

i na podstawie takich samych działań, co i poprzednio

$$I_{pm} = \frac{e^{-\alpha t}U_m}{Z\beta\sqrt{LC}}\sqrt{1-\cos^2(\psi-\varphi)\left(1-\frac{1}{\omega^2 LC}\right)-\frac{R}{2\omega L}\sin 2(\psi-\varphi)}\,. (94)$$

Porównując wzory (93) i (94) spostrzegamy, że amplituda napięcia na kondensatorze i amplituda prądu w jednakowy sposób są uzależnione od fazy ψ, którą ma napięcie źródła prądu zmiennego w chwili zamknięcia obwodu. Aby znaleźć taką wartość ψ, dla której obie wymienione amplitudy otrzymują największe wartości, musimy zbadać funkcję znajdującą się pod pierwiastkiem w obu wzorach (93) i (94), mianowicie

$$X = 1-\cos^2(\psi-\varphi)\left(1-\frac{1}{\omega^2 LC}\right)-\frac{R}{2\omega L}\sin 2(\psi-\varphi),$$

$$\frac{dX}{d\psi} = \left(1-\frac{1}{\omega^2 LC}\right)\sin 2(\psi-\varphi)-\frac{R}{\omega L}\cos 2(\psi-\varphi)\,.$$

Gdy przyrównamy tę pochodną do 0, otrzymamy

$$\operatorname{tg} 2(\psi-\varphi) = \frac{R}{\omega L\left(1-\frac{1}{\omega^2 LC}\right)} = \frac{R}{\omega L-\frac{1}{\omega C}},$$

ale

$$\frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R} = \operatorname{tg}\varphi,$$

więc

$$\operatorname{tg} 2(\psi - \varphi) = \operatorname{cotg}\varphi. \tag{95}$$

W granicach jednego okresu daje to dwa rozwiązania:

$$1)\quad 2(\psi - \varphi) = \frac{\pi}{2} - \varphi,$$

skąd

$$\psi = \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4},$$

$$2)\quad 2(\psi - \varphi) = \frac{3}{2}\pi - \varphi,$$

skąd

$$\psi = \frac{\varphi}{2} + \frac{3}{4}\pi.$$

Biorąc drugą pochodną X, otrzymamy

$$\frac{d^2X}{d\psi^2} = 2\left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC}\right)\cos 2(\psi - \varphi) + \frac{2R}{\omega L}\sin 2(\psi - \varphi) =$$

$$= \frac{2R}{\omega L}\cos 2(\psi - \varphi)\left[\frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R} + \operatorname{tg} 2(\psi - \varphi)\right] =$$

$$= \frac{2R}{\omega L}\cos 2(\psi - \varphi)\left[\operatorname{cotg}\varphi + \operatorname{tg} 2(\psi - \varphi)\right];$$

przy uwzględnieniu (95)

$$\frac{d^2X}{d\psi^2} = \frac{4R}{\omega L}\cos 2(\psi - \varphi)\operatorname{cotg}\varphi$$

Dla wartości ψ, odpowiadającej pierwszemu rozwiązaniu, tj.

$$\psi = \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4},$$

$$\frac{d^2X}{d\psi^2} = \frac{4R}{\omega L}\operatorname{cotg}\varphi\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{4R}{\omega L}\cos\varphi;$$

przy wszelkich wartościach φ w granicach

$$0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2} \qquad \text{będzie}\ \frac{d^2X}{d\psi^2} > 0;$$

dla drugiej wartości $\psi = \frac{\varphi}{2} + \frac{3}{4}\pi$ będzie

$$\frac{d^2X}{d\psi^2} = \frac{4R}{\omega L} \operatorname{cotg}\varphi \cos\left(\frac{3}{2}\pi - \varphi\right) = -\frac{4R}{\omega L}\cos\varphi,$$

czyli

$$\frac{d^2X}{d\psi^2} < 0.$$

Otrzymujemy więc dla funkcyj U_{cpm} i I_{pm}

$$\text{minimum, gdy } \psi = \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4},$$

$$\text{maximum, gdy } \psi = \frac{\varphi}{2} + \frac{3}{4}\pi.$$

Zbadajmy jeszcze te wartości dla $\psi - \varphi = 0$ oraz $\psi - \varphi = \frac{\pi}{2}$; w pierwszym przypadku wzory (93) i (94) dają

$$U_{cpm} = \frac{e^{-at}U_m}{\beta ZC} \cdot \frac{1}{\omega\sqrt{LC}},$$

$$I_{pm} = \frac{e^{-at}U_m}{\beta Z\sqrt{LC}} \cdot \frac{1}{\omega\sqrt{LC}} = \frac{e^{-at}U_m}{\beta Z\omega LC}.$$

Porównując te wartości z maksymalną wartością napięcia na kondensatorze i prądu w stanie ustalonym (wzory 87 i 86), mianowicie

$$U_{cum} = \frac{U_m}{Z\omega C}, \quad I_{um} = \frac{U_m}{Z},$$

znajdujemy

$$\frac{U_{cpm}}{U_{cum}} = e^{-at} \cdot \frac{1}{\beta\sqrt{LC}}, \quad \frac{I_{pm}}{I_{um}} = e^{-at} \cdot \frac{1}{\omega\beta LC}.$$

W przypadku, gdy $\psi - \varphi = \frac{\pi}{2}$, będziemy mieli

$$U_{cpm} = \frac{e^{-at}U_m}{\beta ZC}, \quad I_{pm} = \frac{e^{-at}U_m}{\beta Z\sqrt{LC}},$$

$$\frac{U_{cpm}}{U_{cum}} = e^{-at} \cdot \frac{\omega}{\beta}, \quad \frac{I_{pm}}{I_{um}} = e^{-at} \cdot \frac{1}{\beta\sqrt{LC}}.$$

Na szczególne uwzględnienie zasługuje przypadek, gdy tłumienie jest bardzo małe, czyli R bardzo małe w porównaniu do L.

Wtedy możemy założyć

$$\alpha = \frac{R}{2L} = 0, \quad e^{-\alpha t} = 1;$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{LC} - \alpha^2} = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \beta\sqrt{LC} = 1.$$

W tym przypadku będziemy mieli:

dla $\psi - \varphi = 0$,

$$\frac{U_{cpm}}{U_{cum}} = 1,$$

$$\frac{I_{pm}}{I_{um}} = \frac{\beta}{\omega};$$

dla $\psi - \varphi = \frac{\pi}{2}$,

$$\frac{U_{cpm}}{U_{cum}} = \frac{\omega}{\beta},$$

$$\frac{I_{pm}}{I_{um}} = 1.$$

Z tych wzorów wnioskujemy, że gdy $\omega > \beta$, można oczekiwać przepięcia na kondensatorze, zaś gdy $\beta > \omega$ — przetężenia w obwodzie.

Stwierdziliśmy, że stosunek wartości maksymalnej napięcia na kondensatorze do wartości maksymalnej prądu wynosi $\sqrt{\frac{L}{C}}$:

$$\frac{U_{cm}}{I_m} = \sqrt{\frac{L}{C}};$$

stąd

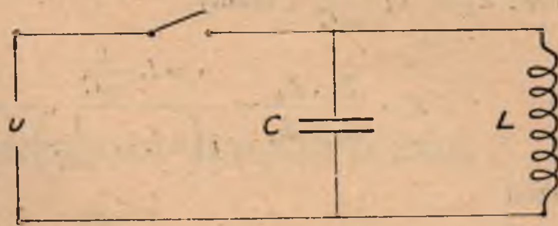
$$\frac{1}{2} C U_{cm}^2 = \frac{1}{2} L I_m^2.$$

Pierwszy wyraz stanowi maksymalną energię elektryczną kondensatora, drugi maksymalną energię magnetyczną cewki indukcyjnej. Zachodzi więc w obwodzie oscylacyjnym przemiana energii elektrycznej na energię magnetyczną i na odwrót; gdyby nie było tłumienia ($R = 0$), taka przemiana energii miałaby miejsce bez końca. Obecność R wywołuje straty cieplne energii, zachodzi tłumienie i zjawisko oscylacyjne stopniowo zanika.

§ 117

PRZERYWANIE OBWODU, W KTÓRYM INDUKCYJNOŚĆ I POJEMNOŚĆ SĄ POŁĄCZONE RÓWNOLEGLE

Zastosujemy powyższe wyniki do obwodu prądu zmiennego, w którym C i L są połączone równolegle, $R = 0$ (rys. 223).



Rys. 223

Przypuśćmy, że przerwa w obwodzie nastąpiła w chwili, gdy napięcie na kondensatorze przechodziło przez swoją wartość największą, równą wartości maksymalnej napięcia na zaciskach prądu zmiennego, tj.
$$u_c = U_m;$$
wtedy prąd w obwodzie
$$i = 0,$$
gdyż prąd wyprzedza napięcie u_c o kąt prosty. Cała energia znajduje się wówczas na kondensatorze i wynosi $\frac{1}{2} C U_m^2$. Zaczyna się oscylacyjne wyładowanie kondensatora i po upływie $^1/_4$ okresu cała energia kondensatora przechodzi w energię magnetyczną na cewkę; prąd przechodzi przez cewkę i osiąga wartość I, przy czym
$$\frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} C U_m^2$$
skąd
$$I = U_m \sqrt{\frac{C}{L}}. \tag{96}$$

Jeżeli zaś wyłączenie nastąpiło w chwili, gdy $u_c = 0$, to znaczy, gdy prąd $i = I_m$ przechodził przez obwód, wtedy cała energia znajduje się w cewce i wynosi $\frac{1}{2} L I_m^2$. Po upływie $^1/_4$ okresu energia ta przejdzie na kondensator, który uzyska napięcie U_c, przy czym
$$\frac{1}{2} C U_c^2 = \frac{1}{2} L I_m^2,$$
skąd
$$U_c = I_m \sqrt{\frac{L}{C}}. \tag{97}$$

W stanie ustalonym mamy

$$U_m = I_m Z,$$

gdzie Z — oporność pozorna naszego układu, którą możemy łatwo znaleźć jako oporność wypadkową dwóch oporności $Z_1 = j\,\omega L$ oraz $\dot{Z}_2 = -j\,\frac{1}{\omega C}$; mamy

$$\dot{Z} = \frac{\dot{Z}_1 \cdot \dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2} = \frac{\omega L \frac{1}{\omega C}}{j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = j\,\frac{\frac{L}{C}}{\frac{1}{\omega C} - \omega L},$$

skąd

$$Z = \frac{\frac{L}{C}}{\frac{1}{\omega C} - \omega L}.$$

Podstawiając do wzoru (96) zamiast U_m —— $I_m Z$ oraz do wzoru (97) zamiast I_m —— $\frac{U_m}{Z}$, otrzymamy

$$I = I_m \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{\frac{1}{\omega C} - \omega L}, \quad U_c = U_m \sqrt{\frac{C}{L}} \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right).$$

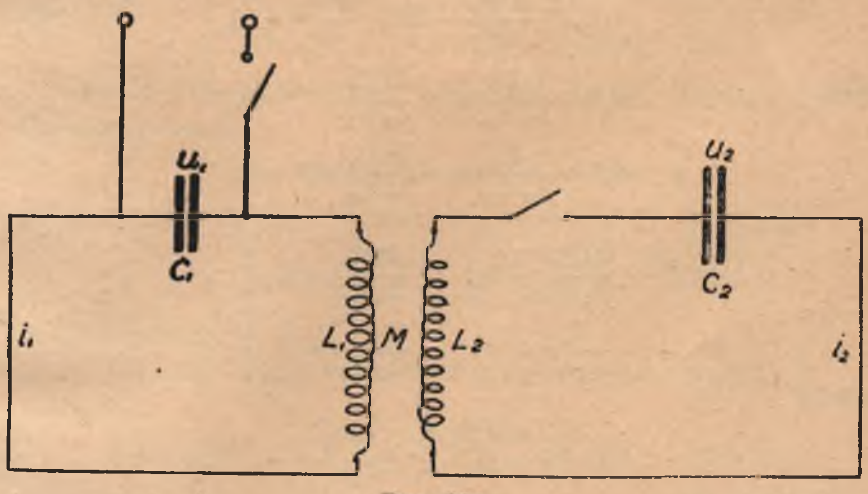
W tych wzorach można łatwo porównać prąd i napięcie powstające przy wyładowaniu kondensatora z wartościami tychże wielkości w stanie ustalonym.

OBWODY SPRZĘŻONE MAGNETYCZNIE

§ 118

WYŁADOWANIE KONDENSATORA W JEDNYM Z DWÓCH OBWODÓW SPRZĘŻONYCH MAGNETYCZNIE

Rozpatrzymy dwa obwody znajdujące się jeden obok drugiego (rys. 224); w każdym mamy kondensator o pojemności C_1, względnie C_2, oraz cewkę o indukcyjności własnej L_1, względnie L_2. Oporności rzeczywiste w obu obwodach przyjmujemy równe zeru.



Rys. 224

Kondensator pierwszego obwodu C_1 przyłączony jest do źródła prądu stałego lub zmiennego i w pewnej chwili $t = 0$ zostaje odłączony od tego źródła, gdy napięcie na kondensatorze wynosi U_0; jednocześnie zostaje zamknięty obwód drugi. Oznaczając wartości chwilowe napięć na kondensatorach przez u_1 i u_2, zaś wartości chwilowe prądów, które przy wyładowaniu kondensatorów powstają, przez i_1 oraz i_2, wreszcie współczynnik indukcji wzajemnej cewek przez M, będziemy mieli na podstawie znanych wzorów dla obwodu pierwszego

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = u_1, \tag{1}$$

dla obwodu drugiego

$$L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = u_2 \tag{2}$$

oraz warunki graniczne

$$t = 0, \qquad u_1 = U_0, \qquad i_1 = 0, \qquad u_2 = 0, \qquad i_2 = 0. \tag{3}$$

Ponieważ

$$i_1 = -C_1 \frac{du_1}{dt}, \qquad i_2 = -C_2 \frac{du_2}{dt},$$

przeto wzory (1) i (2) możemy przepisać w postaci

$$-L_1 C_1 \frac{d^2 u_1}{dt^2} - M C_2 \frac{d^2 u_2}{dt^2} = u_1,$$

$$-L_2 C_2 \frac{d^2 u_2}{dt^2} - M C_1 \frac{d^2 u_1}{dt^2} = u_2$$

albo

$$u_1'' + \frac{1}{L_1 C_1} u_1 + \frac{M C_2}{L_1 C_1} u_2'' = 0,$$

$$u_2'' + \frac{1}{L_2 C_2} u_2 + \frac{M C_1}{L_2 C_2} u_1'' = 0.$$

Oznaczmy

$$\left.\begin{aligned} \frac{M C_2}{L_1 C_1} &= k_1, & \frac{M C_1}{L_2 C_2} &= k_2, \\ \frac{1}{L_1 C_1} &= a^2, & \frac{1}{L_2 C_2} &= b^2, \end{aligned}\right| \tag{4}$$

wtedy

$$u_1'' + a^2 u_1 = -k_1 u_2'', \tag{5}$$

$$u_2'' + b^2 u_2 = -k_2 u_1'', \tag{6}$$

z równania (6)

$$u_2 = -\frac{k_2}{b^2} u_1'' - \frac{1}{b^2} u_2'',$$

zaś z równania (5)

$$-u_2'' = \frac{1}{k_1} u_1'' + \frac{a^2}{k_1} u_1,$$

więc

$$-\frac{1}{b^2}u_2'' = \frac{1}{k_1 b^2}u_1'' + \frac{a^2}{k_1 b^2}u_1,$$

$$u_2 = -\frac{k_2}{b^2}u_1'' + \frac{1}{k_1 b^2}u_1'' + \frac{a^2}{k_1 b^2}u_1 =$$

$$= \frac{1-k_1 k_2}{k_1 b^2}u_1'' + \frac{a^2}{k_1 b^2}u_1. \tag{7}$$

Biorąc pochodną względem t dwa razy, otrzymamy

$$u_2'' = \frac{1-k_1 k_2}{k_1 b^2}u_1^{(IV)} + \frac{a^2}{k_1 b^2}u_1'',$$

$$k_1 u_2'' = \frac{1-k_1 k_2}{b^2}u_1^{(IV)} + \frac{a^2}{b^2}u_1''.$$

Ponieważ

$$k_1 k_2 = \frac{M C_2}{L_1 C_1}\cdot\frac{M C_1}{L_2 C_2} = \frac{M^2}{L_1 L_2} = k^2, \tag{8}$$

gdzie $k < 1$ stanowi spółczynnik sprzężenia magnetycznego, więc podstawiając te wartości do równania (5) otrzymamy

$$u_1'' + a^2 u_1 + \frac{1-k^2}{b^2}u_1^{(IV)} + \frac{a^2}{b^2}u_1'' = 0$$

albo

$$(1-k^2)\,u_1^{(IV)} + (a^2+b^2)\,u_1'' + a^2 b^2 u_1 = 0. \tag{9}$$

Jest to równanie liniowe czwartego stopnia, którego równanie charakterystyczne

$$(1-k^2)\,x^4 + (a^2+b^2)\,x^2 + a^2 b^2 = 0,$$

jako równanie dwukwadratowe, daje pierwiastki

$$x^2 = \frac{-(a^2+b^2)\pm\sqrt{(a^2+b^2)^2-4(1-k^2)\,a^2b^2}}{2(1-k^2)};$$

podpierwiastkowa

$$(a^2+b^2)^2 - 4a^2b^2 + 4k^2a^2b^2 = (a^2-b^2)^2 + 4k^2a^2b^2 > 0,$$

następnie

$$|a^2+b^2| \geqslant \sqrt{(a^2+b^2)^2-4(1-k^2)\,a^2b^2}, \qquad k < 1,$$

więc x^2 zawsze < 0. Oznaczając

$$\left.\begin{aligned} \frac{a^2+b^2+\sqrt{(a^2+b^2)^2-4(1-k^2)\,a^2b^2}}{2(1-k^2)} &= \beta_1^2, \\ \frac{a^2+b^2-\sqrt{(a^2+b^2)^2-4(1-k^2)\,a^2b^2}}{2(1-k^2)} &= \beta_2^2, \end{aligned}\right| \tag{10}$$

otrzymamy 4 pierwiastki dla x:

$$x_1 = +j\beta_1, \qquad x_2 = -j\beta_1,$$
$$x_3 = +j\beta_2, \qquad x_4 = -j\beta_2.$$

Wobec tego całka ogólna równania będzie

$$u_1 = A_1 \sin\beta_1 t + A_2 \cos\beta_1 t + A_3 \sin\beta_2 t + A_4 \cos\beta_2 t, \tag{11}$$

gdzie A_1, A_2, A_3, A_4 stanowią stałe dowolne.

Biorąc dwa razy pochodną u_1 względem t, znajdujemy

$$u_1'' = -\beta_1^2 A_1 \sin\beta_1 t - \beta_1^2 A_2 \cos\beta_1 t - \beta_2^2 A_3 \sin\beta_2 t - \beta_2^2 A_4 \cos\beta_2 t.$$

Wstawiając tę wartość do (7) i uwzględniając (8), znajdujemy

$$u_2 = -\frac{(1-k^2)}{k_1 b_2^2}\Big\{\beta_1^2 (A_1 \sin\beta_1 t + A_2 \cos\beta_1 t) +$$
$$+ \beta_2^2 (A_3 \sin\beta_2 t + A_4 \cos\beta_2 t)\Big\} +$$
$$+\frac{a^2}{k_1 b^2}\Big\{A_1 \sin\beta_1 t + A_2 \cos\beta_1 t + A_3 \sin\beta_2 t + A_4 \cos\beta_2 t\Big\} =$$
$$= \frac{1}{k_1 b^2}\Big\{\Big[a^2 - \beta_1^2 (1-k^2)\Big]\cdot\Big[A_1 \sin\beta_1 t + A_2 \cos\beta_1 t\Big] +$$
$$+ \Big[a^2 - \beta_2^2 (1-k^2)\Big]\cdot\Big[A_3 \sin\beta_2 t + A_4 \cos\beta_2 t\Big]\Big\}$$

albo

$$u_2 = B_1 \sin\beta_1 t + B_2 \cos\beta_1 t + B_3 \sin\beta_2 t + B_4 \cos\beta_2 t, \tag{12}$$

gdzie

$$B_1 = \frac{a^2 - \beta_1^2 (1-k^2)}{k_1 b^2} A_1,$$
$$B_2 = \frac{a^2 - \beta_1^2 (1-k^2)}{k_1 b^2} A_2,$$
$$B_3 = \frac{a^2 - \beta_2^2 (1-k^2)}{k_1 b^2} A_3,$$
$$B_4 = \frac{a^2 - \beta_2^2 (1-k^2)}{k_1 b^2} A_4,$$

lub oznaczając w skróceniu

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{a^2 - \beta_1^2 (1-k^2)}{k_1 b^2}, \\ q &= \frac{a^2 - \beta_2^2 (1-k^2)}{k_1 b^2}, \end{aligned}\right| \tag{13}$$

$$\left.\begin{aligned} B_1 &= pA_1, \\ B_2 &= pA_2, \\ B_3 &= qA_3, \\ B_4 &= qA_4. \end{aligned}\right| \tag{14}$$

Ze wzoru (11) znajdujemy

$$i_1 = -C_1\frac{du_1}{dt} = -C_1\beta_1 A_1 \cos\beta_1 t + C_1\beta_1 A_2 \sin\beta_1 t -$$
$$- C_1\beta_2 A_3 \cos\beta_2 t + C_1\beta_2 A_4 \sin\beta_2 t. \tag{15}$$

Ze wzoru (12) otrzymujemy

$$i_2 = -C_2\frac{du_2}{dt} = -C_2\beta_1 B_1 \cos\beta_1 t + C_2\beta_1 B_2 \sin\beta_1 t -$$
$$- C_2\beta_2 B_3 \cos\beta_2 t + C_2\beta_2 B_4 \sin\beta_2 t. \tag{16}$$

Zakładając do wzorów (11), (12), (15) i (16) warunki graniczne (3), znajdujemy

$$\begin{aligned} U_0 &= A_2 + A_4, \\ 0 &= B_2 + B_4, \\ 0 &= \beta_1 A_1 + \beta_2 A_3, \\ 0 &= \beta_1 B_1 + \beta_2 B_3, \end{aligned}$$

albo, po uwzględnieniu (14),

$$\begin{aligned} A_2 + A_4 &= U_0, \\ pA_2 + qA_4 &= 0, \\ \beta_1 A_1 + \beta_2 A_3 &= 0, \\ \beta_1 p A_1 + \beta_2 q A_3 &= 0. \end{aligned}$$

Z ostatnich dwóch równań otrzymujemy

$$\begin{aligned} A_1 &= 0, \\ A_3 &= 0, \end{aligned}$$

zaś z pierwszych dwóch

$$A_2 = \frac{q}{q-p}U_0,$$

$$A_4 = -\frac{p}{q-p}U_0.$$

Wobec tego na podstawie wzorów (14)

$$B_1 = 0, \qquad B_2 = \frac{pq}{q-p} U_0,$$

$$B_3 = 0, \qquad B_4 = -\frac{pq}{q-p} U_0,$$

$$B_2 = -B_4.$$

Podstawiając określone wartości stałych do wzorów (11), (12), (15) i (16), znajdujemy

$$u_1 = \frac{q}{q-p} U_0 \cos\beta_1 t - \frac{p}{q-p} U_0 \cos\beta_2 t,$$

$$u_2 = \frac{pq}{q-p} U_0 \cos\beta_1 t - \frac{pq}{q-p} U_0 \cos\beta_2 t = \frac{pq}{q-p} U_0 (\cos\beta_1 t - \cos\beta_2 t),$$

$$i_1 = C_1 \beta_1 \frac{q}{q-p} U_0 \sin\beta_1 t - C_1 \beta_2 \frac{p}{q-p} U_0 \sin\beta_2 t,$$

$$i_2 = C_2 \beta_1 \frac{pq}{q-p} U_0 \sin\beta_1 t - C_2 \beta_2 \frac{pq}{q-p} U_0 \sin\beta_2 t =$$

$$= C_2 \frac{pq}{q-p} U_0 (\beta_1 \sin\beta_1 t - \beta_2 \sin\beta_2 t).$$

Z powyższych wzorów widać, że mamy tu różnicę dwóch drgań sinuso.dalnych o pulsacjach β_1 i β_2.

§ 119

WYŁADOWANIE KONDENSATORA W PRZYPADKU, GDY OBA OBWODY SĄ ZE SOBĄ W REZONANSIE

Na szczególne uwzględnienie zasługuje przypadek, gdy każdy z obwodów, rozpatrywany samodzielnie, posiada drgania swobodne o tej samej częstotliwości; mówimy wtedy, że *obwód drugi jest w rezonansie z pierwszym obwodem.*

Oznaczając częstotliwości drgań swobodnych obwodów odpowiednio przez f_{s_1} i f_{s_2}, będziemy mieli na podstawie wzoru (67) z § 102

$$f_{s_1} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_1 C_1}}, \qquad f_{s_2} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_2 C_2}},$$

skąd otrzymujemy warunek rezonansu obu obwodów

$$L_1 C_1 = L_2 C_2.$$

Wobec tego na podstawie (4) i (10)

$$a^2 = b^2,$$

$$\beta_1^2 = \frac{2a^2 + \sqrt{4a^4 - 4a^4 + 4k^2a^4}}{2(1-k^2)} = \frac{a^2(1+k)}{1-k^2} = \frac{a^2}{1-k},$$

$$\beta_2^2 = \frac{2a^2 - \sqrt{4a^4 - 4a^4 + 4k^2a^4}}{2(1-k^2)} = \frac{a^2(1-k)}{1-k^2} = \frac{a^2}{1+k},$$

$$\beta_1 = \pm\frac{a}{\sqrt{1-k}}; \qquad \beta_2 = \pm\frac{a}{\sqrt{1+k}};$$

zaś na podstawie (13)

$$p = \frac{a^2 - a^2(1+k)}{k_1 a^2} = -\frac{k}{k_1},$$

$$q = \frac{a^2 - a^2(1-k)}{k_1 a^2} = \frac{k}{k_1},$$

albo, uwzględniając (8), że $k = \sqrt{k_1 k_2}$ oraz (4) że $\frac{k_2}{k_1} = \frac{C_1}{C_2}$ (dla $L_1 C_1 = L_2 C_2$), będziemy mieli

$$p = -\sqrt{\frac{C_1}{C_2}}, \qquad q = \sqrt{\frac{C_1}{C_2}},$$

$$q - p = 2\sqrt{\frac{C_1}{C_2}}.$$

Wobec tego wzory dla napięć i prądów otrzymamy ostatecznie w postaci

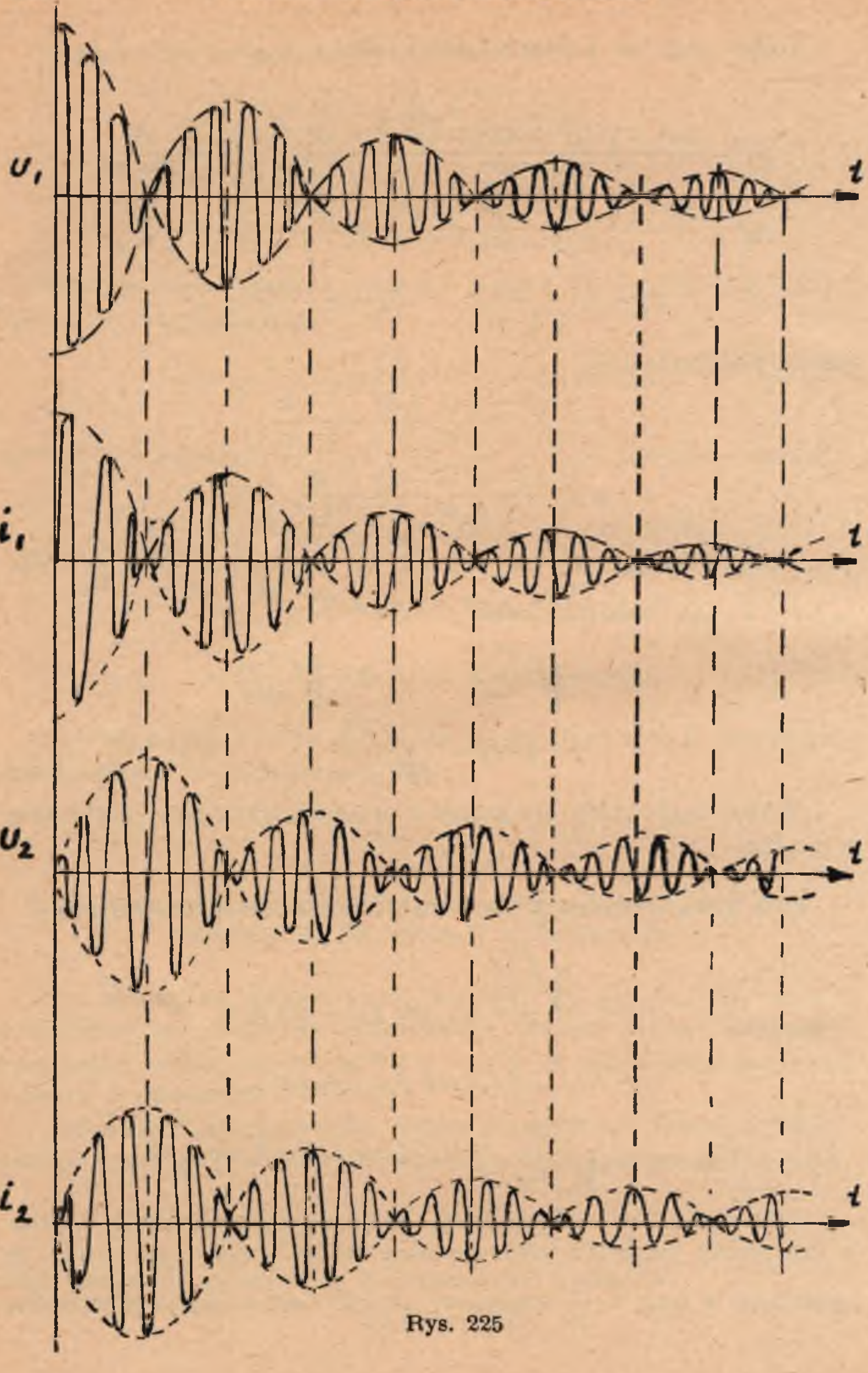
$$u_1 = \frac{1}{2}U_0 \cos\beta_1 t + \frac{1}{2}U_0 \cos\beta_2 t = \frac{1}{2}U_0[\cos\beta_1 t + \cos\beta_2 t],$$

$$u_2 = -\frac{\sqrt{\frac{C_1}{C_2}}}{2}U_0[\cos\beta_1 t - \cos\beta_2 t],$$

$$i_1 = C_1 U_0 \frac{1}{2}[\beta_1 \sin\beta_1 t + \beta_2 \sin\beta_2 t],$$

$$i_2 = -C_2\sqrt{\frac{C_1}{C_2}}\cdot\frac{1}{2}U_0[\beta_1 \sin\beta_1 t - \beta_2 \sin\beta_2 t].$$

Z tych wzorów wnioskujemy, że prądy są przesunięte w fazie o kąt prosty względem odpowiednich napięć, przy czym prądy są opóźnione w fazie o $\frac{\pi}{2}$ względem napięć. Gdy napięcia przechodzą



Rys. 225

przez wartość maksymalną, prądy przechodzą przez wartość zero i na odwrót. Gdybyśmy uwzględnili obecność oporności rzeczywistej R, otrzymalibyśmy jeszcze zjawisko tłumienia i wzory na napięcia i prądy dałyby nam sinusoidy tłumione, jak na rys. 225.

Kształt funkcji napięcia i natężenia prądu jest zależny od pulsacji (częstotliwości) β_1 i β_2; funkcje te można przedstawić w innej postaci: dla napięcia u_1

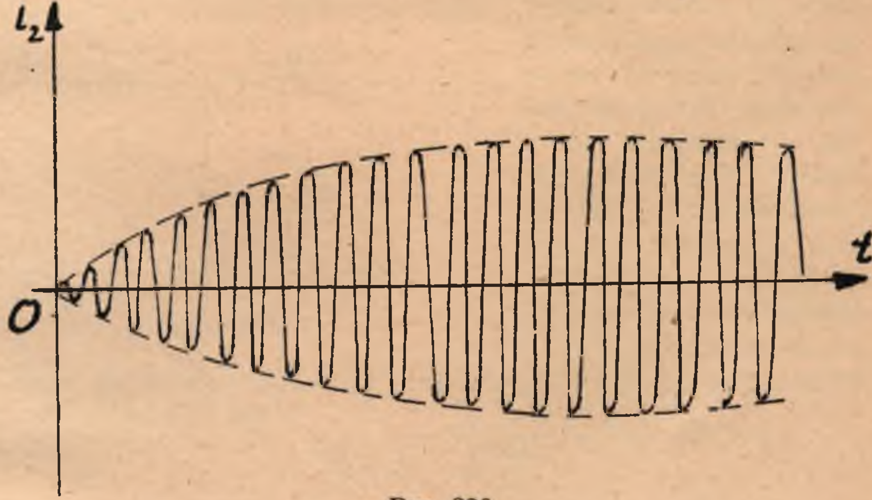
$$\cos\beta_1 t + \cos\beta_2 t = 2\cos\frac{(\beta_1+\beta_2)t}{2}\cos\frac{(\beta_1-\beta_2)t}{2};$$

dla napięcia u_2:

$$\cos\beta_1 t - \cos\beta_2 t = -2\sin\frac{(\beta_1+\beta_2)t}{2}\sin\frac{(\beta_1-\beta_2)t}{2};$$

dla prądu i_1:

$$\beta_1\sin\beta_1 t + \beta_2\sin\beta_2 t = (\beta_1+\beta_2)\left[\sin\frac{(\beta_1+\beta_2)t}{2}\cos\frac{(\beta_1-\beta_2)t}{2}\right]+$$
$$+(\beta_1-\beta_2)\left[\sin\frac{(\beta_1-\beta_2)t}{2}\cdot\cos\frac{(\beta_1+\beta_2)t}{2}\right];$$



Rys. 226

dla prądu i_2:

$$\beta_1\sin\beta_1 t - \beta_2\sin\beta_2 t = (\beta_1-\beta_2)\left[\sin\frac{(\beta_1+\beta_2)t}{2}\cos\frac{(\beta_1-\beta_2)t}{2}\right]+$$
$$+(\beta_1+\beta_2)\left[\sin\frac{(\beta_1-\beta_2)t}{2}\cos\frac{(\beta_1+\beta_2)t}{2}\right].$$

Na rys. 225 mamy wykres tej funkcji w przypadku ogólnym, tj. gdy drgania są tłumione, czyli we wzory na prąd i napięcie wchodzą jeszcze funkcje wykładnicze; z rysunku widać, że powstają dudnienia.

Częstotliwość dudnień drgań swobodnych zależy od spółczynnika sprzężenia k:

$$\beta_1 = \frac{\alpha}{\sqrt{1-k}}; \quad \beta_2 = \frac{\alpha}{\sqrt{1+k}}.$$

Gdy k jest małe, obwody nieznacznie wpływają na siebie, dudnienia będą bardzo powolne, otrzymamy wykres dla prądu i_2, jak na rys. 226.

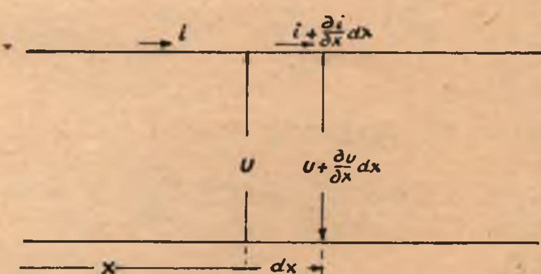
R O Z D Z I A Ł P I Ę T N A S T Y

STANY NIEUSTALONE W LINIACH DŁUGICH

§ 120

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE DLA WARTOŚCI CHWILOWYCH NAPIĘĆ I PRĄDÓW. CAŁKI OGÓLNE TYCH RÓWNAŃ

W rozdziale XI rozpatrywaliśmy przewody z równomiernie rozłożonymi stałymi R, L, A i C, ale tylko w stanie ustalonym, wprowadzając wartości skuteczne napięć i prądów; obecnie dla stanu nieustalonego musimy wyprowadzić wzory dla wartości chwilowych tych wielkości. Rozpatrzmy nieskończenie mały odcinek dx linii dwuprzewodowej (rys. 227) w odległości x od źródła prądu. Oznaczając wartości chwilowe napięcia i prądu w rozpatrywanym punkcie odpowiednio przez u i i, otrzymamy na podstawie znanych już rozumowań (§ 90)



Rys. 227

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = Ri + L\frac{\partial i}{\partial t}, \tag{1}$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = Au + C\frac{\partial u}{\partial t}; \tag{2}$$

biorąc pochodną (1) względem x i podstawiając zamiast $\frac{\partial i}{\partial x}$ jego wartość z (2), otrzymujemy

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -RAu - RC\frac{\partial u}{\partial t} - LA\frac{\partial u}{\partial t} - LC\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

albo
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = RAu + (RC + LA)\frac{\partial u}{\partial t} + LC\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{3}$$

Po znalezieniu wartości u z tego równania, możemy określić wartość i z równania (2).

Równanie (3) jest równaniem różniczkowym o pochodnych cząstkowych i może być rozwiązane rozmaitymi sposobami; odpowiedź otrzymamy w postaci rozmaitych szeregów, sumy tych szeregów muszą dawać te same rezultaty. Zastosujemy metodę Eulera.

Załóżmy, że niewiadoma funkcja u jest iloczynem dwóch funkcji, z których każda jest funkcją jednej tylko zmiennej t lub x, więc
$$u = TX, \tag{4}$$
gdzie
$$T = f_1(t),$$
$$X = f_2(x);$$
wtedy
$$\frac{\partial u}{\partial x} = T\frac{dX}{dx}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = T\frac{d^2X}{dx^2};$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} = X\frac{dT}{dt}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X\frac{d^2T}{dt^2}.$$

Podstawiając te wartości do (3) otrzymamy
$$T\frac{d^2X}{dx^2} = RATX + (RC + LA)X\frac{dT}{dt} + LCX\frac{d^2T}{dt^2}$$
lub, po podzieleniu przez TX,
$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = RA + \frac{RC + LA}{T}\frac{dT}{dt} + \frac{LC}{T}\frac{d^2T}{dt^2}. \tag{5}$$

Lewa strona tego równania zależy tylko od x, prawa zaś tylko od t; ponieważ równość musi mieć miejsce przy dowolnych wartościach x i t, więc jest to możliwe tylko wówczas, gdy każdy z tych wyrazów ma jedną i tę samą stałą i rzeczywistą wartość liczbową.

Ta stała nie może mieć wartości dodatniej, np. $+a^2$, gdzie a może mieć jakąkolwiek wartość liczbową; oczywiście mielibyśmy wówczas
$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = a^2,$$
skąd
$$X = K_1 e^{ax} + K_2 e^{-ax}.$$

gdzie K_1 i K_2 — stałe dowolne, ale z tego wynikałoby, że przy wzroście x do ∞ funkcja X również wzrastałaby do nieskończoności; do takich samych rezultatów doszlibyśmy badając funkcję T, gdybyśmy przyrównali do $+a^2$ prawą stronę równania (5); czyli że w takim przypadku napięcie $u = TX$ wzrastałoby do nieskończoności ze wzrostem x, co oczywiście nie odpowiada naszemu zagadnieniu. Wobec tego musimy przyjąć tę stałą w postaci liczby ujemnej, a więc $-a^2$, gdzie a może na ogół mieć wartość dowolną.

Z równania (5) wobec tego otrzymujemy

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -a^2,$$

$$RA + \frac{RC+LA}{T}\frac{dT}{dt} + \frac{LC}{T}\frac{d^2T}{dt^2} = -a^2,$$

albo

$$\frac{d^2X}{dx^2} + a^2X = 0, \tag{6}$$

$$\frac{d^2T}{dt^2} + \left(\frac{R}{L} + \frac{A}{C}\right)\frac{dT}{dt} + \frac{RA+a^2}{LC}T = 0. \tag{7}$$

Rozwiązując równanie (6), znajdujemy

$$X = A_0 \cos ax + B_0 \sin ax, \tag{8}$$

gdzie A_0 i B_0 — stałe dowolne.

Dla rozwiązania równania (7) piszemy równanie charakterystyczne:

$$k^2 + \left(\frac{R}{L} + \frac{A}{C}\right)k + \frac{RA+a^2}{LC} = 0,$$

które daje pierwiastki

$$k_1 = -\left(\frac{R}{2L} + \frac{A}{2C}\right) + \sqrt{\left(\frac{R}{2L} + \frac{A}{2C}\right)^2 - \frac{RA+a^2}{LC}} =$$

$$= -\left(\frac{R}{2L} + \frac{A}{2C}\right) + \sqrt{\left(\frac{R}{2L} - \frac{A}{2C}\right)^2 - \frac{a^2}{LC}},$$

$$k_2 = -\left(\frac{R}{2L} + \frac{A}{2C}\right) - \sqrt{\left(\frac{R}{2L} - \frac{A}{2C}\right)^2 - \frac{a^2}{LC}}.$$

W zależności od tego, czy pierwiastki k_1 i k_2 są rzeczywiste — różne lub równe, lub są liczbami zespolonymi, otrzymamy trzy postacie rozwiązań; w pierwszych dwóch przypadkach

$$1) \quad T = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t},$$

$$2) \quad T = e^{kt}(C_1 + C_2 t),$$

gdzie C_1 i C_2 — stałe dowolne; ponieważ k_1 i k_2 są liczbami ujemnymi, więc otrzymujemy funkcje malejące i to nic osobliwego nie przedstawia; rozpatrujemy więc przypadek, gdy pierwiastki są liczbami zespolonymi, czyli $\frac{R}{2L} - \frac{A}{C} < \frac{a}{\sqrt{LC}}$;

wtedy

$$k_1 = -\alpha + j\beta,$$

$$k_2 = -\alpha - j\beta,$$

gdzie

$$\alpha = \frac{R}{2L} + \frac{A}{2C}, \tag{9}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{a^2}{LC} - \gamma^2}, \tag{10}$$

$$\gamma = \frac{R}{2L} - \frac{A}{2C}. \tag{11}$$

Zwróćmy uwagę, że α i γ zależą tylko od stałych linii, więc dla rozpatrywanej linii mają wartości określone, gdy tymczasem β zależy od stałej a.

Całka ogólna w tym przypadku będzie

$$T = e^{-\alpha t}(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t).$$

Podstawiając tę wartość T, a także wartość X z (8), do (4) i zamieniając iloczyny stałych dowolnych pojedynczymi literami, otrzymamy

$$u = e^{-\alpha t}\{(A_1 \cos \beta t + A_2 \sin \beta t) \cos ax + (B_1 \cos \beta t + B_2 \sin \beta t) \sin ax\}.$$

W zależności od wartości a możemy otrzymać nieskończoną ilość takich rozwiązań, całka ogólna będzie więc sumą wszystkich takich całek szczególnych; oznaczając dla dowolnej całki szczególnej wartości a przez a_n, odpowiednią wartość β przez β_n, zaś stałe dowolne dla tej całki przez A_{1_n}, A_{2_n}, B_{1_n}, B_{2_n}, możemy napisać całkę ogólną w postaci

$$u = e^{-\alpha t} \sum_{n=1}^{n=\infty} \Big\{ (A_{1n} \cos \beta_n t + A_{2n} \sin \beta_n t) \cos a_n x +$$

$$+ (B_{1n} \cos \beta_n t + B_{2n} \sin \beta_n t) \sin a_n x) \Big\}.$$

Wzór ten można przepisać inaczej, zakładając

$$A_{1n} \cos \beta_n t + A_{2n} \sin \beta_n t = M_n \sin (\beta_n t + \delta_n),$$

$$B_{1n} \cos \beta_n t + B_{2n} \sin \beta_n t = N_n \sin (\beta_n t + \psi_n),$$

gdzie M, N, δ i ψ — stałe dowolne; w ten sposób

$$u = e^{-at} \sum_{n=1}^{n=\infty} \left\{ M_n \sin (\beta_n t + \delta_n) \cos a_n x + N_n \sin (\beta_n t + \psi_n) \sin a_n x \right\}. \quad (12)$$

Teraz określimy prąd ze wzoru (2)

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = A u + C \frac{\partial u}{\partial t};$$

biorąc wartość u ze wzoru (12), będziemy mieli

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = e^{-at} \sum_{n=1}^{n=\infty} \Big\{ A M_n \sin (\beta_n t + \delta_n) \cos a_n x + A N_n \sin (\beta_n t + \psi_n) \sin a_n x -$$

$$- a\, C\, M_n \sin (\beta_n t + \delta_n) \cos a_n x - a\, C\, N_n \sin (\beta_n t + \psi_n) \sin a_n x +$$

$$+ \beta_n\, C\, M_n \cos (\beta_n t + \delta_n) \cos a_n x + \beta_n\, C\, N_n \cos (\beta_n t + \psi_n) \sin a_n x \Big\},$$

albo

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = e^{-a} \sum_{n=2}^{n=\infty} \Big\{ M_n \Big[(A - a\, C) \sin (\beta_n t + \delta_n) + \beta_n C \cos (\beta_n t + \delta_n) \Big] \cos a_n x +$$

$$+ N_n \Big[(A - a\, C) \sin (\beta_n t + \psi_n) + \beta_n\, C \cos (\beta_n t + \psi_n) \Big] \sin a_n x \Big\}.$$

Wyrazy w nawiasach prostokątnych możemy zastąpić sinusoidami, których amplitudy będą jednakowe i równe

$$\sqrt{(A - a\, C)^2 + (\beta_n\, C)^2};$$

podpierwiastkowa przy uwzględnieniu (9), (10) i (11) będzie równa

$$(A - aC)^2 + (\beta_n\, C)^2 = A^2 - 2\, A\, C\, a + C^2 a^2 + C^2 \beta_n^{\,2} =$$

$$= A^2 - 2 A\, C\, a + C^2 (a^2 + \beta_n^{\,2}) =$$

$$= A^2 - \frac{RAC}{L} - A^2 + C^2 \left\{ \left(\frac{R}{2L} + \frac{A}{2C} \right)^2 + \frac{a_n^{\,2}}{LC} - \left(\frac{R}{2L} - \frac{A}{2C} \right)^2 \right\} =$$

$$= -\frac{RAC}{L} + C^2 \left\{ \left(\frac{R}{2L} \right)^2 + \frac{RA}{2LC} + \left(\frac{A}{2C} \right)^2 + \frac{a_n^{\,2}}{LC} -\right.$$

$$\left. - \left(\frac{R}{2L} \right)^2 + \frac{RA}{2LC} - \left(\frac{A}{2C} \right)^2 \right\} = -\frac{RAC}{L} + \frac{RAC}{L} + a_n^{\,2} \frac{C}{L};$$

wobec tego amplituda sinusoidy będzie

$$a_n\sqrt{\frac{C}{L}};$$

kąt przesunięcia fazy tej sinusoidy ϑ_n określimy ze wzoru

$$\operatorname{tg}\vartheta_n = \frac{\beta_n C}{A-\alpha C} = \frac{\beta_n}{\frac{A}{C}-\alpha} = \frac{\beta_n}{\frac{A}{C}-\frac{R}{2L}-\frac{A}{2C}} = -\frac{\beta_n}{\gamma}.$$

Wobec tego

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = e^{-\alpha t}\sqrt{\frac{C}{L}}\sum_{n=1}^{n=\infty} a_n\Big\{M_n \sin(\beta_n t+\delta_n+\vartheta_n)\cos a_n x +$$

$$+ N_n \sin(\beta_n t+\psi_n+\vartheta_n)\sin a_n x\Big\}.$$

Dla znalezienia i całkujemy ten wzór względem x, wtedy

$$i = e^{-\alpha t}\sqrt{\frac{C}{L}}\sum_{n=1}^{n=\infty}\Big\{-M_n \sin(\beta_n t+\delta_n+\vartheta_n)\sin a_n x +$$

$$+ N_n \sin(\beta_n t+\psi_n+\vartheta_n)\cos a_n x\Big\}. \qquad (13)$$

Stałej dowolnej nie piszemy, gdyż oczywiście jest ona równa zeru, albowiem dla $t=\infty$, $i=0$, bo $u=0$. Ponieważ

$$-\sin a_n x = \cos\left(a_n x+\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\cos a_n x = \sin\left(a_n x+\frac{\pi}{2}\right),$$

przeto, porównując (13) z (12), możemy sformułować otrzymany wynik w ten sposób:

amplitudę prądu otrzymujemy z amplitudy napięcia mnożąc tę ostatnią przez $\sqrt{\frac{C}{L}}$. W czasie prąd jest przesunięty o kąt

$$\vartheta_n = \operatorname{arctg}\left(-\frac{\beta_n}{\gamma}\right);$$

jeżeli

$$\gamma > 0, \text{ czyli } \frac{R}{L} > \frac{A}{C},$$

wtedy $\vartheta_n < 0$, β_n zawsze > 0, bo to wartość bezwzględna pierwiastka, czyli prąd jest opóźniony w czasie względem napięcia;

gdy $$\frac{R}{L} < \frac{A}{C}, \ \gamma < 0, \text{ wtedy } \vartheta_n > 0,$$

prąd jest przyśpieszony w czasie względem napięcia; wreszcie

gdy $$\frac{R}{L} = \frac{A}{C}, \quad \gamma = 0, \ \vartheta_n = \operatorname{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2},$$

prąd jest opóźniony w czasie o kąt prosty względem napięcia.

W przestrzeni prąd wyprzedza napięcie o kąt prosty.

Wzory (12) i (13) dają nam wartości chwilowe napięcia i prądu w dowolnym punkcie obwodu, odległym o x od początku w najogólniejszym przypadku; w tych wzorach mamy stałe dowolne

$$M_n, \ \delta_n, \ N_n, \ \psi_n, \ a_n,$$

stałe β_n i δ_n zależą od a_n.

Wartość tych stałych dowolnych może być znaleziona tylko wtedy, gdy będziemy mieli dostateczną ilość dodatkowych danych dotyczących wartości napięć i prądów w wiadomych chwilach i w określonych miejscach.

Mówiliśmy już poprzednio, że wartości chwilowe napięć i prądów w stanie nieustalonym można rozpatrywać jako sumę dwóch wartości chwilowych, odpowiadających stanowi ustalonemu i stanowi przejściowemu

$$u = u_u + u_p,$$

$$i = i_u + i_p.$$

Wyżej wyprowadzone równania różniczkowe mogą być zastosowane zarówno do wartości u i i jako też do poszczególnych wartości u_u, i_u lub u_p, i_p. Oczywiście w zależności od tego, jaki stan obwodu rozpatrujemy, stałe dowolne, wchodzące do całek ogólnych równań różniczkowych, będą miały inne wartości.

Zajmiemy się obecnie określeniem napięć i prądów przejściowych w okresie nieustalonego stanu obwodu.

Będziemy więc mieli ze wzorów (12) i (13)

$$u_p = e^{-at} \sum_{n=1}^{n=\infty} \left\{ M_n \sin(\beta_n t + \delta_n) \cos a_n x + \right.$$

$$\left. + N_n \sin(\beta_n t + \psi_n) \sin a_n x \right\}, \tag{14}$$

$$i_p = e^{-\alpha t} \sqrt{\frac{C}{L}} \sum_{n=1}^{n=\infty} \Big\{ -M_n \sin(\beta_n t + \delta_n + \vartheta_n) \sin a_n x +$$

$$+ N_n \sin(\beta_n t + \psi_n + \vartheta_n) \cos a_n x \Big\}, \tag{15}$$

gdzie

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{R}{L} + \frac{A}{C}\right), \tag{16}$$

$$\beta_n = \sqrt{\frac{a_n^2}{LC} - \gamma^2}, \quad \frac{a_n^2}{LC} > \gamma^2, \tag{17}$$

$$\gamma = \frac{1}{2}\left(\frac{R}{L} - \frac{A}{C}\right), \tag{18}$$

$$\operatorname{tg} \vartheta_n = -\frac{\beta_n}{\gamma}. \tag{19}$$

§ 121

PRZYŁĄCZANIE LINII W KOŃCU OTWARTEJ DO ŹRÓDŁA PRĄDU STAŁEGO

Na początku linii wartość napięcia prądu stałego, do którego przyłączana jest linia w końcu otwarta, wynosi U. Będziemy mieli następujące warunki graniczne:

przy wszelkich wartościach t

1) dla $x = 0$ (na początku przy zaciskach) $u = U$, $u_u = U$, $u_p = 0$;

2) dla $x = l$ (w końcu linii) $i = 0$, $i_u = 0$. $i_p = 0$;

przy wszelkich wartościach $x > 0$

3) dla $t = 0$, $u = 0$, $u_u = U$, $u_p = -U$;

4) dla $t = 0$, $i = 0$, $i_u = 0$, $i_p = 0$.

Uwzględniając we wzorze (14) pierwszy warunek graniczny, otrzymamy

$$0 = e^{-at} \sum_{n=1}^{n=\infty} M_n \sin(\beta_n t + \delta_n).$$

Ponieważ równość ta powinna mieć miejsce dla dowolnej wartości t, więc

$$M_n = 0.$$

W ten sposób, zamiast wzorów (14) i (15) będziemy mieli

$$u_p = e^{-at} \sum_{n=1}^{n=\infty} N_n \sin(\beta_n t + \psi_n) \sin a_n x, \tag{20}$$

$$i_p = e^{-at} \sqrt{\frac{C}{L}} \sum_{n=1}^{n=\infty} N_n \sin(\beta_n t + \psi_n + \vartheta_n) \cos a_n x. \tag{21}$$

Zakładając w ostatnim wzorze, na podstawie warunku (2), $x = l$, $i_p = 0$ i zaznaczając, że N_n nie może być równe zeru, gdyż wtedy $u_p = 0$ przy wszelkich wartościach x, co przeczy warunkowi (3), otrzymujemy po uproszczeniu

$$\cos a_n l = 0,$$

czyli że wszelkie wartości $a_n l$ muszą być nieparzystymi wielokrotnościami $\frac{\pi}{2}$, a więc

$$a_1 l = \frac{\pi}{2}; \quad a_3 l = 3\frac{\pi}{2}; \quad a_5 l = 5\frac{\pi}{2}, \ldots, \quad a_{2k-1} l = (2k-1)\frac{\pi}{2};$$

stąd wynika, że stała dowolna a_n może mieć w tym przypadku tylko następujące wartości:

$$a_1 = \frac{\pi}{2l}; \quad a_3 = \frac{3\pi}{2l} = 3a_1, \ldots, \quad a_{2k-1} = \frac{(2k-1)\pi}{2l} =$$

$$= (2k-1)a_1. \tag{22}$$

Rozpatrując falę napięcia i prądu wzdłuż linii w określonej chwili, spostrzegamy ze wzorów (20) i (21), że długość fali λ_n otrzymamy, gdy

$$a_n(x + \lambda_n) = a_n x + 2\pi,$$

skąd

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{a_n};$$

gdy $a_n = a_1 = \frac{\pi}{2l}$, będziemy mieli $\lambda_1 = 4l$, to znaczy, że cała długość linii zawiera tylko ¼ fali tej sinusoidy, którą nazwiemy *sinusoidą główną* albo *pierwszą harmoniczną*.

Dla $a_n = a_3 = \frac{3\pi}{2l}$ (trzecia harmoniczna) $\lambda_3 = \frac{4l}{3}$,

dla $a_n = a_5 = \frac{5\pi}{2l}$ (piąta harmoniczna) $\lambda_5 = \frac{4l}{5}$;

widzimy więc, że cała fala układa się na długości linii tylko dla harmonicznych wyższych, zaczynając od piątej, przy czym będziemy mieli tylko nieparzyste harmoniczne.

Uwzględnijmy teraz warunek (3) i załóżmy we wzorze (20) $t = 0$, $u_p = -U$, wtedy

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} N_n \sin \psi_n \sin a_n x = -U, \tag{23}$$

przy czym, jak stwierdziliśmy wyżej, a_n może mieć tylko wartości podane w (22).

Wzór (23) daje nam nieskończony szereg Fouriera

$$N_1 \sin \psi_1 \sin a_1 x + N_3 \sin \psi_3 \sin 3a_1 x +$$
$$+ \ldots + N_{2k-1} \sin \psi_{2k-1} \sin (2k-1)\, a_1 x + \ldots = -U.$$

Do tego szeregu wchodzą tylko nieparzyste sinusoidy, więc krzywa przedstawiająca naszą funkcję jest symetryczna i względem osi x, i względem swego początku. Oznaczając dla dogodności

$$a_1 x = z, \quad N_{2k-1} \sin \psi_{2k-1} = A_{2k-1},$$

będziemy mieli szereg

$$A_1 \sin z + A_3 \sin 3z + \ldots + A_{2k-1} \sin (2k-1)\, z = -U;$$

spółczynnik dowolnej sinusoidy określimy ze znanego wzoru

$$A_{2k-1} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(z) \sin (2k-1)\, z\, dz;$$

u nas $f(z) = -U$, więc

$$A_{2k-1} = N_{2k-1} \sin \psi_{2k-1} = -\frac{4U}{\pi} \left| \frac{-\cos (2k-1)\, z}{2k-1} \right|_0^{\frac{\pi}{2}},$$

czyli ostatecznie

$$N_{2k-1} \sin \psi_{2k-1} = -\frac{4U}{(2k-1)\pi}. \tag{24}$$

Wreszcie, po uwzględnieniu ostatniego warunku granicznego: $t = 0$, $i_p = 0$, ze wzoru (21) otrzymamy, po skróceniu przez $\sqrt{\frac{C}{L}}$,

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} N_n \sin(\psi_n + \vartheta_n) \cos a_n x = 0.$$

Ponieważ ta równość powinna mieć miejsce przy wszelkich wartościach x, przeto każdy współczynnik przy wszystkich $\cos a_n x$ oddzielnie powinien się równać zeru. Uwzględniając, że $n = 2k - 1$, otrzymamy

$$N_{2k-1} \sin(\psi_{2k-1} + \vartheta_{2k-1}) = 0. \tag{25}$$

Ale N_{2k-1} nie może być równe 0, jak widać ze wzoru (24), więc powinno być

$$\sin(\psi_{2k-1} + \vartheta_{2k-1}) = 0,$$

skąd

$$\psi_{2k-1} + \vartheta_{2k-1} = 0,$$

lub w ogóle

$$\psi_{2k-1} + \vartheta_{2k-1} = k\pi,$$

gdzie k — liczba całkowita; wtedy

$$\operatorname{tg} \psi_{2k-1} = -\operatorname{tg} \vartheta_{2k-1};$$

ponieważ, ze wzoru (19),

$$\operatorname{tg} \vartheta_{2k-1} = -\frac{\beta_{2k-1}}{\gamma},$$

przeto

$$\operatorname{tg} \psi_{2k-1} = \frac{\beta_{2k-1}}{\gamma}.$$

Z tego wzoru znajdujemy

$$\sin \psi_{2k-1} = \frac{\operatorname{tg} \psi_{2k-1}}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2_{2k-1}}} = \frac{\beta_{2k-1}}{\sqrt{\beta^2_{2k-1} + \gamma^2}};$$

ponieważ ze wzoru (17)

$$\beta^2_{2k-1} + \gamma^2 = \frac{a^2_{2k-1}}{LC},$$

przeto ostatecznie

$$\sin \psi_{2k-1} = \frac{\beta_{2k-1}}{a_{2k-1}} \sqrt{LC}. \tag{26}$$

Ze wzorów (24) i (26) znajdujemy

$$N_{2k-1} = -\frac{4 U a_{2k-1}}{(2k-1)\pi \beta_{2k-1} \sqrt{LC}}.$$

Zamieniając w tym wzorze a_{2k-1} na jego wartość ze wzoru (22), a mianowicie

$$a_{2k-1} = (2k-1)\frac{\pi}{2l},$$

otrzymamy po skróceniu ostatecznie

$$N_{2k-1} = -\frac{2U}{l\sqrt{LC}\cdot\beta_{2k-1}}. \tag{27}$$

Podstawiając do wzorów (20) i (21) znalezione wartości stałych dowolnych, otrzymamy

$$u_p = -\frac{2Ue^{-\alpha t}}{l\sqrt{LC}}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{\beta_{2k-1}}\sin(\beta_{2k-1}t - \vartheta_{2k-1})\sin\frac{(2k-1)\pi}{2l}, \tag{28}$$

$$i_p = -\frac{2Ue^{-\alpha t}}{lL}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{\beta_{2k-1}}\sin\beta_{2k-1}t\cos\frac{(2k-1)\pi}{2l}x, \tag{29}$$

albo inaczej

$$u_p = -\frac{2U}{l\sqrt{LC}}e^{-\alpha t}\left\{\frac{1}{\beta_1}\sin(\beta_1 t - \vartheta_1)\sin\frac{\pi x}{2l} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\beta_3}\sin(\beta_3 t - \vartheta_3)\sin\frac{3\pi x}{2l} + \frac{1}{\beta_5}\sin(\beta_5 t - \vartheta_5)\sin\frac{5\pi x}{2l} + \dots, \right. \tag{30}$$

$$i_p = -\frac{2U}{lL}e^{-\alpha t}\left\{\frac{1}{\beta_1}\sin\beta_1 t\cos\frac{\pi x}{2l} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\beta_3}\sin\beta_3 t\cos\frac{3\pi x}{2l} + \frac{1}{\beta_5}\sin\beta_5 t\cos\frac{5\pi x}{2l} + \dots, \right. \tag{31}$$

gdzie

$$\beta_{2k-1} = \sqrt{\frac{a^2_{2k-1}}{LC} - \gamma^2} = \sqrt{\frac{(2k-1)^2\pi^2}{4l^2LC} - \left(\frac{R}{2L} - \frac{A}{2C}\right)^2} \tag{32}$$

$$\vartheta_{2k-1} = \operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{\beta_{2k-1}}{\gamma}\right). \tag{33}$$

Z tych wzorów możemy zbadać amplitudy wszystkich harmonicznych, np. dla pierwszej harmonicznej

$$u_{1p} = -\frac{2U}{l\sqrt{LC}}e^{-\alpha t}\frac{1}{\beta_1}\sin(\beta_1 - \vartheta_1)\sin\frac{\pi x}{2l},$$

$$i_{1p} = -\frac{2U}{lL} e^{-\alpha t} \frac{1}{\beta_1} \sin \beta_1 t \cos \frac{\pi x}{2l},$$

$$U_{1pm} = \frac{2Ue^{-\alpha t}}{l\sqrt{LC}\beta_1},$$

$$I_{1pm} = \frac{2Ue^{-\alpha t}}{lL\beta_1},$$

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{R}{L} + \frac{A}{C}\right); \quad \beta_1 = \sqrt{\frac{\pi^2}{4l^2LC} - \left(\frac{R}{2L} - \frac{A}{2C}\right)^2}.$$

W zależności od wartości mianownika we wzorach na U lub I możemy otrzymać przepięcie lub przetężenie.

§ 122

PRZYŁĄCZANIE LINII W KOŃCU ZWARTEJ DO ŹRÓDŁA PRĄDU STAŁEGO

Warunki graniczne będą

przy wszelkich wartościach t:

1) dla $x = 0$, $u_p = 0$; $(u = U$, $u_u = U)$,

2) dla $x = l$, $u_p = 0$; $(u = 0$, $u_u = 0)$,

przy wszelkich wartościach x w granicach $0 < x < l$:

3) dla $t = 0$; $u_p = -U_u$ $(u = 0)$;

4) dla $t = 0$; $i_p = -i_u$ $(i = 0)$;

jeżeli nie weźmiemy pod uwagę upływności, która przy prądzie stałym nie ma praktycznego znaczenia, możemy założyć, że w stanie ustalonym prąd wzdłuż całej linii ma jednakową wartość $i_u = \frac{U}{R}$, gdzie R stanowi oporność całej linii, wobec czego $i_p = -\frac{U}{R}$; napięcie zaś w dowolnym punkcie w odległości x od początku, w stanie ustalonym, wyrazi się wzorem

$$u_u = U - U\frac{x}{l} = U\left(1 - \frac{x}{l}\right), \text{ wobec czego } u_p = -U\left(1 - \frac{x}{l}\right).$$

§ 123

PRZYŁĄCZANIE LINII W KOŃCU OTWARTEJ DO ŹRÓDŁA PRĄDU ZMIENNEGO

Niech wartość napięcia prądu zmiennego sinusoidalnego w chwili zamknięcia obwodu przechodzi przez fazę ψ, czyli że wartość chwilowa będzie określona wzorem

$$u_u = U_m \sin(\omega t + \psi).$$

Będziemy mieli następujące warunki graniczne przy wszelkich wartościach t:

1) dla $x = 0$, napięcie u będzie od razu takie jak po ustaleniu się, a ponieważ $u = u_u + u_p$, przeto $u_p = 0$;

2) dla $x = l$, $i = 0$, $i_u = 0$, $i_p = 0$;

przy wszelkich wartościach $x > 0$:

3) dla $t = 0$, $u = 0$, $u_u + u_p = 0$, $u_p = -u_u$;

4) dla $t = 0$, $i = 0$, $i_u + i_p = 0$, $i_p = -i_u$.

Wartości ustalone napięcia u_u oraz prądu i_u jako funkcje zmiennej odległości x mogą być znalezione ze wzorów dotyczących stanu ustalonego.

Stosując te same ogólne wzory (14) i (15) dla przejściowych wartości napięcia i prądu i spostrzegając, że pierwsze dwa warunki graniczne są te same co i przy prądzie stałym, znajdziemy, jak w § 114,

$$M_n = 0; \qquad \cos a_n l = 0.$$

Warunek trzeci da nam

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} N_n \sin \psi_n \sin a_n x = -u_u,$$

skąd, jak dla szeregu Fouriera,

$$N_{2k-1} \sin \psi_{2k-1} = -\frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} u_u \sin(2k-1)\, a_1 x d(a_1 x); \tag{34}$$

w tym przypadku u_u jest funkcją x, która może być określona przez stałe obwodu i przez wartości napięć na początku lub w końcu, w stanie ustalonym. Wreszcie ostatni warunek daje

$$\sqrt{\frac{C}{L}} \sum_{n=1}^{n=\infty} N_n \sin(\psi_n + \vartheta_n) \cos a_n x = -i_u,$$

co znowu nam daje szereg F o u r i e r a, dla którego

$$N_{2k-1} \sin(\psi_{2k-1} + \vartheta_{2k-1}) = -\frac{4}{\pi}\sqrt{\frac{L}{C}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} i_u \cos(2k-1)\, a_1 x\, d(a_1 x)$$

albo

$$N_{2k-1} \cos\vartheta_{2k-1} \sin\psi_{2k-1} + N_{2k-1} \sin\vartheta_{2k-1} \cos\psi_{2k-1} =$$

$$= -\frac{4}{\pi}\sqrt{\frac{L}{C}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} i_u \cos(2k-1)\, a_1 x\, d(a_1 x). \tag{35}$$

Ze wzorów (19) i (17) znajdujemy

$$\cos\vartheta_{2k-1} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\beta^2_{2k-1}}{\gamma^2}}} = \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2+\beta^2_{2k-1}}} = \frac{\gamma\sqrt{LC}}{a_{2k-1}},$$

$$\sin\vartheta_{2k-1} = -\frac{\beta_{2k-1}\sqrt{LC}}{\gamma a_{2k-1}} = -\frac{\beta_{2k-1}\sqrt{LC}}{a_{2k-1}},$$

zaś ze wzorów (34) i (35) możemy znaleźć N_{2k-1} oraz ψ_{2k-1}.

§ 124

PRZYŁĄCZANIE LINII W KOŃCU ZWARTEJ DO ŹRÓDŁA PRĄDU ZMIENNEGO

Będziemy mieli warunki graniczne analogiczne do tych, które ustaliliśmy dla prądu stałego, mianowicie:

przy wszelkich wartościach t:

1) dla $x = 0$, $u_p = 0$ $(u = u)$,

2) dla $x = l$, $u_p = 0$ $(u = 0, \quad u_u = 0)$;

przy wszelkich wartościach $x > 0$:

3) dla $t = 0$, $u_p = -u_u$ $(u = 0)$,

4) dla $t = 0$, $i_p = -i_u$ $(i = 0)$,

gdzie u_u i i_u są funkcjami x, które mogą być określone na podstawie znanych wzorów dla stanu ustalonego. Sposób rozwiązywania zagadnienia jest taki sam jak w § 123.

§ 125

LINIA NIEODKSZTAŁCAJĄCA. WYRAŻENIE WARTOŚCI CHWILOWYCH NAPIĘĆ I PRĄDÓW W POSTACI DWÓCH FAL

Znaczne uproszczenie we wzorach dla napięć i prądów otrzymamy rozpatrując linię, w której stałe tworzą znaną proporcję:

$$\frac{R}{L} = \frac{A}{C}, \tag{36}$$

czyli tzw. linię nieodkształcającą. W tym przypadku wzory (16) i (18) dają

$$\alpha = \frac{R}{L} = \frac{A}{C}, \tag{37}$$

$$\gamma = 0.$$

Weźmy ogólne równanie różniczkowe (3)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = RAu + (RC + LA)\frac{\partial u}{\partial t} + LC\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \tag{38}$$

załóżmy

$$u = Ye^{-\alpha t} \tag{39}$$

gdzie Y jest na razie niewiadomą funkcją dwóch zmiennych x i t:

$$Y = f(x,\, t);$$

wtedy

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{-\alpha t}\frac{\partial Y}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{-\alpha t}\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = e^{-\alpha t}\left(\frac{dY}{dt} - \alpha Y\right), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = e^{-\alpha t}\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} - 2\alpha\frac{\partial Y}{\partial t} + \alpha^2 Y\right).$$

Podstawiając te wartości do (38) i dzieląc obie strony przez $e^{-\alpha t}$, otrzymamy

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} &= RAY + (RC + LA)\left(\frac{\partial Y}{\partial t} - \alpha Y\right) + LC\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} - 2\alpha\frac{\partial Y}{\partial t} + \alpha^2 Y\right) = \\ &= Y[RA - \alpha(RC + LA) + \alpha^2 LC] + \\ &+ \frac{\partial Y}{\partial t}[RC + LA - 2\alpha LC] + \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}LC.\end{aligned} \tag{40}$$

Uwzględniając wartości α ze wzoru (37), obliczamy

$$RA - \alpha(RC + LA) + \alpha^2 LC = RA - \frac{R^2 C}{L} - RA + \frac{R^2 C}{L} = 0,$$

$$RC + LA - 2\alpha LC = RC + RC - 2RC = 0.$$

Wobec tego równanie (40) otrzymuje postać

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}.$$

Oznaczmy

$$a = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \tag{41}$$

czyli $LC = \frac{1}{a^2}$, wówczas

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}. \tag{42}$$

Jest to znane równanie różniczkowe d'Alemberta, wyprowadzone dla drgającej struny. Całka ogólna tego równania ma postać:

$$Y = f_1(x - at) + f_2(x + at), \tag{43}$$

gdzie f_1 i f_2 stanowią na ogół dowolne funkcje odległości x i czasu t.

Można łatwo sprawdzić słuszność tego rozwiązania, gdyż

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial f_1}{\partial(x - at)}(-a) + \frac{\partial f_2}{\partial(x + at)}a,$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial(x - at)^2}a^2 + \frac{\partial^2 f_2}{\partial(x + at)^2}a^2 =$$

$$= a^2\left[\frac{\partial^2 f_1}{\partial(x - at)^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial(x + at)^2}\right],$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial(x - at)} + \frac{\partial f_2}{\partial(x + at)},$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial(x - at)^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial(x + at)^2},$$

skąd widać, że warunek (42) spełniony.

Podstawiając wartość Y ze wzoru (43) do (39), otrzymamy

$$u = e^{-at}\{f_1(x - at) + f_2(x + at)\}.$$

Stosując nasze rozumowanie do stanu przejściowego będziemy mieli

$$u_p = e^{\ at}\{f_1(x - at) + f_2(x + at)\}. \tag{44}$$

Dla znalezienia i bierzemy wzór (2)

$$-\frac{\partial i_p}{\partial x} = Au_p + C\frac{\partial u_p}{\partial t};$$

podstawiając tutaj znalezioną wartość u_p, otrzymamy

$$-\frac{\partial i_p}{\partial x} = e^{-\alpha t}\left\{ A(f_1 + f_2) - aC(f_1 + f_2) - Ca\frac{\partial f_1}{\partial(x - at)} + \right.$$

$$\left. + Ca\frac{\partial f_2}{\partial(x + at)} \right\} = e^{-\alpha t}\left\{ (A - aC)(f_1 + f_2) - \right.$$

$$\left. - Ca\left(\frac{\partial f_1}{\partial(x - at)} - \frac{\partial f_2}{\partial(x + at)}\right)\right\}.$$

Wobec (37)

$$A - aC = A - A = 0,$$

więc

$$-\frac{\partial i_p}{\partial x} = -Cae^{-\alpha t}\left\{\frac{\partial f_1(x - at)}{\partial(x - at)} - \frac{\partial f_2(x + at)}{\partial(x + at)}\right\}$$

albo, podstawiając $a = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ i zmieniając znaki,

$$\frac{\partial i_p}{\partial x} = \sqrt{\frac{C}{L}}\, e^{-\alpha t}\left\{\frac{\partial f_1(x - at)}{\partial(x - at)} - \frac{\partial f_2(x + at)}{\partial(x + at)}\right\}.$$

Całkując względem x, otrzymamy

$$i_p = \sqrt{\frac{C}{L}}\, e^{-\alpha t}\{f_1(x - at) - f_2(x + at)\}. \tag{45}$$

Stała dowolna powinna równać się zeru, gdyż dla $t = \infty$, $u_p = 0$ oraz $i_p = 0$.

Stosunek amplitud napięcia i natężenia prądu stanowi oporność falową Z; w rozpatrywanym przypadku

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Wzory (44) i (45) dają nam wartości chwilowe napięcia i prądu przejściowego w dowolnym punkcie przewodu.

Rozpatrzmy dwa punkty znajdujące się w odległości dx; w tym drugim punkcie wartość napięcia i prądu będzie taka sama jak w punkcie pierwszym po upływie czasu dt. Wobec tego

1) $x + dx - a(t + dt) = x - at,$

2) $x + dx + a(t + dt) = x + at;$

z pierwszego równania otrzymujemy

$$dx - adt = 0; \quad a = \frac{dx}{dt},$$

z drugiego równania

$$dx + adt = 0; \quad a = -\frac{dx}{dt}.$$

Widzimy stąd, że spółczynnik a stanowi prędkość, z jaką się rozchodzą z jednego dowolnego punktu do drugiego te same wartości prądu i napięcia; inaczej mówiąc, jest to prędkość rozchodzenia się fal napięcia i prądu wzdłuż przewodu.

Ze wzorów (44) i (45) stwierdzamy, że napięcie stanowi sumę dwóch fal, prąd zaś różnicę dwóch fal, które rozchodzą się z jedną i tą samą prędkością, ale w kierunkach przeciwnych (prędkości mają znaki przeciwne); fale są tłumione odpowiednio do funkcji wykładniczej $e^{-\alpha t}$, która jest funkcją malejącą.

Fale prądu są podobne do odpowiednich fal napięcia; amplitudy fal prądu otrzymujemy z amplitud napięcia, mnożąc je przez $\sqrt{\frac{C}{L}}$, co stanowi odwrotność oporności falowej linii w rozpatrywanym przypadku.

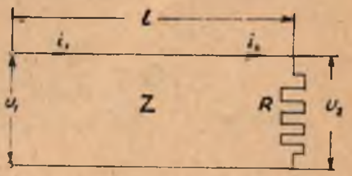
Obie fale, które mamy w powyższych wzorach, nazywamy *falami wędrownymi*. Pierwsza z tych fal, wychodząca ze źródła, stanowi falę główną; druga, biegnąca z tą samą prędkością, ale w kierunku przeciwnym, stanowi falę wpadającą do źródła lub falę odbitą na końcu linii.

§ 126

PRZYŁĄCZANIE LINII NIEODKSZTAŁCAJĄCEJ DO OPORNOŚCI RZECZYWISTEJ

Fale wędrujące, natrafiając na przeszkody w postaci skupionych oporności, bądź rzeczywistych, bądź urojonych, podlegają częściowo odbiciu, częściowo załamaniu.

Rozpatrzmy najpierw przypadek, gdy fala z linii nieodkształcającej o oporności falowej $Z = \sqrt{\frac{L}{C}}$ natrafia w odległości l od początku linii na oporność rzeczywistą R (rys. 228).



Rys. 228

Wartość chwilowa napięcia przejściowego na tej oporności wyrazi się według wzoru (44) w sposób następujący:

$$u_2 = e^{-\alpha t}\left[f_1(l - at) + f_2(l + at)\right], \tag{47}$$

a wartość chwilowa natężenia prądu przepływającego przez oporność R według wzoru (45) z uwzględnieniem wzoru (46) przybierze postać

$$i_2 = \frac{e^{-\alpha t}}{Z}\left[f_1(l-at) - f_2(l+at)\right]. \tag{48}$$

Oznaczając w skróceniu pierwszą falę jako falę główną przez f_g, drugą zaś jako falę odbitą przez f_0, czyli zakładając

$$e^{-\alpha t} f_1(l-at) = f_g,$$

$$e^{-\alpha t} f_2(l+at) = f_0,$$

będziemy mieli ze wzorów (47) i (48)

$$u_2 = f_g + f_0, \tag{49}$$

$$i_2 = \frac{1}{Z}\left(f_g - f_0\right). \tag{50}$$

Ale

$$u_2 = i_2 R,$$

więc

$$u_2 = \frac{R}{Z}\left(f_g - f_0\right). \tag{51}$$

Przez zestawienie ostatniego wzoru ze wzorem (49), otrzymujemy

$$f_g + f_0 = \frac{R}{Z}\left(f_g - f_0\right),$$

skąd

$$f_0 = \frac{R-Z}{R+Z} f_g. \tag{52}$$

Wyraz

$$s_0 = \frac{R-Z}{R+Z} \tag{53}$$

stanowi współczynnik odbicia fali głównej.

Podstawiając wartość f_0 ze wzoru (52) do wzoru (51), będziemy mieli

$$u_2 = \frac{R}{Z}\left[f_g - \frac{R-Z}{R+Z} f_g\right] = \frac{2R}{R+Z} f_g. \tag{54}$$

Wyraz

$$s_p = \frac{2R}{R+Z} \tag{55}$$

stanowi współczynnik przejścia fali głównej.

Ze wzoru (50), przy uwzględnieniu wzoru (52), otrzymamy

$$i_2 = \frac{1}{Z}\left(f_g - \frac{R-Z}{R+Z} f_g\right) = \frac{2}{R+Z} f_g. \tag{56}$$

Z powyższych wzorów na u_2 oraz i_2 możemy otrzymać wartości napięcia i natężenia prądu, gdy linia jest w stanie jałowym lub gdy jest w stanie zwarcia. W pierwszym przypadku $R = \infty$, wtedy

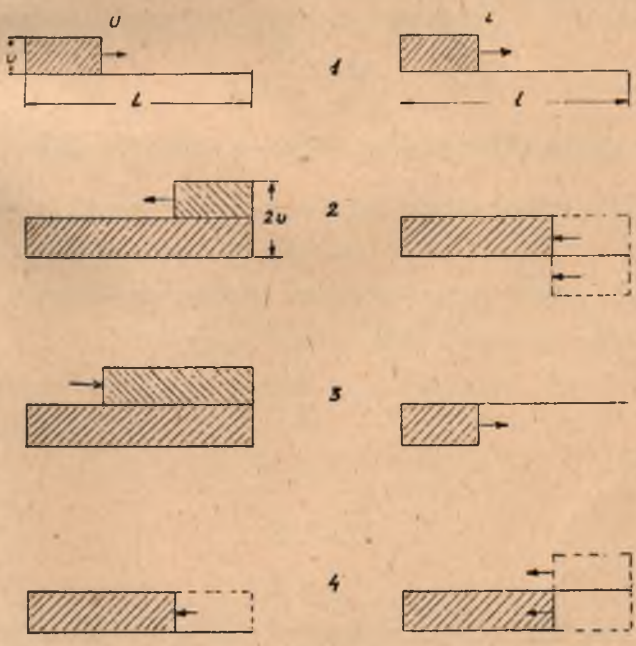
$$u_2 = 2f_g,$$
$$i_2 = 0.$$

Ze wzoru (52) wynika, że w tym przypadku

$$f_0 = f_g;$$

wskazuje to, że fala odbita ma ten sam znak co i fala główna, wobec czego napięcie na oporności wzrasta do podwójnej wartości napięcia u, które mamy u źródła. Dla prądu zaś fala odbita otrzymuje znak przeciwny, skutkiem czego prąd zanika.

Na rys. 229 pokazany jest przebieg fal napięcia i prądu w przypadku, gdy nie uwzględniamy tłumienia ($\alpha = 0$). Położenie 1 odpo-



Rys. 229

wiada chwili, gdy pierwotna fala główna nie doszła jeszcze do końca linii; w końcu zostaje odbita, przy czym dla napięcia z tym samym znakiem, dla prądu ze znakiem przeciwnym. Położenie 2 wskazuje stan po tym odbiciu; napięcie się podwaja, prąd zaś zanika; stan taki będzie trwał, zanim fale nie dojdą do początku linii; tu napięcie powinno się zrównać z napięciem u_1 źródła, wobec czego zachodzi odbicie fali ze zmianą znaku zarówno dla napięcia jak i dla prądu. Położenie 3 daje nam obraz, gdy w pewnej odległości od źródła ujemne napięcie zniwelowało do wartości u_1 poprzednie napięcie równe $2u_1$ oraz ujemny prąd osiągnął swoją wartość. Po dojściu takiego stanu do końca linii zachodzi odbicie fali napięcia z tym samym znakiem, czyli ujemnym, wobec czego napięcie spada do zera, fala zaś prądu odbija się ze znakiem przeciwnym, czyli dodatnim, co powoduje zanikanie prądu, otrzymujemy położenie 4. Taki stan trwa, aż fale dojdą do początku, wtedy rozpoczyna się wszystko na nowo w takim samym porządku.

Najkrótszy czas, czyli okres T, po upływie którego następuje powtórzenie zjawiska, znajdziemy biorąc pod uwagę, że powtórzenie zjawiska zachodzi po czterokrotnym przebiegu fali wzdłuż całej długości linii l i że prędkość przebiegu fali wynosi a; oczywiście

$$T = \frac{4\,l}{a},$$

znaczy to, że na długości linii mamy $\frac{1}{4}$ całkowitej fali.

Gdy linia jest w stanie zwarcia $R = 0$, wówczas ze wzoru (54) wynika, że

$$u_2 = 0,$$

fala napięcia odbija się w końcu ze znakiem przeciwnym.

Na podstawie wzoru (56), w tym przypadku,

$$i_2 = \frac{2}{Z} f_g,$$

a ponieważ

$$f_g = u_1,$$

a

$$\frac{U_1}{Z} = i_1,$$

przeto

$$i_2 = 2 i_1;$$

znaczy to, że fala napięcia zostaje w miejscu zwarcia linii odbita z tym samym znakiem.

Ciekawy przypadek zachodzi, gdy $R = Z$; wówczas, jak to wynika ze wzoru (52).

$$f_0 = 0;$$

to znaczy, że nie zachodzi odbicie; cała fala główna przechodzi przez oporność R.

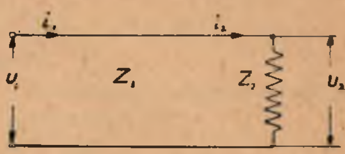
§ 127

PRZYŁĄCZANIE LINII NIEODKSZTAŁCAJĄCEJ DO INNEJ OPORNOŚCI FALOWEJ

Rozpatrzymy obecnie przypadek, gdy do linii nieodkształcającej z opornością falową Z_1 przyłączamy oporność falową Z_2 drugiej podobnej linii (rys. 230).

Zamieniając we wzorach poprzedniego paragrafu Z na Z_1 i R na Z_2 otrzymamy wzory odpowiadające nowym warunkom. Ze wzoru (53) otrzymujemy dla rozpatrywanego przypadku współczynnik odbicia fali w miejscu przyłączenia oporności Z_2:

$$s_0 = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}.$$



Rys. 230

ze wzoru (55) zaś współczynnik przejścia fali:

$$s_p = \frac{2\,Z_2}{Z_1 + Z_2}.$$

Fala odbita w pierwszej linii w miejscu przyłączenia Z_2 wyrazi się wzorem

$$f_0 = s_0\, f_g,$$

napięcie zaś na oporności będzie

$$u_2 = s_p\, f_g = \frac{2\,Z_2}{Z_1 + Z_2}\, u_1\,.$$

Tak samo znajdziemy prąd i_2, wchodzący do oporności Z_2; ze wzoru (56)

$$i_2 = \frac{2}{Z_1 + Z_2}\, f_g = \frac{2}{Z_1 + Z_2}\, u_1,$$

ale

$$u_1 = Z_1 i_1,$$

więc

$$i_2 = \frac{2 Z_1}{Z_1 + Z_2}\, i_1\,.$$

W przypadku, gdy $Z_1 = Z_2$, współczynnik odbicia staje się równy zeru, czyli cała fala główna przechodzi przez oporność Z_2.

SKOROWIDZ ALFABETYCZNY

Admitancja 68
d'Alemberta równanie 459
Aluminiowy prostownik 170
Analiza krzywych 185
Aperiodyczne wyładowanie kondensatora 404
Argument (symbolu) 60
Aronsa wzór 389
Arytmetyczna metoda analizy krzywych 186
Bessela funkcje 156
Cykl histerezy magnetycznej 130
Częstotliwość 20
Czterofazowy układ 97
Czwórnik 215
Czwórnik krzyżowy 229
„ typu T 222
„ typu Π 225
Czwórniki równoważne 228
Czwórników łączenie 234
Decybel 316
Dekrement logarytmiczny tłumienia 414
Długość fali 315
Dodawanie funkcji sinusoidalnych 29
Drgania swobodne 414
„ własne 411
„ wymuszone 411
Dudnienie 442
Dwufazowy układ 96
Fala główna 176, 316
„ odbita 316, 463
„ wędrowna 461
Fale napięcia w długich liniach 314
Fale prądu w długich liniach 314
Faza 21
„ w układach wielofazowych 93
Faz skojarzenie 97
Ferranti 323
Filtr dolnoprzepustowy 359
„ górnoprzepustowy 363
„ wstęgowy 367
Fischer-Hinnena sposób analizy krzywych 189
Foucaulta prądy 136
Fouriera szereg 173
Fryze S. 79
Główna fala 176
„ sinusoida 176
Gwiazdowe połączenie 97
Harmoniczna 176
Helmholtza wzór 381
Herc 20
Histereza dielektryczna 162
„ magnetyczna 129, 130
Impedancja 45
Indukcyjność 280
„ kabla dwużyłowego koncentrycznego 284
Indukcyjność linii dwuprzewodowej 280
Indukcyjność linii jednoprzewodowej 283
Indukcyjność linii trójprzewodowej 283
Indukcyjność własna 280
Indukcyjności wpływ na kształt krzywej prądu 206
Induktancja 45
Inwersja 71

Inwersji stopień 71
„ środek 71
Jednofazowy układ trójprzewodowy 96
Kapacitancja 45
Kąt histerezy (magnetycznej) 135
Kąt przesunięcia fazy 22
Kąt stratności dielektrycznej 164
Kelvin lord 160, 262, 271
Kenelly'ego metoda przekształcenia trójkąta w gwiazdę 116
Kirchhoffa prawa w zastosowaniu do prądów zmiennych 77
Konduktancja 68
Krarup 333
Laplace'a wzór 251
Linia bez strat 317
„ w stanie jałowym 323
„ w stanie zwarcia 323
„ nieodkształcająca 325, 458
Linia łańcuchowa typu T 351
„ „ typu Π 356
„ „ typu krzyżowego 357
Linie łańcuchowe 347
Logarytmiczny dekrement tłumienia 414
Ładowanie kondensatora prądem stałym 394, 416
Łańcuch izolatorów wiszących 373
Magnetyzm szczątkowy 130
Metoda inwersji 71
„ symboliczna 59
„ wykreślna 52
Moc bierna 28
„ bierna prądu odkształconego 209
„ czynna 27
„ czynna prądu odkształconego 206
„ prądów wielofaz. 100
„ pozorna 28
„ pozorna jako wektor 58
„ pozorna prądu odkształconego 208
„ prądu odkształconego 206
„ prądu trójfazowego 108
„ prądu zmiennego 26
Moc prądu zmiennego w symbolicznym ujęciu 66
Moduł (symbolu) 60
Nakładanie się prądów odkształconych 196
Napięcia spadek 76
„ strata 76
„ w szeregowym połączeniu 74
Napięcie bierne 58
„ czynne 58
„ fazowe 98
„ indukcyjne 34, 47
„ międzyfazowe 99
„ międzyprzewodowe 98
„ na kondensatorze 48
„ na oporności rzeczywistej 47
„ skojarzone 99
Napięć trójkąt 56
Naskórkowość 152
Natężenie powściągające 130
„ prądu skojarzone 100
Neper 316
Obieg histerezy magnetycznej 130
Obwody magnetycznie sprzężone 141, 433
Obwód oscylacyjny 411
„ prądu odkształconego 204
Okres 19
Określenie wielkości stałych za pomocą pomiarów 219
Oporność bierna 45
„ czynna 32
„ falowa 312
„ falowa linii łańcuchowej 352
Oporność indukcyjna 34
„ omowa 32
„ pojemnościowa 40
„ pozorna 37, 45
„ drgań swobodnych 414
„ drgań własnych 411
„ pozorna — zależność od częstotliwości 49
Oporność rzeczywista 32
Oporności pozorne połączone równolegle 81

Oporności pozorne połączone szeregowo 74
Oporności trójkąt 56
Opóźnienie w fazie 22
Oscylacyjne wyładowanie kondensatora 409
Oś czasu 64
Peeka wzór 164
Pochłaniacz fali (filtr) 373
Pojemność cząstkowa 276
Pojemność dwóch równoległych do siebie przewodów napowietrznych 272
Pojemność kabla dwużyłowego koncentrycznego 260
Pojemność kabla dwużyłowego skręconego 261
Pojemność kabla jednożyłowego obołowionego 256
Pojemność kabla jednożyłowego opancerzonego 257
Pojemność kabla trójżyłowego skręconego 266
Pojemność przewodu napowietrznego pojedynczego 271
Pojemność robocza 276
Pojemność robocza linii dwuprzewodowej 278
Pojemność robocza układu trzech przewodów 279
Pojemność trzech równoległych przewodów napowietrznych 274
Pojemności wpływ na kształt krzywej prądu 206
Pola wirujące 124, 126
Pollaka układ prostownikowy 170
Połączenia gwiazdowe 97
„ wielobokowe 97
Powstawanie prądu stałego 379
Powstawanie prądu zmiennego 384, 396, 423
Prawa Kirchhoffa w zastosowaniu do prądów zmiennych 77
Prąd bierny 38
„ czynny 38
„ dwufazowy 117
„ fazowy 98
„ magnesujący 134
Prąd odkształcony 173
„ przewodowy 98
„ sinusoidalny 15
„ skrośny 162, 164
„ tętniący 169
„ trójfazowy 102
„ upływu 163
„ zmienny 15
Prądy wirowe 136
Prądy w układach trójfazowych 112
Prędkość rozchodzenia się fal 315, 318
Prostownik aluminiowy 170
„ elektrolityczny 170
„ elektronowy 171
„ kuprytowy 172
„ rtęciowy 167
„ tlenkowy 172
Prostowniki 167
Przekładnia transformatora 145
Przekształcenie układu trójkątnego w układ gwiazdowy 116
Przerywanie obwodu, w którym indukcyjność i pojemność są połączone równolegle 431
Przerywanie obwodu z uwzględnieniem zmiany oporności na wyłączniku 389
Przesunięcie faz 21
Przesunięcie fazy o kąt prosty pomiędzy prądem i napięciem 90
Przewodność bierna 68
„ czynna 68
„ pozorna 67
„ rzeczywista 68
Przewody długie — równania zasadnicze 307
Przewody; wielkości charakterystyczne 307
Przyłączanie linii nieodkształcającej do oporności falowej 465
Przyłączanie linii do oporności rzeczywistej 461
Przyłączanie linii w końcu otwartej do źródła prądu stałego 450
Przyłączanie linii w końcu zwartej do źródła prądu stałego 455
Przyłączanie linii w końcu otwartej do źródła prądu zmiennego 456

Przyłączanie linii w końcu zwartej do źródła prądu zmiennego 457
Pulsacja 19
Pupin 333
Reaktancja 45
Rezonans napięć 48
„ prądów 84
Rezystancja 45
Richtera wzór 132
Rothego wykreślny sposób analizy krzywych 187
Rozkład napięć na okładzinach metalowych kabla opancerzonego 259
Rozkład potencjału w polu elektrycznym 251
Rozkład układów niesymetrycznych na układy symetryczne prądu trójfazowego 105
Równania zasadnicze obwodów prądu zmiennego 215
Równoważny prąd sinusoidalny 205
Scotta układ 150
Skineffekt 152
Skojarzenie faz 97
Spadek napięcia 76
Sposób Fischer-Hinnena analizy krzywych 189
Stała czasu 381
„ „ rozchodzenia się (fali) 316
Stała czasu tłumienia 381
Stałe czwórnika (wyznaczenie drogą pomiarów) 219
Stan jałowy 220
„ nieustalony 378
„ zwarcia 220
Steinmetz 162
Steinmetza wzór 131
Stopień inwersji 71
Strata napięcia 76
Strata z histerezy magnetycznej 131
„ z prądów wirowych 136
Stratność magnetyczna 139
Straty w dielektrykach 162
Strzałki kierunkowe 79
„ kierunkowości 79
Susceptancja 68
Symboliczna metoda 59
Szereg Fouriera 173
Sztuczne linie elektryczne 343
Środek inwersji 71
Thomsona wzór 415
Transformator powietrzny 141
„ z rdzeniem żelaznym 145
Trójfazowy prąd 102
„ odkształcony 212
„ układ 96
Trójkąt napięć 56
„ oporności 56
Układ czterofazowy 97
„ dwufazowy 96
„ Scotta 150
„ trójfazowy 96
„ wielofazowy 93
Układ wielofazowy skojarzony 97
„ „ symetryczny 93
Układ wyrównany 101
Układy zastępujące długą linię 343
Ulot 163, 164
Upływność 163, 307
Wartość chwilowa 18
„ maksymalna 18
„ przejściowa 379
„ skuteczna 24
Wartość skuteczna prądu odkształconego 202
Wartość szczytowa 18
„ średnia 22
„ ustalona 379
Warunki osiągnięcia największej mocy na odbiorniku 235
Wektory płaszczyznowe 55
Wielobokowe połączenie 97
Wielofazowy układ 93
„ „ skojarzony 97
Wielofazowy układ symetryczny 93
Wpływ indukcyjności i pojemności na kształt krzywej prądu odkształconego 206
Wpływ prądu odkształconego przy pomiarach indukcyjności i pojemności 210
Współczynnik długości fali 315
„ fazowy 316

Współczynnik histerezy magnetycznej 131
„ kształu 199
„ liniowy 338
„ mocy 28
„ odkształcenia 204
Współczynnik mocy prądu odkształconego 208
Współczynnik przejścia 462
Współczynnik przesunięcia fazy 350
Współczynnik sprzężenia magnetycznego 144
Współczynnik strat dielektrycznych 164
Współczynnik szczytu 199
Współczynnik tłumienia 316, 415
Współczynnik tłumienia obwodu oscylacyjnego 415
Wykres pracy obwodu prądu zmiennego 239
Wykres wektorowy 55
Wykres zmienności wektorów 69
Wykreślny sposób Rothego analizy krzywych 187
Wyładowanie kondensatora aperiodyczne 404
Wyładowanie kondensatora oscylacyjne 409
Wyładowanie kondensatora przez oporność rzeczywistą 400
Wyładowanie kondensatora w obwodach sprzężonych magnetycznie 433, 438
Wyprzedzanie w fazie 22
Wyrównany układ 101
Zanikanie prądu stałego 379
„ „ zmiennego 384
Zenneck 162
Zmiana oporności w obwodzie 383

LITERATURA

Dzieła treści ogólnej, dotyczące teorii prądów zmiennych albo wyłącznie, albo częściowo

Agger, Alternating currents, 1935
Arnold-La Cour-Bragstadt, Theorie der Wechselstroeme, 1920
Bedell, Crehore, Alternating currents, 1893
Benischke, Die Grundgesetze der Wechselstromtechnik, 1912
Benischke, Die wissenschaftlichen Grundlagen der Elektrotechnik, 1922
Boltz-Moeller, Leitfaden der Elektrotechnik, 1935
Bryant, Correll, Alternating currents circuits, 1925
Clayton, Alternating currents, 1935
Colebrook, Alternating currents and transients, 1925
Corcoran, Alternating currents circuits, 1943
Czerdancew, Teoria pieriemiennych tokow, 1927
Dover, Theory and praxis of alternating currents, 1945
Drysdale, The foundations of alternate currents theory, 1910
Fraenkel, Theorie der Wechselstroeme, 1930
Fryze, Elektrotechnika ogólna, t. III, 1933 (litogr.)
Görges, Grundzüge der Elektrotechnik, 1913
Janet, Leçons d'électrotechnique générale, t. II, 1926
Kałantarow, Teoria pieriemiennych tokow 1946
Kerchner, Corcoran, Alternating current circuits, 1948
Kitajew, Grebcow, Kurs elektrotiechniki, 1940
Kittler, Allgemeine Elektrotechnik, 1909
Konorski, Elektrotechnika ogólna, 1946 (skrypt)
Krug, Osnowy elektrotiechniki, t. II, 1946
Küpfmüller, Einführung in die theoretische Elektrotechnik, 1942
Lawrence, Principles of alternating currents, 1922
Linker, Grundlagen der Wechselstromtechnik, 1928
Loewe, Theorie des Wechselstromes, 1926
Lombardi, Principii scientifici di elettrotecnica, 1928
Magnusson, Alternating currents, 1926
Małow, Kurs elektrotiechniki, 1948
Michalke, Allgemeine Grundlagen der Elektrotechnik, 1925
Oberdorfer, Lehrbuch der Elektrotechnik, 1944
Piernet, Théorie générale sur les courants alternatifs, 1923
Pożaryski, Naukowe podstawy elektrotechniki, 1927
Russell, Treatise on the theory of alternating currents, 1914
Sosiński, Podstawy elektrotechniki. Część 2, 1946
Steinmetz, Theory and calculation of alternating currents phenomena, tłum. niem., 1900
Vidmar, Vorlesungen über die wissenschaftlichen Grundlagen der Elektrotechnik, 1928

Dzieła obejmujące niektóre tylko działy teorii prądów zmiennych

Becker, Voigt, Mathematisches Hilfsbuch für die Wechselstromtechnik, 1943
Beerwald, Die Eigenschaften symmetrischer Vierpole, 1931
Bertlett, The theory of electrical artificial lines and filters, 1930
Biermanns, Überströme in Hochspannungsanlagen, 1926
Biermanns, Mayr, Hochspannungsforschung und Hochspannungspraxis, 1931
Bloch, Die Ortskurven der graphischen Wechselstromtechnik, 1917
Brainerd, High frequency alternating currents, 1931
Breisig, Theoretische Thelegraphie, 1924
Breitfeld, Analysis von Grundproblemen der theoretischen Wechselstromtechnik, 1927
Breitfeld, Berechnung von Wechselstrom-Fernleitungen, 1912
Brillouin, Wave propagation in periodic structures, electric filters, 1946
Buch, Hochspannungsanlagen, 1922
Budeanu, Puissances reactives et fictives, 1927
Burger, Berechnung von Drehstrom-Kraftübertragungen, 1927
Carson, Ausgleichvorgänge und Operatorenrechnung, 1929
Carter, The simple calculation of electrical transients, 1944
Casper, Einführung in die komplexe Behandlung von Wechselstromaufgaben, 1929
Cauer, Siebschaltungen, 1931
Cohen, Heavisides electrical circuit theory, 1928
Colin, Cherry, Pulses and transients in communication circuits, 1949
Coulthard, Transients in electric circuits
David, Les filtres electriques, 1926
Drewnowski, Podstawy techniki wysokich napięć, 1933
Drewnowski, Przepięcia i urządzenia przeciwprzepięciowe, 1922
Eichelberger, Kettenleiter und Sperrkreise, 1925
Ferman. Radio engineers handbook, 1943
Gans, Vektoranalysis, 1929
Gardner, Berents, Transients in linear systems, 1942
Gordon, Classified examples in electrical engineering
Groszkowski, Lampy elektronowe
Grünholz, Theorie der Wechselstromübertragungen, 1928
Günther, Beitrag zur allgemeinen Theorie der elektrostatischen und elektromagnetischen Kopplung, 1928
Günther-Schultze, Elektrische Gleichrichter und Ventile, 1924
Hauffe, Ortskurven der Starkstromtechnik, 1932
Heaviside, Electromagnetic theory, 1893
Hensel, Elektrotechnika w zadaniach. Prąd zmienny, 1929
Holler, Schrodt, Theory and performance of rectifiers, 1924
Jackson, Wave filters, 1944
Jahnke-Emde, Funktionentafeln, 1928
Kafka, Die ebene Vektorrechnung, 1926
Kennelly, Chart atlas, 1924
Kennelly, Electric lines and nets, 1928
Kennelly, Tables of complex hyperbolic and circular functions, 1921
Kennelly, The application of hyperbolic functions to electrical engineering problems, 1925
Konorski, Ortskurven, 1919
Landolt, Komplexe Zahlen und Zeiger in der Wechselstromlehre, 1936
Lyon, Applications of symmetrical components, 1937
Malti, Electric circuits analysis, 1930
Merczyna, Teoria prądu elektrycznego, 1905
Mościcki, Altenberg, O stratach dielektrycznych w kondensatorach, 1904
Natalis, Die Berechnung von Gleich und Wechselstromsystemen, 1924

Neumann, Symmetrical component analisis of unsymmetrical polyphase systems
Oberdorfer, Die Ortskurventheorie der Wechselstromtechnik, 1934
Ollondorf, Die Grundlagen der Hochfrequenztechnik, 1926
Orlich, Aufnahme und Analyse von Wechselstromkurven, 1906
Orlich, Kapazitat und Induktivität, 1926
Podręcznik inżyniera elektryka, 1947
Perekalin, Sbornik zadacz po tieoreticzeskoj elektrotiechnikie, 1926
Pierce, Electric oscillations and electric waves, 1920
Polskie Radio. Filtry, 1946 (skrypt)
Polskie Radio. Obwody złożone i czwórniki, 1946 (skrypt)
Pożaryski, Maszyny elektryczne i prostowniki, 1930
Pożaryski, Technika prądów szybkozmiennych, 1931 (litogr.)
Ring, Die symbolische Methode zur Lösung von Wechselstromaufgaben, 1928
Roessler, Die Fernleitung von Wechselströmen, 1925
Roth, Die Hochspannungstechnik, 1938
Rüdenberg, Aussendung und Empfang elektrischer Wellen, 1926
Rüdenberg, Elektrische Schaltvorgänge, 1926
Rüdenberg, Kurzschlussströme beim Betrieb von Grosskraftwerken, 1925
Rziha-Seidener, Starkstromtechnik. Taschenbuch für Elektrotechniker, 1931
Schilling, Die Umbildung der Wellenform, 1931
Schwaiger, Hochspannungsleitungen, 1931
Shea, Transmission networks and wave filters, 1930
Starr, Electric circuits and wave filters, 1948
Steinmetz, Théorie et calcul des phénomènes électriques de transition et des oscillations, 1912
Strecker, Hilfsbuch für die Elektrotechnik. Starkstromausgabe, 1925
" " " " " Schwachstromausgabe, 1928
Trechciński, Obwody nibyustalone, 1930
Trechciński, Obwody niestacjonarne, 1927
Turney, Electric filters
Valensi, La théorie de la transmission téléphonique, 1935
Veaux, Les filtres électriques, 1927
Wagner C. F., Evans, Symmetrical components, 1933
Wagner K. W., Die wissenschaftlichen Grundlagen des Rundfunkempfanges, 1927
Wagner K. W., Elektromagnetische Ausgleichvorgänge in Freileitungen und Kabeln, 1908
Wall, Test papers and solutions on electrical engineering
Wallot, Einführung in die Theorie der Schwachstromtechnik, 1940
Wysocki, Odrowąż, Obliczanie przewodów elektrycznych, 1925