RACHUNEK RÓŻNICZKOWY I CAŁKOWY

ANTONI ŁOMNICKI
PROFESOR B. POLITECHNIKI LWOWSKIEJ

RACHUNEK RÓŻNICZKOWY I CAŁKOWY

DLA POTRZEB PRZYRODNIKÓW I TECHNIKÓW

TOM II

RACHUNEK CAŁKOWY

WYDANIE TRZECIE

WYDAWNICTWO „UNIVERSUM" KATOWICE

16. 11. 49. 18. 11. 49|1189
Nakład 4800 egz. na pap. druk. sat.
kl. V. — 80 gr. — Format 70 x 100
— Druk ukończono XII. 1949 r. —

Druk: Drukarnia Diecezjalna w Opolu, — R 018198

CZĘŚĆ IV.

ROZDZIAŁ XVII.

O całkach nieoznaczonych.

§ 203. Definicja całki nieoznaczonej.

W rachunku różniczkowym rozwiązuje się następujące zagadnienie. Mając daną funkcję (pierwotną):

$$F(x)$$

wyznaczyć jej funkcję pochodną:

$$F'(x) = f(x)$$

Zarówno w matematyce czystej, jak i w jej zastosowaniach, mamy często do czynienia z zagadnieniem odwrotnem, a mianowicie, mając podaną funkcję (pochodną):

$$f(x)$$

chcemy wyznaczyć jej funkcję pierwotną:

$$F(x)$$

t. j. taką funkcję $F(x)$, której pochodną jest dana funkcja $f(x)$.

Tak np. mając podaną funkcję:

$$f(x) = \sin x$$

stwierdzamy z łatwością, że jej funkcją pierwotną jest:

$$F(x) = -\cos x$$

albowiem $F'(x) = -(-\sin x) = f(x)$.

Podobnie dla funkcji:

$$f(x) = x^3$$

funkcją pierwotną jest:

$$F(x) = \tfrac{1}{3} x^3$$

jak to łatwo sprawdzić przez różniczkowanie.

Przy rozwiązywaniu takich zagadnień należy szukać odpowiedzi na trzy następujące pytania:

1) czy do każdej danej funkcji $f(x)$ należy jakaś funkcja pierwotna, czy też $f(x)$ musi spełniać jakieś specjalne warunki?

2) czy do danej funkcji może istnieć tylko jedna funkcja pierwotna, czy też może być ich więcej?

3) w jaki sposób wyznacza się funkcję pierwotną do danej funkcji $f(x)$?

Odpowiedź na pierwsze pytanie wymaga dość subtelnych rozważań. W XVIII rozdziale zajmiemy się tą kwestją nieco dokładniej i okażemy, że w każdym razie do każdej funkcji ciągłej istnieje funkcja pierwotna (zob. § 215), a także wiele (jakkolwiek nie wszystkie) funkcyj nieciągłych posiada funkcje pierwotne.

Bez trudności natomiast można rozstrzygnąć następnie drugie pytanie. I tak łatwo spostrzec, że, jeżeli istnieje jedna funkcja pierwotna $F(x)$ do danej funkcji $f(x)$, to istnieje ich nieskończenie wiele. Tak np. dla funkcji $f(x) = x^2$ funkcją pierwotną jest nietylko $F(x) = \frac{1}{3}x^3$, lecz także np. $F_1(x) = \frac{1}{3}x^3 + 5$, $F_2(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2$, $F_3(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}$ i t. d., ogólnie:

$$F(x) = \tfrac{1}{3}x^3 + C$$

przyczem C oznacza dowolną liczbę stałą. Istotnie pochodną każdej takiej funkcji jest $f(x) = x^2$ Ogólnie, jeżeli $F(x)$ jest funkcją pierwotną danej funkcji $f(x)$, to istnieje cała jednoparametrowa gromada funkcyj pierwotnych, a mianowicie: $F(x) + C$. W geometrycznej interpretacji obrazem jednej funkcji pierwotnej jest jakaś linja, a obrazy wszystkich innych funkcyj pierwotnych powstają przez równoległe przesunięcie tej linji w kierunku osi y-ów. Ta gromada zawiera już wszystkie funkcje pierwotne; wynika to z twierdzenia 2 z § 101 (tom I, str. 318), a mianowicie: *jeżeli dwie funkcje mają pochodne równe dla wszystkich wartości zmiennej niezależnej, to te funkcje mogą się różnić conajwyżej o stałą liczbę.*

Gromadę funkcyj pierwotnych do danej funkcji $f(x)$ nazywamy **całką nieoznaczoną** funkcji $f(x)$ i oznaczamy ją symbolem:

$$\int f(x)\,dx$$

czytaj: „całka z $f(x)\,dx$“. A więc:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \tag{1}$$

Pochodzenie znaków $\int$ i dx, występujących w tym symbolu, wyjaśnimy później (por. § 212). Funkcję $f(x)$ (pochodną) nazywamy tu *funkcją podcałkową* a liczbę C *stałą całkowania.*

Pochodną prawej strony jest funkcja podcałkowa. A więc wzór (1) jest równoważny z wzorem:

$$\frac{d}{dx}\Big(F(x)+C\Big)=f(x) \tag{2}$$

Obliczanie całki nieoznaczonej z danej funkcji $f(x)$ nazywamy *całkowaniem* tej funkcji. Metody obliczania całek i badanie ich własności stanowią przedmiot **rachunku całkowego**.

Celem przekonania się, czy całkowanie zostało poprawnie wykonane, należy, w myśl wzoru (2), obliczyć pochodną znalezionej gromady funkcyj $F(x)+C$ lub, co na jedno wyjdzie, pochodną funkcji $F(x)$. Całkowanie można także pojmować jako rozwiązywanie następującego prostego równania różniczkowego (por. tom I, § 87, str. 278):

$$y'=f(x) \tag{3}$$

Stąd:

$$y=\int f(x)\,dx=F(x)+C$$

Zatem najogólniejszem rozwiązaniem równania różniczkowego (3) jest cała gromada funkcyj, a mianowicie całka nieoznaczona z funkcji $f(x)$. Tę całą gromadę funkcyj nazywamy *ogólnem rozwiązaniem* danego równania różniczkowego lub *ogólną całką* tego równania. Każdą zaś poszczególną funkcję pierwotną, należącą do tej gromady, nazywamy rozwiązaniem szczegółowem równania różniczkowego (3) lub jego *całką szczegółową*.

Przystępujemy obecnie do trzeciej kwestji, wiążącej się z naszem zagadnieniem, a mianowicie do omówienia sposobów wyznaczania funkcyj pierwotnych czyli do metod całkowania. Otóż jasnem jest, że każdy, poznany w rachunku różniczkowym wzór na obliczanie pochodnych, można zarazem pojmować jako wzór na obliczanie całki z jakiejś funkcji; jeżeli bowiem $F'(x)=f(x)$, to można to napisać także w postaci $\int f(x)\,dx=F(x)+C$. W ten sposób otrzymamy z rozmaitych specjalnych i ogólnych wzorów rachunku różniczkowego rozmaite specjalne i ogólne wzory rachunku całkowego. Jednakże zaznaczamy już teraz, że obliczanie całek jest znacznie trudniejsze od obliczania pochodnych. Do każdej bowiem funkcji *elementarnej* (w tomie I na str. 96 podano, które funkcje uważamy za elementarne) potrafimy z łatwością znaleźć pochodną i ta pochodna jest znowu jakąś funkcją elementarną. Natomiast okaże się, że całki wielu funkcyj elementarnych są bardzo skomplikowanemi, nieelementarnemi funkcjami przestępnemi, których nie można oczywiście wyznaczyć drogą elementarną. Jakkolwiek więc proces całkowania jest stosowalny do szerszej klasy funkcyj, aniżeli proces różniczkowania (albowiem *istnieją* całki

dla wszystkich funkcyj ciągłych a nawet dla wielu funkcyj nieciągłych, podczas gdy pochodne istnieją tylko dla funkcyj ciągłych i to nie dla wszystkich), to jednak *efektywne obliczenie* całki jest zwykle o wiele trudniejsze, aniżeli obliczenie pochodnej.

Zobaczymy w dalszym ciągu, że bardzo wiele zagadnień z geometrji i z fizyki sprowadza się do obliczania funkcyj pierwotnych. Tutaj już jednak zwrócimy uwagę na jedno odrazu się nasuwające zagadnienie z dynamiki. Widzieliśmy mianowicie, że mając podaną w ruchu prostolinjowym drogę jako funkcję czasu: $s = f(t)$, potrafimy wyznaczyć prędkość: $v(t) = f'(t)$ i przyśpieszenie $g(t) = v'(t)$. Stąd wynika, że mając podane przyśpieszenie jako funkcję czasu, obliczamy prędkość zapomocą całki: $v(t) = \int g(t)\,dt$, mając zaś podaną prędkość jako funkcję czasu, obliczamy drogę zapomocą całki $s = \int v(t)\,dt$.

Tak np. wiedząc, że przyśpieszenie jest stałe: $g = a$ w ciągu całego badanego czasu t, znajdujemy, że prędkość $v = \int a\,dt = at + C_1$. Stąd zaś znajdujemy wzór na drogę: $s = \int (at + C_1)\,dt = \frac{1}{2}at^2 + C_1 t + C_2$. Stałe C_1 i C_2 można czasem wyznaczyć z początkowych warunków zadania, np. z żądania, żeby w początkowej chwili, t. j. dla $t = 0$, było $s = 0$ i $v = 0$; wtedy wyniknie z tych wzorów $C_1 = 0$ i $C_2 = 0$ i pozostanie $s = \frac{1}{2}at^2$, $v = at$. Inne wartości stałych otrzymamy, żądając, aby w chwili $t = 0$ prędkość miała wartość v_0 różną od zera a droga wartość s_0. Pozostawia się czytelnikowi obliczenie stałych C_1 i C_2 przy pomocy tych warunków początkowych.

§ 204. Odwrócenia specjalnych wzorów rachunku różniczkowego.

a) Jeżeli funkcja podcałkowa jest stale zerem, to całka nieoznaczona ma stałą wartość C, albowiem z wzoru:

$$\frac{d(C)}{dx} = 0$$

wynika:

$$\int 0\,dx = C$$

Jeśli więc obrazem funkcji podcałkowej jest oś x-ów, o równaniu $y = 0$, to obrazem gromady funkcyj pierwotnych jest gromada wszystkich prostych równoległych do tej osi (wraz z nią samą).

b) Poznaliśmy w rachunku różniczkowym wzór na pochodną potęgi, a mianowicie:

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

lub w formie różniczki.

$$d(x^n) = nx^{n-1}\,dx$$

Wobec tego:

$$\int nx^{n-1}\,dx = x^n + C$$

Tutaj funkcja podcałkowa nx^{n-1} jest dość skomplikowana.

Prostszą funkcję podcałkową otrzymamy, tworząc pochodną funkcji:

$$\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

a mianowicie:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = x^n$$

czyli:

$$d\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = x^n\,dx$$

Stąd otrzymujemy bardzo ważny wzór

(4) $$\boxed{\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C}$$

Wzór ten jest prawdziwy dla wszystkich wykładników n z wyjątkiem $n = -1$. Dla $n = -1$ ma funkcja podcałkowa postać $\frac{1}{x}$. Otóż wiadomo z rachunku różniczkowego, że funkcja $\frac{1}{x}$ jest pochodną funkcji $\log x$. Tak więc z wzoru:

$$d(\log x) = \frac{1}{x}\,dx$$

wynika, że:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log x + C$$

Tego wzoru można używać tylko dla dodatnich x. Dla ujemnych bowiem x nie jest określona funkcja $\log x$; natomiast wtedy funkcja $\log(-x)$ ma określone wartości.

Ponieważ:

$$d\log(-x) = \frac{1}{-x}\cdot(-1)\,dx = \frac{1}{x}\,dx$$

przeto dla $x < 0$ jest:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log(-x) + C$$

Obydwa te wzory można ująć w jeden wzór następujący:

(5) $$\boxed{\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + C}$$

Istotnie bowiem dla $x > 0$ otrzymujemy $\log|x| = \log x$, a dla $x < 0$ $\log|x| = \log(-x)$.

Przy pomocy wzorów (4) i (5) potrafimy więc scałkować każdą potęgę zmiennej niezależnej.

Tak np.

$$\int 1 \cdot dx = \int x^0\,dx = \frac{x^{0+1}}{0+1} + C = x + C$$

czyli

(4a) $$\boxed{\int dx = x + C}$$

Podobnie:

$$\int x\,dx = \tfrac{1}{2}x^2 + C, \qquad \int x^5\,dx = \tfrac{1}{6}x^6 + C,$$

$$\int x^{\sqrt{2}}\,dx = \frac{x^{1+\sqrt{2}}}{1+\sqrt{2}} + C$$

c) Z wzoru.

$$d(e^x) = e^x\,dx$$

otrzymujemy:

(6) $$\boxed{\int e^x\,dx = e^x + C}$$

Dla ogólnej funkcji wykładniczej dogodnie jest wyjść z wzoru:

$$d\left(\frac{a^x}{\log_e a}\right) = \frac{a^x \log_e a}{\log_e a}\,dx = a^x\,dx$$

Stąd wynika

(7) $$\boxed{\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log_e a} + C = a^x \log_a e + C}$$

d) Pochodne (lub różniczki) funkcyj trygonometrycznych prowadzą do następujących wzorów:

(8) $d(\sin x) = \cos x\,dx$ a więc

(9) $d(-\cos x) = \sin x\,dx$ „ „

(10) $d(\operatorname{tg} x) = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$ „ „

(11) $d(-\operatorname{ctg} x) = \dfrac{dx}{\sin^2 x}$ „ „

$$\boxed{\begin{aligned}
\int \cos x\,dx &= \sin x + C \\
\int \sin x\,dx &= -\cos x + C \\
\int \frac{dx}{\cos^2 x} &= \operatorname{tg} x + C \\
\int \frac{dx}{\sin^2 x} &= -\operatorname{ctg} x + C
\end{aligned}}$$

e) Pochodne (lub różniczki) funkcyj cyklometrycznych prowadzą do następujących wzorów:

$$\left.\begin{aligned} d(\arcsin x) &= \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ d(-\arccos x) &= \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}\right| \text{ a więc}$$

$$(12)\qquad \boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C'}$$

Obydwa wyniki nie są zasadniczo różne, ponieważ $\arcsin x$ różni się od funkcji $-\arccos x$ tylko o stały dodajnik, jak to wynika z wzoru:

$$\arcsin x + \arccos x = \tfrac{1}{2}\pi$$

(por. tom I, str. 69) A więc $C = C + \frac{1}{2}\pi$.

Podobnie dwa wzory:

$$d(\operatorname{arc\,tg} x) = \frac{dx}{1+x^2} \quad \text{i} \quad d(-\operatorname{arc\,ctg} x) = \frac{dx}{1+x^2}$$

prowadzą do wzoru:

$$(13)\qquad \boxed{\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C = -\operatorname{arc\,ctg} x + C'}$$

Obydwa wyniki są tylko pozornie różne; kładąc bowiem $C = \frac{1}{2}\pi + C$, widzimy, że obydwa wyniki są identyczne, jak to wynika z wzoru: $\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,ctg} x = \frac{1}{2}\pi$ (por. tom I, str. 70).

Zwróćmy uwagę na ciekawy fakt, że całki niektórych prostych funkcyj są dość skomplikowanemi funkcjami.

Tak np. całką *wymiernej* funkcji $\frac{1}{x}$ jest *przestępna* funkcja $\log|x|$; całką dość prostej *wymiernej* funkcji $\frac{1}{1+x^2}$ jest przestępna funkcja $\operatorname{arc\,tg} x$; całką algebraicznej niewymiernej funkcji $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ jest przestępna funkcja $\arcsin x$.

Wszystkie te wzory należy dokładnie zapamiętać, są one bowiem równie ważne i równie często stosowane, jak odpowiednie wzory rachunku różniczkowego.

Nie znajdujemy wśród tych wzorów całek tak ważnych elementarnych funkcyj, jak: $\operatorname{tg} x$, $\log x$, $\operatorname{arc\,tg} x$, $\frac{1}{1-x^2}$, $\sqrt{1+x^2}$ i t. p.

Istotnie, trudno jest odrazu odgadnąć, z jakiej funkcji należy utwo rzyć pochodną, aby otrzymać np. $\log x$ lub $\operatorname{arc\,tg} x$. Rozszerzymy znacznie zakres funkcyj, które dadzą się w elementarny sposób scałkować, opierając się na odwróceniach niektórych ogólnych wzorów rachunku różniczkowego.

§ 205. Odwrócenia niektórych ogólnych wzorów rachunku różniczkowego.

a) **Wyłączanie stałego czynnika przed znak całki.**

Niechaj $F(x)$ będzie funkcją pierwotną funkcji $f(x)$, to $F'(x) = f(x)$ czyli:

$$\text{(I)} \qquad \int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Zastosujmy do iloczynu $a \cdot F(x)$, gdzie a oznacza dowolny stały, różny od zera czynnik, znany wzór rachunku różniczkowego (por. tom I, § 75 str. 244):

$$d\,[a \cdot F(x)] = a \cdot d\,(F(x)) = a\ f(x)\,dx.$$

Stąd wynika, że:

$$\int a\,f(x)\,dx = a\ F(x) + C_1$$

Porównajmy ten wzór z wzorem, otrzymanym z (I) przez pomnożenie obu stron przez a, t. j. z wzorem:

$$a \cdot \int f(x)\,dx = a \cdot F(x) + a \cdot C$$

Widzimy, że prawe strony obydwu wzorów będą sobie równe dla każdej wartości C, jeżeli tylko obierzemy $C_1 = a\,C$. Prawe strony są także równe dla każdej dowolnie obranej wartości C_1, jeżeli tylko obierzemy $C = C_1 : a$, co się da zawsze uczynić, ponieważ założyliśmy, że a jest różne od zera. Można więc zawsze dobrać stałe całkowania tak, że zachodzi równość:

$$\text{(14)} \qquad \boxed{\int a\,f(x)\,dx = a \int f(x)\,dx}$$

Wzór ten wypowiadamy w następujący sposób:

stały czynnik różny od zera można wyłączyć przed znak całki.

Przykłady:

1) $\int 5x^3\,dx = 5\int x^3\,dx = \frac{5}{4}x^4 + C$

2) $\int 4\cos x\,dx = 4\int \cos x\,dx = 4\sin x + C$

3) $\int \frac{2}{x}\,dx = 2\int \frac{dx}{x} = 2\log|x| + C = \log x^2 + C$

4) Naczynie w formie walca kołowego wiruje około swej osi z stałą prędkością kątową, wykonując n obrotów na sekundę. Jaką postać ma swobodna powierzchnia cieczy, znajdującej się w tem naczyniu? Na fig. 1 przedstawiono przekrój tego naczynia zapomocą płaszczyzny pionowej. Oś obrotu obieramy za oś y-ów a początek układu w O. Na każdy punkt A cieczy, mający masę m, działają dwie siły: siła odśrodkowa $P_1 = 4\pi^2 n^2 mx$, prostopadle do osi obrotu, gdzie x oznacza odległość punktu A od osi obrotu i siła ciężkości $P_2 = mg$, zwrócona pionowo w dół. Wiadomo, że swobodna powierzchnia cieczy musi być w każdym punkcie prostopadła do wypadkowej z wszystkich sił, działających na ten punkt.

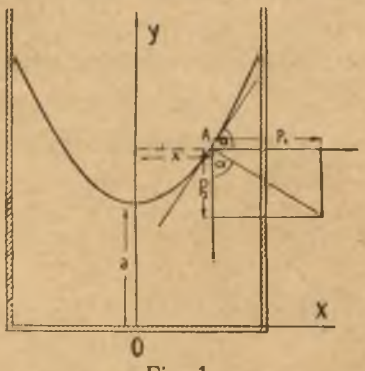


Fig. 1.

Oznaczmy kąt, zawarty między styczną do swobodnej powierzchni a osią odciętych, literą α, to $\operatorname{tg}\alpha = P_1 : P_2$

czyli:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4\pi^2 n^2 mx}{mg} = \frac{4\pi^2 n^2}{g}\cdot x$$

Stąd:

$$y = \int \frac{4\pi^2 n^2}{g}\,x\,dx = \frac{4\pi^2 n^2 x^2}{g\,2} + C = \frac{2\pi^2 n^2}{g}x^2 + C$$

Jest to parabola. Najniższy punkt tej paraboli otrzymamy dla $x = 0$; rzędna tego punktu, oznaczmy ją a, ma wartość $a = C$.

Zatem swobodna powierzchnia cieczy wirującej ma postać paraboloidy obrotowej.

b) **Całkowanie przez rozkład (całka sumy).**

Z wzoru na różniczkę *sumy* dwóch funkcyj:

$$d(F(x) + G(x)) = dF(x) + dG(x) = (f(x) + g(x))\,dx,$$

gdzie $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)$, otrzymujemy:

$$\int (f(x) + g(x))\,dx = F(x) + G(x) + C$$

Ponieważ zaś: $\int f(x)\,dx = F(x) + C_1$, $\int g(x)\,dx = G(x) + C_2$,

przeto: $\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx = F(x) + G(x) + C_1 + C_2$

Wyznaczmy stałe całkowania tak, aby zachodził związek $C = C_1 + C_2$.

Wtedy:

$$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx \tag{15}$$

To znaczy: *całka z sumy dwóch funkcyj jest równa sumie całek z tych funkcyj.* Twierdzenie to odnosi się — jak to łatwo stwierdzić — także do większej liczby dodajników.

Przykłady.

1) Przy pomocy wzorów (4), (14) i (15) można scałkować każdy wielomian:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n$$

I tak:

$$\int f(x)dx = \int a_0\,dx + \int a_1 x\,dx + \int a_2 x^2 dx + \int a_3 x^3 dx + \ldots + \int a_n x^n dx$$

$$= a_0 \int dx + a_1 \int x\,dx + a_2 \int x^2 dx + a_3 \int x^3 dx + \ldots + a_n \int x^n dx$$

a więc:

$$\int f(x)\,dx = a_0 x + \tfrac{1}{2} a_1 x^2 + \tfrac{1}{3} a_2 x^3 + \tfrac{1}{4} a_3 x^4 + \ldots + \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1} + C$$

2) Niekiedy udaje się rozłożyć funkcję podcałkową, której całka nie jest nam znana, na takie dodajniki, których całkowanie potrafimy wykonać.

Tak np. postępujemy z całką:

$$\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$$

Korzystamy z wzoru: $\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$

Oznaczmy krótko szukaną całkę literą I (jest to początkowa litera słowa: Integral, oznaczającego w języku niemieckim i francuskim *całkę*).

A więc:

$$I = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx =$$

$$= \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int (-1)\,dx = \operatorname{tg} x - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C$$

Taki sposób obliczania całki nazywamy *metodą całkowania przez rozkład.*

3) W podobny sposób postępujemy z całką:

$$I = \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$$

Zamiast 1 możemy napisać w liczniku $\sin^2 x + \cos^2 x$, a wtedy:

$$I = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx + \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx$$

a więc: $I = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C$.

§ 206. Całkowanie „przez części" (per partes)

Bardzo ważną metodę całkowania otrzymuje się z wzoru na pochodną iloczynu dwóch funkcyj $u(x)$ i $v(x)$. Załóżmy, że te funkcje posiadają ciągłe pochodne, to:

$$\frac{d(u(x)\cdot v(x))}{dx} = u(x)v'(x) + v(x)u'(x)$$

lub w formie różniczkowej:

(a) $$d(u(x)\cdot v(x)) = u(x)\cdot v'(x)\,dx + v(x)\cdot u'(x)\,dx$$

co można także napisać w postaci:

$$d(u(x)\cdot v(x)) = u(x)\cdot dv(x) + v(x)\cdot du(x)$$

lub w skróceniu:

$$d(uv) = u\,dv + v\,du$$

Z wzoru (a) wynika, że:

$$\int u(x)\cdot v'(x)\,dx + \int v(x)\cdot u'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) + C$$

a stąd:

$$\int u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) + C - \int v(x)\cdot u'(x)\,dx$$

Stałą C możemy połączyć z stałą, zawartą w ostatniej całce nieoznaczonej, w jedną nową stałą, wobec czego można napisać otrzymany wzór w postaci:

(16) $$\boxed{\int u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x) - \int v(x)\,u'(x)\,dx}$$

lub w skróconej postaci:

(16a) $$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

Należy pamiętać o tem, że w pierwszej całce v nie jest zmienną, według której całkujemy, lecz dv jest tylko skróceniem wyrażenia $v'(x)\,dx$ i podobnie du w drugiej całce.

Stosowanie tego wzoru nazywamy **całkowaniem „przez części" lub „per partes"**. Wzoru tego używa się w następujący sposób: rozkładamy

w całce $\int f(x)\,dx$ funkcję $f(x)$ na dwa czynniki: $u(x)\cdot v'(x)$ tak, aby całka $v(x)$ drugiego czynnika była znana lub łatwa do obliczenia; następnie stosujemy wzór (16); otóż często okazuje się, że całka, występująca po prawej stronie tego wzoru, jest łatwiejsza do obliczenia aniżeli całka, znajdująca się po lewej stronie. Zwykle postępuje się tak, że całe wyrażenie $f(x)\,dx$ rozkłada się na czynniki $u(x)$ i $v'(x)\,dx = dv(x)$ czyli krótko u i dv i używa się wzoru (16a).

Przykłady.

1) Chcemy obliczyć

$$\int \log x\,dx$$

Rozkładamy w tym celu wyrażenie pod całką na dwa czynniki:

$$u = \log x \quad \text{i} \quad dv = dx$$

Wobec tego:

$$du = \frac{1}{x}\,dx \quad \text{a} \quad v = x$$

Stosując wzór (16a), otrzymujemy:

$$\int \log x\,dx = x\log x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\log x - \int dx = x\log x - x + C$$

2) Obliczyć:

$$I = \int x^2 \cos x\,dx$$

Kładziemy.

$$u = x^2, \qquad dv = \cos x\,dx$$

Stąd. $$du = 2x\,dx, \quad v = \sin x.$$

Według wzoru (16a) otrzymujemy

(b) $$\int x^2 \cos x\,dx = x^2 \sin x - 2\int x \sin x\,dx$$

Wprawdzie nie potrafimy odrazu znaleźć ostatniej całki, lecz jest ona w każdym razie łatwiejsza od poprzedniej. Stosujemy do tej całki powtórnie tę samą metodę, a więc kładziemy $x = u_1$, $\sin x\,dx = dv$, a stąd $du_1 = dx$, $v_1 = -\cos x$, wobec czego:

$$\int x \sin x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C$$

Podstawiamy ten wynik we wzór (b) i otrzymujemy ostatecznie:

$$I = \int x^2 \cos x\,dx = x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x - 2C$$

czyli: $$I = \sin x(x^2 - 2) + 2x\cos x + C_1.$$

Widzimy, że pierwsze zastosowanie wzoru (16a) nie doprowadziło odrazu do obliczenia szukanej całki, lecz zredukowało ją tylko do prostszej całki a dopiero drugi krok doprowadził do pożądanego wyniku. Takie redukowanie całki do kolejnych, corazto prostszych całek, jest charakterystyczne dla metody całkowania „przez części".

Zobaczymy na nieco ogólniejszym przykładzie, jak można takie kolejne stosowanie wzoru (16) zastąpić tak zwanym ogólnym *wzorem redukcyjnym.*

3) Dla całki:

$$I_n = \int x^n e^x \, dx$$

Wyprowadzić wzór (redukcyjny), pozwalający wyrazić tę całkę zapomocą całki I_{n-1}, zawierającej zamiast potęgi x^n potęgę x^{n-1}, o wykładniku o 1 niższym.

Kładziemy:

$$x^n = u, \quad e^x \, dx = dv$$

a więc:

$$du = n x^{n-1} \, dx, \quad v = e^x$$

Z wzoru (16a) otrzymujemy:

(c) $$I_n = x^n e^x - n \int e^x x^{n-1} \, dx = x^n e^x - n I_{n-1}$$

Jest to żądany wzór redukcyjny.

Na podstawie tego wzoru możemy całkę o dowolnym wykładniku naturalnym n sprowadzać kolejno do całek coraz prostszych a ostatecznie do znanej całki $I_0 = \int x^0 e^x \, dx = \int e^x \, dx = e^x + C$. Gdy chcemy obliczyć I_n dla dowolnie wielkiego n, to oprócz tego ostatniego całkowania nie trzeba już wykonywać żadnych innych całkowań. Tak np. chcemy obliczyć $I_3 = \int x^3 e^x \, dx$. Według wzoru (c) jest:

$$I_3 = x^3 e^x - 3 I_2$$
$$I_2 = x^2 e^x - 2 I_1$$
$$I_1 = x e^x - 1 \cdot I_0 = x e^x - e^x - C$$

Wobec tego:

$$I_3 = x^3 e^x - 3(x^2 \cdot e^x - 2(x e^x - e^x - C))$$
$$= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6 x e^x - 6 e^x + C_1$$
$$I_3 = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C_1$$

Sprawdzić wynik przez różniczkowanie!

4) Wyprowadzić wzór redukcyjny dla całki:

$$I_n = \int \log^n x \, dx$$

Całkujemy „per partes“, podstawiając:

$$u = \log^n x, \quad dv = dx$$

Stąd:

$$du = n \log^{n-1} x \cdot \frac{dx}{x}, \quad v = x$$

a więc:

$$I_n = x \log^n x - \int x \cdot n \log^{n-1} x \frac{dx}{x} = x \log^n x - n \int \log^{n-1} x \, dx$$

czyli:

$$I_n = x \log^n x - n I_{n-1}$$

5) Bardzo ważny jest wzór redukcyjny dla całki:

$$S_n = \int \sin^n x \, dx$$

Otrzymujemy go także przez całkowanie „per partes“. I tak kładziemy

$$u = \sin^{n-1} x, \quad dv = \sin x \, dx$$

Stąd:

$$du = (n-1) \sin^{n-2} x \cdot \cos x \, dx; \quad v = -\cos x$$

a więc:

$$S_n = -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cdot \cos^2 x \, dx$$

czyli:

$$S_n = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int (\sin^{n-2} x - \sin^n x) dx$$

Przenieśmy na pierwszą stronę $(n-1) \int \sin^n x \, dx$ czyli $(n-1) S_n$ to otrzymamy:

$$n \cdot S_n = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) S_{n-2}$$

a więc ostatecznie:

(17)
$$\boxed{S_n = \int \sin^n x \, dx = \frac{-\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} S_{n-2}}$$

Przy pomocy tego wzoru możemy obniżać wykładnik wyrażenia $\sin^n x$ o 2 Jeżeli n jest liczbą naturalną, to stosując wzór (17) kilkakrotnie, otrzymamy ostatecznie dla n nieparzystego $S_1 = \int \sin x \, dx = -\cos x + C$ a dla n parzystego $S_0 = \int \sin^0 x \, dx = \int dx = x + C$.

Jeżeli n jest liczbą całkowitą ujemną, to należy z wzoru (17) wyrazić odwrotnie S_{n-2} zapomocą S_n, a mianowicie.

$$S_{n-2} = \frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n-1} + \frac{n}{n-1} S_n$$

Kładąc $n-2=m=-p$, otrzymujemy dla $m<-2$:

(17a) $$\boxed{S_m=\frac{\cos x\cdot \sin^{m+1}x}{m+1}+\frac{m+2}{m+1}S_{m+2}}$$

Wzór ten pozwala sprowadzać obliczanie całki $S_m=S_{-p}=\int\frac{dx}{\sin^p x}$ do całki o wykładniku p mniejszym o 2.

Dla p parzystego dochodzi się ostatecznie przez kilkakrotne stosowanie wzoru (17a) do całki $S_{-2}=\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg}x+C$.

Przy nieparzystem p dochodzi się ostatecznie do całki $S_{-1}=\int\frac{dx}{\sin x}$, której obliczeniem zajmiemy się w następnym paragrafie.

Przykład zastosowania wzoru (17):

$$\int\sin^6 x\,dx=S_6=\frac{-\cos x\sin^5 x}{6}+\frac{5}{6}S_4=$$

$$=\frac{1}{6}\left(-\cos x\sin^5 x+5\left(\frac{-\cos x\sin^3 x}{4}+\frac{3}{4}S_2\right)\right).$$

$$=-\frac{\cos x\sin^5 x}{6}-\frac{5\cos x\sin^3 x}{24}+\frac{15}{24}\left(\frac{-\cos x\sin x}{2}+\frac{1}{2}S_0\right)$$

$$=-\frac{\cos x}{48}(8\sin^5 x+10\sin^3 x+15\sin x)+\frac{15}{48}x+C_1$$

Przykład na zastosowanie wzoru (17a):

$$\int\frac{dx}{\sin^4 x}=S_{-4}=\frac{\cos x\sin^{-3}x}{-3}+\frac{-2}{-3}S_{-2}=$$

$$=-\frac{\cos x}{3\sin^3 x}-\frac{2}{3}\operatorname{ctg}x+C=-\frac{\operatorname{ctg}x}{3}\left(\frac{1}{\sin^2 x}+2\right)+C.$$

§ 207. Całkowanie przez podstawienie.

Obliczenie całki:

(a) $$\int f(x)\,dx=F(x)+C$$

upraszcza się nieraz znacznie, gdy za zmienną x wprowadzimy nową odpowiednio dobraną zmienną t, kładąc:

(b) $$x=\varphi(t)$$

Załóżmy, że funkcja $\varphi(t)$ posiada ciągłą pochodną.

Z wzoru (a) wynika, że:

$$\frac{dF}{dx} = f(x)$$

Jeżeli zaś w funkcję $F(x)$ wprowadzimy $x = \varphi(t)$, to stosując *wzór na pochodną funkcji złożonej*, otrzymujemy:

$$\frac{dF(\varphi(t))}{dt} = \frac{dF}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dF}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = f(x) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

Stąd wynika, że:

$$F(\varphi(t)) + C = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt$$

czyli:

$$F(x) + C = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt$$

Stąd otrzymujemy ostatecznie na mocy wzoru (a):

(18) $$\boxed{\int f(x)\, dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt}$$

Jest to wzór na **całkowanie przez podstawienie**; jest on bezpośrednim wnioskiem z wzoru na pochodną funkcji złożonej. Widzimy, że funkcja podcałkowa $f(x)$ nie przechodzi na $f(\varphi(t))$, lecz otrzymuje jeszcze dodatkowy czynnik: $\varphi'(t)$. Wzór ten najłatwiej jest zapamiętać w ten sposób, że wprowadza się podstawienie $x = \varphi(t)$ nietylko w funkcję $f(x)$, lecz także w różniczkę dx, która wobec tego przechodzi na:

$$dx = d\varphi(t) = \varphi'(t)\, dt$$

Podstawienie $x = \varphi(t)$ staramy się zwykle tak dobrać, aby całka po prawej stronie wzoru (18) była łatwiejszą do obliczenia aniżeli całka pierwotnie podana. Po wykonaniu całkowania według zmiennej t otrzymamy jakąś funkcję $G(t)$ tej pomocniczej zmiennej t. Chcąc wrócić do zmiennej x, należy obliczyć z wzoru (b) t jako funkcję zmiennej x, np. $t = \psi(x)$ i wstawić $\psi(x)$ w $G(t)$ za zmienną t. Aby się to przekształcenie dało uskutecznić w sposób jednoznaczny, trzeba obrać funkcję $x = \varphi(t)$ tak, aby była odwracalna w sposób jednoznaczny. W tym celu wypadnie często ograniczyć zakres zmienności zmiennej niezależnej w tym związku funkcyjnym $x = \varphi(t)$ (por. tom I, § 18).

Przy stosowaniu tej metody całkowania (przez podstawienie) rozpoczynamy zwykle rachunek od tego, że za jakąś odpowiednio dobraną funkcję $\psi(x)$ zmiennej x podstawiamy nową zmienną:

$$t = \psi(x)$$

a następnie obliczamy stąd $x = \varphi(t)$ i postępujemy dalej zgodnie z wzorem (18). Funkcję $\psi(x)$ należy oczywiście obrać tak, aby była odwracalna w sposób jednoznaczny i aby posiadała różną od zera pochodną: albowiem potrzebna we wzorze pochodna $\varphi'(t)$ ma wartość $\frac{1}{\psi'(x)}$, jak wiadomo z twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej (por. tom I, § 79, wzór 28).

Przykłady.

1. Obliczyć:

$$I = \int \frac{5}{(2-3x)^6}\,dx = \int 5(2-3x)^{-6}\,dx$$

Na pierwszy rzut oka mogłoby się zdawać, że ta całka ma wartość: $\frac{5(2-3x)^{-5}}{-5}$ jako potęga o wykładniku ujemnym. Przez zróżniczkowanie tej funkcji łatwo się jednak można przekonać, że jest to wynik błędny.

Zastosujmy natomiast do całki podstawienie:

$$\psi(x) = 2 - 3x = t$$

Stąd:

$$x = \tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{3}t = \varphi(t) \quad \text{a} \quad dx = -\tfrac{1}{3}\,dt$$

Wobec tego jest:

$$\int 5(2-3x)^{-6}\,dx = \int 5t^{-6}\cdot -\tfrac{1}{3}\,dt = \frac{-5}{3}\,\frac{t^{-5}}{-5} + C = \tfrac{1}{3}t^{-5} + C$$

Wyrażamy teraz t zapomocą zmiennej x i otrzymujemy:

$$I = \tfrac{1}{3}(2-3x)^{-5} + C = \frac{1}{3(2-3x)^5} + C$$

2. Obliczyć:

$$I = \int \frac{dx}{ax+b}$$

Chcąc tę całkę sprowadzić do znanej całki $\int \frac{dt}{t}$ (por. wzór 5), używamy podstawienia:

$$ax + b = t$$

Stąd:

$$x = -\frac{b}{a} + \frac{t}{a}$$

a więc:

$$dx = \frac{1}{a}\,dt$$

Wobec tego:

$$I = \int \frac{\frac{1}{a}\,dt}{t} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{a}\log|t| + C$$

Wracamy do zmiennej x i otrzymujemy:

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \log |ax+b| + C$$

3. Obliczyć:

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2}$$

Znamy podobną całkę: $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$ (por. wzór 13).

Staramy się sprowadzić szukaną całkę do tej postaci i w tym celu wyłączamy w mianowniku a^2 przed nawias.

Stosując wzór (14), otrzymujemy zatem:

$$I = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

Teraz już samo się nasuwa podstawienie: $\frac{x}{a} = t$.

Stąd:

$$x = at, \quad dx = a\,dt$$

a więc:

$$I = \frac{1}{a^2} \int \frac{a\,dt}{1+t^2} = \frac{a}{a^2} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} t + C$$

Wracamy do zmiennej x, kładąc $t = \frac{x}{a}$ i otrzymujemy ostatecznie:

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

4. Wśród całek, któreśmy otrzymali bezpośrednio przez odwrócenie specjalnych wzorów rachunku różniczkowego, występowała całka $\int \frac{dx}{1+x^2}$ (por. wzór 13 z § 204), natomiast nie było tam bardzo podobnej całki:

$$\int \frac{dx}{1-x^2}$$

By tę całkę obliczyć, rozłóżmy najpierw funkcję podcałkową na dwa prostsze dodajniki (t. zw. ułamki częściowe, por. tom I, § 23, str. 91):

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1+x)(1-x)} = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{1-x}$$

Wyznaczamy stałe A i B tak, aby ta równość zachodziła dla wszystkich x (z wyjątkiem oczywiście wartości $x = 1$ i $x = -1$, dla których funkcja podcałkowa nie jest określona). Uwalniając obie strony od mianowników, otrzymujemy:

$$1 = A - Ax + B + Bx = (A + B) + (B - A)x$$

Spółczynniki przy x^0 i x^1 muszą być po obu stronach równe, a więc:

$$A + B = 1$$
$$A - B = 0$$

Z tych dwóch równań otrzymujemy: $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{2}$. Zatem funkcję podcałkową możemy przedstawić w postaci:

$$\frac{1}{1 - x^2} = \frac{\frac{1}{2}}{1 + x} + \frac{\frac{1}{2}}{1 - x}$$

Stosując tu wzór (15) na całkowanie sumy i wzór (14), otrzymujemy:

$$\int \frac{dx}{1 - x^2} = \tfrac{1}{2} \int \frac{dx}{1 + x} + \tfrac{1}{2} \int \frac{dx}{1 - x}$$

Na podstawie wyniku, uzyskanego w przykładzie 2, otrzymujemy stąd:

$$\int \frac{dx}{1 - x^2} = \tfrac{1}{2} \log|1 + x| - \tfrac{1}{2} \log|1 - x| + C = \tfrac{1}{2} \log\left|\frac{1 + x}{1 - x}\right| + C$$

czyli:

(19) $$\boxed{\int \frac{dx}{1 - x^2} = \log\sqrt{\left|\frac{1 + x}{1 - x}\right|} + C}$$

Ten wzór znajduje dość częste zastosowanie.

Podobnie postępujemy z całką $\int \frac{dx}{a^2 - x^2}$ i otrzymujemy, jak łatwo sprawdzić:

(19 a) $$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a} \log\sqrt{\left|\frac{a + x}{a - x}\right|} + C$$

5. Wynik, uzyskany w poprzednim przykładzie, można zastosować do następującego zagadnienia z dynamiki. Na ciało o masie m, spadające pod wpływem siły ciężkości ziemi, działa ponadto opór ośrodka w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu; opór ten jest w każdym momencie ruchu proporcjonalny do kwadratu prędkości v ciała spadającego

a nie może być większy od siły ciężkości Znaleźć wzór na prędkość tego ruchu i na drogę.

Otóż całkowita siła, działająca na to ciało, ma wartość:

$$P = mg - kv^2 = m\gamma = m\frac{dv}{dt}$$

gdzie g oznacza przyśpieszenie siły ciężkości (przyjmujemy je tu za stałe) a γ przyśpieszenie w badanym ruchu. Prędkość v jest liczbą dodatnią a ponadto musi być $kv^2 \leqq mg$ czyli $v \leqq \sqrt{\frac{mg}{k}}$.

Stąd:

$$\frac{dt}{dv} = \frac{m}{mg - kv^2} = \frac{m}{k}\frac{1}{\frac{mg}{k} - v^2}$$

Wobec tego:

$$t = \frac{m}{k}\int \frac{dv}{\frac{mg}{k} - v^2}$$

Według wzoru (19a) otrzymujemy stąd:

$$t = \frac{m}{k}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{mg}{k}}}\log\left|\sqrt{\frac{\sqrt{\frac{mg}{k}} + v}{\sqrt{\frac{mg}{k}} - v}}\right| + C$$

Wyrażenie pod pierwiastkiem jest nieujemne, a więc znak bezwzględnej wartości nie jest potrzebny. Gdy przyjmiemy, że dla $t = 0$ ciało było w spoczynku, t. j. $v = 0$, to otrzymamy stąd $C = 0$. Z tego wzoru możemy obliczyć v jako funkcję t a mianowicie:

$$e^{2t\sqrt{\frac{kg}{m}}} = \frac{\sqrt{\frac{mg}{k}} + v}{\sqrt{\frac{mg}{k}} - v}$$

a stąd:

$$v = \sqrt{\frac{mg}{k}}\cdot\frac{e^{2t\sqrt{\frac{kg}{m}}} - 1}{e^{2t\sqrt{\frac{kg}{m}}} + 1} = \sqrt{\frac{mg}{k}}\,\mathrm{tghyp}\,(t\sqrt{\tfrac{kg}{m}})$$

Z tego wzoru widać, że dla $t \to \infty$ prędkość v dąży do wartości: $v_1 = \sqrt{\frac{mg}{k}}$, zwanej prędkością „krytyczną".

Całkując wzór na $v = \frac{ds}{dt}$ jeszcze raz, otrzymujemy na drogę przy tym ruchu wzór:

$$s = \sqrt{\frac{mg}{k}}\int \mathrm{tghyp}\,(t\sqrt{\tfrac{kg}{m}})\,dt = \sqrt{\frac{mg}{k}}\int \frac{\mathrm{sinhyp}\,(t\sqrt{\frac{kg}{m}})\,dt}{\mathrm{coshyp}\,(t\sqrt{\frac{kg}{m}})}$$

Kładąc $\cos \operatorname{hyp}(t\sqrt{\frac{kg}{m}}) = u$, otrzymujemy:

$$du = \sin \operatorname{hyp}(t\sqrt{\tfrac{kg}{m}}) \cdot \sqrt{\tfrac{kg}{m}}\, dt$$

a więc:

$$s = \sqrt{\frac{mg}{k}\,\frac{m}{kg}} \int \frac{du}{u} = \frac{m}{k} \log |u| + C_1 = \frac{m}{k} \log \cos \operatorname{hyp}(t\sqrt{\tfrac{kg}{m}}) + C_1$$

Jeżeli dla $t = 0$ jest $s = 0$, to otrzymamy $C_1 = 0$ i pozostanie wzór:

$$s = \frac{m}{k} \log \tfrac{1}{2}\left(e^{t\sqrt{\frac{kg}{m}}} + e^{-t\sqrt{\frac{kg}{m}}}\right)$$

6. Całkę:

$$\int \cos rx\, dx$$

oblicza się przy pomocy podstawienia $rx = t$. Stąd $x = \frac{t}{r}$, $dx = \frac{1}{r} dt$.

A więc:

$$\int \cos rx\, dx = \int \cos t \cdot \frac{1}{r}\, dt = \frac{1}{r} \int \cos t\, dt = \frac{1}{r} \sin t + C$$

czyli:

$$\int \cos rx\, dx = \frac{1}{r} \sin rx + C$$

Przy pewnej wprawie wykonuje się takie proste całkowania odrazu, bez używania odpowiednich podstawień.

Tak np. odrazu jest widoczne, że:

$$\int \sin px\, dx = -\frac{1}{p} \cos px + C$$

7. Z wzoru redukcyjnego (17) (str. 14) na całkę z $\sin^n x$ wyprowadzić wzór redukcyjny na całkę z $\cos^n x$.

Opieramy się na tem, że:

$$\sin x = \cos(\tfrac{1}{2}\pi - x)$$

i kładziemy: $\frac{1}{2}\pi - x = t$. Wtedy $dx = -dt$, $\sin x = \sin(\frac{1}{2}\pi - t) = \cos t$.

Wobec tego wzór:

$$\int \sin^n x\, dx = -\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x\, dx$$

zmienia się na:

(20) $$\boxed{K_n = \int \cos^n t\, dt = \frac{1}{n} \sin t \cos^{n-1} t + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} t\, dt}$$

Kładąc $n-2=m=-p$ i wyliczając z tego wzoru ostatnią całkę, otrzymamy wzór redukcyjny dla ujemnych potęg cosinusa:

$$(20a)\quad K_{-p}=\int\frac{dt}{\cos^p t}=-\frac{1}{-p+1}\sin t\cos^{-p+1}t+\frac{-p+2}{-p+1}\int\frac{dt}{\cos^{p-2}t}$$

Jeżeli p jest liczbą nieparzystą, to ten wzór redukcyjny prowadzi ostatecznie do całki: $\int\frac{dt}{\cos t}$, którą omówimy w przykładzie 11.

8. Często się zdarza, że nie trzeba obliczać wyraźnie zmiennej x z podstawienia $\psi(x)=t$, lecz wystarczy utworzyć różniczki obu stron tej równości. Tak np. celem obliczenia całki:

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

używa się podstawienia:

$$a^2+x^2=t$$

Stąd:

$$2x\,dx=dt$$

a więc $x\,dx=\frac{1}{2}dt$, a to właśnie jest potrzebne w liczniku.

Wobec tego:

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}}=\tfrac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=\sqrt{t}+C$$

a więc:

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}}=\sqrt{a^2+x^2}+C$$

9. Wyprowadzimy wzór redukcyjny dla całki:

$$T_m=\int\operatorname{tg}^m x\,dx$$

W tym celu oddzielamy w funkcji podcałkowej:

$$\operatorname{tg}^2 x=\sec^2 x-1=\frac{1}{\cos^2 x}-1$$

Otrzymamy zatem:

$$T_m=\int\operatorname{tg}^{m-2}x\cdot\operatorname{tg}^2 x\,dx=\int\operatorname{tg}^{m-2}x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=$$

$$=\int\operatorname{tg}^{m-2}x\frac{dx}{\cos^2 x}-\int\operatorname{tg}^{m-2}x\,dx$$

Drugą całkę możemy oznaczyć literą T_{m-2}, pierwszą zaś obliczymy przez podstawienie: $\operatorname{tg}x=u$, a więc $\frac{dx}{\cos^2 x}=du$. Wobec tego ta pierwsza całka

przyjmie postać:

$$\int u^{m-2}\,du = \frac{1}{m-1}\,u^{m-1} = \frac{1}{m-1}\,\mathrm{tg}^{m-1}x$$

Stałą C, występującą przy całkowaniu, włączmy do T_{m-2}, to otrzymamy następujący wzór redukcyjny:

$$T_m = \frac{1}{m-1}\,\mathrm{tg}^{m-1}x - T_{m-2}$$

10. Metody, podobnej jak w przykładzie 8. używa się, jeżeli funkcja podcałkowa jest ilorazem dwóch funkcyj, z których dzielna jest pochodną dzielnika, a więc dla całek postaci:

$$I = \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

Kładąc $f(x) = t$, otrzymujemy $f'(x)\,dx = dt$, a więc:

$$I = \int \frac{dt}{t} = \log|t| + C$$

czyli:

(21) $$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)| + C}$$

Ten wzór można uważać za odwrócenie wzoru na pochodną logarytmiczną (por. tom I, § 85).

Tak np.:

a) $$\int \mathrm{tg}\,x\,dx = \int \frac{\sin x\,dx}{\cos x} = -\int \frac{-\sin x\,dx}{\cos x}$$

Tu licznik jest różniczką mianownika, zatem według wzoru (21) otrzymujemy;

(22) $$\boxed{\int \mathrm{tg}\,x\,dx = -\log|\cos x| + C}$$

b) Obliczyć:

$$I = \int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}\,dx$$

Tu licznik nie jest wprawdzie pochodną mianownika, ale można go tak przekształcić, że będzie sumą tej pochodnej i liczby stałej, a mianowicie,

wyłączając z licznika $\frac{m}{2a}$, otrzymamy:

$$I = \frac{m}{2a}\int \frac{2ax + \frac{2an}{m}}{ax^2 + bx + c}\,dx = \frac{m}{2a}\int \frac{(2ax + b) + (\frac{2an}{m} - b)}{ax^2 + bx + c}\,dx$$

Tę całkę rozdzielamy na sumę dwóch całek

$$I_1 = \frac{m}{2a}\int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c}\,dx, \quad I_2 = \frac{m}{2a}\left(\frac{2an}{m} - b\right)\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$$

Otóż pierwsza z tych całek ma właśnie postać lewej strony wzoru (21), a zatem:

$$I_1 = \frac{m}{2a}\log|ax^2 + bx + c|$$

W drugiej całce należy sprowadzić mianownik do formy kanonicznej: $a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$. Kładąc $x + \frac{b}{2a} = t$, sprowadzamy tę całkę do formy: $\int \frac{dt}{t^2 + A^2}$ lub $\int \frac{dt}{t^2 - A^2}$ zależnie od tego, czy wyróżnik $4ac - b^2$ jest dodatni czy też ujemny. Te zaś formy omówiliśmy w przykładzie 3 i 4.

11. Obliczmy całki: $S = \int \frac{dx}{\sin x}$ i $K = \int \frac{dx}{\cos x}$, potrzebne przy stosowaniu wzorów redukcyjnych (17a) i (20a).

I tak:

$$S = \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{\frac{dx}{2\cos^2\frac{1}{2}x}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$$

Tu licznik jest różniczką mianownika, a zatem:

(23) $$\boxed{\int \frac{dx}{\sin x} = \log\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C}$$

Celem obliczenia całki K, sprowadzimy ją do całki S, zauważywszy, że $\cos x = \sin(\frac{1}{2}\pi + x)$. Zatem:

$$K = \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin(\frac{1}{2}\pi + x)}$$

Za $\frac{1}{2}\pi + x$ kładziemy t, to $dx = dt$ i otrzymujemy całkę typu (23).

A więc:

$$(24)\qquad \boxed{\int \frac{dx}{\cos x} = \log\left|\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}\pi + x\right)\right| + C = \log\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| + C}$$

12. Celem obliczenia całki:

$$I = \int \sqrt{1 - x^2}\, dx$$

dogodnie jest użyć podstawienia wprost w postaci $x = \varphi(t)$, a nie, jak to dotychczas czyniliśmy, w postaci $t = \psi(x)$. Podstawiamy mianowicie

$$x = \sin t, \qquad \text{biorąc } -\tfrac{1}{2}\pi \leqq t \leqq +\tfrac{1}{2}\pi.$$

Podstawieniem tem wyczerpujemy istotnie cały zasób dopuszczalnych wartości x, albowiem, aby otrzymać rzeczywisty pierwiastek z $1 - x^2$, musi być $-1 \leqq x \leqq +1$.

Wtedy $dx = \cos t\, dt$, a zatem

$$I = \int \sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot \cos t\, dt = \int \cos^2 t\, dt$$

Tę całkę moglibyśmy obliczyć odrazu przez zastosowanie wzoru redukcyjnego (20). Dla ćwiczenia obliczymy ją jednak w inny sposób, a mianowicie oprzemy się na znanym z trygonometrji wzorze:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$$

Wobec tego:

$$I = \tfrac{1}{2}\int (1 + \cos 2t)\, dt = \tfrac{1}{2}(t + \tfrac{1}{2}\sin 2t) + C$$

Ale z wzoru $x = \sin t$ wynika, że $t = \arcsin x$ (przyczem $-\tfrac{1}{2}\pi \leqq t \leqq \tfrac{1}{2}\pi$). Ponadto $\sin 2t = 2\sin t \cos t = 2x\sqrt{1 - x^2}$ (znak pierwiastka jest dodatni, ponieważ $\cos t$ ma wartości nieujemne dla t, zawartych w przedziale $\langle -\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi\rangle$). Wobec tego:

$$(25)\qquad \boxed{I = \int \sqrt{1 - x^2}\, dx = \tfrac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1 - x^2}) + C}$$

Pozostawiamy czytelnikowi do wyprowadzenia nieco ogólniejszy wzór:

$$(25a)\qquad \boxed{\int \sqrt{k - x^2}\, dx = \tfrac{1}{2}\left(k \arcsin\frac{x}{\sqrt{k}} + x\sqrt{k - x^2}\right) + C \quad (\text{dla } k > x^2)}$$

13. Czasem przy obliczaniu całki trzeba użyć zarówno całkowania „per partes“ jak i metody podstawiania. Tak np. do obliczenia:

$$I = \int \operatorname{arc\,tg} x \, dx$$

stosujemy najpierw całkowanie „per partes“, kładąc:

$$\operatorname{arc\,tg} x = u, \qquad dx = dv$$

$$du = \frac{dx}{1+x^2}, \qquad x = v$$

A więc $I = x \operatorname{arc\,tg} x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2}$. Całkę, która tu występuje, obliczamy zapomocą podstawienia $1 + x^2 = t$. Otrzymujemy $2x\,dx = dt$, a więc:

$$\int \frac{x\,dx}{1+x^2} = \tfrac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \tfrac{1}{2}\log|t| + C = \tfrac{1}{2}\log(1+x^2) + C$$

Wobec tego:

$$\int \operatorname{arc\,tg} x = x \operatorname{arc\,tg} x - \tfrac{1}{2}\log(1+x^2) - C$$

Niechaj czytelnik stwierdzi, że w podobny sposób otrzyma się:

$$\int \operatorname{arc\,sin} x \, dx = x \operatorname{arc\,sin} x + \sqrt{1-x^2} + C$$

14. Przy obliczaniu całki:

$$I = \int e^{ax} \sin bx \, dx$$

stosujemy dwukrotnie całkowanie „per partes“, a mianowicie najpierw kładziemy:

$$e^{ax} = u, \quad \sin bx\,dx = dv$$

$$du = ae^{ax}dx, \; v = -\frac{1}{b}\cos bx \qquad \text{(por. przykład 6).}$$

Wobec tego:

$$I = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx\,dx$$

Stosujemy do występującej tu całki powtórnie metodę całkowania „per partes“, kładąc:

$$e^{ax} = u_1, \quad \cos bx\,dx = dv_1$$

$$du_1 = ae^{ax}dx, \; v_1 = \frac{1}{b}\sin bx$$

Zatem:

$$I = \frac{-1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}\left(\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\,dx\right)$$

$$I = \frac{1}{b^2}\left(-e^{ax}b\cos bx + e^{ax}a\sin bx\right) - \frac{a^2}{b^2}I$$

A stąd:

$$Ib^2 = e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx) - a^2 I, \quad (a^2 + b^2) I = e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx)$$

a więc:

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a \sin bx - b \cos bx) + C$$

W podobny sposób oblicza się, że:

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a \cos bx + b \sin bx) + C$$

15. W jednym z dalszych rozdziałów będą nam potrzebne całki:

$$\int \sin nx \sin rx \, dx, \quad \int \sin nx \cos rx \, dx \quad \text{i} \quad \int \cos nx \cos rx \, dx$$

Przy obliczaniu tych całek opieramy się na znanych z trygonometrji wzorach:

$$\sin nx \cdot \sin rx = \tfrac{1}{2}(\cos(n - r)x - \cos(n + r)x)$$
$$\sin nx \cdot \cos rx = \tfrac{1}{2}(\sin(n + r)x + \sin(n - r)x)$$
$$\cos nx \cdot \cos rx = \tfrac{1}{2}(\cos(n + r)x + \cos(n - r)x)$$

Gdy $n \neq r$, to otrzymujemy stąd:

$$(26)\quad \begin{cases} \int \sin nx \sin rx \, dx = \frac{1}{2}\int \cos(n - r)x \, dx - \frac{1}{2}\int \cos(n + r)x \, dx = \\ \qquad = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(n - r)x}{n - r} - \frac{\sin(n + r)x}{n + r}\right) \\ \int \sin nx \cos rx \, dx = \frac{1}{2}\int \sin(n + r)x \, dx + \frac{1}{2}\int \sin(n - r)x \, dx = \\ \qquad = -\frac{1}{2}\left(\frac{\cos(n + r)x}{n + r} + \frac{\cos(n - r)x}{n - r}\right) \\ \int \cos nx \cos rx \, dx = \frac{1}{2}\int \cos(n + r)x \, dx + \frac{1}{2}\int \cos(n - r)x \, dx = \\ \qquad = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(n + r)x}{n + r} + \frac{\sin(n - r)x}{n - r}\right) \end{cases}$$

Dla $n = r$ jest $\cos(n - r)x = \cos 0 = 1$, $\sin(n - r)x = \sin 0 = 0$, a więc powyższe całki przechodzą na:

$$(26a)\quad \begin{cases} \int \sin^2 nx \, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\frac{\sin 2nx}{2n} \\ \int \sin nx \cos nx \, dx = -\frac{1}{2}\frac{\cos 2nx}{2n} \\ \int \cos^2 nx \, dx = \frac{1}{2}\frac{\sin 2nx}{2n} + \frac{1}{2}x \end{cases}$$

16. Wyprowadzić wzór redukcyjny dla całki:

$$I_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$$

Podstawiamy: $x = \operatorname{tg} t$, to $dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$, $1 + x^2 = 1 + \operatorname{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$

a więc:

$$I_n = \int \cos^{2n-2} t\, dt = K_{2n-2}$$

Dla całki K_m znamy już wzór redukcyjny (por. wzór (20) na str. 21). Stosując go tutaj, otrzymamy:

$$I_n = K_{2n-2} = \frac{1}{2n-2} \sin t \cos^{2n-3} t + \frac{2n-3}{2n-2} K_{2n-4} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg} t}{(2n-2)\sec^{2n-2} t} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}$$

czyli: $$I_n = \frac{x}{(2n-2)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}$$

lub wyraźnie:

(27) $$\boxed{\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{x}{(2n-2)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}}$$

Z tego wzoru będziemy korzystali w następnym paragrafie.

Uwaga. Do tego wzoru redukcyjnego można też dojść bezpośrednio, nie przechodząc przez wzór (20). W tym celu przedstawia się funkcję podcałkową w postaci:

$$\frac{1}{(1+x^2)^n} = \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} - \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$

Całka I_n zamieni się wtedy na $I_{n-1} - \int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^n}$

Do pozostałej całki stosujemy całkowanie „per partes", kładąc $u = x$, $dv = \frac{x\,dx}{(1+x^2)^n}$

i t. d. Pozostawiamy czytelnikowi dalsze wykonanie rachunków.

17. Jeżeli znamy całkę jakiejś funkcji $y = f(x)$, to potrafimy bez trudności obliczyć także całkę funkcji odwrotnej: $x = \varphi(y)$. I tak, chcąc obliczyć:

$$I = \int \varphi(y)\, dy$$

podstawiamy za $\varphi(y) = x$, stąd $y = f(x)$, $dy = f'(x)\, dx$

a więc:

$$I = \int x \cdot f'(x)\, dx$$

Całkujemy „per partes“, kładąc: $x = u$, $f'(x)\,dx = dv$ Wtedy $du = dx$, $v = f(x)$ i otrzymujemy:

$$I = \int \varphi(y)\,dy = x f(x) - \int f(x)\,dx$$

Przykłady. a) Znamy dla $y = \sin x$ całkę $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$.

Wobec tego możemy obliczyć przy pomocy poprzedniego wzoru całkę z $x = \text{arc sin } y$, a mianowicie:

$$\int \text{arc sin } y\,dy = x \sin x - \int \sin x\,dx = x \sin x + \cos x + C$$

Wracając do zmiennej y, otrzymujemy:

$$\int \text{arc sin } y dy = \text{arc sin } y \cdot y + \sqrt{1 - y^2} + C$$

(por. przykład 13 na str. 26).

b) Dla $y = \text{sin hyp } x$ znamy całkę:

$$\int \text{sin hyp } x\,dx = \cos \text{hyp } x + C = \sqrt{1 + \text{sin}^2 \text{ hyp } x} + C.$$

Stąd możemy obliczyć całkę funkcji odwrotnej, którą jest, jak wiadomo (por. tom I, str. 290—291):

$$x = \log (y + \sqrt{1 + y^2})$$

Wobec tego:

$$\int \log (y + \sqrt{1 + y^2})\,dy =$$

$$= x \text{ sin hyp } x - \int \text{sin hyp } x\,dx = y \log (y + \sqrt{1 + y^2}) - \sqrt{1 + y^2} + C$$

c) Ponieważ dla $y = e^x$ jest:

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

przeto:

$$\int \log y\,dy = x e^x - e^x + C = \log y \cdot y - y + C$$

(por. str. 12 przykład 1).

§ 208. Całkowanie funkcyj wymiernych. Rozkład funkcji ułamkowej na ułamki proste.

Potrafimy scałkować każdą funkcję *całkowitą* wymierną czyli każdy wielomian (str. 10, przykład 1).

Funkcja *ułamkowa* wymierna jest ilorazem dwóch wielomianów:

$$W(x) = \frac{F(x)}{g(x)}$$

Jeżeli stopień licznika nie jest mniejszy od stopnia mianownika, to wydzielamy z tej funkcji ułamkowej część całkowitą przy pomocy znanego algorytmu dzielenia wielomianów[1] W ten sposób otrzymujemy rozkład danej funkcji $W(x)$ na część całkowitą, np. $h(x)$ i na funkcję ułamkową, np. $\frac{f(x)}{g(x)}$, której licznik ma *stopień niższy* aniżeli mianownik, a więc:

$$W(x) = h(x) + \frac{f(x)}{g(x)}$$

Tak np. dla funkcji:

$$\frac{x^3 + 2x + 5}{x^2 - 4x + 3}$$

wykonujemy dzielenie.

$$\begin{array}{l} (x^3 + 2x + 5) : (x^2 - 4x + 3) = x + 4 \\ \underline{x^3 - 4x^2 + 3x} \\ \quad + 4x^2 - x + 5 \\ \quad \underline{+ 4x^2 - 16x + 12} \\ \quad\quad + 15x - 7 \end{array}$$

Zatem:

$$\frac{x^3 + 2x + 5}{x^2 - 4x + 3} = x + 4 + \frac{15x - 7}{x^2 - 4x + 3}$$

Część całkowitą $h(x)$ scałkujemy bez trudności. Pozostaje do całkowania część ułamkowa, której licznik ma stopień niższy aniżeli mianownik. Do takiej funkcji zastosujemy całkowanie przez rozkład. W tym celu postaramy się rozłożyć taką funkcję $\frac{f(x)}{g(x)}$ na prostsze dodajniki.

W specjalnych przypadkach używaliśmy już takiego rozkładu (por. str. 18, przykład 4). Jeżeliby spółczynnik najwyższej potęgi zmiennej x w wielomianie $g(x)$ był różny od 1, to usuwamy go, dzieląc licznik i mianownik tej funkcji ułamkowej przez ten spółczynnik; możemy się zatem ograniczyć w dalszym ciągu do badania tylko takich funkcyj ułamkowych, w których ten spółczynnik ma wartość 1. Spółczynniki innych potęg x są dowolnemi liczbami rzeczywistemi. Algebra poucza (por. tom I, § 22), że każdy wielomian stopnia n można przedstawić jako iloczyn n czynników stopnia pierwszego:

$$w_n(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$$

przyczem liczby $x_1, x_2, \ldots x_n$ są pierwiastkami równania $w_n(x) = 0$. Nie-

[1] W podręczniku Ruziewicza i Żylińskiego p. t. *Wstęp do matematyki* czytelnik znajdzie w rozdz. V dokładne uzasadnienie tego algorytmu.

które a nawet wszystkie czynniki mogą się powtarzać wielokrotnie (jeżeli równanie posiada wielokrotne pierwiastki). Tak więc mianownik funkcji ułamkowej, mający spółczynnik 1 przy najwyższej potędze x, można przedstawić w postaci:

$$g(x) = (x-\alpha)^a (x-\beta)^b \ldots (x-\mu)^r \ldots$$

jeżeli α jest a-krotnym pierwiastkiem równania $g(x) = 0$, β b-krotnym i t. d.

Pierwiastki równania $g(x) = 0$ mogą być rzeczywiste i zespolone [1]. Wszystkie zespolone pierwiastki równania o spółczynnikach rzeczywistych rozpadają się na pary sprzężone z sobą. Jeżeli więc:

$$\mu = p + qi$$

(p, q są tu liczbami rzeczywistemi a q jest różne od zera) jest pierwiastkiem równania $g(x) = 0$, to także liczba:

$$\bar{\mu} = p - qi$$

jest pierwiastkiem tego równania. Co więcej, jeżeli μ jest r-krotnym pierwiastkiem tego równania, to także sprzężona z μ liczba $\bar{\mu}$ musi być dokładnie r-krotnym pierwiastkiem tegoż równania. Iloczyn każdej pary czynników $(x-\mu)(x-\bar{\mu})$, odpowiadających sprzężonym pierwiastkom, jest wielomianem drugiego stopnia o spółczynnikach rzeczywistych a o wyróżniku ujemnym. I tak:

$$(x-\mu)\cdot(x-\bar{\mu}) = (x-p-qi)(x-p+qi) = (x-p)^2 + q^2 = \\ = x^2 - 2px + p^2 + q^2$$

Wyróżnik tego trójmianu kwadratowego ma postać:

$$d = (-2p)^2 - 4(p^2+q^2) = -4q^2$$

a więc ma wartość ujemną.

Wobec tego możemy przedstawić wielomian $g(x)$ jako iloczyn samych rzeczywistych czynników stopnia pierwszego lub drugiego w postaci:

$$(28) \quad g(x) = (x-\alpha)^a (x-\beta)^b \ldots (x^2 + a_1 x + b_1)^r \cdot (x^2 + a_2 x + b_2) \ldots$$

przyczem występujące tu trójmiany mają wyróżniki ujemne. Czynniki pierwszego stopnia: $x-\alpha$, $x-\beta$,... odpowiadają rzeczywistym pierwiastkom równania $g(x) = 0$, czynniki zaś drugiego stopnia: $x^2 + a_1 x + b_1$, $x^2 + a_2 x + b_2$,... odpowiadają parom pierwiastków zespolonych, sprzężonych. Stopniem wielomianu $g(x)$ jest widocznie liczba $n = a + b + \ldots + 2r + 2s + \ldots$.

Efektywne wykonanie takiego rozkładu bywa nieraz bardzo trudne, a mianowicie wtedy, gdy trudno jest rozwiązać równanie $g(x) = 0$. W praktyce mamy jednak najczęściej do czynienia bądźto z łatwemi do

[1] Zasadnicze wiadomości o liczbach zespolonych są podane w paragrafach końcowych.

rozwiązania równaniami $g(x) = 0$, bądźto z gotowym już rozkładem funkcji $g(x)$ na czynniki pierwiastkowe według wzoru (28).

Każdą więc funkcję wymierną ułamkową można przedstawić w postaci:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{(x-\alpha)^a(x-\beta)^b\ldots(x^2+a_1x+b_1)^r(x^2+a_2x+b_2)^s\ldots}$$

przyczem trójmiany, zawarte w mianowniku, mają wyróżniki ujemne. Załóżmy, że stopień licznika jest mniejszy aniżeli stopień mianownika. Prawą stronę możemy uważać za wynik dodawania prostszych ułamków, o mianownikach: $x-\alpha, (x-\alpha)^2, \ldots (x-\alpha)^a, x-\beta, (x-\beta)^2, \ldots (x-\beta)^b, \ldots$ $x^2+a_1x+b_1, (x^2+a_1x+b_1)^2, \ldots (x^2+a_1x+b_1)^r, x^2+a_2x+b_2, \ldots$.

Okażemy, że te ułamki można tak wyznaczyć, że liczniki będą bądźto liczbami stałemi, bądźto funkcjami pierwszego stopnia, a mianowicie udowodnimy prawdziwość następującego wzoru:

$$(29)\quad \left|\begin{array}{l} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(x)}{(x-\alpha)^a\cdot(x-\beta)^b\ldots(x^2+a_1x+b_1)^r(x^2+a_2x+b_2)^s\ldots} = \\ \qquad = \dfrac{A_1}{x-\alpha} + \dfrac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \ldots + \dfrac{A_a}{(x-\alpha)^a} + \\ \qquad + \dfrac{B_1}{x-\beta} + \dfrac{B_2}{(x-\beta)^2} + \ldots + \dfrac{B_b}{(x-\beta)^b} + \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \dfrac{M_1x+N_1}{x^2+a_1x+b_1} + \dfrac{M_2x+N_2}{(x^2+a_1x+b_1)^2} + \ldots + \dfrac{M_rx+N_r}{(x^2+a_1x+b_1)^r} + \\ + \dfrac{P_1x+Q_1}{x^2+a_2x+b_2} + \dfrac{P_2x+Q_2}{(x^2+a_2x+b_2)^2} + \ldots + \dfrac{P_sx+Q_s}{(x^2+a_2x+b_2)^s} + \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Liczby $A_1, A_2, \ldots A_{a-1}, A_a, B_1, B_2, \ldots B_b, \ldots M_1, N_1, M_2, N_2, \ldots M_r, N_r, P_1, Q_1, P_2, Q_2, \ldots P_s, Q_s, \ldots$ są stałemi liczbami rzeczywistemi.

Taki rozkład funkcji ułamkowej na prostsze dodajniki nazywamy **rozkładem** tej funkcji **na ułamki częściowe.**

Dowód. Rozpoczniemy od pierwszego wiersza w tym wzorze. Utwórzmy różnicę:

$$(1)\quad \frac{f(x)}{(x-\alpha)^a(x-\beta)^b\ldots(x^2+a_1x+b_1)^r(x^2+a_2x+b_2)^s} - \frac{A_a}{(x-\alpha)^a} = \frac{f(x) - A_a(x-\beta)^b\ldots(x^2+a_1x+b_1)^r\ldots}{(x-\alpha)^a(x-\beta)^b\ldots(x^2+a_1x+b_1)^r\ldots}$$

Chcemy tę różnicę tak uprościć, aby jej mianownik miał stopień o jeden niższy od stopnia pierwotnego mianownika. Zażądajmy w tym celu, aby można było licznik i mianownik uprościć przez $x-\alpha$. Jeżeli licznik ma

być podzielny przez $x - \alpha$, to liczba α musi być pierwiastkiem licznika, a zatem musi się spełnić równość:

$$f(\alpha) - A_\alpha(\alpha - \beta)^\beta \ldots (\alpha^2 + a_1\alpha + b_1)^\gamma (\alpha^2 + a_2\alpha + b_2)^\varepsilon \ldots = 0$$

To się zaś spełni, gdy nieznaną dotychczas stałą A_α obierzemy według wzoru:

$$\text{(II)} \qquad A_\alpha = \frac{f(\alpha)}{(\alpha - \beta)^\beta \ldots (\alpha^2 + a_1\alpha + b_1)^\gamma (\alpha^2 + a_2\alpha + b_2)^\varepsilon \ldots}$$

Dajemy zatem liczbie A_α tę wartość i upraszczamy licznik i mianownik drugiej strony wzoru (I) przez $x - \alpha$. Otrzymamy w ten sposób w liczniku jakąś funkcję $f_1(x)$ stopnia niższego aniżeli $n - 1$, a w mianowniku odpadnie jeden czynnik $x - \alpha$.

A więc:

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A_\alpha}{(x - \alpha)^\alpha} = \frac{f_1(x)}{(x - \alpha)^{\alpha - 1}(x - \beta)^\beta \ldots (x^2 + a_1 x + b_1)^\gamma (x^2 + a_2 x + b_2)^\varepsilon \ldots}$$

Z prawą stroną tego wzoru postępujemy znowu tak samo, a więc odejmujemy $\frac{A_{\alpha-1}}{(x - \alpha)^{\alpha-1}}$, redukujemy i żądamy, aby licznik i mianownik były podzielne przez $x - \alpha$; z tego warunku wyznaczy się stałą $A_{\alpha-1}$ wzorem podobnym do (II). Postępując tak dalej, wyznaczymy wszystkie stałe A, wszystkie stałe B i t. d. w sposób jednoznaczny, aż pozostaną same mianowniki postaci $x^2 + a_1 x + b_1$, $(x^2 + a_1 x + b_1)^2, \ldots$

Po przeniesieniu wszystkich ułamków, zawierających w mianownikach dwumiany $x - \alpha$, $x - \beta, \ldots$ i ich potęgi, otrzymamy po redukcji funkcję ułamkową:

$$\frac{R(x)}{(x^2 + a_1 x + b_1)^\gamma \cdot (x^2 + a_2 x + b_2)^\varepsilon \ldots}$$

Licznik jest tu stopnia niższego niż $2r + 2s + \ldots$

Teraz przystąpimy do wyznaczania spółczynników M_r, N_r. W tym celu przenosimy odpowiedni ułamek na pierwszą stronę i otrzymujemy:

$$\text{(III)} \qquad \frac{R(x)}{(x^2 + a_1 x + b_1)^\gamma (x^2 + a_2 x + b_2)^\varepsilon \ldots} - \frac{M_r x + N_r}{(x^2 + a_1 x + b_1)^\gamma} = \frac{R(x) - (M_r x + N_r)(x^2 + a_2 x + b_2)^\varepsilon \ldots}{(x^2 + a_1 x + b_1)^\gamma (x^2 + a_2 x + b_2)^\varepsilon \ldots}$$

Żądamy, aby licznik i mianownik dały się uprościć przez $x^2 + a_1 x + b_1$ czyli przez $(x - p + qi) \cdot (x - p - qi)$ (założyliśmy bowiem, że trójmiany, występujące w mianownikach, mają wyróżniki ujemne, a zatem każdy z nich posiada parę pierwiastków sprzężonych).

Licznik musi więc także posiadać pierwiastki $x_1 = p + qi$ i $x_2 = p - qi$. Otrzymamy zatem dwa równania:

(IV)
$$R(x_1) - (M_r x_1 + N_r)\cdot(x_1^2 + a_2 x_1 + b_2)^s \ldots = 0$$
$$R(x_2) - (M_r x_2 + N_r)\cdot(x_2^2 + a_2 x_2 + b_2)^s \ldots = 0$$

wystarczające do wyznaczenia stałych M_r i N_r.

Przedstawmy liczbę zespoloną $R(x_1):(x_1^2 + a_2 x_1 + b_2)^s \ldots$ w postaci $F(p,q) + i\,G(p,q)$, to liczba $R(x_2):(x_2^2 + a_2 x_2 + b_2)^s \ldots$, jako sprzężona z nią, ma postać: $F(p,q) - i\,G(p,q)$. Równania (IV) przyjmą więc postać:

$$F(p,q) + i\,G(p,q) = M_r(p + qi) + N_r$$
$$F(p,q) - i\,G(p,q) = M_r(p - qi) + N_r$$

Stąd otrzymujemy z łatwością:

$$M_r = \tfrac{1}{q}\,G(p,q),\ N_r = F(p,q) - \tfrac{p}{q}G(p,q)$$

a więc liczby rzeczywiste.

Obrawszy takie M_r i N_r, możemy uprościć licznik i mianownik prawej strony we wzorze (III) przez $x^2 + a_1 x + b_1$. Otrzymamy zatem:

$$\frac{R_1(x)}{(x^2 + a_1 x + b_1)^{r-1}(x^2 + a_2 x + b_2)^s \ldots}$$

Tu stopień licznika $R_1(x)$ jest niższy aniżeli $2r - 1 + 2s \ldots$

Z tem wyrażeniem postępujemy dalej tak samo, a więc odejmujemy $\frac{M_{r-1}x + N_{r-1}}{(x^2 + a_1 x + b_1)^{r-1}}$, redukujemy i upraszczamy, wyznaczywszy odpowiednio stałe M_{r-1}, N_{r-1}. Postępując tak kolejno r-krotnie z czynnikiem $x^2 + a_1 x + b_1$, a następnie s-krotnie z czynnikiem $x^2 + a_2 x + b_2$ i t. d., otrzymamy wszystkie stałe, występujące we wzorze (29). W ten sposób prawdziwość tego wzoru jest udowodniona.

Szczególnie łatwo przedstawia się rozkład funkcji ułamkowej na ułamki proste, gdy równanie $g(x) = 0$ posiada tylko jednokrotne pierwiastki. Niechaj:

$$g(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)\ldots(x - \nu)$$

Zastosujmy do licznika $f(x)$ wzór interpolacyjny Lagrange'a (tom I str. 605), przedstawiając wielomian $f(x)$ zapomocą jego wartości:

$$f(\alpha), f(\beta), f(\gamma), \ldots f(\nu)$$

w punktach:

$$x = \alpha, \beta, \gamma, \ldots \nu$$

Otóż:

$$f(x) = \frac{(x-\beta)(x-\gamma)\ldots(x-\nu)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)\ldots(\alpha-\nu)}f(\alpha) +$$
$$+\frac{(x-\alpha)(x-\gamma)\ldots(x-\nu)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)\ldots(\beta-\nu)}f(\beta) + \ldots + \frac{(x-\alpha)(x-\beta)\ldots}{(\nu-\alpha)(\nu-\beta)\ldots}f(\nu)$$

Podzielmy obie strony przez $g(x)$, to otrzymamy:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(\alpha)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)\dots(\alpha-\nu)} \cdot \frac{1}{x-\alpha} + \frac{f(\beta)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)\dots(\beta-\nu)} \cdot \frac{1}{x-\beta} + \frac{f(\gamma)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)\dots(\gamma-\nu)} \cdot \frac{1}{x-\gamma} + \dots$$

Oznaczmy stały spółczynnik przy $\frac{1}{x-\alpha}$ literą A, przy $\frac{1}{x-\beta}$ literą B i t. d., to z wzoru tego otrzymamy odrazu żądany rozkład funkcji ułamkowej na ułamki proste:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \frac{C}{x-\gamma} + \dots + \frac{N}{x-\nu}$$

Spółczynniki $A, B, C, \dots$ oblicza się mianowicie według wzorów:

$$A = \frac{f(\alpha)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)\dots(\alpha-\nu)}, \qquad B = \frac{f(\beta)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)\dots(\beta-\nu)}, \dots$$

Łatwo stwierdzić, że mianownik wzoru na A ma wartość $g'(\alpha)$, podobnie w B występuje $g'(\beta)$ i t. d.; trzeba tylko utworzyć pochodną iloczynu $(x-\alpha)(x-\beta)\dots(x-\nu)$. A więc wzorom na spółczynniki $A, B, \dots$ można też nadać postać:

$$A = \frac{f(\alpha)}{g'(\alpha)}, \qquad B = \frac{f(\beta)}{g'(\beta)}, \dots$$

Przykład.

Rozłożyć na ułamki proste funkcję (por. str. 30):

$$\frac{15x-7}{x^2-4x+3}$$

Ponieważ równanie $x^2-4x+3=0$ posiada pierwiastki 1 i 3, przeto $g(x) = x^2-4x+3 = (x-1)(x-3)$. Rozkład ma zatem postać:

$$\frac{15x-7}{x^2-4x+3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3}$$

Według wzorów na A i B otrzymujemy odrazu:

$$A = \frac{15\cdot 1-7}{1-3} = -4, \qquad B = \frac{15\cdot 3-7}{3-1} = 19$$

A więc:

$$\frac{15x-7}{x^2-4x+3} = \frac{-4}{x-1} + \frac{19}{x-3}$$

W ogólnym przypadku, gdy występują pierwiastki wielokrotne, obliczanie spółczynników tą drogą, którą postępowaliśmy przy dowodzie wzoru (29), jest bardzo mozolne.

Zwykle szybciej dochodzi się do celu inną, prostszą drogą. Uwalniamy mianowicie obie strony wzoru (29) od mianowników. Po lewej stronie otrzymamy w ten sposób $f(x)$, a więc wielomian stopnia co najwyżej $n-1$, po prawej zaś stronie wielomian stopnia dokładnie $n-1$, a więc wielomian, mający n spółczynników. Obydwa te wielomiany mają przybierać te same wartości dla nieskończenie wielu wartości x, a więc muszą być identyczne, to znaczy, że spółczynniki, występujące po obu stronach przy równych potęgach zmiennej x, muszą być sobie parami równe. W ten sposób otrzymamy n równań pierwszego stopnia na wyznaczenie n stałych: $A_1, A_2 \ldots A_a, B_1, B_2, \ldots B_b, \ldots M_1, N_1, M_2, N_2, \ldots M_r, N_r, P_1, Q_1, P_2, Q_2 \ldots P_s, Q_s, \ldots$ Liczba tych równań jest więc wystarczająca. Równania te nie mogą być ze sobą sprzeczne, albowiem zgóry wiemy, że istnieją ich rozwiązania: $A_1, A_2, \ldots$, wyznaczyliśmy je bowiem w poprzednim dowodzie w inny sposób. Ta metoda porównania spółczynników prowadzi zwykle szybko do wyznaczenia potrzebnych stałych.

Przykłady.

1) Rozłożyć na ułamki częściowe funkcję:

$$\frac{5x^4 - 5x + 1}{x^5 - 3x^4 + 3x^3 - x^2}$$

Najpierw trzeba znaleźć pierwiastki mianownika, t. j. rozwiązać równanie:

$$x^5 - 3x^4 + 3x^3 - x^2$$

czyli:

$$x^2(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = 0$$

czyli:

$$x^2(x-1)^3 = 0$$

Pierwiastkami tego równania są: $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = x_4 = x_5 = 1$.

Rozkład danej funkcji ułamkowej ma więc postać:

$$\frac{5x^4 - 5x + 1}{x^2(x-1)^3} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{B_1}{x-1} + \frac{B_2}{(x-1)^2} + \frac{B_3}{(x-1)^3}$$

Uwalniamy obie strony od mianowników i otrzymujemy:

$$5x^4 - 5x + 1 = A_1 x(x-1)^3 + A_2(x-1)^3 + B_1 x^2(x-1)^2 + B_2 x^2(x-1) + B_3 x^2$$

czyli:

$$5x^4 - 5x + 1 = A_1(x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x) + A_2(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + B_1(x^4 - 2x^3 + x^2) + B_2(x^3 - x^2) + B_3 x^2$$

czyli:

$$5x^4 - 5x + 1 = (A_1 + B_1)x^4 + (-3A_1 + A_2 - 2B_1 + B_2)x^3 + (3A_1 - 3A_2 + B_1 - B_2 + B_3)x^2 + (-A_1 + 3A_2)x - A_2$$

Spółczynniki przy równych potęgach zmiennej x muszą być parami sobie równe, a zatem otrzymujemy następujący układ równań:

$$\begin{gathered} A_1 + B_1 = 5 \\ -3A_1 + A_2 - 2B_1 + B_2 = 0 \\ 3A_1 - 3A_2 + B_1 - B_2 + B_3 = 0 \\ -A_1 + 3A_2 = -5 \\ -2A_2 = 1 \end{gathered}$$

Z tych równań otrzymujemy kolejno, począwszy od ostatniego.

$$A_2 = -1, \quad A_1 = 5 + 3A_2 = 5 - 3 = 2, \quad B_1 = 5 - A_1 = 5 - 2 = 3,$$
$$B_2 = 3A_1 - A_2 + 2B_1 = 6 + 1 + 6 = 13$$
$$B_3 = -3A_1 + 3A_2 - B_1 + B_2 = -6 - 3 - 3 + 13 = 1$$

Wobec tego możemy przedstawić badaną funkcję w następującej postaci:

$$\frac{5x^4 - 5x + 1}{x^5 - 3x^4 + 3x^3 - x^2} = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x-1} + \frac{13}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3}$$

2) Rozłożyć na ułamki częściowe funkcję:

$$W(x) = \frac{2x+2}{(x-1)(x^2+1)^2}$$

Mianownik ma już tutaj postać wzoru (28), albowiem czynnik drugiego stopnia: $x^2 + 1$ ma wyróżnik ujemny: -4 (pierwiastki są urojone, sprzężone: $+i$, $-i$). Wobec tego rozkład na ułamki częściowe ma postać:

$$\frac{2x+2}{(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{M_1 x + N_1}{x^2+1} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2+1)^2}$$

Celem wyznaczenia liczników uwalniamy obie strony od ułamków i otrzymujemy:

$$2x + 2 = A(x^2+1)^2 + (M_1 x + N_1)(x-1)(x^2+1) + (M_2 x + N_2)(x-1)$$

czyli:

$$2x + 2 = (A + M_1)x^4 + (N_1 - M_1)x^3 + (2A + M_1 - N_1 + M_2)x^2 + (N_1 - M_1 + N_2 - M_2)x + (A - N_1 - N_2).$$

Spółczynniki przy równych potęgach zmiennej x muszą być sobie równe, zatem musi się spełniać następujący układ równań:

$$\begin{gathered} A + M_1 = 0 \\ N_1 - M_1 = 0 \\ 2A + M_1 - N_1 + M_2 = 0 \\ N_1 - M_1 + N_2 - M_2 = 2 \\ A - N_1 - N_2 = 2 \end{gathered}$$

Z tych równań otrzymujemy bez trudności: $A = 1$, $N_1 = M_1 = -1$, $M_2 = -2$, $N_2 = 0$, a zatem daną funkcję możemy przedstawić w postaci

$$\frac{2x+2}{(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{x^2+1} - \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

Po tych przygotowaniach całkowanie funkcyj wymiernych nie sprawia już trudności. I tak chcąc obliczyć całkę:

$$I = \int \frac{F(x)}{g(x)}\,dx$$

wydzielamy najpierw część całkowitą i otrzymujemy:

$$I = \int h(x)\,dx + \int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx$$

gdzie $h(x)$ jest wielomianem, a stopień funkcji $f(x)$ jest niższy od stopnia $g(x)$. Wielomian $h(x)$ całkujemy bez żadnej trudności. Następnie rozkładamy funkcję $\frac{f(x)}{g(x)}$ na ułamki częściowe według wzoru (29), rozłożywszy poprzednio $g(x)$ na czynniki według wzoru (28), o ile już zgóry funkcja $g(x)$ nie jest podana w formie takiego iloczynu. Po wykonaniu rozkładu mamy do czynienia z całkami następujących typów

a) $$\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\log|x-a| + C$$

b) $$\int \frac{A_n}{(x-a)^n}\,dx = A_n\int (x-a)^{-n}\,dx = A_n\frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C =$$

$$= \frac{A_n}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C, \text{ gdy } n > 1$$

c) $$\int \frac{Mx+N}{x^2+ax+b}\,dx, \text{ przyczem wyróżnik } a^2 - 4b < 0.$$

Całkę tę obliczamy metodą, podaną w przykładzie 10b na str. 23, a mianowicie:

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+ax+b}\,dx = \frac{M}{2}\int \frac{2x+\frac{2N}{M}}{x^2+ax+b}\,dx = \frac{M}{2}\int \frac{2x+a+\frac{2N}{M}-a}{x^2+ax+b}\,dx =$$

$$= \frac{M}{2}\log(x^2+ax+b) + \left(N - \frac{aM}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+ax+b}$$

Sprowadzamy trójmian x^2+ax+b do formy kanonicznej: $x^2+ax+b = \left(x+\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}(4b-a^2)$. Drugi dodajnik jest tu liczbą dodatnią, ponieważ $a^2 - 4b < 0$. Wyłączamy tę liczbę przed nawias, to:

$$x^2+ax+b=\tfrac{1}{4}(4b-a^2)\left[\left(\frac{x+\frac{a}{2}}{\sqrt{\frac{4b-a^2}{4}}}\right)^2+1\right]=$$

$$=\tfrac{1}{4}(4b-a^2)\left[\left(\frac{2x+a}{\sqrt{4b-a^2}}\right)^2+1\right]$$

Używamy przedstawienia:

$$\frac{2x+a}{\sqrt{4b-a^2}}=t$$

Stąd:

$$dx=\tfrac{1}{2}\sqrt{4b-a^2}\,dt$$

a zatem:

$$\int\frac{dx}{x^2+ax+b}=\int\frac{\frac{1}{2}\sqrt{4b-a^2}\,dt}{\frac{1}{4}(4b-a^2)(t^2+1)}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{4b-a^2}}\operatorname{arctg}t+C=\frac{2}{\sqrt{4b-a^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+a}{\sqrt{4b-a^2}}+C$$

A więc:

$$(30)\quad\int\frac{Mx+N}{x^2+ax+b}dx=\frac{M}{2}\log(x^2+ax+b)+\frac{2N-aM}{\sqrt{4b-a^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+a}{\sqrt{4b-a^2}}+C$$

Taką postać ma całka, gdy wyróżnik $a^2-4b<0$.

d) Pozostaje jeszcze do omówienia całka z ułamka, którego mianownik zawiera jakąś wyższą potęgę trójmianu x^2+ax+b o wyróżniku ujemnym, a więc całka postaci:

$$I=\int\frac{Mx+N}{(x^2+ax+b)^n}dx$$

Używamy tu tego samego przedstawienia, co w poprzednim przypadku i otrzymamy po łatwych przeróbkach:

$$I=\left(\frac{4}{4b-a^2}\right)^{n-1}\int\frac{Mt+\frac{2N-aM}{\sqrt{4b-a^2}}}{(1+t^2)^n}dt$$

Oznaczmy krótko: $\dfrac{2N-aM}{\sqrt{4b-a^2}}=P$. Mamy obliczyć całkę:

$$\int\frac{Mt+P}{(1+t^2)^n}dt=\int\frac{Mt}{(1+t^2)^n}dt+P\int\frac{dt}{(1+t^2)^n}$$

Pierwszą z tych całek obliczamy bez trudności, używając przedstawienia $1+t^2=z$. Po wykonaniu prostych rachunków otrzymamy:

(w) $$\int \frac{Mt\,dt}{(1+t^2)^n} = \frac{M}{2(1-n)(1+t^2)^{n-1}} + C$$

Drugą zaś całkę obliczamy według wzoru redukcyjnego (27), wyprowadzonego w § 207 w przykładzie 16.

Zbierając razem wyniki, do których doszliśmy, całkując funkcje wymierne, widzimy, że całka każdej funkcji wymiernej da się wyrazić zapomocą samych funkcyj *elementarnych*, a mianowicie mogą wystąpić wielomiany (z całkowania części całkowitej $h(x)$), funkcje wymierne (z całek, omówionych pod b), pod d) z wzoru (w) i z wzoru redukcyjnego), logarytmy (z całek omówionych pod a) i pod c)) i funkcje arcus tangens (z całek omówionych pod c) i z wzoru redukcyjnego (27), gdy dojdziemy do $n = 1$).

Zasadniczą trudność może tu sprawić tylko rozłożenie mianownika $g(x)$ na czynniki, t. j. rozwiązanie równania $g(x) = 0$. Rozkład zaś na ułamki częściowe i całkowanie są czasem żmudne, lecz nie sprawiają żadnych zasadniczych trudności.

Przykłady:

3) Obliczyć:

$$\int \frac{x^3 + 2x + 5}{x^2 - 4x + 3}\,dx$$

Wydzielamy najpierw część całkowitą i otrzymujemy (por. str. 30).

$$\frac{x^3 + 2x + 5}{x^2 - 4x + 3} = x + 4 + \frac{15x - 7}{x^2 - 4x + 3}$$

Ponieważ zaś:

$$\frac{15x - 7}{x^2 - 4x + 3} = -\frac{4}{x-1} + \frac{19}{x-3}$$

(por. str. 35), przeto:

$$I = \tfrac{1}{2}x^2 + 4x - 4\log|x-1| + 19\log|x-3| + C$$

4) $$I = \int \frac{5x^4 - 5x + 1}{x^5 - 3x^4 + 3x^3 - x^2}\,dx$$

Na podstawie rozkładu, wykonanego w przykładzie 1) na str. 36, otrzymujemy:

$$I = \int \left[\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x-1} + \frac{13}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3}\right] dx$$

$$= 2\log|x| + \frac{1}{x} + 3\log|x-1| - \frac{13}{x-1} - \frac{1}{2(x-1)^2} + C$$

5) $$I = \int \frac{2x+2}{(x-1)(x^2+1)^2}\,dx$$

Na podstawie rozkładu, wykonanego w przykładzie 2) na str. 37, otrzymujemy:

$$I = \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx - \int \frac{2x\,dx}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \log|x-1| - \tfrac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx - \int \frac{dx}{x^2+1} - \int \frac{2x\,dx}{(x^2+1)^2}$$

$$I = \log|x-1| - \tfrac{1}{2}\log(1+x^2) - \operatorname{arctg} x + \frac{1}{1+x^2} + C$$

6) Obliczyć całkę:

$$I = \int \frac{dx}{x^4+1}$$

Należałoby rozwiązać równanie $x^4+1=0$. Można jednak uniknąć tych rachunków, rozkładając x^4+1 na dwa czynniki drugiego stopnia zapomocą następującego przekształcenia.

Dodajmy i odejmijmy $2x^2$, to:

$$x^4+1 = x^4+1+2x^2-2x^2 = (x^2+1)^2 - 2x^2 =$$
$$= (x^2+1+\sqrt{2}\,x)\cdot(x^2+1-\sqrt{2}\,x)$$

Rozkład na ułamki częściowe ma więc postać:

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}\,x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}\,x+1}$$

Metodą porównania spółczynników otrzymamy po wykonaniu prostych rachunków:

$$A = \tfrac{1}{4}\sqrt{2},\ B = \tfrac{1}{2},\ C = -\tfrac{1}{4}\sqrt{2},\ D = \tfrac{1}{2}$$

A więc:

$$I = \frac{\sqrt{2}}{4}\int \frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}\,x+1}\,dx - \frac{\sqrt{2}}{4}\int \frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}\,x+1}\,dx$$

Obydwie te całki oblicza się odrazu przy pomocy wzoru (30) i otrzymuje się:

$$I = \frac{1}{4\sqrt{2}}\log\frac{x^2+\sqrt{2}\,x+1}{x^2-\sqrt{2}\,x+1} +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{2}}[\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\,x+1) + \operatorname{arctg}(\sqrt{2}\,x-1)] + C$$

7) Dwa ciała, znajdujące się w roztworze w koncentracjach a i b, wytwarzają wskutek reakcji chemicznej (dwumolekularnej) trzecie ciało. Koncentracja tego nowego ciała w roztworze zmienia się w czasie od 0 do t od wartości początkowej 0 do wartości x. Szybkość tej reakcji wy-

raża się zapomocą pochodnej koncentracji x tego nowego ciała względem czasu t. Na tę szybkość wyprowadzono wzór:

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x)$$

przyczem k oznacza pewną liczbę stałą. Chcemy wyznaczyć x jako funkcję zmiennej t. W tym celu wyznaczamy najpierw funkcję odwrotną, t. j. t, jako funkcję zmiennej x. Ponieważ $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}}$, przeto:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{k(a-x)(b-x)}$$

a stąd:

$$t = \int \frac{dx}{k(a-x)(b-x)}$$

Rozkładamy funkcję podcałkową na ułamki częściowe:

$$\frac{1}{(a-x)(b-x)} = \frac{A}{a-x} + \frac{B}{b-x}$$

Stąd $1 = Ab - Ax + Ba - Bx$.

A więc: $Ab + Ba = 1$, $-A - B = 0$. Stąd $A = -B$, $-Bb + Ba = 1$ a zatem:

$$B = \frac{1}{a-b}, \quad A = \frac{1}{b-a}$$

Wobec tego (założywszy, że $x < a$ i $x < b$) mamy:

$$t = \frac{1}{k}\int \frac{\frac{1}{b-a}}{a-x}dx + \frac{1}{k}\int \frac{\frac{1}{a-b}}{b-x}dx =$$

$$= \frac{1}{k(a-b)}[\log(a-x) - \log(b-x)] + C$$

$$kt = \frac{1}{a-b}\log\frac{a-x}{b-x} + C'$$

Dla $t = 0$ jest $x = 0$, zatem:

$$0 = \frac{1}{a-b}\log\frac{a}{b} + C'$$

Stąd:

$$C' = \frac{-1}{a-b}\log\frac{a}{b}$$

a więc:

$$kt = \frac{1}{a-b}\log\frac{a-x}{b-x}\cdot\frac{b}{a} = \frac{1}{a-b}\log\frac{1-\frac{x}{a}}{1-\frac{x}{b}}$$

Odwracamy tę funkcję i otrzymujemy:

$$\frac{1-\frac{x}{a}}{1-\frac{x}{b}} = e^{(a-b)kt}$$

a stąd

$$x = \frac{ab(e^{(a-b)kt}-1)}{ae^{(a-b)kt}-b}$$

§ 209. Całkowanie niektórych funkcyj niewymiernych algebraicznych

W poprzednim paragrafie dowiedliśmy, że całka z każdej wymiernej funkcji składa się z skończonej liczby funkcyj elementarnych. Funkcje niewymierne tylko w wyjątkowych wypadkach posiadają całki złożone z skończonej liczby funkcyj elementarnych. Odnosi się to nietylko do funkcyj niewymiernych, przestępnych, lecz także do funkcyj algebraicznych. Omówimy tu kilka takich specjalnych prostych przypadków, w których całki funkcyj niewymiernych algebraicznych dadzą się wyrazić zapomocą funkcyj elementarnych.

A. Pierwszym takim typem jest całka z funkcji *wymiernej* zmiennych: $x^{\frac{a}{b}}, x^{\frac{c}{d}}, \ldots x^{\frac{p}{q}}$, które są funkcjami niewymiernemi Oznaczmy funkcję wymierną ilukolwiek zmiennych literą R.

Chodzi więc o obliczenie całki

$$I = \int R(x^{\frac{a}{b}}, x^{\frac{c}{d}}, \ldots x^{\frac{p}{q}})\,dx \tag{31}$$

Znajdujemy wspólny mianownik m ułamków $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \ldots \frac{p}{q}$ i podstawiamy:

$$x^{\frac{1}{m}} = t \quad \text{czyli} \quad x = t^m \tag{31a}$$

Jeżeli

$$m = b \cdot a' = d \cdot c' = \ldots = q \cdot p'$$

to

$$x^{\frac{a}{b}} = x^{\frac{aa'}{m}} = t^{aa'}, \quad x^{\frac{c}{d}} = x^{\frac{cc'}{m}} = t^{cc'} \ldots x^{\frac{p}{q}} = t^{pp'}$$

Ponieważ ponadto:

$$dx = mt^{m-1}\,dt$$

to:

$$I = \int R(t^{aa'}, t^{bb'}, \ldots t^{pp'})\,mt^{m-1}\,dt$$

Teraz już funkcja podcałkowa jest funkcją *wymierną* jednej zmiennej i (wszystkie niewymierności, wynikające z ułamkowych wykładników, zostały usunięte).

Tę funkcję wymierną całkujemy metodami, omówionemi w poprzednim paragrafie.

Przykład.

Obliczyć całkę:

$$I = \int \frac{\sqrt[4]{x^3} - 7\sqrt[3]{x^2} + 12\sqrt{x}}{x\left(\sqrt[3]{x} - \sqrt[6]{x}\right)}\,dx$$

Występują tu następujące ułamkowe wykładniki: $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$.

Wspólnym mianownikiem jest 12, podstawiamy więc:

$$x = t^{12}, \quad dx = 12\,t^{11}\,dt$$

i otrzymujemy:

$$I = \int \frac{t^9 - 7\,t^8 + 12\,t^6}{t^{12}(t^4 - t^2)}\,12\,t^{11}\,dt = 12\int \frac{t^6 - 7\,t^5 + 12\,t^3}{t^2 - 1}\,dt$$

Pod całką mamy już teraz funkcję wymierną. Wydzielamy część całkowitą i otrzymujemy:

$$t^4 - 7\,t^3 + t^2 + 5\,t + 1 + \frac{5\,t + 1}{t^2 - 1}$$

Pozostawiamy czytelnikowi wykonanie dalszych rachunków.

Ostateczny wynik jest:

$$I = \tfrac{12}{5}\sqrt[12]{x^5} - 21\sqrt[3]{x} + 4\sqrt[4]{x} + 30\sqrt[6]{x} + 12\sqrt[12]{x} + 2\log\left(\sqrt[12]{x} + 1\right) + \\ + 3\log\left|\sqrt[12]{x} - 1\right| + C$$

B. W podobny sposób postępujemy z następującą, ogólniejszą całką:

$$I = \int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+g}\right)^{\frac{p}{q}}, \left(\frac{ax+b}{cx+g}\right)^{\frac{r}{s}}, \ldots\right)dx \tag{32}$$

Czynimy przytem założenie, że nie zachodzi proporcja $a : c = b : g$. Tutaj R oznacza funkcję wymierną zmiennych $x, y = \left(\frac{ax+b}{cx+g}\right)^{\frac{p}{q}}, \ldots$ Aby ją zamienić na funkcję wymierną jednej zmiennej, sprowadzamy ułamki $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}, \ldots$ do wspólnego mianownika m. Niechaj $m = q \cdot p' = s \cdot r' = \ldots$

Używamy podstawienia:

$$\left(\frac{ax+b}{cx+g}\right)^{\frac{1}{m}} = t \tag{32 a}$$

czyli:

$$\frac{ax+b}{cx+g}=t^m$$

a więc:

$$x=\frac{gt^m-b}{a-ct^m}$$

Wtedy.

$$\left(\frac{ax+b}{cx+g}\right)^{\frac{p}{q}}=\left(\frac{ax+b}{cx+g}\right)^{\frac{pp'}{m}}=t^{pp'}$$

Podobnie:

$$\left(\frac{ax+b}{cx+g}\right)^{\frac{r}{s}}=t^{rr'}$$

Potrzebne jest jeszcze:

$$dx=\frac{(a-ct^m)mgt^{m-1}+(gt^m-b)cmt^{m-1}}{(a-ct^m)^2}dt=\frac{ag-bc}{(a-ct^m)^2}mt^{m-1}dt$$

Jeżeli te wszystkie wielkości wprowadzimy pod całkę, to otrzymamy funkcję wymierną jednej zmiennej t.

Sprowadziliśmy więc to zagadnienie do znanych całek.

Przykładu. 1) Obliczyć:

$$I=\int\sqrt{\frac{x-3}{x+3}}dx$$

zakładając, że $x>3$.

Podstawiamy $\sqrt{\frac{x-3}{x+3}}=t$. Stąd $x=3\frac{1+t^2}{1-t^2}$

$$dx=3\cdot\frac{(1-t^2)2t+(1+t^2)2t}{(1-t^2)^2}=\frac{12t}{(1-t^2)^2}$$

Wobec tego:

$$I=\int t\frac{12t}{(1-t^2)^2}dt$$

Funkcja podcałkowa jest już wymierną funkcją zmiennej t. Rozkładamy ją znaną metodą na ułamki częściowe i otrzymujemy:

$$\frac{12t^2}{(1-t^2)^2}=\frac{3}{t-1}+\frac{3}{(t-1)^2}-\frac{3}{t+1}+\frac{3}{(t+1)^2}$$

a więc:

$$I=3\log|t-1|-3\log|t+1|-\frac{3}{t-1}-\frac{3}{t+1}+C=$$

$$=3\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+\frac{6t}{1-t^2}+C$$

Powróciwszy do zmiennej x, otrzymamy po uporządkowaniu:

$$I = 3 \log \frac{|\sqrt{x^3 - 9} - x|}{3} + \sqrt{x^3 - 9} + C$$

2) Obliczyć całkę:

$$I = \int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}\, dx = \int \frac{x^3}{(x-1)^{\frac{1}{2}}}\, dx$$

Podstawiamy: $(x-1)^{\frac{1}{2}} = t$, więc $x = t^2 + 1$, $dx = 2t\,dt$, zatem:

$$I = \int \frac{(t^2+1)^3}{t} 2t\,dt = 2\int (t^6 + 3t^4 + 3t^2 + 1)\,dt$$

$$I = 2\left(\tfrac{1}{7}t^7 + \tfrac{3}{5}t^5 + t^3 + t\right) + C$$

$$I = 2\left(\tfrac{1}{7}\sqrt{(x-1)^7} + \tfrac{3}{5}\sqrt{(x-1)^5} + \sqrt{(x-1)^3} + \sqrt{x-1}\right) + C$$

Uwaga. Do tego typu należą niektóre z t. zw. całek *dwumiennych*, t. j. z całek postaci:

$$D = \int x^u (a + bx)^w\, dx$$

a mianowicie wtedy, gdy albo u albo w jest liczbą całkowitą (w tym drugim przypadku sprowadza się tę całkę do typu B przez podstawienie $a + bx = z$). Także gdy suma $u + w$ jest liczbą całkowitą, można tę całkę sprowadzić do typu B, pisząc ją w postaci:

$$D = \int x^{u+w} \left(\frac{a + bx}{x}\right)^w dx$$

Udowodniono [1]) jednakże, że tylko w tych trzech przypadkach całka dwumienna jest funkcją elementarną. We wszystkich pozostałych przypadkach (np. dla $u = \frac{1}{2}, w = \frac{1}{3}$) otrzymujemy z całek dwumiennych nowe przestępne funkcje, nie należące do funkcyj elementarnych.

C. Bardzo często występują w zastosowaniach całki postaci:

$$\text{(C)} \qquad \int R(x, y)\, dx = \int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\, dx$$

przyczem $R(x, y)$ jest funkcją wymierną dwóch zmiennych x i y; natomiast $R(x, y)$, uważana jako funkcja złożona jednej zmiennej x, jest najczęściej funkcją niewymierną. Zakładamy przytem, że funkcja pod pierwiastkiem jest nieujemna, a więc drugi pierwiastek z tej funkcji ma wartości rzeczywiste. Okażemy, że całki tej postaci można zawsze przez odpowiednio dobrane podstawienia sprowadzić do całek z funkcyj wymiernych jednej zmiennej, a więc są one w każdym przypadku funkcjami elementarnemi. Rozróżnimy tu 3 przypadki, zależnie od znaków spółczynników a i c trójmianu $ax^2 + bx + c$, a mianowicie: 1° $a > 0$, 2° $c \geqq 0$,

[1]) Dowód podał Czebyszew w r. 1853 w 18-ym tomie Journal de Liouville.

3° $a<0$ i równocześnie $c<0$. Przypadkiem $a=0$ nie trzeba się tu zajmować, wtedy bowiem mielibyśmy do czynienia z całką:

$$\int R(x, \sqrt{bx+c})\,dx$$

należącą do omówionego poprzednio typu B (zapomocą podstawienia $bx+c=t^2$ sprowadzamy ją do całki z funkcji wymiernej). W całym rachunku chcemy operować tylko liczbami *rzeczywistemi*.

1°. Jeżeli $a>0$, to używamy podstawienia:

(33) $$\boxed{\sqrt{ax^2+bx+c}=t+x\sqrt{a}}$$

Jest ono tak dobrane, że po podniesieniu obu stron do kwadratu odpadną wyrazy, zawierające x^2 i pozostanie równanie pierwszego stopnia na wyznaczenie x jako funkcji nowej zmiennej t. I tak;

$$ax^2+bx+c=t^2+2xt\sqrt{a}+ax^2$$

a więc:

$$bx+c=t^2+2tx\sqrt{a}$$

a stąd:

$$x=\frac{t^2-c}{b-2t\sqrt{a}}$$

Wobec tego:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t+\sqrt{a}\,\frac{t^2-c}{b-2t\sqrt{a}}$$

$$dx=\frac{2bt-2t^2\sqrt{a}-2c\sqrt{a}}{(b-2t\sqrt{a})^2}\,dt$$

Wprowadzając te wyrażenia w całkę (C), otrzymamy funkcję *wymierną* zmiennej t.

Zamiast podstawienia (33) można także użyć podstawienia:

(33 a) $$\sqrt{ax^2+bx+c}=t-x\sqrt{a}$$

Przykłady.

Obliczyć całkę:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{k+x^2}}$$

Aby wyrażenie pod pierwiastkiem było dodatnie, musi być $|k|<x^2$, w razie gdy k jest liczbą ujemną. Ponieważ $a=1>0$, przeto możemy użyć podstawienia (33 a) i otrzymamy:

$$\sqrt{k+x^2}=t-x$$
$$k+x^2=t^2-2tx+x^2$$

a stąd:

$$x = \frac{t^2 - k}{2t}, \quad \sqrt{k + x^2} = t - \frac{t^2 - k}{2t} = \frac{t^2 + k}{2t}$$

$$dx = \frac{t^2 + k}{2t^2}\, dt$$

Zatem:

$$I = \int \frac{2t}{t^2 + k} \cdot \frac{t^2 + k}{2t^2}\, dt = \int \frac{dt}{t} = \log|t| + C$$

czyli:

(34) $$\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{k + x^2}} = \log|x + \sqrt{k + x^2}| + C}$$

Do tej całki sprowadzamy z łatwością całkę:

$$I_1 = \int \sqrt{k + x^2}\, dx$$

Posługujemy się w tym celu całkowaniem „per partes", kładąc:

$$\sqrt{k + x^2} = u, \quad dx = dv$$

$$du = \frac{x}{\sqrt{k + x^2}}\, dx, \quad v = x$$

Zatem:

$$I_1 = x\sqrt{k + x^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{k + x^2}}\, dx = x\sqrt{k + x^2} - \int \frac{x^2 + k - k}{\sqrt{k + x^2}}\, dx$$

$$I_1 = x\sqrt{k + x^2} - \int \sqrt{k + x^2}\, dx + k \int \frac{dx}{\sqrt{k + x^2}}$$

$$I_1 = x\sqrt{k + x^2} - I_1 + k \log|x + \sqrt{k + x^2}| + C_1$$

$$2 I_1 = x\sqrt{k + x^2} + k \log|x + \sqrt{k + x^2}| + C_1$$

a więc ostatecznie:

(35) $$\boxed{I_1 = \int \sqrt{k + x^2}\, dx = \tfrac{1}{2}\left(x\sqrt{k + x^2} + k \log|x + \sqrt{k + x^2}|\right) + C}$$

(Porównaj ten wzór z wzorem 25a na str. 25!).

Do obliczenia tej całki możnaby oczywiście dojść także, używając odrazu podstawienia $\sqrt{k + x^2} = t - x$, lecz droga, której tu użyto, prowadzi szybciej do celu.

Uwaga. Obierając we wzorze (34) $k = 1$, otrzymujemy:

(34 a) $$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} = \log(x + \sqrt{1 + x^2}) + C$$

(znak bezwzględnej wartości można opuścić, ponieważ zawsze jest $x+\sqrt{1+x^2}>0$). Wiadomo (por. tom I, str. 290—291), że funkcja $\log(x+\sqrt{1+x^2})$ jest funkcją odwrotną względem funkcji hiperbolicznej $x=\sin\text{hyp}\,y$; oznaczamy ją symbolem $y=\text{ar}\sin\text{hyp}\,x$. Zatem:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\text{ar}\sin\text{hyp}\,x+C \tag{34 b}$$

Pisząc ten wzór w tej postaci, spostrzegamy analogję z znanym wzorem (12):

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C$$

Podobnie kładąc $k=-1$, otrzymujemy wzory:

$$\left.\begin{aligned}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}&=\log|x+\sqrt{x^2-1}|+C=\text{ar}\cos\text{hyp}\,x+C\quad(\text{dla } x>1)\\&=\text{ar}\cos\text{hyp}(-x)+C\,(\text{dla } x<-1)\end{aligned}\right\} \tag{34 c}$$

przyczem $y=\text{ar}\cos\text{hyp}\,x$ jest funkcją odwrotną względem funkcji hiperbolicznej $x=\cos\text{hyp}\,y$.

2°. Jeżeli $c\gtrless 0$, to używamy podstawienia:

$$\boxed{\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{c}+tx} \tag{36}$$

przez co osiągamy, że po podniesieniu do kwadratu odpada wolny wyraz po obu stronach. I tak:

$$\begin{aligned}ax^2+bx+c&=c+2tx\sqrt{c}+t^2x^2\\ax^2+bx&=2tx\sqrt{c}+t^2x^2\\ax+b&=2t\sqrt{c}+t^2x\\x&=\frac{2t\sqrt{c}-b}{a-t^2}\\\sqrt{ax^2+bx+c}&=\sqrt{c}+t\cdot\frac{2t\sqrt{c}-b}{a-t^2}\end{aligned}$$

Zatem zarówno x, jak i $\sqrt{ax^2+bx+c}$, wyrażają się *wymiernie* za pomocą nowej zmiennej t, wobec czego i całka (C) zamieni się na całkę z funkcji wymiernej.

Podstawienia tego używa się zwłaszcza wtedy, gdy a jest liczbą ujemną.

Przykład.

W teorji ruchu wahadłowego występuje całka:

$$I=\int\frac{x^n\,dx}{\sqrt{bx-x^2}}$$

Spółczynnik a ma tu wartość -1, a więc nie można użyć podstawienia (33), o ile chcemy operować tylko liczbami rzeczywistemi; natomiast $c = 0$, a więc może być użyte podstawienie (36). Podstawiamy więc.

$$\sqrt{bx - x^2} = \sqrt{0} + tx$$

Stąd:

$$bx - x^2 = t^2 x^2$$

a więc:

$$x = \frac{b}{1 + t^2}, \quad dx = \frac{-2bt}{(1 + t^2)^2} dt, \quad \sqrt{bx - x^2} = \frac{bt}{1 + t^2}$$

Zatem:

$$I = -2b^m \int \frac{dt}{(1 + t^2)^{m+1}}$$

Sprowadziliśmy w ten sposób badaną całkę do całki z funkcji wymiernej, a mianowicie do całki, omówionej dokładnie już w § 207 (przykład 16), którą się oblicza przy pomocy wzoru redukcyjnego.

3° Jeżeli $a < 0$ i $c < 0$ a wyrażenie $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ ma być rzeczywiste, to równanie:

(r) $$ax^2 + bx + c = 0$$

musi posiadać pierwiastki rzeczywiste. Albowiem:

$$y = ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$$

Ponieważ $a < 0$, przeto i wyrażenie, w klamrze zawarte, musi mieć wartość ujemną, a to może zachodzić tylko wtedy, gdy $4ac - b^2 < 0$ czyli $b^2 - 4ac > 0$; wiadomo zaś, że wtedy równanie (r) ma pierwiastki rzeczywiste. Oznaczmy te pierwiastki literami α i β. Trójmian $ax^2 + bx + c$ można więc przedstawić w postaci $a(x - \alpha)(x - \beta)$, a więc:

$$y = \sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a(x - \alpha)(x - \beta)}$$

Załóżmy, że $x > \alpha$. Wyłączając przed pierwiastek $x - \alpha$, otrzymujemy:

$$y = (x - \alpha)\sqrt{\frac{a(x - \beta)}{x - \alpha}}$$

a więc całka (C) należy wtedy do typu B.

Przez podstawienie:

(37) $$\boxed{\sqrt{\frac{a(x - \beta)}{x - \alpha}} = t}$$

sprowadzamy ją zatem do całki z funkcji wymiernej nowej zmiennej t, jak to omówiono w przypadku B.

Do tego samego wniosku dochodzimy, zakładając $x < \alpha$, ponieważ wtedy:

$$y = (\alpha - x)\sqrt{\frac{a(x-\beta)}{x-\alpha}}$$

Podstawienia (37) można użyć zawsze, gdy równanie (r) posiada pierwiastki rzeczywiste, a więc także wtedy, gdy $c > 0$ lub $c > 0$.

Przykład.

Obliczyć całkę:

$$\int \sqrt{-x^2+5x-6}\,dx$$

Z równania $-x^2+5x-6=0$ otrzymujemy pierwiastki:

$$\alpha = 2, \quad \beta = 3$$

a więc:

$$-x^2+5x-6 = -(x-2)(x-3) = (x-2)(3-x)$$

Załóżmy, że $2 < x < 3$, to iloczyn ten jest stale dodatni a zatem pierwiastek, występujący pod całką, jest rzeczywisty. Wtedy:

$$\sqrt{-x^2+5x-6} = \sqrt{(x-2)(3-x)} = (x-2)\sqrt{\frac{3-x}{x-2}}$$

Używamy podstawienia:

$$\sqrt{\frac{3-x}{x-2}} = t$$

Wtedy:

$$\frac{3-x}{x-2} = t^2, \quad x = \frac{3+2t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{-2t}{(1+t^2)^2}\,dt$$

$$\sqrt{-x^2+5x-6} = \left(\frac{3+2t^2}{1+t^2} - 2\right)t = \frac{t}{1+t^2}$$

A więc:

$$\int \sqrt{-x^2+5x-6}\,dx = \int \frac{-2t^2}{(1+t^2)^2}\,dt$$

Sprowadziliśmy więc to zagadnienie do całkowania funkcji wymiernej. Pozostawia się czytelnikowi dalsze wykonanie rachunków (rozkład na ułamki częściowe, zastosowanie wzoru redukcyjnego 27 z § 207).

Wynik:

$$\int \sqrt{-x^2+5x-6}\,dx = -\tfrac{1}{4}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3-x}{x-2}} + \frac{2x-5}{4}\sqrt{-x^2+5x-6} + C$$

Podstawienia, zawarte we wzorach (33), (36) i (37), służące do uwymiernienia funkcji podcałkowej w całce typu C, nazywamy **podstawieniami Eulera.**

Często używa się dla takich całek także innych podstawień, a mianowicie podstawień *trygonometrycznych*, które zamieniają funkcję podcałkową nie na funkcję wymierną lecz na funkcję przestępną, jednakże łatwą do całkowania. Zanim się użyje takiego podstawienia należy sprowadzić trójmian, znajdujący się pod pierwiastkiem, do formy kanonicznej, to znaczy przedstawić go jako sumę lub różnicę dwóch kwadratów. Ponieważ zakładamy, że pierwiastek z tego trójmianu jest rzeczywisty, przeto mogą tu wystąpić tylko trzy następujące formy kanoniczne:

$$x^2 + k^2, \quad x^2 - k^2, \quad k^2 - x^2$$

natomiast nie może wystąpić forma $-x^2 - k^2$.

Sprowadzamy więc całkę (C) do jednej z następujących całek:

$$\text{a)} \int R_1(x, \sqrt{k^2 - x^2})\,dx, \quad \text{b)} \int R_1(x, \sqrt{x^2 + k^2})\,dx,$$

$$\text{c)} \int R_1(x, \sqrt{x^2 - k^2})\,dx$$

a) W pierwszym przypadku używamy podstawienia:

(38) $$x = k \sin t$$

zakładając, że k jest liczbą dodatnią.

Wtedy:

$$\sqrt{k^2 - x^2} = \sqrt{k^2 - k^2 \sin^2 t} = k\sqrt{1 - \sin^2 t} = k \cos t$$

$$dx = k \cos t\, dt$$

i otrzymujemy całkę:

$$\int R_1(k \sin t, k \cos t)\, k \cos t\, dt$$

Taką zaś całkę, zbudowaną w sposób wymierny z funkcyj trygonometrycznych, łatwo jest zwykle całkować, jak to zobaczymy dokładnie w następnym paragrafie. Można także użyć podstawienia: $x = k \cos$.

b) Także w drugim przypadku używamy takiego podstawienia, by zniknął drugi pierwiastek. Tu już podstawienie (38) nie prowadzi do celu, natomiast następujące podstawienie okazuje się odpowiedniem:

(39) $$x = k \operatorname{tg} t$$

Wtedy bowiem:

$$\sqrt{x^2 + k^2} = \sqrt{k^2 \operatorname{tg}^2 t + k^2} = k\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t} = k \sec t = \frac{k}{\cos t}$$

$$dx = \frac{k\,dt}{\cos^2 t}$$

Całka b) zamieni się więc na:

$$\int R_1\left(\frac{k \sin t}{\cos t}, \frac{k}{\cos t}\right) \cdot \frac{k}{\cos^2 t}\, dt$$

a zatem jest znowu zbudowana w sposób wymierny z funkcyj trygonometrycznych $\sin t$, $\cos t$.

c) Wreszcie w trzecim przypadku odpowiedniem podstawieniem jest:

(40) $$x = k \sec t$$

Istotnie wtedy:

$$\sqrt{x^2 - k^2} = \sqrt{k^2 \sec^2 t - k^2} = k\sqrt{\sec^2 t - 1} = k \operatorname{tg} t$$

$$dx = \frac{k \sin t}{\cos^2 t}\, dt$$

a więc z całki c) otrzymujemy:

$$\int R_1\left(\frac{k}{\cos t}, \frac{k \sin t}{\cos t}\right) \cdot \frac{k \sin t}{\cos^2 t}\, dt$$

a zatem znowu funkcję, złożoną w sposób wymierny z funkcyj $\sin t$ i $\cos t$.

§ 210. Całkowanie funkcyj, złożonych w sposób wymierny z funkcyj trygonometrycznych.

Zajmiemy się tu całkowaniem takich funkcyj wymiernych dwóch zmiennych: $R(y, z)$, w których $y = \sin x$, $z = \cos x$. Są to więc funkcje złożone jednej zmiennej x:

$$R(\sin x, \cos x)$$

Wykażemy, że całkę z każdej takiej funkcji można przekształcić na całkę z funkcji wymiernej nowej zmiennej t, że zatem każda taka całka jest funkcją elementarną. W tym celu używamy w całce:

$$I = \int R(\sin x, \cos x)\, dx$$

podstawienia:

(41) $$\boxed{\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t}$$

Wiadomo bowiem z trygonometrji, że wszystkie funkcje trygonometryczne są wymiernemi funkcjami tej nowej zmiennej t, a mianowicie:

$$\sin x = \frac{2t}{1 + t^2}, \qquad \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

Potrzebne jest jeszcze dx. Otóż:

$$x = 2 \operatorname{arc\,tg} t$$

a wobec tego:

$$dx = \frac{2\, dt}{1 + t^2}$$

Po wykonaniu tego podstawienia całka I przyjmuje postać:

$$I = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2}\, dt$$

a więc funkcja podcałkowa nie zawiera żadnych pierwiastków ani funkcyj przestępnych, lecz jest jakąś wymierną funkcją $R_1(t)$ jednej zmiennej t:

$$I = \int R_1(t)\, dt$$

Możemy zatem wykonać całkowanie metodami, wyłożonemi w § 208. Jako wynik otrzymamy zawsze elementarną funkcję zmiennej t, a więc elementarną (zwykle złożoną) funkcję zmiennej x.

Przykłady.

1) Obliczyć całkę:

$$I = \int \frac{dx}{5 + 3\cos x}$$

Używamy podstawienia (41) i otrzymujemy:

$$I = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}\, dt}{5 + 3\frac{1-t^2}{1+t^2}} = 2\int \frac{dt}{5 + 5t^2 + 3 - 3t^2} = 2\int \frac{dt}{8 + 2t^2} = \int \frac{dt}{4 + t^2}$$

$$I = \tfrac{1}{4} \int \frac{dt}{1 + \left(\frac{t}{2}\right)^2}$$

Kładziemy $\frac{t}{2} = u$, $dt = 2\,du$ i otrzymujemy:

$$I = \tfrac{1}{2} \int \frac{du}{1+u^2} = \tfrac{1}{2} \operatorname{arctg} u + C = \tfrac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + C$$

czyli:

$$I = \tfrac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\tfrac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) + C$$

2) Obliczyć całkę:

$$I = \int \frac{\cos^2 x\, dx}{\sin^3 x}$$

Podstawienie (41) prowadzi do następującej całki:

$$I = \int \frac{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 \cdot \frac{2\,dt}{1+t^2}}{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^3} = \tfrac{1}{4} \int \frac{(1-t^2)^2\, dt}{t^3} = \tfrac{1}{4} \int \left(\frac{1}{t^3} - \frac{2}{t} + t\right) dt$$

$$I = \tfrac{1}{4}\left(\frac{t^{-2}}{-2} - 2\log|t| + \frac{t^2}{2}\right) + C$$

czyli:

$$I = \tfrac{1}{4}\left[\frac{1}{2\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} - 2\log\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right] + C$$

3) Całkę

$$I = \int \sin^5 x \cos^2 x \, dx$$

chcemy sprowadzić do całki z funkcji wymiernej Używając podstawienia (41), otrzymujemy:

$$I = \int \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 \cdot \frac{2\,dt}{1+t^2} = 64 \int \frac{t^5 (1-t^2)^2}{(1+t^2)^8} \, dt$$

Uzyskaliśmy wprawdzie wymierną funkcję podcałkową, lecz dalszy rachunek, prowadzący do obliczenia tej całki, byłby bardzo uciążliwy. Przy rozkładzie na ułamki częściowe otrzymalibyśmy bowiem 8 ułamków postaci: $\frac{A_1 t + B_1}{1+t^2}$, $\frac{A_2 t + B_2}{(1+t^2)^2}$ ... a więc trzebaby rozwiązywać 16 równań celem wyznaczenia spółczynników A_1, B_1, A_2, B_2, ...

Zobaczymy jednak (na str. 56), że całkę tę można obliczyć w sposób o wiele prostszy, używając innego podstawienia.

4) Sprowadzić do całki z funkcji wymiernej całkę:

$$I = \int \frac{dx}{a \sin^2 x + 2b \sin x \cos x + c \cos^2 x}$$

Przy pomocy podstawienia (41) uzyskujemy:

$$I = \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{a\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 + 2b\frac{(1-t^2)\,2t}{(1+t^2)^2} + c\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2} =$$

$$= 2 \int \frac{(1+t^2)\,dt}{4at^2 + 4bt(1-t^2) + c(1-t^2)^2}$$

Prostszą formę jednakże uzyskujemy, używając tu podstawienia:

$$\operatorname{tg} x = t$$

Po podzieleniu licznika i mianownika przez $\cos^2 x$ otrzymujemy bowiem:

$$I = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{a \operatorname{tg}^2 x + 2b \operatorname{tg} x + c} = \int \frac{dt}{at^2 + 2bt + c}$$

a do tej całki można zastosować metodę, podaną w przykładzie 10b na str. 23.

Jakkolwiek więc podstawienie $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ prowadzi do celu zawsze, gdy funkcja podcałkowa jest zbudowana w sposób wymierny z funkcyj trygonometrycznych, to jednak w wielu wypadkach praktyczniejsze są inne podstawienia i inne metody całkowania. Tak się ma rzecz np. przy obliczaniu całek postaci:

(T) $$I = \int \sin^s x \cos^k x \, dx$$

które występują bardzo często w zastosowaniach. Wykładniki s, k mogą tu być dowolnemi liczbami całkowitemi (dodatniemi, ujemnemi lub zerami). Rozróżniamy tu kilka przypadków

a) Jeżeli któryś z wykładników jest równy 0, to otrzymujemy całkę: $\int \sin^s x \, dx$ lub $\int \cos^k x \, dx$, a do tych całek stosujemy wzory redukcyjne, omówione w §§ 206 i 207 (wzory 17, 17a, 20 i 20a na str 14, 15, 21 i 22).

b) Jeżeli s jest liczbą *dodatnią*, *nieparzystą*: $s = 2n + 1$, to przedstawiamy całkę w postaci:

$$I = \int \sin^{2n} x \cos^k x \sin x \, dx = -\int (1 - \cos^2 x)^n \cos^k x \, d(\cos x).$$

Widoczne jest, że podstawienie

$$\cos x = t$$

sprowadza funkcję podcałkową do funkcji *wymiernej*:

$$I = -\int (1 - t^2)^n t^k \, dt$$

Przykład.

Zastosujmy to podstawienie do całki

$$I = \int \sin^5 x \cos^2 x \, dx$$

(omówionej na str. 55, przykł. 3). Otrzymamy:

$$I = -\int (1 - \cos^2 x)^2 \cos^2 x \, d(\cos x) = -\int (1 - t^2)^2 t^2 \, dt =$$

$$= -\int (t^2 - 2t^4 + t^6) \, dt$$

Zatem:

$$I = -\tfrac{1}{3} t^3 + \tfrac{2}{5} t^5 - \tfrac{1}{7} t^7 + C = -\tfrac{1}{3} \cos^3 x + \tfrac{2}{5} \cos^5 x - \tfrac{1}{7} \cos^7 x + C$$

Widzimy, o ile szybciej prowadzi to podstawienie do celu aniżeli ogólne podstawienie $tg \frac{x}{2} = t$.

c) Jeżeli k jest liczbą *dodatnią*, *nieparzystą*: $k = 2n + 1$, to używamy podstawienia:

$$\sin x = t$$

Całkę I możemy bowiem wtedy przedstawić w postaci:

$$I = \int \sin^s x (1 - \sin^2 x)^n \cos x \, dx = \int \sin^s x (1 - \sin^2 x)^n \, d(\sin x)$$

A więc:

$$I = \int t^s (1 - t^2)^n \, dt$$

Przykład.

$$I = \int \operatorname{ctg}^5 x \, dx = \int \frac{\cos^5 x}{\sin^5 x} dx = \int \frac{(1 - \sin^2 x)^2}{\sin^5 x} d(\sin x)$$

Dla $\sin x = t$ otrzymujemy:

$$I = \int \frac{(1 - t^2)^2}{t^5} dt = \int \left(\frac{1}{t^5} - \frac{2}{t^3} + \frac{1}{t}\right) dt = -\tfrac{1}{4} t^{-4} + t^{-2} + \log|t| + C$$

A więc:

$$I = -\frac{1}{4 \sin^4 x} + \frac{1}{\sin^2 x} + \log|\sin x| + C$$

d) Jeżeli któraś z liczb s, k jest *dodatnią*, *parzystą*, to sprowadzamy całkę do przypadku a), zastępując dla $s = 2n$ funkcję $\sin^2 x$ przez $1 - \cos^2 x$, a w przypadku $k = 2n$ funkcję $\cos^2 x$ przez $1 - \sin^2 x$.

Przykład.

$$I = \int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} dx = \int \frac{(1 - \sin^2 x)^2}{\sin^3 x} dx =$$

$$= \int \frac{dx}{\sin^3 x} - 2 \int \frac{dx}{\sin x} + \int \sin x \, dx$$

Pierwszą z otrzymanych całek obliczamy przy pomocy wzoru redukcyjnego (17 a):

$$S_{-3} = \int \frac{dx}{\sin^3 x} = \frac{\cos x \sin^{-2} x}{-2} + \tfrac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin x} = -\frac{\cos x}{2 \sin^2 x} + \tfrac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin x}$$

A więc:

$$I = -\frac{\cos x}{2 \sin^2 x} - \tfrac{3}{2} \int \frac{dx}{\sin x} + \int \sin x \, dx =$$

$$= -\frac{\cos x}{2 \sin^2 x} - \tfrac{3}{2} \log \left| tg \frac{x}{2} \right| - \cos x + C$$

(Użyliśmy tu wzoru 23 na str. 24 do obliczenia $\int \frac{dx}{\sin x}$).

e) Jeżeli obydwie liczby s i k są *ujemne*, to albo $s + k = -2n$, albo $s + k = -2n - 1$. Wtedy mnożymy licznik przez: $1^n = (\sin^2 x + \cos^2 x)^n$ i rozkładamy daną całkę na sumę kilku całek, należących do poprzednich typów.

Przykład.

Obliczyć:

$$I = \int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x}$$

Tu $s + k = -4 - 3 = -7 = -2 \cdot 3 - 1$ a więc $n = 3$. Piszemy zatem w liczniku zamiast dx iloczyn $(\sin^2 x + \cos^2 x)^3\, dx$ i otrzymujemy:

$$I = \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^3\, dx}{\sin^4 x \cos^2 x} =$$

$$= \int \frac{\sin^6 x + 3\sin^4 x \cos^2 x + 3\sin^2 x \cos^4 x + \cos^6 x}{\sin^4 x \cos^2 x}\, dx$$

czyli:

$$I = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\, dx + 3\int \frac{dx}{\cos x} + 3\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\, dx + \int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}\, dx$$

Z tych całek pierwsza należy do typu d) drugą obliczamy posługując się wzorem 24 na str. 25, a trzecia i czwarta należą do typu c). Po wykonaniu prostych rachunków otrzymamy:

$$I = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{5}{2}\log\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| - \frac{2}{\sin x} - \frac{1}{3\sin^3 x} + C$$

Uwagi.

1) Jeżeli $s + k = -2n$ (przyczem jedna z tych liczb może być dodatnia), to bardzo praktyczne jest podstawienie:

$$\operatorname{tg} x = t$$

Przykład.

$$I = \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x} = \int \frac{dx}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \cos^6 x} =$$

$$= \int \frac{\sec^4 x}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 x)^2}{\operatorname{tg}^2 x}\, d(\operatorname{tg} x)$$

$$I = \int \frac{(1 + t^2)^2}{t^2}\, dt = \int \left(\frac{1}{t^2} + 2 + t^2\right) dt = -\frac{1}{t} + 2t + \frac{1}{3}t^3 + C$$

$$I = -\operatorname{ctg} x + 2\operatorname{tg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + C$$

2) Jeżeli suma wykładników jest liczbą ujemną nieparzystą: $s + k = -2n - 1$, to korzystnie jest użyć podstawienia:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$$

jeżeli w mianowniku jest tylko potęga funkcji $\sin x$ (t. j. $s < 0$, $k \geqq 0$ jak w przykładzie 2 na str. 54), a podstawienia:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\pi - x) = t$$

jeżeli w mianowniku jest tylko potęga funkcji $\cos x$ (t. j. jeżeli $k < 0$, $s \geqq 0$).

Przykład.

Obliczyć:

$$I = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}\, dx$$

Kładziemy $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi - x) = t$, to $\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} = \operatorname{arctgt}$, $x = \frac{1}{2}\pi - 2\operatorname{arctgt}$,

$$dx = \frac{-2\,dt}{1+t^2},\quad \sin(\tfrac{1}{2}\pi - x) = \frac{2t}{1+t^2} = \cos x,\quad \cos(\tfrac{1}{2}\pi - x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} = \sin x$$

Zatem:

$$I = -2\int \frac{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2}{\frac{8t^3}{(1+t^2)^3}} \frac{dt}{1+t^2} = -\frac{1}{4}\int \frac{(1-t^2)^2}{t^3}\, dt = -\frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{t^3} - \frac{2}{t} + t\right) dt$$

$$I = -\tfrac{1}{4}(-\tfrac{1}{2}t^{-2} - 2\log|t| + \tfrac{1}{2}t^2) + C =$$

$$= \frac{1}{8\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi - x)} + \tfrac{1}{2}\log\left|\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\pi - x)\right| - \tfrac{1}{8}\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\pi - x) + C$$

$$I = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \tfrac{1}{2}\log\left|\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\pi - x)\right| + C$$

Stosując do całki (T) omówione tu podstawienia i przekształcenia, zamiast jednolitej, ogólnej metody, omówionej na str. 53, uzyskujemy to, że rozkład funkcji wymiernej, otrzymanej pod całką po tych przekształceniach, otrzymuje się odrazu, bez mozolnego nieraz obliczania spółczynników rozkładu tej funkcji na ułamki częściowe.

Zarówno wśród całek z funkcyj algebraicznych, jak i wśród całek z funkcyj przestępnych, znajdujemy bardzo wiele całek, które się nie dadzą sprowadzić do funkcyj elementarnych a więc nie dadzą się całkować elementarnemi metodami. Do takich całek należą, jak to już wspomnieliśmy w § 209 B, niektóre całki dwumienne. Takiemi są także w ogólnym przypadku całki, zawierające drugi pierwiastek z wielomianu wyższego stopnia aniżeli 2, np.

$$\int \sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + d}\, dx,\quad \int \sqrt{a_1 x^4 + a_2 x^3 + a_3 x^2 + a_4 x + a_5}\, dx$$

Całki, w których występuje tylko drugi pierwiastek z wielomianem 3-go lub 4-go stopnia, nazywamy *całkami elipitycznemi*. Nazwa pochodzi stąd, że takie całki występują przy obliczaniu długości łuku elipsy (por. § 229); występują one także w licznych zagadnieniach fizyki matematycznej i techniki. Jeżeli pod pierwiastkiem występuje wielomian jeszcze wyższego stopnia, to całkę nazywamy *hypereliptyczną*.

Także następujące całki z dość prostych funkcyj przestępnych nie dadzą się wyrazić zapomocą funkcyj elementarnych:

$$\int \frac{e^x}{x} dx, \int \frac{dx}{\log x}, \int \frac{\sin x}{x} dx, \int e^{-x^2} dx$$

Okażemy w dalszych rozdziałach, że rozmaite takie całki można obliczać i badać przy pomocy nieskończonych szeregów. Każda z nich określa jakąś nową funkcję przestępną, nie należącą do funkcyj ,elementarnych.

W ten sposób rachunek całkowy wprowadził wydatne rozszerzenie zakresu badań matematycznych.

ROZDZIAŁ XVIII.

O całkach oznaczonych.

§ 211. Definicja pola figury płaskiej.

Pojęcie całki pozostaje w bardzo bliskim związku z pewnem zagadnieniem geometrycznem a mianowicie z badaniem pól rozmaitych powierzchni płaskich. W matematyce elementarnej poznaje się metody, służące do znalezienia liczby, która jest miarą powierzchni dowolnego wielokąta (ograniczonego odcinkami linij prostych); tę liczbę nazywamy *polem* tego wielokąta W szczególności przyjmiemy tu jako znany wzór na pole prostokąta i opierając się tylko na tym wzorze, podamy metodę obliczania pól dowolnych powierzchni płaskich, ograniczonych także linjami krzywemi. Najpierw weźmiemy pod uwagę powierzchnię, ograniczoną łukiem jakiejś linji o równaniu:

$$y = f(x)$$

rzędnemi w punktach końcowych tego łuku i osią x-ów (jak na fig. 2). Załóżmy, że funkcja $f(x)$ jest *ciągła* w badanym przedziale i *nieujemna*, t. j. że cała badana powierzchnia leży nad osią odciętych. Przy pomocy wiadomości z matematyki elementarnej nie potrafimy w ogólnym przypadku znaleźć liczby, któraby podawała w sposób zupełnie ścisły miarę takiej powierzchni a nawet nie posiadamy *definicji* takiej liczby, którąby należało nazwać *polem* tej figury: nie mamy bowiem nawet żadnego ścisłego praktycznego sposobu *mierzenia* takich powierzchni. Otóż pierwszem naszem zadaniem będzie konstrukcja takiej ogólnej definicji pola, któraby odpowiadała intuicyjnemu pojmowaniu pola. Powierzchnia, o którą nam chodzi, jest z jednej strony ograniczona odcinkiem ab, leżącym na osi x-ów. Dzielimy przedział $\langle a, b \rangle$ na do-

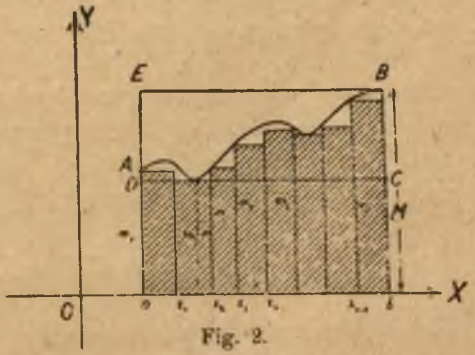


Fig. 2.

wolną, skończoną liczbę części, np. na n części niekoniecznie równych, obierając w tym przedziale w zupełnie dowolny sposób kolejne punkty o odciętych: $x_1, x_2, x_3 \ldots x_{n-1}$. Wtedy $a < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{n-1} < b$. Wykreślamy rzędne danej linji, należące do tych punktów. Rozkładamy w ten sposób daną powierzchnię na skończony szereg pasków. W każdym z tych pasków rzędne danej linji o równaniu $y = f(x)$ osiągają wartości najmniejsze i największe, odpowiadające najmniejszej wartości m_i i największej wartości M_i funkcji ciągłej $f(x)$ w każdym z przedziałów o szerokości $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$. Przez najniższy punkt linji w każdym pasku wykreślamy odcinek prostej równoległej do osi odciętych aż do przecięcia się z rzędnemi, ograniczającemi dany pasek. W ten sposób otrzymujemy figurę schodkową, złożoną z skończonego szeregu prostokątów. Nazwijmy te prostokąty minimalnemi. Suma pól tych prostokątów, zacieniowanych na fig. 2, jest równa:

$$s = m_1(x_1 - a) + m_2(x_2 - x_1) + m_3(x_3 - x_2) + \ldots + m_n(b - x_{n-1})$$

czyli:

$$(42) \qquad s = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + m_3 \Delta x_3 + \ldots + m_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

Przy każdym podziale przedziału $\langle a, b \rangle$ otrzymamy w ten sposób jakąś wartość s na miarę pól prostokątów minimalnych. Zbiór tych wszystkich liczb s jest *ograniczony* zgóry liczbą $M \cdot (b - a)$, gdzie M oznacza największą wartość funkcji $f(x)$ w całym przedziale $\langle a, b \rangle$, liczba ta bowiem jest polem prostokąta $ab\,BE$, zawierającego wszystkie szeregi prostokątów minimalnych. Wobec tego zbiór liczb s posiada **kres górny**, t. j. istnieje najmniejsza z liczb, ograniczających zbiór liczb s zgóry. Oznaczmy ten kres górny symbolem $K[s]$ lub wyraźniej: $K\left[\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i\right]$. Otóż ten kres górny pól szeregów prostokątów minimalnych obieramy za miarę pola figury $ab\,BA$. Przyjmujemy więc następującą **definicję** pola takiej figury: *kres górny pól wszystkich szeregów prostokątów minimalnych jest miarą badanej powierzchni; nazywamy go polem tej powierzchni:*

$$P = K[s] = K\left[\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i\right]$$

Krótko, lecz mniej dokładnie, można powiedzieć: za miarę takiej powierzchni obieramy górny kres pól wszystkich możliwych figur schodkowych, wpisanych w tę powierzchnię.

Całe powyższe rozumowanie odnosiło się do funkcyj nieujemnych a więc do powierzchni, leżących nad osią odciętych. Postępując podobnie

dla funkcyj niedodatnich w badanym przedziale (por. fig. 3), stwierdzamy, że szereg prostokątów minimalnych zawiera całą badaną powierzchnię. Liczby s, określone zapomocą wzoru (42), są w tym przypadku liczbami niedodatniemi, albowiem wszystkie m_i są niedodatnie. Wobec tego i kres górny $K[s]$ tych liczb s nie może być liczbą dodatnią. Natomiast liczba $-K[s]$ jest wtedy nieujemną i tę liczbę nieujemną uważamy za miarę takiego pola, leżącego pod osią odciętych. A więc dla $f(x) \leqslant 0$ jest: $P = -K[s] =$

$$= -K\left[\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i\right]$$

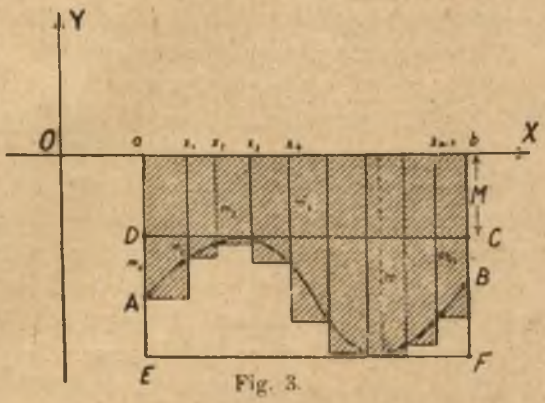


Fig. 3.

Uwaga. Do definicji pola takich powierzchni, leżących pod osią x-ów, możnaby użyć prostokątów maksymalnych, t. j. odpowiadających najwyższym punktom w każdym pasku. Kres dolny odpowiednich sum, wzięty ze znakiem przeciwnym, należałoby wtedy uważać za miarę takiego pola. Okażemy później, że dla funkcyj ciągłych $f(x)$ obydwie te definicje dają tę samą liczbę P jako miarę pola tej powierzchni. Definicje te, zarówno jak i niektóre twierdzenia z nich wynikające, można stosować także w przypadku, gdy funkcja $f(x)$ jest nieciągła lecz ograniczona i posiada skończoną liczbę punktów nieciągłości. Istnieje bowiem wtedy zarówno kres górny jak i kres dolny sum, występujących w tych definicjach.

W ten sposób mamy już określone pole każdej powierzchni, ograniczonej łukiem linji o równaniu $y = f(x)$, gdzie $f(x)$ jest funkcją ciągłą, rzędnemi w punktach końcowych tego łuku i osią odciętych. Jeżeli zaś powierzchnia nie ma tej postaci, lecz jest geometryczną sumą lub różnicą takich części, to za jej miarę przyjmujemy sumę lub różnicę pól tych części. Tak np. pole figury, ograniczonej krzywą zamkniętą na fig. 4a, oblicza

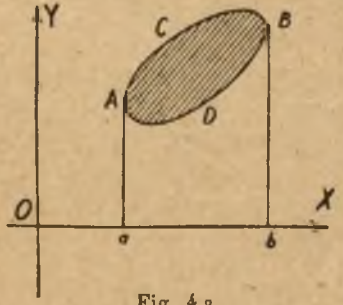


Fig. 4a.

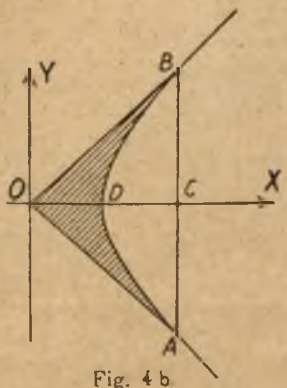


Fig. 4b

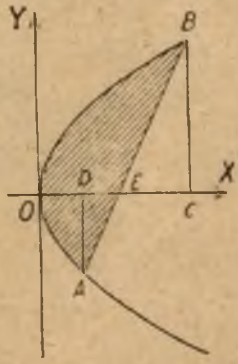


Fig. 4c.

się jako różnicę pól $abBCA$ i $abBDA$, przyczem aA i bB są skrajnemi rzędnemi.

Pole, zawarte między hyperbolą a promieniami OA i OB na fig. 4b, wyznacza się zapomocą wzoru $2 \cdot (OCB - DCB)$, przyczem pola OCB i DCB wyznacza się zapomocą ogólnej definicji (pole trójkąta OCB można obliczyć także odrazu przy pomocy wzoru, znanego z elementarnej geometrji). Pole odcinka paraboli na fig. 4c wyznacza się zapomocą wzoru $OCB + OAD - ECB + DEA$, przyczem każde z pól, występujących w tym wzorze, można wyznaczyć przy pomocy ogólnej definicji.

Korzystanie z tej ogólnej definicji jest narazie trudne, ponieważ nie znamy żadnego dogodnego algorytmu, prowadzącego do efektywnego wyznaczenia górnego kresu dla dowolnego zbioru liczb. Aby uzyskać taką dogodną metodę rachunkową, przydatną do naszego zagadnienia, należy się zająć dokładnie sumami, występującemi we wzorze (42), a w szczególności górnym kresem takich sum. Uczynimy to w następnym paragrafie, ujmując całe zagadnienie w sposób czysto arytmetyczny i znajdziemy nieoczekiwane związki tego zagadnienia z omawianem w poprzednim rozdziale zagadnieniem szukania całki czyli funkcji pierwotnej danej funkcji $f(x)$.

§ 212. Definicja całki oznaczonej.

Weźmy pod uwagę dowolną funkcję $y = f(x)$, ciągłą w przedziale $< a, b >$ (dla ilustracji mogą służyć figury 2, 3 lub 5), przyjmującą w nim dowolne wartości (dodatnie lub niedodatnie). Obierzmy w tym przedziale dowolny skończony, wzrastający zbiór liczb:

$$x_1, x_2 \dots x_{n-1}.$$

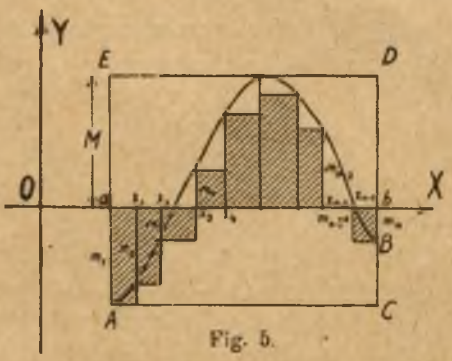


Fig. 5.

Pomnóżmy każdą z różnic:

$$\Delta x_1 = x_1 - a,$$

$$\Delta x_2 = x_2 - x_1, \dots \Delta x_n = b - x_{n-1}$$

przez najmniejszą wartość m_i danej funkcji w każdym z tych przedziałów Δx_i i utwórzmy *sumę* tych wszystkich iloczynów, t. j.

(42) $$s = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \dots + m_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

Nazwijmy to wyrażenie dla skrócenia *sumą dolną*. Jeżeli będziemy obierali punkty podziału w rozmaitej ilości i w rozmaite sposoby, to otrzymamy jakiś *zbiór* tych liczb s. Ten zbiór jest *ograniczony zgóry* liczbą

np. $M \cdot (b - a)$, gdzie M oznacza największą wartość badanej funkcji $f(x)$ w całym przedziale $<a, b>$ Wynika to stąd, że każde m_i jest nie większe od M, a więc:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \leqq M \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = M(b - a)$$

Istnieje zatem *kres górny* $K[s]$ tych wszystkich liczb s, odpowiadających wszystkim możliwym skończonym zbiorom liczb $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ z przedziału $<a, b>$. Do oznaczenia tego kresu górnego używa się takiego symbolu, który zawiera wyraźnie badaną funkcję $f(x)$ tudzież liczby a i b, ograniczające badany przedział. Używamy mianowicie zamiast $K[s]$ następującego symbolu:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

To wyrażenie nazywamy **całką oznaczoną z funkcji** $f(x)$ **od** a **do** b i czytamy: „całka od a do b z $f(x)\,dx$“. Liczbę a nazywamy dolną granicą całki, b górną, a $f(x)$ funkcją podcałkową. Znak $\int$ jest stylizowaną literą S i ma przypominać, że to jest kres górny pewnych sum. Symbol zaś dx przypomina, że wartości (najmniejsze) funkcji podcałkowej mnożyliśmy przez różnice Δx_i. Doszliśmy zatem do następującej **definicji**: *wartość całki oznaczonej z funkcji* $f(x)$ *od* a *do* b *jest to kres górny sum, wyrażonych wzorem (42), czyli*:

$$\int_a^b f(x)\,dx = K[s] = K\left[\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i\right] \tag{43}$$

Z powyższego rozumowania widzimy, że *każda funkcja ciągła posiada całkę oznaczoną* czyli jest całkowalną, oczywiście w każdym takim przedziale, w którym jest ciągłą.

Symbol całki oznaczonej zdefiniowaliśmy na razie tylko dla $a < b$. Jeżeli $a > b$, to znane nam jest znaczenie symbolu $\int_b^a f(x)\,dx$; jest to mianowicie kres górny $K[s]$ liczb s, otrzymanych przy podziałach przedziału $<b, a>$. Otóż w tym przypadku dajemy symbolowi $\int_a^b f(x)\,dx$

znaczenie $-K[s]$ czyli

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \tag{44}$$

Ten wzór służy do uzupełnienia definicji całki oznaczonej w przypadku, gdy $a > b$; jest on jednak prawdziwy także w przypadku, gdy dolna granica całki jest mniejsza od górnej, jak się o tem przekonujemy, mnożąc obie strony wzoru (44) przez -1. Chcąc wreszcie, aby symbol całki oznaczał jakąś liczbę A także wtedy, gdy $a = b$, kierujemy się w doborze tej liczby A tem, aby się spełniał wzór (44) także dla tego przypadku, t. j. aby było $\int_a^a f(x)\,dx = -\int_a^a f(x)\,dx$ czyli $A = -A$, a więc $2A = 0$ a stąd $A = 0$. Należy więc obrać $A = 0$. Przyjmujemy zatem następującą dodatkową *definicję*.

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \tag{45}$$

Należy dokładnie odróżniać całkę *oznaczoną* od omówionej w poprzednim rozdziale całki *nieoznaczonej*. Całka oznaczona jest bowiem zawsze jakąś *liczbą*, podczas gdy całka nieoznaczona przedstawia nieskończoną *gromadę funkcyj*. Litera x, oznaczająca zmienną niezależną w symbolu całki oznaczonej, nie figuruje zatem w końcowym wyniku, a więc możemy ją zastąpić dowolną inną literą. Tak więc symbole:

$$\int_a^b f(x)\,dx,\quad \int_a^b f(u)\,du,\quad \int_a^b f(t)\,dt,\quad \int_a^b f(y)\,dy,\quad \int_a^b f(z)\,dz$$

i t. p. mają wszystkie tę samą wartość $K[s]$, są więc wszystkie sobie równe.

Używając symbolu całki oznaczonej, możemy napisać omówione w poprzednim paragrafie wzory na pole w następującej postaci:

$$\left|\begin{array}{l} P = \int_a^b f(x)\,dx, \quad \text{jeżeli} \quad f(x) \geqq 0 \quad \text{i} \quad b > a \\ P = -\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{„} \quad f(x) \leqq 0 \quad \text{„} \quad b > a \end{array}\right. \tag{46}$$

Pole powierzchni, leżącej nad osią odciętych, ograniczone łukiem linji o równaniu $y = f(x)$, skrajnemi rzędnemi i osią odciętych, równa się zatem całce oznaczonej z tej funkcji od a do b; pole zaś takiej powierzchni, leżącej pod osią odciętych, jest równe wartości takiej całki z przeciwnym znakiem.

Sprowadziliśmy w ten sposób zagadnienie obliczania pól do zagadnienia czysto arytmetycznego, uzyskaliśmy ogólny wzór na obliczanie pól, z drugiej zaś strony uzyskaliśmy dogodną interpretację geometryczną całki oznaczonej, w razie gdy funkcja podcałkowa nie zmienia znaku w przedziale całkowania.

§ 213. Twierdzenie o wartości średniej dla całki oznaczonej.

Wszystkie sumy s (por. wzór 42), których używaliśmy przy definicji całki oznaczonej, są ograniczone liczbami $m(b-a)$ i $M(b-a)$, gdzie m oznacza najmniejszą wartość funkcji $f(x)$ ciągłej w całym przedziale $\langle a, b\rangle$ a M największą. Zatem i kres górny sum s jest zawarty w przedziale $\langle m(b-a), M(b-a)\rangle$, to znaczy, że zawsze spełniają się warunki:

$$m(b-a) \leqq \int_a^b f(x)\,dx \leqq M(b-a) \tag{47}$$

Wobec tego całka oznaczona jest równa jakiejś wartości pośredniej pomiędzy dwiema liczbami ograniczającemi. Dobierając więc odpowiednio liczbę μ, pośrednią między m a M, otrzymujemy wzór:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a)} \tag{48}$$

Twierdzenie to nazywamy **twierdzeniem o wartości średniej** dla całki oznaczonej.

Liczbę μ, wyznaczoną z tego wzoru, t. j

$$\boxed{\mu = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}} \tag{49}$$

nazywamy *średnią wartością funkcji* $f(x)$ *w przedziale* $\langle a, b\rangle$. Takich średnich wartości używa się bardzo często, zwłaszcza w naukach technicznych: mówi się tam np. o średniej wysokości jakiegoś profilu, o średniem natężeniu prądu zmiennego, o średniej wydajności rozmaitych źródeł pracy, a wszystkie te średnie wyznacza się właśnie zapomocą tego wzoru. Tę średnią wartość można uważać — jak później zobaczymy — za uogólnienie średniej arytmetycznej skończonej liczby rzędnych. Prócz tej średniej wartości funkcji używa się w wielu zagadnieniach także

t. zw. *średniej kwadratowej*, określonej następującym wzorem:

$$\sigma^2 = \frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(x)\,dx \tag{50}$$

Stąd σ równa się drugiemu pierwiastkowi prawej strony.

Jeżeli funkcja $f(x)$ nie zmienia znaku w przedziale całkowania, np. jest stale nieujemną, to możemy interpretować twierdzenie o wartości średniej w bardzo dogodny sposób geometrycznie. I tak z fig. 6 jest widocznem, że można zawsze dobrać taką wysokość μ prostokąta o podstawie ab, że jego pole równa się polu badanej powierzchni $abBA$, a więc:

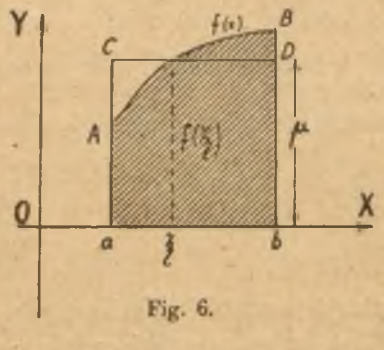


Fig. 6.

$$abBA = (b-a)\cdot\mu$$

czyli:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a)$$

Tę rzędną μ uważamy właśnie za średnią wartość funkcji $f(x)$ w przedziale $\langle a, b\rangle$.

Jeżeli funkcja podcałkowa $f(x)$ jest w całym przedziale $\langle a, b\rangle$ nieujemna, to i całka oznaczona z tej funkcji jest w tym przedziale nieujemna. A więc:

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqq 0 \quad \text{dla} \quad f(x) \geqq 0 \tag{51}$$

Wynika to z wzoru (48), w którym jest $\mu \geqq 0$ i $b - a > 0$. Ponieważ funkcja podcałkowa jest *ciągła* w przedziale $\langle a, b\rangle$, przeto musi przyjmować każdą wartość pośrednią μ między m a M przynajmniej dla jednej wartości x, np. dla $x = \xi = a + \vartheta(b-a)$. Wtedy więc $\mu = f(\xi)$ a wzór (48) przyjmuje postać:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)} \tag{52}$$

§ 214. Addytywność całki oznaczonej.

Całki oznaczone posiadają pewną zasadniczo ważną własność, zwaną **addytywnością**. Własność tę wyrażamy następującem twierdzeniem.

Jeżeli przedział $\langle a, b\rangle$ jest sumą dwóch przedziałów $\langle a, c\rangle$ i $\langle c, b\rangle$, to całka oznaczona od a do b jest **sumą** *całek od a do c i od c do b, to jest:*

(53) $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Dowód. $\int_a^b f(x)\,dx = K[s] = K$, gdzie K oznacza kres górny sum s, utworzonych według wzoru (42) dla wszystkich możliwych podziałów odcinka ab. Podobnie $\int_a^c f(x)\,dx = K_1[s_1] = K_1$ jest kresem górnym podobnych sum s dla odcinka ac, a $\int_c^b f(x)\,dx = K_2[s_2] = K_2$ sum s_2 dla odcinka cb. Mamy wykazać, że: $K = K_1 + K_2$.

Otóż $K' = K_1 + K_2$ jest kresem górnym zbioru wszystkich liczb $s' = s_1 + s_2$ (por. tom I, § 25, str. 99), jako suma kresów górnych zbiorów liczb s_1 i s_2. Każda liczba $s' = s_1 + s_2$ jest równa jakiejś liczbie s, odnoszącej się do całego odcinka ab, a więc zbiór liczb s' zawiera się całkowicie w zbiorze liczb s. Wobec tego kres górny K' nie może być większy od K. Okażemy jednak także, że nie może być $K' < K$. Gdyby bowiem tak było, to istniałaby przynajmniej jedna liczba s, nazwijmy ją $\bar{s}$, większa od K' a zatem większa od *wszystkich* liczb s'. Otóż łatwo stwierdzić, że niema takiej liczby w zbiorze liczb s. Jeżeli bowiem s należy do zbioru liczb s, to odpowiada ona jakiejś sumie:

$$\bar{s} = m_1(x_1 - a) + m_2(x_2 - x_1) + \ldots + m_k(x_k - x_{k-1}) + \ldots + m_n(b - x_{n-1})$$

Jeżeli wśród punktów podziału znajduje się punkt c, to ta suma jest zarazem jakąś liczbą ze zbioru liczb s', np. liczbą $\bar{s}'$, a więc wtedy $\bar{s} = \bar{s}'$, nie jest większa od *wszystkich* liczb s'. Jeżeli zaś punkt c nie znajduje się wśród punktów podziału, to leży on między dwoma punktami podziału, np. między x_{k-1} a x_k. Utwórzmy sumę $\bar{s}'$, należącą do zbioru liczb s', dobierając ten punkt c do punktów $x_1, x_2, \ldots x_{k-1}, x_k \ldots x_{n-1}$. Wtedy:

$$\bar{s}' = m_1(x_1 - a) + m_2(x_2 - x_1) + \ldots + m_k'(c - x_{k-1}) + m_k''(x_k - c) + \ldots + m_n(b - x_{n-1})$$

Otóż ta suma nie może być mniejsza od s, albowiem różni się od niej tylko tem, że zamiast dodajnika $m_k(x_k - x_{k-1}) = A$ występują dwa dodajniki: $m_k'(c - x_{k-1}) + m_k''(x_k - c) = B$.

Ale m_k' i m_k'' nie mogą być mniejsze od m_k, są to bowiem najmniejsze wartości funkcji $f(x)$ w częściowych przedziałach $\langle x_{k-1}, c\rangle$, $\langle c, x_k\rangle$, podczas gdy m_k jest najmniejszą wartością tej funkcji w całym przedziale $\langle x_{k-1}, x_k\rangle$. Jest więc $B \geq A$ a wobec tego $\bar{s}' \geq s$. Okazaliśmy więc, że żadna liczba ze zbioru liczb s nie może być większa od *wszystkich* liczb zbioru s', a więc i od ich kresu górnego K', a to dowodzi, że nie może być $K' < K$. Przedtem zaś dowiedliśmy, że nie może być $K' > K$ a więc musi być $K' = K$ czyli $K_1 + K_2 = K$, c. b. d. o.

Wzór (53) jest prawdziwy także dla przypadku: $a = b$, wtedy bowiem lewa jego strona jest zerem na podstawie wzoru (45) a prawa na podstawie wzoru (44).

Punkt c może leżeć także poza przedziałem $\langle a, b\rangle$, np. może być

$a < b < c$. Stosując bowiem wzór (53) do liczb $a \ldots b \ldots c$, otrzymamy:

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx$$

a stąd:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

a więc otrzymamy znowu wzór (53). Trzeba przytem oczywiście założyć, że funkcja jest ciągła także w tym szerszym przedziale $<a, c>$.

Wzór (53) można uogólnić na dowolną *skończoną* liczbę dodajników. Tak np. dla r dodajników otrzymujemy:

$$(53a)\quad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a_1} f(x)\,dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx + \int_{a_2}^{a_3} f(x)\,dx + \ldots + \int_{a_{r-1}}^{b} f(x)\,dx$$

Najprościej dowodzi się tego zapomocą indukcji zupełnej.

Zastosowania.

1) Na podstawie tego ostatniego wzoru możemy podać geometryczną interpretację całki oznaczonej także w tym przypadku, gdy funkcja podcałkowa zmienia znak w przedziale $<a, b>$ skończoną liczbę razy. Niechaj linja $ACEB$ na fig. 7 będzie obrazem takiej funkcji. Całkę oznaczoną od a do b z tej funkcji rozdzielamy według wzoru (53a) na takie części, aby w każdej z nich funkcja podcałkowa nie zmieniała znaku. Otrzymamy zatem:

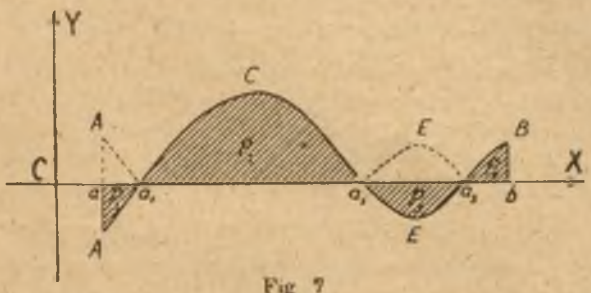


Fig. 7

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a_1} f(x)\,dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx + \int_{a_2}^{a_3} f(x)\,dx + \int_{a_3}^{b} f(x)\,dx$$

Według wzorów (46) z § 212 pierwsza i trzecia z całek prawej strony przedstawiają ujemne wartości pól P_1 i P_3, druga zaś i czwarta dodatnie wartości P_2 i P_4.

Wobec tego:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -P_1 + P_2 - P_3 + P_4 = (P_2 + P_4) - (P_1 + P_3)$$

Zatem: *całka oznaczona przedstawia sumę pól, leżących nad osią odciętych, pomniejszoną o sumę pól, leżących pod tą osią*, czyli algebraiczną sumę pól, opatrzonych odpowiedniemi znakami. Chcąc zaś otrzymać sumę wszystkich pól bez zmiany znaku, należy obliczyć każdą z tych całek zosobna.

Można jednak także podać wzór, przedstawiający sumę tych wszystkich pól zapomocą jednej całki. W tym celu należy utworzyć symetryczne odbicia w osi x-ów powierzchni, leżących pod osią odciętych. Wtedy $f(x)$ zamienia się na $|f(x)|$ i otrzymujemy na całkowite pole wzór:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = \int_a^b |f(x)|\,dx \tag{54}$$

2. Opierając się na addytywności całki, możemy zacieśnić przedział, w który zamknęliśmy całkę oznaczoną przy użyciu wzoru (47) na str. 67. Wiemy, że całka jako kres górny sum dolnych $s = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$ nie jest mniejsza od żadnej z tych sum, t. j.:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \leqq \int_a^b f(x)\,dx$$

Znajdziemy obecnie także górne ograniczenie dla tej całki. Podzielmy tę całkę na dodajniki, dzieląc przedział $\langle a, b\rangle$ punktami $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ i do każdej całki składowej zastosujmy wzór (47).

Oznaczmy literami $M_1, M_2, \ldots M_n$ największe wartości funkcji $f(x)$ w każdym z częściowych przedziałów o szerokościach $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots \Delta x_n$. Z wzoru (47) otrzymujemy:

$$m_i \Delta x_i \leqq \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \leqq M_i \Delta x_i \qquad \text{dla } i = 1, 2, \ldots n.$$

Utwórzmy sumę tych wszystkich całek, to otrzymamy:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \leqq \int_a^b f(x)\,dx \leqq \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \tag{55}$$

Zamknęliśmy w ten sposób całkę oznaczoną pomiędzy dowolną sumą *dolną* i odpowiadającą jej sumą *górną*. Te ograniczenia są zwykle bliższe całki aniżeli liczby $m(b-a)$ i $M(b-a)$, występujące we wzorze (47) a odpowiadające prostokątom $abCD$ i $abBE$ na fig. 2 str. 61.

3. Opierając się na addytywności całki oznaczonej, możemy wyjaśnić *związek średniej wartości funkcji z średnią arytmetyczną* (por. § 213).

Niechaj $f(x)$ będzie funkcją ciągłą w przedziale $<a, b>$. Podzielmy ten przedział na n równych części o długości $h = \frac{b-a}{n}$. Nazwijmy kolejne punkty podziału literami: $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ i rozłóżmy całkę według wzoru (53 a):

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a_1} f(x)\,dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{a_{n-1}}^{b} f(x)\,dx$$

Do każdej z tych całek zastosujmy twierdzenie o wartości średniej, wyrażone wzorem (52), to otrzymamy:

$$f(\xi)(b-a) = f(\xi_1)\frac{b-a}{n} + f(\xi_2)\frac{b-a}{n} + \ldots + f(\xi_n)\frac{b-a}{n}$$

a stąd:

$$f(\xi) = \frac{f(\xi_1) + f(\xi_2) + \ldots + f(\xi_n)}{n}$$

Widzimy, że średnia wartość funkcji $f(x)$ w przedziale $<a, b>$ jest równa średniej arytmetycznej wartości tej funkcji, dobranych odpowiednio w dowolnie wielkiej ilości przedziałów częściowych. Te częściowe przedziały można też brać nierówne, np. o długościach $h_1, h_2, \ldots h_n$, których suma jest równa $b - a$.

Wtedy otrzymamy:

$$f(\xi)(b-a) = h_1 f(\xi_1) + h_2 f(\xi_2) + \ldots + h_n f(\xi_n)$$

czyli:

$$f(\xi) = \frac{h_1 f(\xi_1) + h_2 f(\xi_2) + \ldots + h_n f(\xi_n)}{h_1 + h_2 + \ldots + h_n}$$

Prawą stronę nazywamy *średnią arytmetyczną ważoną* wartości $f(\xi_1), f(\xi_2), \ldots f(\xi_n)$ a spółczynniki $h_1, h_2, \ldots h_n$ nazywamy *wagami* tych wartości funkcji. Widzimy więc, że średnią wartość $f(\xi)$ funkcji w przedziale $<a, b>$ możemy także uważać za średnią arytmetyczną *ważoną* dowolnej liczby rzędnych, branych z tego przedziału, z odpowiednimi *wagami*.

§ 215. Całka oznaczona jako funkcja swej górnej granicy. Związek całki oznaczonej z funkcji ciągłej z całką nieoznaczoną

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła w przedziale $<a, b>$, to jest ciągła także w każdym przedziale $<a, t>$, gdy $a < t < b$, a więc istnieje także całka z tej funkcji dla każdego takiego przedziału $<a, t>$. Do każdej więc liczby t z przedziału $<a, b>$ istnieje odpowiadająca jej liczba: $\int_a^t f(x)\,dx$

a więc ta całka oznaczona od a do t jest funkcją swej górnej granicy t:

$$\int_a^t f(x)\,dx = \varphi(t)$$

Okażemy, że ta funkcja $\varphi(t)$ jest *ciągła*.

W tym celu badamy przyrost:

$$\varphi(t+h) - \varphi(t) = \int_a^{t+h} f(x)\,dx - \int_a^t f(x)\,dx$$

(przyczem ograniczamy się do takich h, aby punkt $t+h$ leżał także w przedziale $<a, b>$).

Stosując do pierwszej całki twierdzenie o addytywności, czyli wzór (53), otrzymujemy:

$$\varphi(t+h) - \varphi(t) = \int_a^t f(x)\,dx + \int_t^{t+h} f(x)\,dx - \int_a^t f(x)\,dx = \int_t^{t+h} f(x)\,dx$$

Z twierdzenia o wartości średniej, wyrażonego wzorem (48) otrzymujemy:

$$\varphi(t+h) - \varphi(t) = \mu(t+h-t) = \mu \cdot h$$

gdzie μ oznacza jakąś wartość pośrednią między najmniejszą a największą wartością funkcji $f(x)$ w przedziale $<t, t+h>$. Stąd łatwo wnioskujemy, ponieważ $\mu \cdot h$ dąży do zera, gdy h dąży do zera, że:

$$\lim_{h \to 0} \varphi(t+h) = \varphi(t)$$

To zaś znaczy, że funkcja $\varphi(t)$ jest funkcją ciągłą. Dowiedliśmy więc, że *całka oznaczona jest ciągłą funkcją swej górnej granicy*.

Ponieważ funkcja podcałkowa $f(x)$ jest ciągłą funkcją w przedziale $<a, b>$, to możemy zastosować twierdzenie o wartości średniej, wyrażone wzorem (52) i otrzymujemy:

$$\varphi(t+h) - \varphi(t) = f(\xi) \cdot h = h f(t + \vartheta h), \qquad \text{gdzie } 0 < \vartheta < 1$$

Stąd:

$$\frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h} = f(t + \vartheta h)$$

Ponieważ $f(x)$ jest funkcją ciągłą, to istnieje granica prawej strony, gdy h dąży do zera, a mianowicie: $f(t)$. Istnieje więc także granica lewej strony, czyli pochodna funkcji $\varphi(t)$. Zatem:

$$\varphi'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h} = f(t)$$

czyli:

$$\frac{d}{dt}\int_a^t f(x)\,dx = f(t) \tag{56}$$

Ten wzór ma nadzwyczaj doniosłe znaczenie dla rachunku całkowego. Treść jego wyraża się następującem twierdzeniem: *pochodna z całki oznaczonej z funkcji ciągłej według jej górnej granicy całkowania* (uważanej za zmienną) ***istnieje*** *i jest równa wartości funkcji podcałkowej dla tej górnej granicy.*

Ponieważ $\varphi'(t) = f(t)$, przeto $\varphi(t)$ jest jedną z funkcyj *pierwotnych* funkcji t czyli jedną z gromady funkcyj, zawartych w całce nieoznaczonej z tej funkcji $f(t)$, t. j. jest jedną z funkcyj, zawartych we wzorze:

$$\int f(t)\,dt = F(t) + C$$

Ponieważ zaś każda funkcja ciągła $f(t)$ posiada całkę oznaczoną, jak tego dowiedliśmy w § 212, przeto *każda funkcja ciągła posiada jakąś funkcję pierwotną*. Wiemy zaś, że, jeżeli istnieje jedna funkcja pierwotna, to musi ich istnieć cała gromada (por. § 203), a zatem istnieje całka nieoznaczona z $f(t)$. W ten sposób udowodniliśmy prawdziwość tego zasadniczego twierdzenia, które przyjęliśmy bez dowodu w poprzednim rozdziale, a mianowicie: *dla każdej funkcji ciągłej istnieje całka nieoznaczona.*

Jakkolwiek więc przy pomocy metod, poznanych w poprzednim rozdziale, nie zawsze potrafiliśmy znaleźć całkę nieoznaczoną z funkcji ciągłej (por. zakończenie § 210), to jednak teraz już wiemy, że te całki nieoznaczone *istnieją*, przeprowadziliśmy bowiem dla nich *dowód istnienia* (przechodząc w rozumowaniu przez definicję i własności całki oznaczonej).

§ 216. Obliczanie całki oznaczonej przy pomocy całki nieoznaczonej.

Wykazaliśmy w poprzednim paragrafie, że dla funkcji $\varphi(t)$, określonej wzorem:

$$\int_a^t f(x)\,dx = \varphi(t) \tag{w}$$

jest $\varphi'(t) = f(t)$, o ile $f(x)$ jest funkcją ciągłą. A więc $\varphi(t)$ jest jedną z funkcyj pierwotnych, należących do funkcji $f(t)$ czyli jedną z gromady funkcyj, zawartych we wzorze:

$$\int f(t)\,dt = F(t) + C$$

Aby wybrać tę funkcję, o którą nam chodzi, należy wyznaczyć w odpowiedni sposób stałą C. Otóż widocznem jest z wzoru (w), że:

$$\int_a^a f(x)\,dx = \varphi(a) = 0$$

Trzeba więc tak obrać stałą C, aby się spełniał warunek: $F(a) + C = 0$ czyli $C = -F(a)$.

A więc:

$$\varphi(t) = F(t) - F(a)$$

czyli:

$$\int_a^t f(x)\,dx = F(t) - F(a)$$

Kładąc tu $t = b$, otrzymujemy ostatecznie:

(57)
$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

co można zapisać także w postaci:

(57 a)
$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big(\int f(x)\,dx\Big)_{x=b} - \Big(\int f(x)\,dx\Big)_{x=a}$$

Symbol $(W(x))_{x=a}$ oznacza tu, że w wyrażeniu $W(x)$, zawartem w nawiasie, pojmowanem jako funkcja zmiennej x, należy za x podstawić a. Występująca tu funkcja $F(t)$ jest zupełnie dowolną funkcją pierwotną funkcji $f(t)$. Gdybyśmy bowiem obrali dowolną inną funkcję pierwotną $F_1(t) = F(t) + C_1$ to:

$$F_1(b) - F_1(a) = F(b) + C_1 - F(a) - C_1 = F(b) - F(a)$$

a więc wartość prawej strony wzoru (57) pozostałaby niezmieniona. Trzeba jednak o tem pamiętać, że $F(b)$ i $F(a)$ są wartościami *tej samej* funkcji pierwotnej; nie można więc brać np. $F(b) - F_1(a)$. Uzyskaliśmy w ten sposób ścisły związek między całką oznaczoną a całką nieoznaczoną a mianowicie:

całka oznaczona z funkcji **ciągłej** *jest równa różnicy pomiędzy wartością, którą przyjmuje dowolna funkcja pierwotna tej funkcji dla górnej granicy całkowania a wartością tej samej funkcji pierwotnej dla dolnej granicy całkowania.*

To twierdzenie sprowadza badanie całek oznaczonych, zdefinjowanych bez użycia rachunku różniczkowego (jako kres górny pewnych sum), do całek nieoznaczonych, otrzymanych z zagadnienia odwrotnego względem różniczkowania. Chcąc mianowicie obliczyć wartość całki ozna-

czonej z jakiejkolwiek funkcji ciągłej w granicach od a do b, obliczamy najpierw jej całkę nieoznaczoną i wybieramy z tej gromady funkcyj pierwotnych jedną dowolną, np. $F(x)$ a następnie tworzymy różnicę $F(b) - F(a)$, t. j. przyrost tej funkcji pierwotnej w przedziale $<a, b>$. Uzyskaliśmy w ten sposób bardzo dogodną metodę obliczania całek oznaczonych, możemy bowiem teraz zużytkować wszystkie metody, poznane w poprzednim rozdziale. Tak np. chcąc obliczyć: $\int_0^{\pi} \sin x\,dx$, wyznaczamy najpierw całkę nieoznaczoną:

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

Wybierzmy np. tę funkcję pierwotną, dla której $C = 0$, a więc $F(x) = -\cos x$. Otóż na podstawie wzoru (57) otrzymujemy:

$$\int_0^{\pi} \sin x\,dx = -\cos \pi - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 2$$

Geometryczne znaczenie tego wyniku jest następujące: pole, zawarte między osią odciętych a połówką fali sinusoidy, ma wartość 2

Opierając się na wzorze (57), okażemy, że do definicji całki oznaczonej (i pola) można zamiast sum dolnych, wyrażonych wzorem (42) z § 211, użyć także sum górnych, wyrażonych wzorem:

$$S = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \ldots + M_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \tag{42 a}$$

przyczem $M_1, M_2, \ldots M_n$ oznaczają największe wartości danej funkcji $f(x)$ w odpowiednich przedziałach.

Dowód. Kres *dolny* tych sum istnieje. Nazwijmy go całką *górną* z funkcji $f(x)$ od a do b i oznaczmy ją symbolem:

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

(Całkę oznaczoną, pojmowaną jako kres górny sum dolnych, nazywają też całką *dolną*). Do tej całki górnej odnoszą się — jak łatwo spostrzec — wszystkie, poznane poprzednio dla całki określonej twierdzenia, a w szczególności wzory (44), (45), (52), (53), (56) i (57).

A więc ta całka górna jest także równa różnicy wartości, które przyjmuje dowolna funkcja pierwotna $F(x)$ funkcji $f(x)$ dla górnej i dolnej granicy całkowania, t. j.:

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = F(b) - F(a) \tag{57 a}$$

A więc na podstawie wzoru (56) jest:

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \int_a^b f\,x\,dx$$

A zatem dla *ciągłych* funkcyj $f(x)$ całka górna jest równa całce oznaczonej Możemy więc pojmować całkę oznaczoną z funkcji ciągłej także jako kres *dolny* sum *górnych*. Stąd wynika, że pole figury, ograniczonej osią odciętych, łukiem dowolnej linji ciągłej i rzędnemi w końcowych punktach tego łuku, możemy pojmować także jako kres dolny sum prostokątów maksymalnych (opisanych, gdy pole leży nad osią odciętych a wpisanych, gdy pole leży pod osią), jak to już zaznaczono w uwadze w § 211. Stąd także wynika, że wielkość takiego pola nie ulega zmianie przez odbicie symetryczne danej powierzchni w osi odciętych, przez takie bowiem odbicie wszystkie prostokąty maksymalne zamieniają się na minimalne i odwrotnie, a kres górny zamienia się na kres dolny, równy kresowi górnemu ze znakiem przeciwnym i odwrotnie.

Opierając się na wzorze (57), wyprowadzimy z rozmaitych ogólnych twierdzeń o całkach nieoznaczonych odpowiednie twierdzenia o całkach oznaczonych.

§ 217. Wyłączanie stałego czynnika przed całkę oznaczoną. Całka oznaczona z sumy.

A. Poznaliśmy następujące twierdzenie, odnoszące się do całek nieoznaczonych: jeżeli $h(x) = A \cdot f(x)$ przy $A \neq 0$, to: $\int h(x)dx = A \int f(x)\,dx$ czyli:

$$\int A f(x)\,dx = A \int f(x)\,dx$$

(por. § 205, wzór 14).

Jeżeli $H(x)$ jest jakąkolwiek funkcją pierwotną funkcji $h(x)$, a $F(x)$ funkcji $f(x)$, to możemy napisać powyższy wzór w postaci:

$$H(x) + C = A(F(x) + C_1)$$

Podstawmy tu za x najpierw b a potem a i odejmijmy od pierwszej w ten sposób otrzymanej równości drugą, to zostanie:

$$H(b) - H(a) = A(F(b) - F(a))$$

czyli w myśl wzoru (57):

$$\int_a^b h(x)\,dx = A \int_a^b f(x)\,dx$$

a to znaczy że:

$$\int_a^b A \cdot f(x)\,dx = A \cdot \int_a^b f(x)\,dx \tag{58}$$

Dowiedliśmy zatem, że *stały czynnik różny od zera można wyłączyć z funkcji podcałkowej przed znak całki oznaczonej*.

Wniosek:

$$\int_a^b -f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx \tag{58a}$$

B Do całek nieoznaczonych odnosi się następujące twierdzenie o całkowaniu sumy (t. zw. całkowanie przez rozkład). Jeżeli:

$$h(x) = f(x) + g(x)$$

to.

$$\int h(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

(por. § 205, wzór 15). Zatem:

$$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

Niechaj $H(x)$, $F(x)$, $G(x)$ oznaczają funkcje pierwotne funkcyj: $h(x)$, $f(x)$, $g(x)$. Powyższy wzór możemy zatem napisać w postaci:

$$H(x) + C = F(x) + C_1 + G(x) + C_2$$

Podstawmy tu za x najpierw b a potem a i odejmijmy od pierwszej w ten sposób otrzymanej równości drugą stronami, to otrzymamy:

$$H(b) - H(a) = F(b) - F(a) + G(b) - G(a)$$

czyli w myśl wzoru (57):

$$\int_a^b h(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

a to znaczy, że:

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \tag{59}$$

Dowiedliśmy zatem, że *całka oznaczona z sumy dwóch funkcyj jest równa sumie całek oznaczonych z tych funkcyj.*

Stąd otrzymuje się analogiczne twierdzenie o różnicy $f(x)-g(x)$, przedstawiając ją w postaci $f(x)+(-g(x))$ i stosując wzór (59) a następnie (58 a). Zatem:

$$\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \tag{59 a}$$

Widzimy więc, że twierdzenia, poznane w tym paragrafie, są zupełnie analogiczne dla całek oznaczonych i nieoznaczonych.

Wnioski.

1. Z tych twierdzeń wyprowadzamy następujące twierdzenie, służące do porównywania wartości dwóch całek oznaczonych *jeżeli* $f(x) \geqq g(x)$ *w całym przedziale* $\langle a, b\rangle$, to także

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqq \int_a^b g(x)\,dx \tag{60}$$

Dowód. Z założenia wynika, że $f(x)-g(x) \geqq 0$. Na podstawie wzoru (51) z § 213 jest zatem:

$$\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx \geqq 0$$

Na podstawie wzoru (59 a) otrzymujemy stąd:

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \geqq 0$$

a to znaczy, że wzór (60) jest prawdziwy

2. *Rozszerzenie twierdzenia o wartości średniej*

Jeżeli funkcja podcałkowa jest iloczynem dwóch funkcyj ciągłych $f(x)$ i $g(x)$, z których jedna, np. $g(x)$, zachowuje w przedziale $\langle a, b\rangle$ stale ten sam znak, to okażemy, że można przed znak całki wyłączyć drugą funkcję, biorąc jej wartość na odpowiednio dobranem miejscu pośredniem z danego przedziału. Chcemy więc okazać prawdziwość następującego wzoru:

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx \qquad \text{gdzie } a<\xi<b \tag{61}$$

Dowód. Niechaj będzie np. $g(x)>0$ w $\langle a, b\rangle$ Niechaj M oznacza największą, a m najmniejszą wartość funkcji $f(x)$ w tym przedziale. Wtedy $M-f(x) \geqq 0$ i $f(x)-m \geqq 0$ w całym przedziale $\langle a, b\rangle$

Wobec tego także:

$$\int_a^b (M-f(x))\,g(x)\,dx \geqq 0 \quad \text{i} \quad \int_a^b (f(x)-m)\,g(x)\,dx \geqq 0$$

a więc:

$$M\int_a^b g(x)\,dx \geqq \int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx \geqq m\int_a^b g(x)\,dx$$

Istnieje więc taka liczba μ, pośrednia między m a M, że:

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \mu\int_a^b g(x)\,dx$$

Ponieważ zaś ciągła funkcja $f(x)$ przybiera przynajmniej raz każdą wartość pośrednią pomiędzy m a M, np. w jakiemś miejscu ξ, przeto $\mu = f(\xi)$, a to dowodzi prawdziwości badanego wzoru.

3) *Nierówność* Schwarza.

Ponieważ zawsze jest $(f(x)\cdot t + g(x))^2 \geqq 0$, przeto z wzoru (51) z § 213 wynika, że:

$$\int_a^b (f(x)\,t + g(x))^2\,dx \geqq 0$$

Stąd otrzymujemy na podstawie wzoru (59):

$$\int_a^b f^2(x)\,t^2\,dx + \int_a^b 2t\,f(x)\,g(x)\,dx + \int_a^b g^2(x)\,dx \geqq 0$$

czyli:

$$t^2\int_a^b f^2(x)\,dx + 2t\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx + \int_a^b g^2(x)\,dx \geqq 0$$

Występujące tu całki są liczbami stałemi. Oznaczmy je kolejno dla skrócenia literami A, B, C, to:

$$At^2 + 2Bt + C \geqq 0$$

Ten trójmian zmiennej t jest stale nieujemny, a zatem jego wyróżnik: $B^2 - AC$ musi być ujemny lub równy zeru, jak to wiadomo z dyskusji trójmianu kwadratowego. A więc jest $B^2 - AC \leqq 0$ czyli: $B^2 \leqq AC$, a to znaczy, że:

$$\left(\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right)^2 \leqq \int_a^b f^2(x)\,dx\cdot\int_a^b g^2(x)\,dx \tag{62}$$

Ten wzór nazywamy *nierównością* Schwarza dla całek.

Uwaga. Analogiczną nierówność Schwarza dla skończonych sum udowadnia się przez badanie wyrażenia:

$$(f_1\cdot t + g_1)^2 + (f_2\cdot t + g_2)^2 + \ldots + (f_n\cdot t + g_n)^2 \geqq 0$$

Tworzymy wyróżnik tego wyrażenia, po uporządkowaniu go według potęg t. Otrzymuje się:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} f_i g_i\right)^2 \leqq \left(\sum_{i=1}^{n} f_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} g_i^2\right)$$

f_i i g_i są tu dowolnemi *liczbami* stałemi.

§ 218. Całkowanie przez części (per partes) całek oznaczonych.

Przy całkach nieoznaczonych używaliśmy często wzoru:

$$\int u(x)\, v'(x)\, dx = u(x)\, v(x) - \int v(x)\, u'(x)\, dx$$

wyprowadzonego przy założeniu, że funkcje $u(x)$ i $v(x)$ posiadają ciągłe pochodne (por. § 206, wzór 16). Niechaj $F(x)$ oznacza dowolną funkcję pierwotną funkcji $u(x)\, v'(x)$ a $G(x)$ funkcję pierwotną funkcji $v(x)\, u'(x)$. Wzór powyższy możemy zatem napisać w postaci:

$$F(x) + C = u(x)\, v(x) - G(x) - C_1$$

Podstawmy tu najpierw $x = b$ a następnie $x = a$ i odejmijmy stronami drugą w ten sposób otrzymaną równość od pierwszej. Otrzymamy:

$$F(b) - F(a) = u(b)\, v(b) - u(a)\, v(a) - (G(b) - G(a))$$

czyli:

(63) $$\boxed{\int_a^b u(x) v'(x)\, dx = u(b) v(b) - u(a) v(a) - \int_a^b v(x)\, u'(x)\, dx}$$

Używając skrócenia dv zamiast $v'(x)\, dx$, a du zamiast $u'(x)\, dx$, tudzież $f(x)\Big|_a^b$ zamiast $f(b) - f(a)$, możemy ten wzór napisać w skróconej postaci:

(63 a) $$\boxed{\int_a^b u\, dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\, du}$$

Pamiętać jednak należy, że zmienną całkowania jest tu x a nie u lub v. Widzimy tu analogję z wzorem na całkowanie „per partes“ całki nieoznaczonej; zamiast wyrazu $u(x)\, v(x)$ występuje tu różnica: $u(b)\, v(b) - u(a)\, v(a)$.

§ 219. Całkowanie przez podstawienie w całkach oznaczonych.

Wprowadzając w całkę nieoznaczoną zamiast zmiennej x nową zmienną t zapomocą wzoru $x = \varphi(t)$, otrzymaliśmy w § 207 wzór (18):

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

Zakładaliśmy przytem, że funkcja $\varphi(t)$ nietylko posiada ciągłą pochodną, lecz że jest ponadto odwracalna w sposób jednoznaczny. Funkcję odwrotną do $\varphi(t)$ nazwaliśmy: $t = \psi(x)$.

Załóżmy jeszcze, że ta funkcja $\psi(x)$ jest określona w przedziale $\langle a, b\rangle$ Dla $x = a$ przyjmuje ona jakąś wartość t_1, a dla $x = b$ wartość t_2, a więc: $\psi(a) = t_1$, $\psi(b) = t_2$.

Chcemy to samo przekształcenie zastosować do całki oznaczonej. Niechaj $F(x)$ będzie jakąkolwiek funkcją pierwotną funkcji $f(x)$, to $\int f(x)\,dx = F(x) + C$. Podobnie niechaj $G(t)$ oznacza dowolną funkcję pierwotną funkcji $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$, to wtedy $\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = G(t) + C_1$.

Wobec tego możemy napisać powyższy wzór w postaci:

$$F(x) + C = G(t) + C_1 = G(\psi(x)) + C_1$$

Podstawiamy tu $x = b$ a następnie $x = a$ i od pierwszej otrzymanej w ten sposób równości odejmujemy stronami drugą. Otrzymamy:

$$F(b) - F(a) = G(t_2) - G(t_1) = G(\psi(b)) - G(\psi(a))$$

czyli na podstawie wzoru (57):

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt \tag{64}$$

Wprowadzając zatem zapomocą związku $x = \varphi(t)$ nową zmienną t w całkę oznaczoną, należy ją przekształcić według wzoru (64). Wprowadzamy zatem $\varphi(t)$ w $f(x)$, zastępujemy dx różniczką $\varphi'(t)dt$ funkcji $x = \varphi(t)$ a ponadto zmieniamy odpowiednio granice, biorąc $\psi(a)$ zamiast a, a $\psi(b)$ zamiast b, gdzie $\psi(x)$ jest funkcją odwrotną względem $\varphi(t)$. Całkowanie przez podstawienie jest dla całek oznaczonych nawet dogodniejsze aniżeli dla całek nieoznaczonych, nie trzeba bowiem po obliczeniu całki wracać do dawnej zmiennej, lecz oblicza się wartość całki wprost, podstawiając za tę nową zmienną t odpowiednie wartości stałe.

§ 220. Przykłady obliczania całek oznaczonych.

1) Jaką wartość ma całka oznaczona

$$I = \int_{-1}^{+1} x^n \, dx$$

gdy n jest liczbą naturalną?

$$I = \int_{-1}^{+1} x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_{-1}^{+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$$

Dla n parzystych jest $(-1)^{n+1} = -1$, zatem $I = \frac{2}{n+1}$. Dla n nieparzystych jest $I = 0$.

2) Obliczyć wartości całek:

$$\int_0^{2\pi} \sin nx \sin rx \, dx, \quad \int_0^{2\pi} \sin nx \cos rx \, dx, \quad \int_0^{2\pi} \cos nx \cos rx \, dx$$

dla $n \neq r$ i dla $n = r$.

Obliczyliśmy już (w § 207, w przykładzie 15) całki nieoznaczone z tych funkcyj (por. wzory 26 i 26a). Zatem dla $n \neq r$ otrzymujemy:

$$\int_0^{2\pi} \sin nx \sin rx \, dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(n-r)x}{n-r} - \frac{\sin(n+r)x}{n+r}\right)\Big|_0^{2\pi} = 0$$

ponieważ zarówno dla $x = 0$ jak i dla $x = 2\pi$ obydwa wyrażenia, zawarte w nawiasie, są zerami. Podobnie:

$$\int_0^{2\pi} \cos nx \cos rx \, dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(n+r)x}{n+r} + \frac{\sin(n-r)x}{n-r}\right)\Big|_0^{2\pi} = 0$$

Dla całki:

$$\int_0^{2\pi} \sin nx \cos rx \, dx = -\frac{1}{2}\left(\frac{\cos(n+r)x}{n+r} + \frac{\cos(n-r)x}{n-r}\right)\Big|_0^{2\pi} = 0$$

otrzymujemy również wartość zero, ponieważ dla $x = 0$ i dla $x = 2\pi$ funkcja pierwotna przyjmuje tę samą wartość: $-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+r} + \frac{1}{n-r}\right)$.

Dla $n = r$ otrzymujemy z wzorów (26a) następujące wartości:

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 nx \, dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2nx}{2n}\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2}(2\pi - 0) - \frac{1}{2}(0 - 0) = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \sin nx \cos nx\, dx = -\frac{1}{2}\frac{\cos 2nx}{2n}\Big|_0^{2\pi} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n}\right) = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 nx\, dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin 2nx}{2n} + x\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2}(0 + 2\pi) - \frac{1}{2}(0 + 0) = \pi$$

Z tych wzorów skorzystamy w jednym z dalszych rozdziałów.

3) Obliczyć całkę:

$$I = \int_{-3}^{+2} |x|\, dx$$

Ponieważ $|x| = x$ dla $x \geqq 0$, a $|x| = -x$ dla $x \leqq 0$, przeto najdogodniej jest rozłożyć tę całkę na dwie części:

$$I = \int_{-3}^{0} |x|\, dx + \int_{0}^{2} |x|\, dx = \int_{-3}^{0} -x\, dx + \int_{0}^{2} x\, dx =$$

$$= -\frac{1}{2}x^2\Big|_{-3}^{0} + \frac{1}{2}x^2\Big|_{0}^{2} = \frac{9}{2} + \frac{4}{2} = \frac{13}{2}$$

Niechaj czytelnik wyprowadzi ogólny wzór:

$$\int_a^b |x|\, dx = \frac{1}{2}(b \cdot |b| - a \cdot |a|)$$

rozróżniając dla a i b wszystkie możliwe przypadki, a więc: $a \geqq 0$ i $b \geqq 0$, $a < 0$ i $b \geqq 0$, $a < 0$ i $b < 0$. Dla wyjaśnienia dobrze jest posłużyć się odpowiedniemi figurami.

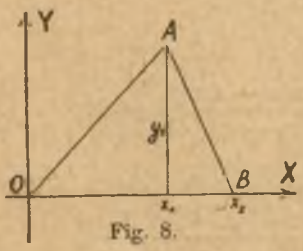


Fig. 8.

4) Wierzchołki trójkąta mają spółrzędne: $O(0, 0)$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, 0)$, przyczem $x_2 > x_1 > 0$, $y_1 > 0$, jak na fig. 8. Wykazać, że pole tego trójkąta, obliczone przy pomocy całki, ma taką samą wartość, jak w geometrji elementarnej, t. j. równa się $\frac{1}{2}x_2 \cdot y_1$.

Łatwo stwierdzić, że boki OA i AB mają równania: $y = \frac{y_1}{x_1}x$, $y = \frac{-y_1}{x_2 - x_1}x + \frac{x_2 y_1}{x_2 - x_1}$.

Pole trojkąta ma zatem wartość:

$$P = \int_0^{x_1} \frac{y_1}{x_1} x\, dx + \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{-y_1}{x_2 - x_1}x + \frac{x_2 y_1}{x_2 - x_1}\right) dx$$

Zatem:

$$P = \frac{y_1}{x_1}\frac{x^2}{2}\Big|_0^{x_1} + \left(\frac{-y_1 x^2}{2(x_2 - x_1)} + \frac{x_2 y_1}{x_2 - x_1} x\right)\Big|_{x_1}^{x_2} = \frac{x_1 y_1}{2} - \frac{y_1(x_2 + x_1)}{2} + x_2 y_1 = \frac{1}{2} x_2 y_1$$

Niechaj czytelnik wykaże to samo dla innych położeń trójkąta, np. dla $x_1 > x_2 > 0$. $y_1 > 0$.

5) Obliczyć pole, ograniczone łukiem paraboli o równaniu $y^2 = 2px$, leżącym nad osią odciętych, od początku układu do punktu o odciętej $x = a$, rzędną końcową $y = b$ i osią odciętych (fig 9). Otrzymujemy:

$$P = \int_0^a \sqrt{2px}\, dx = \sqrt{2p} \int_0^a x^{\frac{1}{2}} dx = \sqrt{2p}\, x^{\frac{3}{2}} : \frac{3}{2}\Big|_0^a = \frac{2\sqrt{2p}}{3} a^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} a\sqrt{2pa} = \frac{2}{3} ab$$

Pole, zawarte między osią rzędnych, prostą równoległą do osi odciętych, a parabolą, ma zatem wartość $P_1 = \frac{1}{3} ab$, t. j. jest równe trzeciej części pola prostokąta o podstawie a, a wysokości b.

Wzór ten wyprowadza się w geometrji analitycznej także inną drogą, a mianowicie zapomocą pewnego szeregu geometrycznego. Przy pomocy tego wzoru łatwo można obliczyć pole dowolnego odcinka paraboli, jak np. na fig. 4c, str. 63.

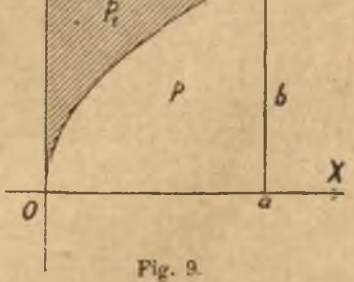


Fig. 9.

6) Obliczyć całkę od x_1 do x_2 z ogólnej funkcji całkowitej wymiernej 3-go stopnia:

$$y = a + bx + cx^2 + ex^3$$

i wyrazić wartość tej całki zapomocą rzędnych y_1, y_3 i rzędnej y_2, należącej do środkowego punktu $x_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_3)$ z przedziału $\langle x_1, x_3 \rangle$

$$I = \int_{x_1}^{x_3} (a + bx + cx^2 + ex^3)\, dx = ax + \frac{1}{2} bx^2 + \frac{1}{3} cx^3 + \frac{1}{4} ex^4\Big|_{x_1}^{x_3}$$

$$I = a(x_3 - x_1) + \frac{1}{2} b(x_3^2 - x_1^2) + \frac{1}{3} c(x_3^3 - x_1^3) + \frac{1}{4} e(x_3^4 - x_1^4)$$

$$I = \frac{x_3 - x_1}{6}[6a + 3b(x_1 + x_3) + 2c(x_1^2 + x_1 x_3 + x_3^2) + \frac{3}{2} e(x_1^3 + x_1^2 x_3 + x_1 x_3^2 + x_3^3)]$$

Ponieważ:

$$y_1 = a + bx_1 + cx_1^2 + ex_1^3, \qquad y_3 = a + bx_3 + cx_3^2 + ex_3^3$$

przeto:

$$I = \frac{x_3 - x_1}{6}[y_1 + y_3 + 4a + 2b(x_1 + x_3) + c(x_1^2 + 2x_1 x_3 + x_3^2) + \frac{1}{2} e(x_1^3 + 3x_1^2 x_3 + 3x_1 x_3^2 + x_3^3)]$$

Rzędna y_2 w punkcie środkowym ma wartość:

$$y_2 = a + \tfrac{1}{2}b(x_1 + x_3) + \tfrac{1}{4}c(x_1^2 + 2x_1x_3 + x_3^2) + \tfrac{1}{8}e(x_1^3 + 3x_1^2x_3 + 3x_1x_3^2 + x_3^3)$$

a zatem wyrażenie, zawarte w nawiasie graniastym, ma wartość $y_1 + y_3 + 4y_2$. Otrzymujemy zatem ostatecznie wzór:

$$(65) \qquad \boxed{I = \tfrac{x_3 - x_1}{6}(y_1 + 4y_2 + y_3)}$$

Jeżeli y jest w całym przedziale $\langle x_1, x_3 \rangle$ dodatnie, to ta całka daje wielkość pola, ograniczonego łukiem $\overset{\frown}{AB}$ (por. fig. 10) paraboli trzeciego stopnia, rzędnemi w punktach końcowych tego łuku i osią odciętych.

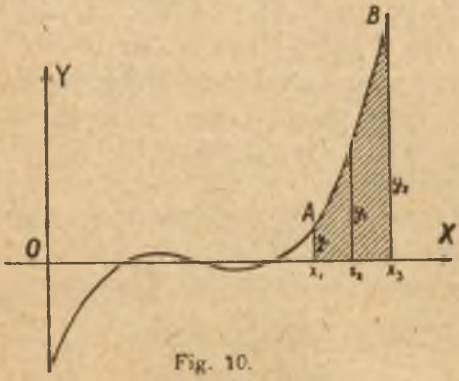


Fig. 10.

Ten sam wzór utrzymuje się dla paraboli 2 go stopnia i dla prostej: $y = a + bx$ (t. j. dla paraboli 1-go stopnia) jak to wynika ze specjalizacji stałych c, e w ogólnem równaniu. Wzór (65) znajduje częste zastosowanie w przybliżonych metodach obliczania całek, o czem będzie mowa w osobnym paragrafie. Jeżeli bowiem łuk jakiejś linji można z dostateczną dla żądanych celów dokładnością aproksymować zapomocą paraboli stopnia nie większego jak 3, to pole, leżące pod tym łukiem, można obliczyć w przybliżeniu wzorem (65), do czego są potrzebne tylko 3 rzędne i długość przedziału.

7) Obliczyć pole, ograniczone łukiem $\overset{\frown}{AB}$ elipsy o dodatnich rzędnych, rzędnemi w punktach końcowych tego łuku i osią odciętych (por. fig. 11). Równanie tej elipsy ma postać:

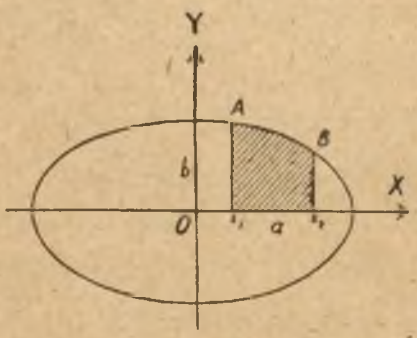


Fig. 11.

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

a więc:

$$y = \tfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

Chodzi tu o obliczenie całki:

$$P = \int_{x_1}^{x_2} \tfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

Użyjmy podstawienia trygonometrycznego: $x = a\cos t$, to $\sqrt{a^2 - x^2} = a\sin t$, $dx = -a\sin t\,dt$. Trzeba jeszcze zmienić granice całkowania, posługując się wzorem $x = a\cos t$. Stąd $t = \arccos \frac{x}{a}$ a więc zamiast granic x_1 i x_2

trzeba wstawić: $t_1 = \arccos \frac{x_1}{a}$, $t_2 = \arccos \frac{x_2}{a}$. Otrzymujemy zatem:

$$P = \int_{t_1}^{t_2} \frac{b}{a} a \sin t \cdot (-a \sin t)\, dt = -ab \int_{t_1}^{t_2} \sin^2 t\, dt$$

Ponieważ zaś $\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}$, przeto:

$$P = -ab\left(\tfrac{1}{2} t - \tfrac{1}{4} \sin 2t\right)\Big|_{t_1}^{t_2}$$

Stąd otrzymamy np. pole ćwiartki elipsy, biorąc $t_1 = \frac{1}{2}\pi$, $t_2 = 0$ (bo $t_1 = \arccos \frac{0}{a} = \arccos 0 = \frac{1}{2}\pi$, $t_2 = \arccos \frac{a}{a} = \arccos 1 = 0$). Zatem:

$$P = -ab\,(0 - 0 - \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\pi + 0) = \tfrac{1}{4} ab\pi$$

Dla całej elipsy otrzymujemy stąd znany wzór:

$$P = ab\pi$$

Stąd dla koła o promieniu $r = a = b$ otrzymujemy:

$$P = r^2\pi$$

zgodnie z wynikiem, znanym z geometrji elementarnej.

W tym przykładzie widzieliśmy, że przy ostatecznem obliczaniu wartości całki oznaczonej nie trzeba było wracać do pierwotnej zmiennej x, lecz można było rachunek przeprowadzić do końca przy pomocy nowej, pomocniczej zmiennej t.

8) Pole, ograniczone łukiem biperboli równobocznej:

$$y = \frac{1}{x}$$

należącym do dodatnich odciętych, rzędnemi końcowemi i osią x-ów, ma wartość:

$$P = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{x} dx = \log x \Big|_{x_1}^{x_2} = \log x_2 - \log x_1 = \log \frac{x_2}{x_1}$$

Jeżeli za początek przedziału obierzemy $x_1 = 1$, a za koniec $x_2 = a$, to wprost:

$$P = \log a = \int_1^a \frac{1}{x} dx$$

Mamy w ten sposób przedstawiony geometrycznie logarytm naturalny z dowolnej liczby a, większej od 1, zapomocą *pola*.

Do tego przedstawienia możnaby nawiązać całą teorję logarytmów. Tak np. zasadnicze dla nauki o logarytmach twierdzenie:

$$\log(ab) = \log a + \log b$$

można udowodnić w następujący sposób, używając całkowej definicji logarytmu:

$$\log(ab) = \int_1^{ab} \frac{1}{x}\,dx = \int_1^{a} \frac{1}{x}\,dx + \int_a^{ab} \frac{1}{x}\,dx$$

Ale $\int_a^{ab} \frac{1}{x}\,dx = \int_1^{b} \frac{1}{z}\,dz$, jak to wynika z podstawienia $x = az$. A więc:

$$\log(ab) = \int_1^{a} \frac{1}{x}\,dx + \int_1^{b} \frac{1}{z}\,dz = \log a + \log b$$

Z tego zaś twierdzenia wyprowadza się z łatwością inne ważne twierdzenia o logarytmach.

9) Obliczmy pole, zawarte między łukiem $\overset{\frown}{ABC}$ hiperboli równobocznej o równaniu:

$$x^2 - y^2 = 1$$

i promieniami, łączącemi początek układu z końcami tego łuku (por. fig. 12). Oznaczmy żądane pole $OABC$ literą u. Widocznem jest, że:

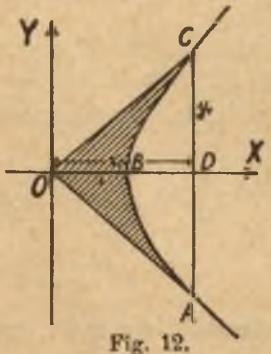


Fig. 12.

$$\tfrac{1}{2}u = OBC = ODC - BDC = \tfrac{x_1 y_1}{2} - BDC$$

Otóż pole $BDC = P$ obliczamy przy pomocy całki:

$$P = \int_1^{x_1} y\,dx = \int_1^{x_1} \sqrt{x^2 - 1}\,dx$$

(tu jest $y > 0$ i $x > 1$). Całkę tę obliczamy przy pomocy wzoru (35) na str. 48, a mianowicie:

$$P = \tfrac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2 - 1} - \log\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)\right)\Big|_1^{x_1}$$

Dla dolnej granicy: $x = 1$ otrzymujemy wartość 0, a dla górnej:

$$P = \tfrac{1}{2}\left(x_1\sqrt{x_1^2 - 1} - \log\left(x_1 + \sqrt{x_1^2 - 1}\right)\right)$$

Lecz:

$$\sqrt{x_1^2 - 1} = y_1$$

a więc:

$$P = \tfrac{1}{2}x_1 y_1 - \tfrac{1}{2}\log(x_1 + y_1)$$

Wobec tego:

$$\tfrac{1}{2}u = \tfrac{1}{2}x_1 y_1 - \tfrac{1}{2}x_1 y_1 + \tfrac{1}{2}\log(x_1 + y_1) = \tfrac{1}{2}\log(x_1 + y_1)$$

a zatem całe pole $OABC$ ma wartość:

$$u = \log(x_1 + y_1)$$

Z tego wzoru możemy wyprowadzić bardzo interesujące wnioski. I tak z wzoru tego wynika, że:

(a) $$x_1 + y_1 = e^u$$

Ponieważ pomiędzy x_1 a y_1 zachodzi ponadto związek $x_1^2 - y_1^2 = 1$ czyli:

$$(x_1 - y_1)(x_1 + y_1) = 1$$

więc:

(b) $$x_1 - y_1 = \frac{1}{x_1 + y_1} = e^{-u}$$

Z równań (a) i (b) wynika:

$$x_1 = \tfrac{1}{2}(e^u + e^{-u}) = \operatorname{coshyp} u$$
$$y_1 = \tfrac{1}{2}(e^u - e^{-u}) = \operatorname{sinhyp} u$$

Widzimy stąd, że w hiperboli równobocznej o półosi 1 rzędna dowolnego punktu jest sinusem hiperbolicznym a odcięta cosinusem hiperbolicznym, jeżeli je uważamy za funkcje *pola* wycinka $OABC$. Podobne związki zachodzą między rzędną i odciętą dowolnego punktu koła o promieniu 1 a sinusem i cosinusem *kąta* środkowego. Możemy jednakże także i trygonometryczne funkcje wyrazić jako funkcje *pola* odpowiedniego wycinka koła (por. fig. 13). I tak wiemy, że:

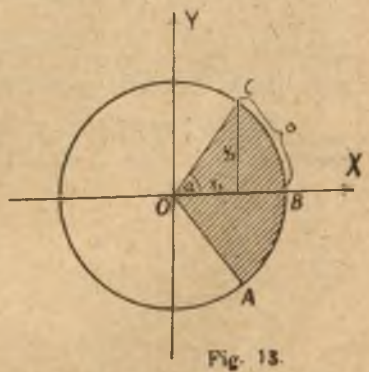


Fig. 13.

$$x_1 = \cos\alpha, \quad y_1 = \sin\alpha$$

Wycinek $OABC$ ma pole:

$$u = \widehat{ABC} \cdot \tfrac{1}{2} OB = 2\alpha \cdot \tfrac{1}{2} = \alpha$$

Możemy więc także napisać:

$$x_1 = \cos u, \quad y_1 = \sin u$$

W ten sposób mamy już uwidocznioną ścisłą analogję pomiędzy funkcjami *hiperbolicznemi* a trygonometrycznemi (które można też nazywać funkcjami *kołowemi*) i tą analogją tłómaczą się nazwy „sinus“ i „cosinus“ dla funkcyj hiperbolicznych.

10) Obliczyć pole powierzchni, zawartej między jedną arkadą cykloidy a osią odciętych. Użyjmy dla cykloidy przedstawienia parametrowego:

$$x = a(t - \sin t)$$
$$y = a(1 - \cos t)$$

Punkt przebiega jedną arkadę cykloidy, gdy t zmienia się od 0 do 2π, a zatem gdy x zmienia się od 0 do $2a\pi$. Wobec tego:

$$P = \int_0^{2a\pi} y\,dx$$

Użycie zmiennej x byłoby tu niedogodne, trzebaby bowiem wyrazić y jako funkcję zmiennej x, co prowadzi do dość zawiłego wzoru. Jednakże przedstawienie parametrowe nasuwa użycie następującego podstawienia:

$$x = a(t - \sin t)$$

Wtedy oczywiście y wyraża się wzorem $a(1 - \cos t)$, a badana całka ma postać:

$$P = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \cdot a(1 - \cos t)\, dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2\, dt$$

czyli:

$$P = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)\, dt = a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2}\right) dt =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} (\tfrac{3}{2} - 2\cos t + \tfrac{1}{2}\cos 2t)\, dt$$

$$P = a^2 (\tfrac{3}{2} t - 2\sin t + \tfrac{1}{4}\sin 2t)\Big|_0^{2\pi} = a^2 \cdot \tfrac{3}{2} \cdot 2\pi = 3a^2\pi$$

Zatem to pole jest trzy razy większe od pola koła toczącego się, którego punkt zakreśla cykloidę.

Niechaj czytelnik wykaże w podobny sposób, że pole zamknięte asteroidą (por. tom I str. 81), ma wartość: $\frac{3}{8} a^2 \pi$.

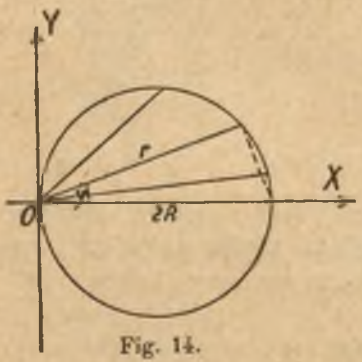


Fig. 14.

11) Rozkład natężenia światła, wychodzącego z pewnego źródła światła O (fig. 14), przedstawiono zapomocą odcinków r, wychodzących z tego punktu pod rozmaitemi kątami. Okazało się, że końce tych odcinków tworzą koło, położone tak, jak na fig. 14. Zbadać *średnie* natężenie N światła, uwzględniając wszystkie możliwe kąty.

Odcinek r jest funkcją kąta φ, a mianowicie:

$$r = 2R\cos\varphi$$

a kąt zmienia się od $-\frac{1}{2}\pi$ do $+\frac{1}{2}\pi$. Chodzi tu o obliczenie średniej wartości tej funkcji w przedziale $< -\frac{1}{2}\pi, +\frac{1}{2}\pi >$. Na podstawie wzoru (49) na str. 67 otrzymujemy:

$$N = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} 2R\cos\varphi\, d\varphi = \frac{2R}{\pi} \sin\varphi \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} = \frac{2R}{\pi}(1 - (-1)) = \frac{4R}{\pi}$$

W podobny sposób można zbadać średnią odległość d punktów (obwodu) elipsy o półosiach a i b od ogniska, używając biegunowego równania elipsy:

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}$$

przyczem biegun leży w ognisku, a osią jest oś wielka elipsy; p oznacza tu parametr i ma wartość $b^2 : a$, a ε jest to mimośród liczbowy:

$$\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - b^2}$$

Dla górnej połowy elipsy otrzymujemy z wzoru (49) na str. 67:

$$d = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}\, d\varphi$$

Przy obliczaniu tej całki dogodnem jest użycie podstawienia $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = u$ (por. § 210). Pozostawiamy czytelnikowi do stwierdzenia, że $d = b$. Wynik ten znajduje zastosowanie w astronomji, przy badaniu średnich odległości planet od słońca.

12) Prąd elektryczny zmienny zmienia się perjodycznie według prawa sinusowego, a mianowicie:

$$i = i_0 \sin at$$

Tutaj i_0 oznacza największe natężenie prądu. Okresem zmiany jest czas $T = \frac{2\pi}{a}$, gdy bowiem t zmienia się od 0 do $\frac{2\pi}{a}$, to at zmienia się od 0 do 2π. Zbadać *średnią kwadratową* σ, czyli tak zwany „prąd skuteczny". Użyjemy do tego celu wzoru (50) na str. 68 dla przedziału $\langle 0\ T \rangle$. Zatem:

$$\sigma^2 = \frac{1}{T}\int_0^T i_0^2 \sin^2 at\, dt = \frac{i_0^2}{T}\int_0^T \frac{1 - \cos 2at}{2}\, dt$$

a więc:

$$\sigma^2 = \frac{i_0^2}{2T}\left(t - \frac{\sin 2at}{2a}\right)\Bigg|_0^T = \frac{i_0^2}{2T}\left(T - \frac{\sin 2aT}{2a}\right)$$

Ale $2aT = 2a \cdot \frac{2\pi}{a} = 4\pi$, a więc $\sin 2aT = \sin 4\pi = 0$ i otrzymujemy:

$$\sigma^2 = \tfrac{1}{2} i_0^2$$

Stąd:

$$\sigma = \frac{i_0}{\sqrt{2}}$$

Jeżeli natężenie prądu zmiennego wyraża się wzorem

$$i = i_1 \sin at + i_2 \sin 2at + \ldots + i_n \sin nat$$
$$+ j_1 \cos at + j_2 \cos 2at + \ldots + j_n \cos nat$$

odpowiadającym kilku drganiom, to okazuje się w podobny sposób, jak poprzednio (używając przytem wzorów z przykładu 2 na str. 83), że prąd skuteczny ma wartość:

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{i_1^2 + i_2^2 + \ldots + i_n^2 + j_1^2 + j_2^2 + \ldots + j_n^2}$$

Wykonanie rachunków pozostawiamy czytelnikowi dla ćwiczenia.

§ 221. Wzory Wallisa i Stirlinga.

Wyprowadziliśmy dla całki $\int \sin^n x\,dx$ wzór redukcyjny:

$$\int \sin^n x\,dx = \frac{1}{n}\left(-\cos x \sin^{n-1} x\right) + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x\,dx$$

używając całkowania „per partes“ (por. § 206 str. 14, wzór 17).

Zastosujmy ten wzór do obliczenia całki oznaczonej:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$$

Opierając się na wzorze (63), otrzymujemy:

$$I_n = -\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

Wyrażenie po znaku równości jest równe zeru dla $\frac{1}{2}\pi$, ponieważ $\cos \frac{1}{2}\pi = 0$ i dla 0, ponieważ $\sin^{n-1} 0 = 0$. Pozostaje zatem dla badanej całki następujący prosty wzór redukcyjny:

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad \text{dla } n \geqq 2$$

Dla $n = 0$ otrzymujemy wprost $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot dx = x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$

a dla $n = 1$ jest $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -0 + 1 = 1$

Na podstawie tego otrzymujemy dla parzystego $n = 2p$ kolejno:

$$I_2 = \tfrac{1}{2} I_0 = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} \pi, \quad I_4 = \tfrac{3}{4} I_2 = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{1}{2} \pi$$

Ogólnie:

$$I_{2p} = \frac{1 \cdot 3 \ldots (2p-1)}{2 \cdot 4 \ldots 2p} \cdot \frac{\pi}{2}$$

jak łatwo stwierdzić przez indukcję zupełną. Natomiast dla nieparzystych $n = 2p + 1$ otrzymujemy kolejno:

$$I_3 = \tfrac{2}{3} I_1 = \tfrac{2}{3}, \quad I_5 = \tfrac{4}{5} I_3 = \tfrac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}$$

a ogólnie:

$$I_{2p+1} = \frac{2 \cdot 4 \ldots . 2p}{3 \cdot 5 \ldots (2p+1)}$$

Ponieważ $\sin x$ jest w badanym przedziale $<0, \frac{1}{2}\pi>$ nieujemne i nie większe od 1, przeto:

$$\sin^{2p-1} x \geqq \sin^{2p} x \geqq \sin^{2p+1} x$$

Stąd wynika (na podstawie § 217, wniosek 1), że:

$$I_{2p-1} \geqq I_{2p} \geqq I_{2p+1}$$

czyli:

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2p-2)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2p-1)} \geqq \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2p-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots . 2p} \cdot \frac{\pi}{2} \geqq \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2p-2) \cdot 2p}{3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2p-1) \cdot (2p+1)}$$

a stąd:

$$\frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \ldots (2p-2)(2p-2) \cdot 2p}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2p-3)(2p-1)(2p-1)} \geqq$$

$$\geqq \frac{\pi}{2} \geqq \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \ldots (2p-2)(2p-2) 2p \cdot 2p}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2p-3)(2p-1)(2p-1)(2p+1)}$$

Nazwijmy lewą stronę literą A_p. Po podzieleniu przez A_p otrzymamy:

$$1 \geqq \left(\frac{\pi}{2} : A_p\right) \geqq \frac{2p}{2p+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2p}}$$

Gdy $p \to \infty$, to $\dfrac{1}{1 + \frac{1}{2p}} \to 1$, a zatem także ciąg $\frac{1}{2}\pi : A_p$ dąży do 1, czyli:

$$(66) \qquad \boxed{\frac{\pi}{2} = \lim_{p \to \infty} A_p = \lim_{p \to \infty} \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \ldots (2p-2)(2p-2) 2p}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2p-3)(2p-1)(2p-1)}}$$

Mamy więc przedstawioną liczbę $\frac{1}{2}\pi$ przy pomocy iloczynu nieskończonego. Iloczyn ten możemy także napisać w dogodniejszej postaci w na-

stępujący sposób:

$$(66a)\qquad \frac{\pi}{4}=\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\left(1-\frac{1}{7^2}\right)\ldots=\prod_{p=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(2p-1)^2}\right)$$

Można także, uzupełniając we wzorze (66) licznik i mianownik przez wprowadzenie dodatkowych czynników $2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\ldots 2p\cdot 2p\cdot 2p$, przedstawić go w zwięzłej postaci:

$$(66\,b)\qquad \sqrt{\frac{\pi}{2}}=\lim_{p\to\infty}\frac{p!^2\,2^{2p}}{(2p)!\sqrt{2p}}$$

Wzór (66), zwany wzorem Wallisa, nie nadaje się wprawdzie dobrze do obliczenia liczby π, jest bowiem bardzo wolno zbieżny. Ma on jednak bardzo doniosłe znaczenie z tego względu, że można z niego nietrudno otrzymać dogodne przybliżenie na obliczanie wartości wyrażenia $p!$, co przy wielkich liczbach p sprawia wielkie trudności, a jest potrzebne w rozmaitych zastosowaniach, np. w rachunku prawdopodobieństwa.

Wzór, dający takie przybliżenie, ma postać:

$$(67)\qquad \boxed{\lim_{p\to\infty}\frac{p!}{p^{p+\frac{1}{2}}e^{-p}\sqrt{2\pi}}=1}$$

i nazywa się wzorem Stirlinga.

Dowód wzoru Stirlinga.

Dzielimy obie strony wzoru (66 b) przez $\sqrt{\frac{1}{2}\pi}$ i upraszczamy licznik i mianownik prawej strony przez $p!$. Otrzymamy w ten sposób.

$$\lim_{p\to\infty}\frac{p!\,2^{2p-\frac{1}{2}}}{(p+1)(p+2)\ldots(2p-1)\,p^{\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}=1$$

Uzupełnijmy ułamek $\frac{2^{2p-\frac{1}{2}}}{2p-1}$ tak, aby miał formę $\left(\frac{2p}{2p-1}\right)^{2p-\frac{1}{2}}$ czyli $\left(1+\frac{1}{2p-1}\right)^{2p-\frac{1}{2}}$, która dąży do e, gdy $p\to\infty$. W tym celu trzeba pomnożyć licznik i mianownik przez $\frac{p^{2p-\frac{1}{2}}}{(2p-1)^{2p-\frac{1}{2}}}$.

Otrzymamy w ten sposób:

$$\lim_{p\to\infty}\frac{p!\left(1+\frac{1}{2p-1}\right)^{2p-\frac{1}{2}}\cdot(2p-1)^{2p-\frac{1}{2}}}{p^{2p+\frac{1}{2}}(p+1)(p+2)\ldots(2p-2)\sqrt{2\pi}}=1$$

Postępując tak samo z ułamkiem $\frac{(2p-1)^{2p-\frac{1}{2}}}{2p-2}$ i z dalszemi ułamkami, otrzymamy:

$$\lim_{p\to\infty} \frac{p!}{p^{p+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}} \left(1+\frac{1}{2p-1}\right)^{2p-\frac{1}{2}} \cdot \left(1+\frac{1}{2p-2}\right)^{2p-\frac{1}{2}} \cdots \left(1+\frac{1}{p+1}\right)^{p+\frac{1}{2}} \cdot \left(1+\frac{1}{p}\right)^{p+\frac{1}{2}} = 1$$

Chodzi jeszcze tylko o okazanie, że iloczyn występujących tu potęg postaci $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$ o dodatniem x można zastąpić przez iloczyn $e \cdot e \ldots e = e^x$

Oznaczmy dla krótkości całe wyrażenie, którego granicę utworzyliśmy, literą W_p. Zamkniemy ten ciąg W_p pomiędzy dwa ciągi, opierając się na tem, że:

(a) $$e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}} < e^{1+\frac{1}{12}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)}$$

Dowód nierówności (a).

Te nierówności wynikają ze znanego rozwinięcia logarytmu (por. tom I, § 139, wzór 138):

$$\log(1+x) = \log x + 2\left(\frac{1}{2x+1} + \frac{1}{3(2x+1)^3} + \frac{1}{5(2x+1)^5} + \cdots\right)$$

czyli:

$$\log\left(\frac{1}{x}+1\right) = \frac{2}{2x+1}\left[1+\frac{1}{3(2x+1)^2}+\frac{1}{5(2x+1)^4}+\cdots\right]$$

a więc:

$$\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{3(2x+1)^2} + \frac{1}{5(2x+1)^4} + \cdots$$

Stąd wynika, że:

$$1 < \log\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{(2x+1)^2} + \frac{1}{(2x+1)^4} + \cdots\right)$$

zastąpiliśmy bowiem w mianownikach liczby 3, 5, 7,... wszędzie liczbą 3. W nawiasie mamy szereg geometryczny o ilorazie $\frac{1}{(2x+1)^2}$, zatem jego wartością jest:

$$\frac{1}{(2x+1)^2} : \left(1-\frac{1}{(2x+1)^2}\right)$$

czyli:

$$\frac{1}{2x(2x+2)} = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)$$

Wobec tego:

$$1 < \log\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{12}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)$$

a więc:

$$e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}} < e^{1+\frac{1}{12}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)}$$

Stosujemy te nierówności do wszystkich potęg, występujących w ciągu W_p i otrzymujemy:

$$\frac{p!}{p^{p+1/2}\sqrt{2\pi}} \cdot e^p < W_p < \frac{p!}{p^{p+1/2}\sqrt{2\pi}} \cdot e^{p+\frac{1}{12}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}+\frac{1}{p+1}-\frac{1}{p+2}+\ldots+\frac{1}{2p-1}-\frac{1}{2p}\right)}$$

czyli

$$1 < W_p : \frac{p!\,e^p}{p^{p+1/2}\sqrt{2\pi}} < e^{\frac{1}{24p}}$$

Ponieważ obydwa wyrażenia ograniczające dążą do 1, przeto także:

$$\lim_{p\to\infty}\left(W_p : \frac{p!}{p^{p+1/2}\sqrt{2\pi}\,e^{-p}}\right) = 1$$

Ponieważ zaś dzielna W_p dąży do 1, przeto i dzielnik musi dążyć do 1, a to właśnie jest treścią wzoru Stirlinga.

Ponieważ iloraz ciągów $p!$ i $p^{p+1/2}e^{-p}\sqrt{2\pi} = s_p$ dąży do 1, przeto mówimy, że ciąg s_p przedstawia *asymptotycznie* wartość ciągu $p!$ Dla wielkich p można więc brać zamiast $p!$ wartość s_p; tę zaś wartość oblicza się dogodnie przy użyciu logarytmów. Popełnia się przytem wprawdzie wielki błąd *bezwzględny*, lecz błąd *względny*, t. j. $\frac{p!-s_p}{s_p} = \frac{p!}{s_p} - 1$ dąży do zera. Tak np. już dla $p = 10$ jest $p! = 3628800$ a $s_p \approx 3598700$. Błąd bezwzględny wynosi tu wprawdzie około 30100, ale błąd względny nie osiąga wartości 0·009.

Używając ciągu $b_p = p! : s_p$, można uzyskać wzór, przedstawiający jeszcze dokładniej $p!$. Utwórzmy mianowicie iloraz:

$$\frac{b_p}{b_{p+1}} = \frac{p!}{p^{p+1/2}\sqrt{2\pi}\,e^{-p}} : \frac{(p+1)!}{(p+1)^{p+3/2}\sqrt{2\pi}\,e^{-p-1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{p}\right)^{p+1/2}}{e}$$

Posługując się nierównościami (a), otrzymujemy stąd:

$$1 < \frac{b_p}{b_{p+1}} < e^{\frac{1}{12}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}\right)}$$

a więc: $b_p > b_{p+1}$, zatem ciąg b_p maleje monotonicznie. Każdy więc jego wyraz jest większy od granicy 1. Natomiast $b_p e^{-\frac{1}{12p}} < b_{p+1} e^{-\frac{1}{12(p+1)}}$, a więc ciąg $b_p e^{-\frac{1}{12p}}$ rośnie monotonicznie i ma również granicę 1, zatem wszystkie jego wyrazy są mniejsze od 1. A więc:

$$b_p > 1 > b_p e^{-\frac{1}{12p}}$$

Stąd zaś wynika, że:

$$b_p e^{-\frac{\vartheta}{12p}} = 1, \qquad \text{gdzie } 0 < \vartheta < 1$$

czyli:

$$\frac{p!}{p^{p+1/2}\sqrt{2\pi\, e^{-p}}} \cdot e^{-\frac{\vartheta}{12p}} = 1$$

czyli:

$$p! = p^{p+1/2}\sqrt{2\pi}\, e^{-p+\frac{\vartheta}{12p}} \qquad 0 < \vartheta < 1 \tag{68}$$

Używając tego wzoru na obliczenie 10!, otrzymujemy, biorąc za ϑ górne ograniczenie 1, liczbę: 3628930, a więc zarówno błąd bezwzględny jak i względny są tu znacznie mniejsze aniżeli przy użyciu wzoru (67) (błąd bezwzględny wynosi 130 a błąd względny około 0·00004).

Użycie wzoru (68) ma tę zaletę, że znajdujemy z niego dwie liczby, ograniczające $p!$ zdołu (kładąc $\vartheta = 0$) i zgóry ($\vartheta = 1$).

Uwaga. Jeszcze dokładniejsze przedstawienie wyrażenia $p!$ uzyskuje się, biorąc w wykładniku liczby e dowolną ilość wyrazów t. zwanego szeregu Stirlinga (Zob. Serret. *Lehrbuch der Differential-und Integralrechnung*, 3 wyd., tom II. str. 248 i nast.).

§ 222. O ciągach, dążących do całki oznaczonej.

Na podstawie wyników, uzyskanych w poprzednich paragrafach, potrafimy obliczyć wartość całki oznaczonej tylko wtedy, gdy potrafimy znaleźć całkę nieoznaczoną badanej funkcji. W innych przypadkach trzeba się uciec do definicji i starać się wyznaczyć w jakiś sposób kres górny sum:

$$s = m_1(x_1 - a) + m_2(x_2 - x_1) + \ldots + m_n(b - x_{n-1})$$

Okażemy, że z zbioru tych liczb s można wybrać w rozmaite, bardzo dogodne sposoby, *ciąg*: $s_1, s_2, \ldots s_p, \ldots$, dążący do kresu górnego K. Trzeba mianowicie dobierać kolejne podziały przedziału $\langle a, b\rangle$ tak, aby *wszystkie* częściowe przedziały Δx_i dążyły do zera; do tego zaś wystarcza, aby ciąg utworzony z *największych* przedziałów każdego podziału dążył do zera. Tak np. można dzielić przedział $\langle a, b\rangle$ kolejno na $2, 3, 4, \ldots p+1$ równych części i otrzymać w ten sposób ciąg sum:

$$s_1 = m_1^{(1)}(x_1^{(1)} - a) + m_2^{(1)}(b - x_1^{(1)})$$

$$s_2 = m_1^{(2)}(x_1^{(2)} - a) + m_2^{(2)}(x_2^{(2)} - x_1^{(2)}) + m_3^{(2)}(b - x_2^{(2)}) \ldots$$

ogólnie:

$$s_p = m_1^{(p)}(x_1^{(p)} - a) + m_2^{(p)}(x_2^{(p)} - x_1^{(p)}) + \ldots + m_{p+1}^{(p)}(b - x_p^{(p)}) = \sum_{i=1}^{p+1} m_i^{(p)} \Delta x_i^{(p)}$$

Tu wszystkie częściowe przedziały dążą do zera, albowiem $\Delta x_i^{(p)} = \frac{b-a}{p+1}$ a więc $\lim_{p\to\infty} \Delta x_i^{(p)} = 0$.

Można jednak także inaczej dzielić przedział $\langle a, b\rangle$, np. kolejno na 2, 4, 8,... 2^p,... równych części. Wtedy także wszystkie przedziały częściowe dążą do zera i to nawet szybciej, aniżeli w poprzednim przypadku. Można także dzielić przedział $\langle a, b\rangle$ na *nierówne* części, wstawiając np. pomiędzy a i b liczby według postępu geometrycznego o ilorazie $\sqrt[p+1]{\frac{b}{a}} = q$; wtedy $x_1^{(p)} = aq$, $x_2^{(p)} = aq^2, \ldots x_p^{(p)} = aq^p$, $aq^{p+1} = \frac{ab}{a} = b$.

Wogóle istnieje nieskończenie wiele rozmaitych ciągów podziałów, przy których długość największego częściowego przedziału dąży do zera. Niechaj ogólnym wyrazem ciągu sum dolnych, odpowiadających takiemu ciągowi podziałów, będzie:

$$s_p = \sum_{i=1}^{n_p} m_i^{(p)} \Delta x_i^{(p)}$$

Okażemy, że taki ciąg sum dąży do całki oznaczonej: $K = \int_a^b f(x)dx$, gdy p wzrasta nieograniczenie.

Dowód. Według wzoru 55 z § 214 jest ta całka zawarta pomiędzy dowolną sumą dolną s_p a odpowiadającą jej sumą górną S_p. A więc:

$$s_p = \sum_{i=1}^{n_p} m_i^{(p)} \Delta x_i^{(p)} \leqq K \leqq \sum_{i=1}^{n_p} M_i^{(p)} \Delta x_i^{(p)} = S_p$$

Stąd wynika:

$$\text{(I)} \qquad 0 \leqq K - s_p \leqq S_p - s_p = \sum_{i=1}^{n_p} (M_i^{(p)} - m_i^{(p)}) \Delta x_i^{(p)}$$

Chcemy okazać, że $\lim_{p\to\infty} s_p = K$, to znaczy, że do każdej dodatniej liczby ε można dobrać takie N, że dla wszystkich $p > N$ jest prawa strona mniejsza od ε. Oprzemy się na tem, że funkcja $f(x)$ jest ciągła w przedziale zamkniętym $\langle a, b\rangle$, a więc jest w nim *jednostajnie ciągła* (por. tom I, § 59). To znaczy, że do każdej dodatniej liczby ε' można dobrać takie dodatnie δ, że dla wszystkich x i x_0 z przedziału $\langle a, b\rangle$, spełniających warunek $|x - x_0| < \delta$, jest $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon'$. Obierzmy $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{b-a}$ i wyznaczmy odpowiednie δ. Do tego δ dobierzmy takie N, aby dla $p > N$ było $|\Delta x_i^{(p)}| < \delta$; w myśl założenia da się to uskutecznić, bo długości wszystkich częściowych przedziałów dążą do zera. Oznaczając w każdym z tych przedziałów literami x i x_0 punkty, w których funkcja przybiera największą i najmniejszą wartość, t. j. $M_i^{(p)}$ i $m_i^{(p)}$, widzimy, że $|x - x_0| < \delta$, a zatem $|M_i^{(p)} - m_i^{(p)}| < \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{b-a}$. Znak bezwzględnej wartości nie jest tu potrzebny, ponieważ $M_i^{(p)} \geq m_i^{(p)}$. Wobec tego z nie-

równości (I) otrzymujemy

$$0 \leqq K - s_p \leqq S_p - s_p < \sum_{i=1}^{n_p} \frac{\varepsilon}{b-a} \Delta x_i^{(p)} = \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n_p} \Delta x_i^{(p)} = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon$$

Spełnia się więc dla wszystkich $p > N$ warunek

(II) $$0 \leqq K - s_p \leqq S_p - s_p < \varepsilon$$

a więc:

$$|K - s_p| < \varepsilon$$

To znaczy, że:

(69) $$\lim_{p \to \infty} s_p = K = \int_a^b f(x)\,dx$$

lub wyraźniej:

(69 a) $$\lim_{p \to \infty} \sum_{i=1}^{n_p} m_i^{(p)} \Delta x_i^{(p)} = \int_a^b f(x)dx$$
$$(\Delta x_i^{(p)} \to 0)$$

Dowiedliśmy więc, że *ciąg sum dolnych, odpowiadających takim podziałom przedziału, w których długość największego częściowego przedziału dąży do zera, dąży do całki oznaczonej.*

Zamiast sum dolnych: s_p można użyć do wyznaczenia całki oznaczonej także sum górnych: $S_p = \sum_{i=1}^{n_p} M_i^{(p)} \Delta x_i^{(p)}$. I tak z wzoru (II) wynika odrazu, że także:

$$|S_p - s_p| < \varepsilon$$

dla $p > N$, a to znaczy, że:

$$\lim_{p \to \infty} (S_p - s_p) = 0$$

czyli:

$$\lim_{p \to \infty} S_p = \lim_{p \to \infty} s_p = K$$

A więc:

(70) $$\lim_{p \to \infty} \sum_{i=1}^{n_p} M_i^{(p)} \Delta x_i^{(p)} = \lim_{p \to \infty} S_p = K = \int_a^b f(x)\,dx$$
$$(\Delta x_i^{(p)} \to 0)$$

To dowodzi, że także *ciąg* takich *sum górnych, w których wszystkie przedziały dążą do zera, dąży do całki oznaczonej.*

Z tych dwóch twierdzeń wynika, że do wyznaczenia całki oznaczonej można także użyć ciągu sum „pośrednich", utworzonych według wzoru:

$$\sigma_p = \sum_{i=1}^{n_p} f(\xi_i^{(p)}) \Delta x_i^{(p)}$$

gdzie $\xi_i^{(p)}$ oznacza *dowolną* wartość z przedziału $\langle x_{i-1}^{(p)}, x_i^{(p)} \rangle$, a więc dowolną wartość pośrednią, albo $x_{i-1}^{(p)}$ albo $x_i^{(p)}$. Ponieważ bowiem zawsze zachodzą nierówności:

$$m_i^{(p)} \leqq f(\xi_i^{(p)}) \leqq M_i^{(p)}$$

przeto muszą zachodzić także nierówności $s_p \leqq \sigma_p \leqq S_p$. Ciąg zaś, którego wyrazy są stale zawarte między odpowiedniemi wyrazami dwóch ciągów zbieżnych do wspólnej granicy, jest także zbieżny do tej samej granicy. Zatem:

$$\lim_{p\to\infty} \sigma_p = \lim_{p\to\infty} \sum_{i=1}^{n_p} f(\xi_i^{(p)}) \Delta x_i^{(p)} = \int_a^b f(x)\,dx \quad . \tag{71}$$

$$(\Delta x_i^{(p)} \to 0)$$

Całka oznaczona jest równa granicy ciągu sum, w których każdy dodajnik jest iloczynem z długości przedziału częściowego i z wartości funkcji w **dowolnym** *punkcie tego przedziału, jeżeli tylko długość największego częściowego przedziału dąży do zera.*

To twierdzenie zawiera poprzednie twierdzenia tego paragrafu jako przypadki szczegółowe. Przy budowaniu ciągów sum, zdążających do całki, możemy zatem brać z każdego przedziału częściowego albo największą wartość (M_i) funkcji $f(x)$ w tym przedziale, albo najmniejszą (m_i), albo wartość funkcji na początku przedziału, t. j. $f(x_{i-1})$, albo wartość $f(x_i)$ na końcu przedziału, albo wreszcie zupełnie *dowolną* wartość $f(\xi_i)$ z wnętrza każdego przedziału.

Wszystkie te sumy zdążają do wspólnej granicy, gdy długość największego częściowego przedziału w każdym podziale dąży do zera, a tą wspólną granicą jest całka oznaczona z $f(x)$ od a do b. Tych *ciągów* sum dolnych, górnych lub dowolnych sum pośrednich można użyć wprost do *definicji* całki oznaczonej. Istotnie też w podręcznikach analizy najczęściej tą właśnie drogą wprowadza się pojęcie całki oznaczonej.

Uwaga 1. Widzieliśmy w § 214, str. 72, że średnia arytmetyczna z n wartości funkcji $f(x)$, dobranych *odpowiednio* w n przedziałach, otrzymanych przez podział przedziału $\langle a, b \rangle$ na n równych części, jest *równa* $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$. Jeżeli zaś bierzemy te wartości funkcji $f(x)$ zupełnie *dowolnie* w tych n przedziałach, to ich średnia arytmetyczna

$$\frac{f(\xi_1) + f(\xi_2) + \ldots + f(\xi_n)}{n}$$

dąży do $\frac{1}{a-b}\int_a^b f(x)\,dx$, gdy $n \to \infty$. Albowiem suma:

$$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = (b-a)\frac{f(\xi_1)+f(\xi_2)+\ldots+f(\xi_n)}{n}$$

a więc:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(\xi_1)+f(\xi_2)+\ldots+f(\xi_n)}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sigma_n}{b-a} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Uwaga 2. Wszystkie te rozważania dotyczyły tylko funkcyj *ciągłych* w $\langle a, b\rangle$. Okazano, że twierdzenia tego paragrafu odnoszą się także do funkcyj nieciągłych, lecz ograniczonych i posiadających skończoną liczbę punktów nieciągłości w danym przedziale, a nawet do niektórych funkcyj, posiadających nieskończenie wiele punktów nieciągłości w skończonym przedziale Przy tych rozważaniach wprowadza się odrazu szerszą definicję całki. W następnym paragrafie zajmiemy się niektóremi najprostszemi uogólnieniami pojęcia całki.

Przykłady.

1) Przy pomocy takich ciągów można obliczyć wartość całki oznaczonej, nie używając do tego funkcji pierwotnej, a więc całki nieoznaczonej. Spróbujmy tą metodą obliczyć wartość całki:

$$I = \int_0^5 x^2\,dx$$

Użyjmy podziału przedziału całkowania $\langle 0, 5\rangle$ na *równe* części. Wyraz s_n ciągu sum otrzymamy, dzieląc przedział na n równych części, a więc:

$$\Delta x_i = \frac{5-0}{n} = \frac{5}{n} \qquad (\text{dla } i = 1, 2, 3, \ldots n).$$

Długość każdego z tych przedziałów mnożymy przez wartość najmniejszą, t. j. w tym przypadku przez wartość funkcji $y = x^2$ na początku każdego przedziału częściowego, albowiem ta funkcja jest monotonicznie rosnąca w przedziale $\langle 0, 5\rangle$. Temi wartościami funkcji są odpowiednio:

$$y = 0^2, \quad \left(1\cdot\frac{5}{n}\right)^2, \quad \left(2\cdot\frac{5}{n}\right)^2, \quad \left(3\cdot\frac{5}{n}\right)^2, \ldots \left[(n-1)\cdot\frac{5}{n}\right]^2$$

a więc:

$$s_n = 0^2\cdot\frac{5}{n} + 1^2\cdot\left(\frac{5}{n}\right)^2\cdot\frac{5}{n} + 2^2\cdot\left(\frac{5}{n}\right)^2\cdot\frac{5}{n} + \ldots + (n-1)^2\cdot\left(\frac{5}{n}\right)^2\cdot\frac{5}{n}$$

$$s_n = \left(\frac{5}{n}\right)^3\left[1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2\right]$$

Na sumę kwadratów wszystkich liczb naturalnych od 1 do n mamy wzór (por. tom I, § 196, wzór (207)) $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$, a zatem na sumę kwadratów liczb naturalnych od 1 do $n-1$ otrzymujemy wyrażenie: $\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$. Wobec tego:

$$s_n = \frac{125}{n^3}\cdot\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) = \frac{125}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)$$

Stąd:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \tfrac{125}{6}(1-0)(2-0) = \tfrac{125}{6}$$

A więc:

$$I = \int_0^5 x^2\,dx = \tfrac{125}{3}$$

Próba. Przy pomocy całki nieoznaczonej $\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C$ znajdujemy:

$$\int_0^5 x^2\,dx = \tfrac{1}{3}x^3 + C\Big|_0^5 = \tfrac{125}{3} + C - 0 - C = \tfrac{125}{3}$$

a zatem tę samą wartość, którą otrzymaliśmy bezpośrednio z ciągu odpowiednich sum.

2) Obliczyć bez używania całki nieoznaczonej wartość całki:

$$I = \int_2^6 \frac{dx}{x}$$

Tutaj korzystniej jest podzielić przedział $\langle 2, 6\rangle$ na części nierówne, lecz wzrastające według postępu *geometrycznego* o ilorazie:

$$q = \sqrt[n]{\tfrac{6}{2}} = \sqrt[n]{3}$$

Otrzymamy wtedy następujące punkty podziału:

$$2\sqrt[n]{3},\quad 2\sqrt[n]{3^2},\quad 2\sqrt[n]{3^3},\ldots 2\sqrt[n]{3^{n-1}},\quad 2\sqrt[n]{3^n} = 6$$

Chcąc otrzymać sumy dolne, należy brać wartości funkcji $y = \frac{1}{x}$ na końcu każdego z przedziałów częściowych, funkcja ta bowiem maleje monotonicznie. Otrzymamy w ten sposób na s_n następujące wyrażenie:

$$s_n = \frac{1}{2\sqrt[n]{3}}(2\sqrt[n]{3} - 2) + \frac{1}{2\sqrt[n]{3^2}}(2\sqrt[n]{3^2} - 2\sqrt[n]{3}) + \ldots + \frac{1}{2\sqrt[n]{3^n}}(2\sqrt[n]{3^n} - 2\sqrt[n]{3^{n-1}})$$

Długości wszystkich przedziałów dążą do zera, gdy n wzrasta nieograniczenie, albowiem nawet najdłuższy, ostatni przedział, ma długość:

$$\Delta x_n = 2\sqrt[n]{3^n}\left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{3}}\right) = 6\left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{3}}\right)$$

Wiadomo zaś, że $\sqrt[n]{3} = 3^{1/n} \to 3^0 = 1$, a więc $\Delta x_n \to 6(1 - \frac{1}{1}) = 0$.

Wykonujemy w s_n zaznaczone działania i otrzymujemy:

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{3}}\right) + \left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{3}}\right) + \ldots + \left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{3}}\right) = n(1 - 3^{-1/n})$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} n(1 - 3^{-1/n})$$

Pierwszy czynnik dąży tu do ∞ a drugi do 0 Przy pomocy reguły Hospitala otrzymujemy:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - 3^{-1/n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-3^{-1/n}\log_e 3 \cdot \frac{1}{n^2}}{-\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} 3^{-1/n}\log_e 3 = \log_e 3$$

Zatem:

$$\int_2^6 \frac{dx}{x} = \log_e 3$$

Próba. Przy pomocy całki nieoznaczonej otrzymujemy

$$\int_2^6 \frac{dx}{x} = \log_e |x| \Big|_2^6 = \log_e 6 - \log_e 2 = \log_e \frac{6}{2} = \log_e 3$$

zgodnie z wynikiem, otrzymanym zapomocą ciągu sum dolnych.

Z tych przykładów widzimy, że znając całkę nieoznaczoną, dochodzi się bez porównania szybciej do wyniku. Jednakże pomimo to ta nowa metoda jest bardzo pożyteczna, ponieważ przy jej pomocy można także obliczać całki oznaczone z takich funkcyj, dla których nie znamy całek nieoznaczonych. Ponadto przy pomocy ciągów dążących do całki oznaczonej, łatwo jest definjować i obliczać rozmaite wielkości geometryczne i fizykalne, jak np. długość łuku, momenty statyczne i bezwładności, jak to zobaczymy w dalszym ciągu. Wreszcie na tej metodzie opierają się rozmaite *przybliżone metody* obliczania całek oznaczonych (i pól) w takich przypadkach, w których zawodzi użycie całki nieoznaczonej, np. gdy funkcja podcałkowa jest podana tylko w sposób tabelaryczny lub graficzny. Temi przybliżonemi metodami zajmiemy się w dalszym ciągu w § 226.

§ 223. Całki uogólnione.

We wszystkich rozważaniach tego rozdziału czyniliśmy założenie, że funkcja podcałkowa $f(x)$ jest *ciągła* w przedziale zamkniętym $\langle a, b\rangle$. Można jednak zdefinjować całkę oznaczoną także ogólniej, biorąc pod uwagę funkcję nieciągłą lecz *ograniczoną* w przedziale $\langle a, b\rangle$, dopuszczając przytem skończoną liczbę punktów nieciągłości w przedziale $\langle a, b\rangle$, a nawet w pewnych przypadkach nieskończenie wiele takich punktów. Do definicji używa się kresów górnych lub kresów dolnych lub też ciągów o-

powiednich sum. W ten sposób powstały rozmaite uogólnienia pojęcia całki, odgrywające nadzwyczaj ważną rolę w matematyce spółczesnej, jak np. całki Riemanna i całki Lebesgue'a. W zastosowaniach praktycznych te pojęcia nie znalazły dotychczas szerszego rozpowszechnienia i dlatego nie będziemy się tu niemi zajmowali [1].

Ograniczymy się tylko do najprostszej klasy funkcyj, a mianowicie do funkcyj $f(x)$, posiadających w przedziale $\langle a, b\rangle$ tylko skończoną liczbę skończonych *skoków* a pozatem ciągłych we wszystkich innych punktach tego przedziału. Weźmy pod uwagę najpierw taką funkcję $f(x)$, która jest ciągła w całym przedziale $\langle a, b\rangle$ z wyjątkiem jednego punktu c, leżącego wewnątrz przedziału, w tym zaś punkcie posiada *skończony* skok, jak na fig. 15. Obierzmy w przedziale $\langle a, c\rangle$ dowolny punkt $c-\varepsilon$, a w przedziale $\langle c, b\rangle$ punkt $c+\varepsilon'$. Zarówno całka oznaczona od a do $c-\varepsilon$, jak i całka od $c+\varepsilon'$ do b istnieje. Gdy ε dąży do zera, to całka $\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx$ dąży do skończonej granicy, a mianowicie do całki oznaczonej od a do c z funkcji $f_1(x)$, która jest równa $f(x)$ w przedziale $\langle a, c)$, otwartym z jednej strony, a dla $x = c$ przyjmuje tę wartość, do której dąży $f(x)$, gdy x dąży do c z lewej strony.

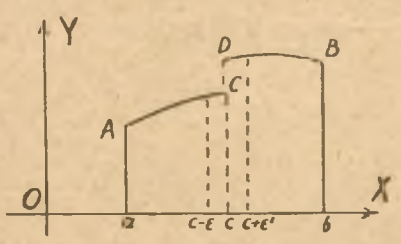


Fig. 15.

Podobnie istnieje granica drugiej całki: $\int_{c+\varepsilon'}^{b} f(x)\,dx$, gdy ε' dąży do zera. Sumę tych dwóch granic nazywamy całką oznaczoną z funkcji nieciągłej $f(x)$. A więc:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon' \to 0} \int_{c+\varepsilon'}^{b} f(x)\,dx$$

Jest to całka *uogólniona*. Jeżeli funkcja $f(x)$ jest nieujemna w całym przedziale $\langle a, b\rangle$, to wartość całki uogólnionej podaje pole figury, zamkniętej linją $ACDB$, rzędnemi aA i bB, tudzież odcinkiem CD na fig. 15. W zupełnie podobny sposób określa się całkę z funkcji, posiadającej skończoną liczbę skończonych skoków.

---

[1] Czytelnika, który pragnąłby głębiej wniknąć w ogólną teorję całek oznaczonych, odsyłamy do podręcznika S. Saksa p. t. *Zarys teorji całki* (Warszawa 1930) lub de la Vallée Poussina p. t. *Cours d'Analyse Infinitésimale* (Paryż, wyd. 6, 1926 r.).

Uwaga. Nietrudno jest dowieść, że do tych całek uogólnionych stosują się te same twierdzenia: o addytywności, o całkowaniu sumy, o wartości średniej (wzór 48), o całkowaniu przez podstawienie, „per partes", co do zwyczajnych całek oznaczonych, nieuogólnionych.

Jeżeli w całce uogólnionej weźmiemy zamiast stałej górnej granicy b, zmienną t, to ta całka jest funkcją $\varphi(t)$ tej górnej granicy: $\int_a^t f(x)\,dx = \varphi(t)$. Otóż można udowodnić, że ta funkcja $\varphi(t)$ jest funkcją ciągłą zmiennej t, nawet w tych punktach, w których $f(x)$ posiada punkty nieciągłości. Odrazu to widać z geometrycznej interpretacji całki jako pola: gdy punkt c przesuwa się o dość mały odcinek, to wielkość pola zmienia się tak mało, jak tego zgóry zażądamy. Jest to uogólnienie twierdzenia, udowodnionego na początku § 215. Pochodną tej funkcji $\varphi(t)$ według zmiennej t jest wewnątrz przedziału $\langle a, c\rangle$ funkcja $f(t)$, a także wewnątrz przedziału $\langle c, b\rangle$, natomiast w samym punkcie c funkcja $\varphi(t)$ nie posiada pochodnej.

Przykład.

Obliczyć:

$$\int_{-3}^{+2} \operatorname{sign} x\,dx$$

Funkcja $\operatorname{sign} x$ (por. tom I § 1, str. 12, fig. 3) jest równa $+1$ dla $x > 0$, a -1 dla $x < 0$, w punkcie zaś $x = 0$ ma skok skończony. Rozkładamy zatem tę całkę na sumę dwóch całek:

$$\int_{-3}^{+2} \operatorname{sign} x\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-3}^{-\varepsilon} \operatorname{sign} x\,dx + \lim_{\varepsilon'\to 0}\int_{\varepsilon'}^{2} \operatorname{sign} x\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-3}^{-\varepsilon}(-1)\,dx +$$

$$+\lim_{\varepsilon'\to 0}\int_{\varepsilon'}^{2}(+1)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}(-x)\Big|_{-3}^{-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon'\to 0} x\Big|_{\varepsilon'}^{2} = -3 + 2 = -1$$

Niechaj czytelnik wyprowadzi ogólny wzór:

$$\int_a^b \operatorname{sign} x\,dx = |b| - |a|$$

uwzględniając wszystkie możliwe wypadki dla a i b, a więc np. dla $a < b$, trzeba rozważyć $a \geqq 0$ i $b \geqq 0$, $a < 0$ i $b \geqq 0$, $a < 0$ i $b < 0$. Wygodnie jest posługiwać się przytem obrazem graficznym funkcji $\operatorname{sign} x$.

Niechaj czytelnik obliczy w podobny sposób wartość całki $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$, przyczem $f(x) = x$ w przedziale $\langle 0, \pi\rangle$, a $f(x) = x - 2\pi$ w przedziale $\langle \pi, 2\pi\rangle$. Wykres!

§ 224. Całki niewłaściwe.

Wszystkie całki oznaczone, o których dotychczas była mowa zarówno uogólnione, jak i nieuogólnione, nazywamy całkami oznaczonemi *właściwemi*.

W przeciwieństwie do nich nazywamy całkami *niewłaściwemi* takie nowe rodzaje całek, w których albo funkcja podcałkowa jest *nieograniczona* w otoczeniu jakiegoś punktu przedziału całkowania, albo przedział całkowania jest *niewłaściwy*, t. j. $<a, \infty)$ albo $(-\infty, b>$ albo wreszcie $(-\infty, +\infty)$. Takie całki niewłaściwe określamy zapomocą następujących definicyj.

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła w całym przedziale $<a, b)$, a dąży do nieskończoności, gdy x dąży z lewej strony do b, to istnieje całka oznaczona właściwa z tej funkcji od a do każdego punktu, leżącego dowolnie blisko przed punktem b, a więc do $b-\varepsilon$, gdzie $\varepsilon>0$. Istnieje zatem $\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$. Jeżeli wartość tej całki dąży do skończonej granicy, gdy dąży do zera, to tę graniczną wartość nazywamy całką oznaczoną *niewłaściwą* z funkcji $f(x)$ od a do b. Przyjmujemy więc następującą definicję:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \tag{72}$$

Jeżeli $F(x)$ oznacza funkcję pierwotną funkcji $f(x)$ w przedziale $<a, b-\varepsilon>$, to możemy ten wzór napisać także w postaci:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} F(b-\varepsilon) - F(a) \tag{72a}$$

Podobnie definjujemy całkę niewłaściwą w przypadku, gdy funkcja $f(x)$ jest ciągła w całym przedziale $<a, b>$ z wyjątkiem początkowego punktu a, a przy x, dążącem z prawej strony do a, dąży do nieskończoności.

Wtedy mianowicie:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon' \to 0} \int_{a+\varepsilon'}^b f(x)\,dx \tag{73}$$

Jeżeli $F(x)$ oznacza funkcję pierwotną funkcji $f(x)$ w przedziale $<a+\varepsilon', b>$, to wzór (73) można napisać w postaci:

(73 a) $$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - \lim_{\varepsilon' \to 0} F(a + \varepsilon')$$

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła w całym przedziale $<a, b>$ z wyjątkiem jednego punktu c, leżącego wewnątrz przedziału, w którym dąży do nieskończoności, to rozdzielamy całkę na dwie części i używamy do definicji całki od a do b wzoru:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Obydwie zaś całki, znajdujące się po drugiej stronie znaku równości, są zdefinjowane przy pomocy wzorów (72) i (73). Gdyby przedział zawierał więcej punktów nieciągłości, lecz skończoną ich liczbę, to należałoby rozłożyć przedział odpowiednio na większą liczbę części

Drugi rodzaj całek niewłaściwych otrzymujemy, biorąc pod uwagę funkcje ciągłe, lecz przedział całkowania niewłaściwy.

I tak, jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła dla wszystkich $x > a$, to dla każdej liczby L większej od a istnieje całka oznaczona właściwa: $\int_a^L f(x)\,dx$. Jeżeli ta całka właściwa dąży do skończonej granicy, gdy $L \to +\infty$, to tę graniczną wartość nazywamy całką niewłaściwą od a do ∞.

Przyjmujemy zatem następującą definicję takiej całki w przedziale $<a, \infty)$:

(74) $$\boxed{\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{L \to \infty} \int_a^L f(x)\,dx}$$

Jeżeli $F(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$, to:

(74 a) $$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{L \to \infty} F(L) - F(a)$$

Podobnie definjujemy całkę w przedziale niewłaściwym $(-\infty, b>$:

(75) $$\boxed{\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{N \to -\infty} \int_N^b f(x)\,dx}$$

Jeżeli $F(x)$ jest funkcją pierwotną, to:

(75 a) $$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = F(b) - \lim_{N \to -\infty} F(N)$$

Wreszcie:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx \tag{75b}$$

przyczem można zamiast 0 obrać także dowolną inną skończoną liczbę c.

Z tych definicyj widzimy, że całki niewłaściwe są *granicami*, do których dążą całki właściwe. Zamiast mówić, że całka niewłaściwa *istnieje*, mówi się też, że całka niewłaściwa jest *zbieżna*. Całki niewłaściwe występują dość często w zastosowaniach. W interpretacji geometrycznej możemy je uważać za miary pewnych nieograniczonych pól (z uwzględnieniem znaku).

Przykłady.

1) Obliczyć całkę:

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Tu dla górnej granicy $x = 1$ funkcja podcałkowa posiada nieciągłość, a mianowicie dąży do $+\infty$, gdy x dąży do $+1$ z wnętrza przedziału $\langle 0, 1\rangle$, t. j. z lewej strony. Do obliczenia wartości tej całki należy zatem użyć wzoru (72). Wobec tego:

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{0}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \operatorname{arc\,sin}(1-\varepsilon) - \operatorname{arc\,sin} 0 =$$

$$= \operatorname{arc\,sin} 1 - \operatorname{arc\,sin} 0 = \tfrac{1}{2}\pi$$

Jakkolwiek powierzchnia, ograniczona linją o równaniu $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ w przedziale $\langle 0, 1\rangle$, rozciąga się w nieskończoność, to jednak miara tego pola jest skończoną liczbą $\frac{1}{2}\pi$. Niechaj czytelnik sporządzi wykres tej funkcji!

2) Zbadać, czy istnieje całka niewłaściwa:

$$\int_{1}^{4} \frac{dx}{(x-3)^2}$$

Ponieważ funkcja podcałkowa jest nieciągła, a mianowicie posiada skok w punkcie $x = 3$, leżącym wewnątrz przedziału $\langle 1, 4\rangle$, przeto należy rozdzielić przedział całkowania na dwie części: od 1 do 3 i od 3 do 4. Otóż:

$$\int_{1}^{3} \frac{dx}{(x-3)^2} = \lim_{0<\varepsilon\to 0} \int_{1}^{3-\varepsilon} \frac{dx}{(x-3)^2} = \lim_{0<\varepsilon\to 0} \left.\frac{-1}{x-3}\right|_{1}^{3-\varepsilon} = \lim_{0<\varepsilon\to 0} \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{2}\right) = +\infty$$

a więc ta całka nie istnieje. Podobnie okazałoby się, że $\int_3^4 \frac{dx}{(x-3)^2} = +\infty$

A więc nie istnieje także całka od 1 do 4, jako suma tych całek.

Gdybyśmy zaś, rachując nieostrożnie, nie zauważyli, że funkcja staje się nieograniczoną wewnątrz przedziału całkowania, to otrzymalibyśmy — przez zastosowanie zwykłej reguły $F(b) - F(a)$ — wartość:

$$-\frac{1}{x-3}\Big|_1^4 = -1 - \tfrac{1}{2} = -\tfrac{3}{2}$$

Moglibyśmy więc sądzić, że (nieograniczona) powierzchnia, zamknięta linją o równaniu $y = \frac{1}{(x-3)^2}$ w przedziale $\langle 1, 4\rangle$, ma pole skończone, tymczasem to pole ma wartość (niewłaściwą) nieskończoną, jak to wynika z poprzednich rozważań.

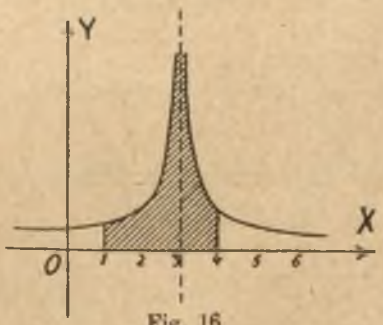


Fig. 16.

Zobaczymy jednakże w następnym przykładzie, że przez odpowiednie zmniejszenie wykładnika w mianowniku funkcji podcałkowej uzyskamy figurę o polu skończonem.

3) Obliczyć wartość całki niewłaściwej:

$$\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^2}} \quad \text{czyli} \quad \int_1^4 \frac{dx}{(x-3)^{\frac{2}{3}}}$$

W myśl definicji stosujemy tu rozkład:

$$\int_1^4 \frac{dx}{(x-3)^{\frac{2}{3}}} = \int_1^3 \frac{dx}{(x-3)^{\frac{2}{3}}} + \int_3^4 \frac{dx}{(x-3)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{\varepsilon \to 0} 3(x-3)^{\frac{1}{3}}\Big|_1^{3-\varepsilon} +$$

$$+ \lim_{\varepsilon' \to 0} 3(x-3)^{\frac{1}{3}}\Big|_{3+\varepsilon}^4 = \lim_{\varepsilon \to 0} 3\sqrt[3]{-\varepsilon} - 3\sqrt[3]{-2} + 3\sqrt[3]{1} - \lim_{\varepsilon' \to 0} 3\sqrt[3]{\varepsilon'} = 0 +$$

$$+ 3\sqrt[3]{2} + 3 - 0 = 3(1 + \sqrt[3]{2})$$

W geometrycznej interpretacji chodzi tu o obliczenie pola nieskończonej powierzchni, której część przedstawiono na fig. 16 (zacieniowana).

4) Ogólnie można dowieść, że całka:

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-b)^s}$$

ma tylko wtedy wartość skończoną, gdy $s < 1$. Prosty dowód pozostawiamy czytelnikowi dla ćwiczenia.

5) Obliczyć:

$$\int_0^\infty e^{-x}dx$$

Tworzymy najpierw:

$$\int_0^L e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^L = -e^{-L} + e^0 = 1 - \frac{1}{e^L}$$

Stąd:

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{L\to\infty}\int_0^L e^{-x}\,dx = \lim_{L\to\infty}\left(1 - \frac{1}{e^L}\right) = 1$$

Niechaj czytelnik przedstawi geometryczną interpretację tego wyniku.

6) Obliczyć:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$$

Stad:

$$I = \lim_{K\to-\infty}\operatorname{arctg} x\Big|_K^0 + \lim_{L\to+\infty}\operatorname{arctg} x\Big|_0^L = 0 - (-\tfrac{1}{2}\pi) + \tfrac{1}{2}\pi - 0$$

Zatem:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \pi$$

7) Dla jakich wykładników s całka niewłaściwa:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^s}$$

ma wartość skończoną?

Obliczamy najpierw dla $s \neq 1$ całkę właściwą:

$$\int_1^L \frac{dx}{x^s} = \frac{x^{-s+1}}{-s+1}\Big|_1^L = \frac{L^{-s+1}}{-s+1} - \frac{1}{-s+1} = \frac{1}{1-s}\left(\frac{1}{L^{s-1}} - 1\right)$$

Widocznem jest, że przy $L\to\infty$ prawa strona tylko wtedy dąży do skończonej granicy, gdy $s > 1$.

Dla $s=1$ otrzymujemy:

$$\int_1^L \frac{dx}{x} = \log L - \log 1 = \log L$$

a więc:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \infty$$

8) Obliczyć:

$$I_n = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx$$

dla liczb n naturalnych.

Wyznaczmy najpierw zapomocą całkowania „per partes" całkę właściwą:

$$\int_0^L x^n e^{-x}\,dx = -x^n e^{-x}\Big|_0^L + n\int_0^L x^{n-1} e^{-x}\,dx = -L^n e^{-L} + n\int_0^L x^{n-1} e^{-x}\,dx$$

Gdy $L\to\infty$, to $L^n e^{-L}$ dąży, jak wiemy, do zera, albowiem e^L dąży do ∞ szybciej, aniżeli jakakolwiek potęga L^n. A więc:

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx = n\int_0^\infty x^{n-1} e^{-x}\,dx$$

czyli:

(a) $$I_n = n\,I_{n-1}$$

Przez kolejne stosowanie tego wzoru zwrotnego otrzymujemy:

$$I_n = n(n-1)\,I_{n-2},\quad I_n = n(n-1)(n-2)\,I_{n-3}$$

i t. d., aż dojdziemy ostatecznie do $I_0 = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$. A więc:

$$I_n = n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1\cdot I_0 = n!$$

Uwaga. Udowodniono, że ta całka istnieje także dla niecałkowitych n, gdy tylko $n > -1$. Dla ujemnych n ta całka jest w dwojaki sposób niewłaściwą: po pierwsze funkcja podcałkowa jest nieciągła w początkowym punkcie przedziału całkowania a mianowicie dąży do $+\infty$, gdy x dąży do zera z prawej strony; po drugie przedział całkowania jest niewłaściwy. Przy zmiennem n jest ta całka funkcją zmiennej n; nazywamy ją *całką Eulera drugiego rodzaju* lub funkcją $\Gamma(n+1)$ (czytaj gamą z $n+1$). Możemy ją uważać za uogólnienie funkcji $n!$, określonej tylko dla naturalnych n. szczególnie ważną w zastosowaniach jest wartość tej funkcji dla $n=-\frac{1}{2}$, t. j.:

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} e^{-x}\,dx$$

Wyznaczeniem tej całki zajmiemy się w następnym przykładzie.

9) Obliczyć wartość całki niewłaściwej:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$$

Uwaga. Używając podstawienia $x^2 = u$, otrzymujemy $2x\,dx = du$, $dx = \frac{du}{2\sqrt{u}}$ a całka zamienia się na $\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})$. Ta całka, zwana całką Laplace'a, ma wielkie znaczenie w rachunku prawdopodobieństwa i w teorji błędów.

Nie potrafimy obliczyć całki *nieoznaczonej* $\int e^{-x^2}\,dx$ elementarnemi metodami. Pomimoto znajdziemy wartość powyższej całki *oznaczonej*, opierając się na odpowiednio dobranych nierównościach. I tak wiemy (por. tom I § 149, przykład 2), że zawsze jest:

$$1 + u \leqq e^u$$

a więc:

$$1 - z \leqq e^{-z} \text{ i } 1 + z \leqq e^z$$

czyli:

$$\frac{1}{e^z} \leqq \frac{1}{1+z} \text{ dla } z > -1.$$

Stąd:

$$1 - z \leqq e^{-z} \leqq (1+z)^{-1}$$

Weźmy:

$$z = y^2, \text{ to } z > 0 > -1$$

i mamy:

$$1 - y^2 \leqq e^{-y^2} \leqq (1+y^2)^{-1}$$

A więc dla naturalnych n zachodzą nierówności:

$$(1-y^2)^n \leqq e^{-ny^2} \leqq (1+y^2)^{-n}$$

Scałkujemy te wyrażenia od 0 do 1 i od 0 do ∞, to (na podst. § 217 wniosku 1) otrzymamy:

$$\int_0^1 (1-y^2)^n\,dy \leqq \int_0^1 e^{-ny^2}\,dy < \int_0^\infty e^{-ny^2}\,dy \leqq \int_0^\infty \frac{dy}{(1+y^2)^n}$$

Skrajne całki wyznacza się nietrudno przy pomocy odpowiednich wzorów redukcyjnych:

a) $$I_n = \int_0^1 (1-y^2)^n\,dy = y(1-y^2)^n\Big|_0^1 + 2n\int_0^1 y^2(1-y^2)^{n-1}\,dy =$$

$$= y(1-y^2)^n\Big|_0^1 + 2n\int_0^1 [(y^2-1)(1-y^2)^{n-1} + (1-y^2)^{n-1}]\,dy$$

$$I_n = -2n I_n + 2n I_{n-1},\ (2n+1) I_n = 2n I_{n-1}$$

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}$$

Ponieważ $I_0 = \int_0^1 dy = y\Big|_0^1 = 1$, przeto $I_1 = \frac{2}{3}$, $I_2 = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3}$, ...

b) $\bar{I}_n = \int_0^\infty \frac{dy}{(1+y^2)^n} = \frac{y}{(2n-2)(1+y^2)^{n-1}}\Big|_0^\infty + \frac{2n-3}{2n-2}\bar{I}_{n-1} =$

$$= \frac{2n-3}{2n-2}\bar{I}_{n-1} \quad \text{(str. 28, wzór 27)}$$

Ponieważ:

$$\bar{I}_1 = \int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2} = \tfrac{1}{2}\pi, \quad \text{przeto} \quad \bar{I}_2 = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2}\pi, \quad \bar{I}_3 = \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2}\pi, \ldots$$

Otrzymujemy więc:

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2n+1)} < \int_0^\infty e^{-ny^2}\, dy \leqq \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n-2)} \cdot \tfrac{1}{2}\pi$$

Przez podstawienie $ny^2 = x^2$ czyli $y = \frac{x}{\sqrt{n}}$, $dy = \frac{dx}{\sqrt{n}}$ przekształcamy wewnętrzną całkę na $\frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^\infty e^{-x^2} dx$, a więc:

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n\sqrt{n}}{3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2n+1)} < \int_0^\infty e^{-x^2} dx \leqq \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-3)\sqrt{n}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n-2)} \cdot \tfrac{1}{2}\pi$$

Przy pomocy wzoru Wallisa (str. 93, wzór 66) stwierdza się bez trudności, że obydwa skrajne ciągi w powyższych nierównościach dążą do wspólnej wartości $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

I tak z wzoru Wallisa wynika, że

$$B_n = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n-2)\sqrt{2n}}{3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2n-1)} \to \sqrt{\tfrac{1}{2}\pi}$$

a więc:

$$A_n = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n-2)\sqrt{n}}{3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2n-1)} \to \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} \quad \text{a zatem i} \quad A_n \frac{2n}{2n+1} \to \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

Z drugiej zaś strony:

$$\tfrac{1}{2}\pi \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-3)\sqrt{n}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n-2)} = \tfrac{1}{2}\pi \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-3)(2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n-2)\sqrt{2n}} \cdot \frac{n\sqrt{2}}{(2n-1)} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\pi \cdot \frac{1}{B_n} \cdot \frac{n\sqrt{2}}{2n-1} \to \tfrac{1}{2}\pi \sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

Zatem całka, zawarta stale między wyrazami tych dwóch ciągów, ma wartość $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. Otrzymaliśmy zatem ostatecznie:

(76) $$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

§ 225. Całkowanie graficzne.

Jeżeli funkcja, którą mamy całkować, jest podana graficznie, zapomocą wykresu, jak to często bywa w matematyce stosowanej, to możemy postępować dwojaką drogą. Można mianowicie, używając rozmaitych metod interpolacji (por. tom I, rozdział XVI), znaleźć wzór matematyczny, przedstawiający wartość tej funkcji z dostatecznem przybliżeniem i dopiero wtedy wykonywać całkowanie przy pomocy odpowiednich wzorów rachunku całkowego. Prostszem będzie jednak bezpośrednie zastosowanie odpowiednio dobranej graficznej metody całkowania; metodę taką otrzymujemy przez odwrócenie metody graficznego różniczkowania, poznanej w rachunku różniczkowym (por. tom I, § 65) Chcemy znaleźć:

$$Y = \int_a^x f(x)\,dx$$

mając podany obraz L funkcji $y = f(x)$ (fig. 17a). Ta całka Y jest

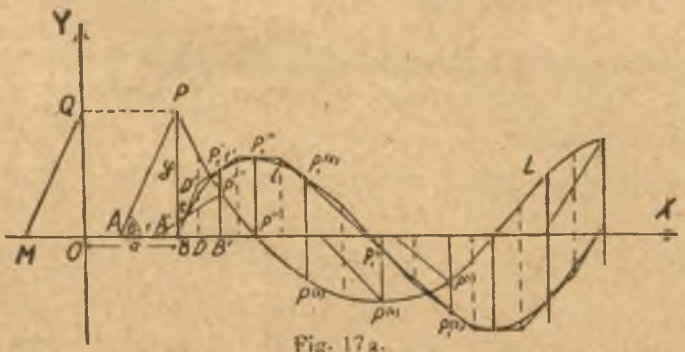


Fig. 17a.

funkcją górnej granicy x, a mianowicie taką funkcją, której pochodna jest równa funkcji podcałkowej:

(w) $$\frac{dY}{dx} = f(x) = y$$

Jest to więc jedna z funkcyj pierwotnych funkcji $f(x)$, a mianowicie ta funkcja pierwotna, która dla $x = a$ przybiera wartość $Y = 0$, albowiem

$\int f(x)\,dx = 0$. Szukana linja przechodzi zatem przez punkt $B(a, 0)$. Obraz graficzny każdej funkcji pierwotnej nazywamy *linją całkową* danej linji o równaniu $y = f(x)$. Pochodna $\frac{dY}{dx}$ przedstawia spadek stycznej do linji całkowej. Oznaczmy literą β kąt stycznej do tej linji całkowej. Z wzoru (w) wynika, że:

$$\frac{dY}{dx} = \operatorname{tg}\beta = \frac{y}{1}$$

Związek ten prowadzi do następującej konstrukcji linji całkowej. Linja ta przechodzi przez punkt $B(a, 0)$. Od tego punktu odmierzamy na lewo odcinek $AB = 1$ i łączymy punkt P linji $y = f(x)$ z punktem A. Ponieważ $y : 1 = \operatorname{tg}\beta$, przeto bok AP trójkąta APB ma kierunek stycznej do linji całkowej. Przez punkt B wykreślamy prostą $t \parallel AP$; ta prosta jest styczną do linji całkowej w punkcie B. Przy pomocy takich stycznych, wykreślonych dla rozmaitych odciętych, buduje się linję całkową jako obwiednią tych stycznych. I tak obierzmy jakiś drugi punkt P' na danej linji L, należący do odciętej $x' = OB'$. Zastąpmy łuk $\overset{\frown}{PP'}$ linji L cięciwą PP'. Jeżeli cięciwa ta ma równanie $y = mx + n$, to odpowiadająca jej linja całkowa ma równanie $Y = \frac{m}{2}x^2 + nx + p$, jest zatem *parabolą* o osi równoległej do osi rzędnych. Znamy jeden punkt tej paraboli, a mianowicie B, chodzi zaś o znalezienie drugiego punktu P_1', należącego do odciętej OB'. Styczna w tym nieznanym punkcie ma być równoległa do prostej $A'P'$, którą otrzymujemy podobną konstrukcją, jak prostą AP. Otóż wiadomo z własności paraboli, że styczne w punktach o odciętych x i x' przecinają się w punkcie, którego odcięta jest średnią arytmetyczną: $\frac{1}{2}(x + x')$. Połowimy zatem odcinek BB' punktem D i wykreślamy przez ten punkt prostopadłą do osi odciętych. Punkt D', w którym styczna t przecina tę prostopadłą, leży zatem także na stycznej t', należącej do nieznanego punktu P_1'. Wykreślamy przez ten punkt D' prostą $t' \parallel A'P'$ i otrzymujemy w ten sposób drugi punkt linji całkowej, a mianowicie punkt P_1', należący do odciętej $x' = OB'$. Postępując w ten sposób dalej, dla dalszych punktów linji L, otrzymujemy szereg punktów linji całkowej; łączymy je następnie (przy pomocy krzywki) tak, aby otrzymana linja była styczna kolejno do prostych $t, t', t'', \ldots$ Chcąc uzyskać dobre przybliżenie, należy obrać dość gęsto punkty $P, P', P'', \ldots$ na linji różniczkowej L.

Wielokrotne odcinanie jednostki: $AB, A'B', A''B'', \ldots$ i linij $AP, A'P', A''P'', \ldots$ zaciera zwykle przejrzystość rysunku. Z tego powodu modyfikuje się zwykle konstrukcję w ten sposób, że odcina się ową jednostkę tylko raz, od początku układu 0 do punktu M o spół-

rzędnych $(-1, 0)$ (por. fig. 17b). Następnie rzucamy każdy punkt P, obrany na linji L, na oś y-ów do punktu Q i łączymy M z Q: prosta MQ jest równoległa do stycznej t. Wykonujemy zatem całą konstrukcję linji całkowej w następujący sposób. Obieramy na danej linji L szereg punktów $P, P_1, P_2 \ldots$ i rzucamy je na oś x-ów i y-ów. Połowimy odcinki $BB_1, B_1B_2 \ldots$ na osi x-ów i przez te punkty podziału wykreślamy pomocnicze linje prostopadłe do osi x-ów. Rzuty $Q, Q_1, Q_2, \ldots$ punktów $P, P_1, P_2 \ldots$ na oś y-ów łączymy z punktem M o spółrzędnych $(-1, 0)$. Przez punkt B wykreślamy prostą $t \parallel MQ$ aż do przecięcia się z najbliższą (pomocniczą) prostopadłą do osi x-ów. Z tego punktu prze-

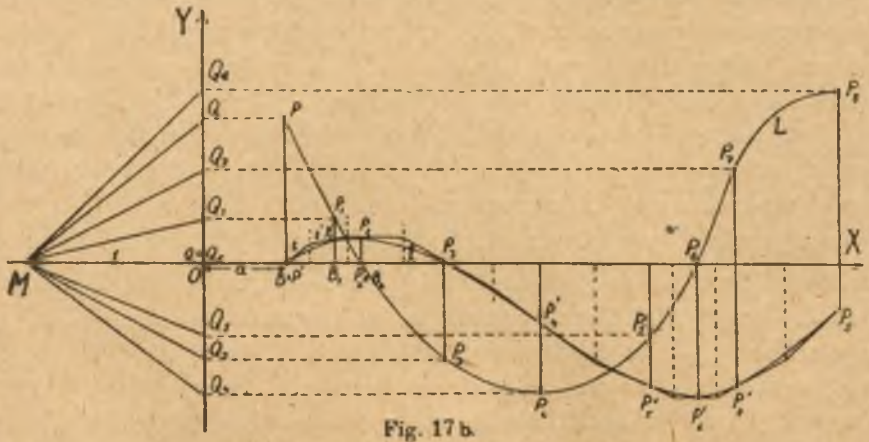


Fig. 17b.

cięcia wykreślamy prostą $t' \parallel MQ_1$ aż do przecięcia się z następną pomocniczą (kreskowaną) prostopadłą i tak samo postępujemy dalej. Otrzymamy w ten sposób szereg punktów $B, P'_1, P'_2 \ldots$ linji całkowej i szereg stycznych w tych punktach do linji całkowej. Przy pomocy krzywki wykreślamy całą linję całkową l. Gdybyśmy rozpoczęli konstrukcję nie od punktu B, lecz od dowolnego innego punktu tej prostej BP, to otrzymalibyśmy inną linję całkową l', jednakże przystającą do l, a mianowicie przesuniętą równolegle. W ten sposób można otrzymać całą gromadę funkcyj pierwotnych, zawartych w całce *nieoznaczonej*, t. j. obok linji o rzędnych Y, gromadę linij o rzędnych $Y + C$. Gdybyśmy zaś zamiast jednostki $MO = 1$ użyli innej jednostki: $MO = b$, to zamiast linji całkowej o rzędnych Y otrzymalibyśmy linję o rzędnych $\overline{Y} = \frac{1}{b}Y$.

Omówiona tu konstrukcja jest przybliżoną, albowiem polega ostatecznie na tem, że łuki linji L zastąpiliśmy *cięciwami*.

Jeżeli linja L jest zwrócona wypukłością ku górze, to widocznem jest, że wskutek takiej aproksymacji otrzymujemy wartości mniejsze od prawdziwych wartości całki, nie wyczerpujemy bowiem pola, zamkniętego tą linją, rzędnemi i osią odciętych.

Lepsze przybliżenie można uzyskać, zastępując łuki $\overset{\frown}{PP_1}, \overset{\frown}{P_1P_2}, \ldots$ nie cięciwami, lecz odcinkami prostych równoległych do osi x-ów; odcinki te trzeba dobierać na oko w ta-

kich wysokościach, aby przyczyniać z jednej strony takiego odcinka tyle pola, ile opuszczono z drugiej strony. Szczegółowe opracowanie tej ulepszonej metody znajdzie czytelnik w podręczniku C. Runge'go p. t. *Graphische Methoden*. (Lipsk 1915, rozdział III, str 96—112)

Opierając się na tej konstrukcji linij całkowych, zbudowano przyrząd, zwany *integrafem*, którym się rysuje w sposób mechaniczny linję całkową l do danej linji różniczkowej L: jeżeli jeden kolec mechanizmu, złożonego z odpowiednich prętów metalowych, wózków i kółek, posuwamy po linji L, to drugi kolec, opatrzony ołówkiem lub grafjonem, rysuje odpowiednią linję całkową l. Opis tego przyrządu, wynalezionego przez Abakanowicza, byłego profesora Politechniki lwowskiej, znaleźć można np. w podręczniku A. Galle'go p. t. *Mathematische Instrumente* (Lipsk 1912, rozdział IX, str. 154 i nast.) lub w dziełach zbiorowych Abakanowicza, Por. też St. Gołąb, *Wskazówki do ćwiczeń z integrafem Abakanowicza*, Kraków 1933.

§ 226. Całkowanie przybliżone liczbowe (numeryczne).

Jeżeli chodzi o obliczenie całki oznaczonej z takiej funkcji, dla której nie potrafimy obliczyć całki nieoznaczonej, to bardzo często, zwłaszcza w zastosowaniach praktycznych, poprzestajemy na obliczeniu przybliżonej wartości tej całki. Podobnie postępujemy, gdy funkcja podcałkowa jest dana tylko tabelarycznie.

A. Metoda prostokątów.

Najprostszą drogą, prowadzącą do tego celu, jest użycie wyrazów ciągów, zdążających do wartości badanej całki oznaczonej, omówionych w § 222. Biorąc odpowiednio daleki wyraz takiego ciągu, możemy otrzymać każdą zgóry żądaną dokładność. Każdy wyraz ciągu jest sumą pól prostokątów, mających za podstawy odcinki osi odciętych a za wysokości rzędne w dowolnych punktach tych odcinków. Najprościej przedstawi się rachunek, gdy przedział $\langle a, b \rangle$ podzielimy na równe części o długości: $h = \frac{b-a}{n}$ i w każdym przedziale weźmiemy początkową wartość funkcji, jak na fig. 18

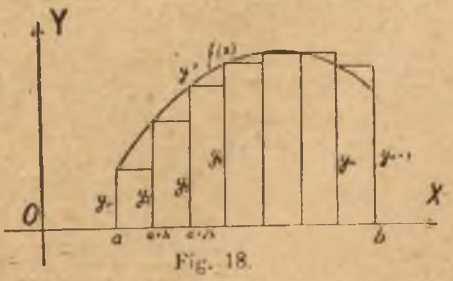


Fig. 18.

Przybliżoną wartością całki

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b y\,dx$$

jest zatem suma pól tych prostokątów, t. j.:

$$\sigma_n = h \cdot y_1 + h \cdot y_2 \ldots + h \cdot y_n$$

czyli:

$$\sigma_n = h(y_1 + y_2 + \cdots + y_n)$$

Używając znaku $\approx$ jako znaku przybliżonej równości, możemy zatem napisać:

$$(77) \qquad \boxed{I = \int_a^b f(x)\,dx \approx h(y_1 + y_2 + \cdots + y_n)}$$

Przybliżoną metodę obliczania całki oznaczonej przy pomocy tego wzoru nazywamy *metodą prostokątów*. Widocznem jest zarówno z geometrycznego przedstawienia jak i z własności ciągu σ_n, że przez powiększanie liczby n możemy uzyskać dowolny stopień aproksymacji.

Przykłady.

1) Zastosujmy powyższą metodę najpierw do znanej całki:

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{x} = \log_e x = \log_e 2 = 0{\cdot}6931471806$$

Tę samą całkę obliczymy teraz metodą prostokątów, a następnie porównamy z sobą wyniki.

Podzielmy przedział $\langle 1, 2\rangle$ na 10 równych części o długościach $h = \frac{2-1}{10} = 0{\cdot}1$. Rzędnemi w punktach $x = 1,\ 1{\cdot}1,\ 1{\cdot}2, \ldots 1{\cdot}9$ są $y = \frac{1}{1}, \frac{1}{1{\cdot}1}, \frac{1}{1{\cdot}2}, \cdots \frac{1}{1{\cdot}9}$. Według wzoru (77) otrzymujemy zatem:

$$I \approx 0{\cdot}1\left(1 + \frac{1}{1{\cdot}1} + \frac{1}{1{\cdot}2} + \frac{1}{1{\cdot}3} + \cdots + \frac{1}{1{\cdot}8} + \frac{1}{1{\cdot}9}\right)$$

$$= 0{\cdot}1 \left|\begin{array}{l|l} 1 & \\ 0{\cdot}90909 & 0\ldots \\ 0{\cdot}83333 & 3\ldots \\ 0{\cdot}76923 & 0\ldots \\ 0{\cdot}71428 & 5\ldots \\ 0{\cdot}66666 & 6\ldots \\ 0{\cdot}625 & \\ 0{\cdot}58823 & 5\ldots \\ 0{\cdot}55555 & 5\ldots \\ 0{\cdot}52631 & 5\ldots \end{array}\right.$$

$$\approx 0{\cdot}1 \cdot 7{\cdot}18771 = 0{\cdot}718771$$

Błąd wynosi: $0{\cdot}718771 - 0{\cdot}693147\ldots \approx 0{\cdot}025624$.

2) Znaleźć wartość przybliżoną całki:

$$I = \int_{10}^{20} \frac{dx}{\log_e x}$$

której nie potrafimy obliczyć elementarnemi metodami całkowania. Podzielmy przedział całkowania na 10 równych części o długościach $h = \frac{20 - 10}{10} = 1$. Stosując przybliżony wzór (77), otrzymujemy:

$$I \approx 1 \cdot \left(\frac{1}{\log_e 10} + \frac{1}{\log_e 11} + \frac{1}{\log_e 12} + \cdots + \frac{1}{\log_e 19} \right)$$

W tablicy logarytmów naturalnych znajdujemy występujące tu logarytmy, a dzielenia wykonywamy np. przy pomocy maszyny do rachowania i otrzymujemy:

$$\begin{array}{r|l} I \approx 0{\cdot}4342 & 9448 \\ 0{\cdot}4170 & 3239 \\ 0{\cdot}4024 & 2960 \\ 0{\cdot}3898 & 7125 \\ 0{\cdot}3789 & 2318 \\ 0{\cdot}3692 & 6937 \\ 0{\cdot}3606 & 7376 \\ 0{\cdot}3529 & 5613 \\ 0{\cdot}3459 & 7626 \\ 0{\cdot}3396 & 2327 \\ \hline I \approx 3{\cdot}7910 & \end{array}$$

Przy używaniu przybliżonej metody obliczania całki oznaczonej ważną jest rzeczą oszacowanie błędu, który się popełnia, biorąc zamiast prawdziwej wartości całki wartość przybliżoną. Jeżeli funkcja podcałkowa posiada pochodną ciągłą w przedziale $\langle a, b \rangle$, to nietrudno jest otrzymać dogodny wzór na oszacowanie tego błędu. I tak weźmy pod uwagę jeden przedział częściowy o szerokości h, np. $\langle c, c + h \rangle$. Obliczmy błąd:

$$\text{(I)} \qquad r(h) = \int_{c}^{c+h} f(x)\,dx - h\,f(c) = F(c + h) - F(c) - h\,f(c)$$

Widocznem jest, że $r(0) = 0$. Pochodne obu stron wzoru (I) względem h są równe, a więc:

$$r'(h) = f(c + h) - f(c)$$

Do prawej strony stosujemy twierdzenie o wartości średniej (Lagrange'a) i otrzymujemy:

$$r'(h) = hf'(c + \vartheta h) \qquad 0 < \vartheta < 1$$

Niechaj M' oznacza największą wartość funkcji $|f'(x)|$ w przedziale $\langle a, b\rangle$, to $-hM' \leqq r'(h) \leqq +hM'$ Scałkujmy tę nierówność od 0 do h, to otrzymamy:

$$-\tfrac{1}{2}M'h^2 \leqq r(h) \leqq \tfrac{1}{2}M'h^2$$

a to znaczy, że:

$$|r(h)| \leqq \tfrac{1}{2}h^2M'$$

Taki więc błąd wynika z zastąpienia całki w jednym przedziale częściowym polem prostokąta: $h \cdot f(c)$. Ponieważ zaś mamy n takich przedziałów, przeto na całkowity błąd R_n otrzymujemy oszacowanie:

$$|R_n| \leqq \tfrac{1}{2}nh^2M'$$

Ale:

$$h = \frac{b-a}{n}$$

a więc:

$$|R_n| \leqq \frac{(b-a)^2M'}{2n} \tag{78}$$

Widzimy stąd, że błąd dąży do zera, gdy n wzrasta nieograniczenie.

Tak np. w przykładzie 1) otrzymujemy

$$|R_{10}| \leqq \frac{(2-1)^2 \cdot M'}{2 \cdot 10} = \frac{M'}{20}$$

Ponieważ $f(x) = \frac{1}{x}$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, przeto $M' = \max|f'(x)| = \frac{1}{1^2} = 1$

Ostatecznie więc:

$$|R_{10}| \leqq \tfrac{1}{20} = 0{\cdot}05$$

Błąd faktyczny wynosi tylko 0·0256...

Pozostawiamy czytelnikowi do stwierdzenia, że bezwzględna wartość błędu w drugim przykładzie nie przekracza liczby: $\frac{1}{2\log_e^2 10} = \frac{1}{2}\log_{10}^2 e = 0{\cdot}0943\ldots$

B. Metoda trapezów.

Lepszą na ogół aproksymację uzyskujemy, biorąc w każdym pasku na fig. 18 za wysokość prostokąta średnią arytmetyczną obu rzędnych, ograniczających ten pasek, czyli zastępując każdy pierwotny prostokąt trapezem, którego dwa wierzchołki leżą na danej linji o równaniu $y = f(x)$. Suma tych trapezów daje zwykle lepszą aproksymację aniżeli suma pierwotnych prostokątów (mających za wysokości początkowe rzędne). W ten sposób otrzymujemy zamiast ciągu σ_n inny ciąg:

$$\sigma_n' = h\left(\frac{y_1+y_2}{2} + \frac{y_2+y_3}{2} + \frac{y_3+y_4}{2} + \ldots + \frac{y_n+y_{n+1}}{2}\right)$$

czyli:

$$\sigma_n' = h(\tfrac{1}{2}y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_n + \tfrac{1}{2}y_{n+1})$$

Ten nowy wzór na przybliżoną wartość całki nazywamy *wzorem trapezowym*. Zatem:

$$(79) \qquad \boxed{I \approx h\left(\tfrac{1}{2}y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_n + \tfrac{1}{2}y_{n+1}\right)}$$

Prawa strona tego wzoru różni się od wzoru (77) tylko tem, że w nawiasie ubyło $\frac{1}{2}y_1$ a przybyło $\frac{1}{2}y_{n+1}$, a więc:

$$\sigma_n' = \sigma_n + \tfrac{h}{2}(y_{n+1} - y_1)$$

Rachunki są tu więc równie proste, jak przy metodzie prostokątów, a dokładność jest zwykle znacznie większa.

I tak np. dla całki $\int_1^2 \frac{dx}{x}$, omówionej w przykładzie 1) na str. 118, trzeba dodać do wyniku, otrzymanego metodą prostokątów, $\frac{0{\cdot}1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right) =$ $= -\frac{0{\cdot}1}{4} = -0{\cdot}025$. Otrzymamy w ten sposób:

$$I \approx 0{\cdot}718771 - 0{\cdot}025 = 0{\cdot}693771$$

Wynik ten jest o wiele dokładniejszy, albowiem błąd wynosi tylko:

$$0{\cdot}693\,771 - 0{\cdot}693147 = 0{\cdot}000624$$

Stosując metodę trapezów do drugiego przykładu na str. 119, otrzymujemy:

$$I \approx 3{\cdot}7910 + \tfrac{1}{2}(0{\cdot}33381 - 0{\cdot}43429) = 3{\cdot}7408$$

W podobny sposób, jak dla metody prostokątów, wyprowadza się dla metody trapezów wzór na oszacowanie błędu, który popełniamy, biorąc zamiast prawdziwej wartości całki wartość przybliżoną, otrzymaną z wzoru (79). Trzeba mianowicie dwukrotnie zróżniczkować obie strony wzoru:

$$r(h) = \int_c^{c+h} f(x)\,dx - h\,\frac{f(c) + f(c+h)}{2}$$

Otrzyma się:

$$r''(h) = -\frac{h}{2}\,f''(c+h)$$

W sposób podobny, jak przy metodzie prostokątów, otrzymuje się na błąd w jednym przedziale częściowym wzór:

$$|r(h)| \leqq \frac{h^3}{12}M''$$

a dla n całek, t. j. dla całego przedziału $\langle a, b\rangle$, wzór:

$$|R_n| \leqq \frac{nh^3}{12}M''$$

gdzie M'' oznacza największą wartość funkcji $|f''(x)|$ w przedziale $\langle a, b\rangle$. Ponieważ

$h = \frac{b-a}{n}$, przeto otrzymujemy ostatecznie:

(80) $$|R_n| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M''$$

C. Metoda łuków parabolicznych. Wzór Simpsona.

Wzór trapezowy możemy interpretować geometrycznie w ten sposób, że zastępujemy badaną linję o równaniu $y = f(x)$ w każdym częściowym przedziale $\langle x_k, x_{k+1} \rangle$ o szerokości h linją prostą, przechodzącą przez *dwa* punkty $(x_k, y_k), (x_{k+1}, y_{k+1})$ danej linji. Jasnem jest, że lepszą aproksymację uzyskamy zwykle dla linji krzywej, zastępując ją w każdym przedziale $\langle x_k, x_{k+2} \rangle$ o szerokości $2h$ łukiem *paraboli* drugiego stopnia, przechodzącej przez *trzy* punkty (x_k, y_k), (x_{k+1}, y_{k+1}), (x_{k+2}, y_{k+2}) i obliczając pola powierzchni, ograniczonych temi łukami parabolicznemi i odpowiedniemi rzędnemi. Ponieważ punkty na osi x-ów obieramy w równych od siebie odstępach, przeto możemy użyć do obliczenia tych pól wzoru (65) z przykładu 6 na str. 86, a mianowicie:

(a) $$p = \frac{x_{k+2} - x_k}{6}(y_k + 4y_{k+1} + y_{k+2})$$

Dzielimy przedział $\langle a, b \rangle$ na $2n$ równych części o długościach $h = \frac{b-a}{2n}$ i obliczamy rzędne: $y_1, y_2, y_3 \cdots y_{2n-1}, y_{2n}, y_{2n+1}$. Powierzchnia rozpadnie się na n par przylegających do siebie pasków. W każdej parze pasków zastępujemy łuk danej krzywej łukiem paraboli drugiego stopnia, przechodzącej przez trzy punkty danej krzywej, należące do trzech sąsiednich punktów podziału odcinka $\langle a, b \rangle$. Pole to obliczamy według wzoru (a). Ponieważ $x_{k+2} - x_k = 2h$, przeto otrzymamy w ten sposób następujący wzór na obliczenie przybliżonej wartości całki:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \approx \tfrac{h}{3}(y_1 + 4y_2 + y_3 + y_3 + 4y_4 + y_5 + y_5 + \cdots + y_{2n-1} + 4y_{2n} + y_{2n+1})$$

czyli:

(81) $$\boxed{I \approx \tfrac{h}{3}(y_1 + y_{2n+1} + 2(y_3 + y_5 + \cdots + y_{2n-1}) + 4(y_2 + y_4 + \cdots + y_{2n})}$$

Ten wzór przybliżony, wynikający z użycia pasków parabolicznych, nazywamy wzorem Simpsona.

Rozumowaniem podobnem, jak dla metody prostokątów i trapezów, oblicza się błąd, wynikający z zastąpienia całki w jednej parze takich pasków wartością p z wzoru (a), t. j. $r(h) = \int_{c-h}^{c+h} f(x)\,dx - \frac{h}{3}(f(c-h) + 4f(c) + f(c+h))$.

Przez trzykrotne różniczkowanie otrzymuje się:

$$r'''(h) = -\frac{h}{3}\left(f'''(c+h) - f'''(c-h)\right) = -\tfrac{1}{3}h^2 f^{(4)}(\xi)$$

a stąd:

$$-\tfrac{1}{3}h^2 M^{(4)} \leq r'''(h) \leq \tfrac{1}{3}h^2 M^{(4)}$$

Następnie przez trzykrotne całkowanie otrzymujemy:

$$|r(h)| \leq \frac{4h^5}{3 \cdot 5!} M^{(4)}$$

Stąd otrzymujemy dla n par pasków, kładąc $h = \frac{b-a}{2n}$

$$|R_{2n}| \leq \frac{(b-a)^5}{2880 n^4} M^{(4)} \tag{82}$$

Tutaj $M^{(4)}$ oznacza największą wartość funkcji $|f^{(4)}(x)|$ w przedziale $\langle a, b \rangle$

Przykłady.

1) Zastosujmy wzór Simpsona do przykładu 1 na str. 118, biorąc $2n = 10$. Wtedy:

$$I \approx \frac{0{\cdot}1}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + 2\left(\frac{1}{1{\cdot}2} + \frac{1}{1{\cdot}4} + \frac{1}{1{\cdot}6} + \frac{1}{1{\cdot}8}\right) + 4\left(\frac{1}{1{\cdot}1} + \frac{1}{1{\cdot}3} + \frac{1}{1{\cdot}5} + \frac{1}{1{\cdot}7} + \frac{1}{1{\cdot}9}\right)\right)$$

$$= \frac{0{\cdot}1}{3}\left(1{\cdot}5 + 2 \cdot 2{\cdot}728173 + 4 \cdot 3{\cdot}459546\right) = \frac{0{\cdot}1}{3} \cdot 20{\cdot}794490$$

czyli $I \approx 0{\cdot}6931497$.

Porównując ten wynik z prawdziwą wartością całki $\int_1^2 \frac{dx}{x} = 0{\cdot}6931471\ldots$, widzimy, że błąd występuje tu dopiero na 6-em miejscu po kropce dziesiętnej. Przez zastosowanie wzoru (82) otrzymujemy:

$$|R_{10}| \leq \frac{(2-1)^5}{2880 \cdot 5^4} \cdot 24 = \frac{1}{75000} = 0{\cdot}000013\ldots$$

Dokładność taka jest zwykle dla celów praktycznych zupełnie wystarczająca.

2) Niechaj czytelnik obliczy na podstawie liczb, podanych w przykładzie 2 na str. 119 i liczby $\frac{1}{\log_e 20} = 0{\cdot}33380820$, następującą przybliżoną wartość całki:

$$\int_{10}^{20} \frac{dx}{\log_e x} \approx 3{\cdot}7397$$

3) $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{1}{4}\pi$

Obliczyć tę wartość w przybliżeniu przy pomocy wzoru Simpsona, dzieląc przedział całkowania na 16 równych części

$$I \approx \tfrac{1}{48}(y_1 + y_{17} + 2(y_3 + y_5 + \ldots + y_{15}) + 4(y_2 + y_4 + \ldots + y_{16}))$$

Dla:

$$x = 0, \tfrac{1}{16}, \tfrac{2}{16}, \tfrac{3}{16}, \tfrac{4}{16}, \ldots \tfrac{15}{16}, \tfrac{16}{16}$$

otrzymujemy.

$$y = 1, \tfrac{256}{287}, \tfrac{256}{260}, \tfrac{256}{265}, \ldots \tfrac{256}{481}, \tfrac{1}{2}$$

Zatem:

$$\begin{aligned}
y_1 &= 1 \\
y_2 &= 0{\cdot}99610\,89494 \\
y_3 &= 0{\cdot}98461\,53846 \\
y_4 &= 0{\cdot}96603\,77358 \\
y_5 &= 0{\cdot}94117\,64706 \\
y_6 &= 0{\cdot}91103\,20285 \\
y_7 &= 0{\cdot}87671\,23288 \\
y_8 &= 0{\cdot}83934\,42623 \\
y_9 &= 0{\cdot}8 \\
y_{10} &= 0{\cdot}75964\,39169 \\
y_{11} &= 0{\cdot}71910\,11236 \\
y_{12} &= 0{\cdot}67904\,50928 \\
y_{13} &= 0{\cdot}64 \\
y_{14} &= 0{\cdot}60235\,29412 \\
y_{15} &= 0{\cdot}56637\,16814 \\
y_{16} &= 0{\cdot}53222\,45322 \\
y_{17} &= 0{\cdot}5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_1 + y_{17} &= 1{\cdot}5 \\
2(y_3 + y_5 + y_7 + \ldots + y_{15}) &= 2{\cdot}5\,5279769890 = 11{\cdot}0559539780 \\
4(y_2 + y_4 + y_6 + \ldots + y_{16}) &= 4{\cdot}6\,2857894601 = 25{\cdot}1431578404 \\
I &\approx \tfrac{1}{48} \cdot 37{\cdot}6991118184
\end{aligned}$$

Stąd:

$$4I \approx 37{\cdot}6991118184 : 12 = 3{\cdot}14159\,265\underline{15}$$

Ponieważ zaś:

$$4I = \pi = 3{\cdot}14159265\underline{3589}$$

przeto widzimy, że błąd wystąpił tu dopiero na 9-tem miejscu po kropce dziesiętnej.

Wzór trapezowy i wzór Simpsona można dalej uogólniać w rozmaite sposoby I tak wzór trapezowy polega na zastąpieniu funkcji $f(x)$ funkcją $y = a_0 + a_1 x$ (t. j. badanej linji linją prostą) w każdym przedziale częściowym o szerokości h; wzór zaś Simpsona polegał na zastąpieniu funkcji $f(x)$ funkcją $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ (t. j.

badanej linji parabolą drugiego stopnia) w przedziałach o szerokości $2h$. Otóż wyprowadzono wzory, polegające na zastąpieniu $f(x)$ funkcją: $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ w każdym przedziale częściowym o szerokości $3h$ i ogólnie funkcją n-tego stopnia w przedziałach o szerokości nh. Wszystkie te wzory, których specjalnemi przypadkami są wzory: trapezowy i Simpsona, nazywamy wzorami Newtona-Cotes'a.

Dalsze udoskonalenie przybliżonych metod całkowania uzyskano, obierając na osi x-ów odstępy nierówne w odpowiedni sposób. Na tej myśli przewodniej opierają się przybliżone metody całkowania Gaussa i Czebyszewa. Szczegółowe omówienie tych wszystkich metod wraz z licznemi przykładami znajdzie czytelnik w następujących podręcznikach: C. Runge und H. König, *Numerisches Rechnen* (Berlin 1924, str. 238—285), E. Whittaker und G. Robinson, *The Calculus of Observations* (London 1926, str. 132, 163) i G. Kowalewski, *Integration und genäherte Quadratur* (Leipzig 1932).

ROZDZIAŁ XIX.

Zastosowania całek oznaczonych do geometrji i do mechaniki.

§ 227. Pola wycinków.

W poprzednim rozdziale omówiliśmy zastosowanie całek oznaczonych do obliczania pól figur, ograniczonych łukiem dowolnej linji o równaniu $y = f(x)$, rzędnemi w końcowych punktach takiego łuku i osią odciętych. Opierając się na wynikach, uzyskanych w tych rozważaniach, a w szczególności na wzorach (46) z § 212, wyprowadzimy obecnie wzór na *pole wycinka*, ograniczonego łukiem dowolnej linji i promieniami, łączącemi końce tego łuku z początkiem układu. Weźmy najpierw pod uwagę tylko takie łuki, w których do jednej odciętej należy tylko jedna wartość rzędnej, a więc których równanie da się ująć jedną (jednoznaczną) funkcją $y = f(x)$ (por. fig. 19). Oznaczmy końce tego łuku literami A i B w takim porządku, abyśmy, przebiegając pokolei punkty O, A, B mieli powierzchnię wycinka po lewej ręce czyli aby obrót, sprowadzający prostą OA do nakrycia z prostą OB, miał kierunek dodatni, to znaczy taki, jak obrót, sprowadzający dodatnią część osi OX do nakrycia z dodatnią częścią osi OY. Z figury tej odczytujemy, że pole W wycinka OAB jest równe polu trójkąta $OB'B$, pomniejszonemu o pole trójkąta $OA'A$ i o pole krzywolinjowego czworokąta $A'B'BA$. Zatem:

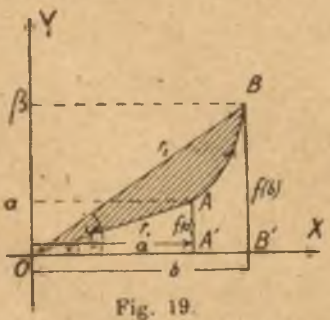


Fig. 19.

$$\text{(a)} \qquad W = \tfrac{1}{2} b f(b) - \tfrac{1}{2} a f(a) - \int_a^b y\,dx$$

Na tej figurze cały łuk $\overset{\frown}{AB}$ leży wewnątrz pierwszej ćwiartki. Nietrudno jednak stwierdzić, że ten sam wzór (a) utrzymuje się ogólnie, przy dowolnych położeniach punktów A i B, jeżeli tylko przy posuwaniu się po

łuku od A do B mamy po lewej ręce pole wycinka. Tak np. pole wycinka OAB na fig. 20 oblicza się w następujący sposób:

$$W = OAB = OAC + OCB =$$
$$= OAA' - AA'C + BCB' + OB'B$$

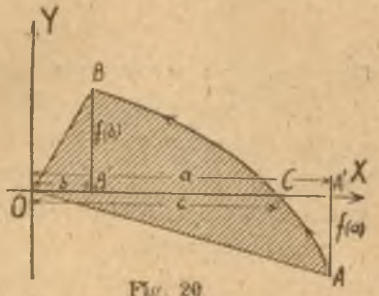


Fig. 20

Pole trójkąta OAA' ma wartość $-\frac{1}{2}a \cdot f(a)$, ponieważ rzędna $f(a)$ ma tu wartość ujemną. Pole $OB'B = \frac{1}{2}b \cdot f(b)$ a pozostałe pola $AA'C$ i BCB' oblicza się przy pomocy całek:

$$-AA'C = \int_c^a f(x)\,dx$$

ponieważ funkcja $f(x)$ jest ujemna w przedziale (c, a), a:

$$BCB' = \int_c^c f(x)\,dx$$

Zatem:

$$W = -\tfrac{1}{2}a f(a) + \int_c^a f(x)\,dx + \int_c^c f(x)\,dx + \tfrac{1}{2}b f(b)$$

czyli:

$$W = \tfrac{1}{2}b f(b) - \tfrac{1}{2}a f(a) - \int_a^b f(x)\,dx$$

zgodnie z wzorem (a).

Niechaj czytelnik stwierdzi prawdziwość tego wzoru także dla innych położeń łuku $\overset{\frown}{AB}$, np. gdy łuk przebiega pierwszą, czwartą i trzecią ćwiartkę płaszczyzny!

Sprowadzimy wzór (a) do dogodniejszej, symetrycznej postaci.

I tak widocznem jest, że:

$$b f(b) - a f(a) = x f(x)\Big|_a^b = xy\Big|_a^b = \int_a^b (xy)'\,dx$$

a więc:

$$\tfrac{1}{2}b f(b) - \tfrac{1}{2}a f(a) = \tfrac{1}{2}\int_a^b (xy)'\,dx$$

Wobec tego:

$$W = \tfrac{1}{2}\int_a^b (xy)'\,dx - \int_a^b y\,dx = \tfrac{1}{2}\int_a^b (x\,dy + y\,dx - 2y\,dx)$$

a więc:

$$W = \frac{1}{2}\int_{x=a}^{x=b} (x\,dy - y\,dx) \tag{83}$$

Otrzymaliśmy w ten sposób *wzór* (Leibniza) *na pole wycinka.*

W ciągu całego rozumowania uważaliśmy x za zmienną niezależną a y za (jednoznaczną) funkcję tej zmiennej. Wobec tego należy za dy podstawić we wzorze (83) wartość $y' \cdot dx$ i dopiero wtedy wykonać całkowanie według zmiennej x w granicach od a do b. Gdyby zaś x było jednoznaczną funkcją zmiennej y, to możnaby wyrazić wszystko zapomocą zmiennej y, a więc za dx podstawić $x'dy$ i całkować według zmiennej y w odpowiednio zmienionych granicach, np od α do β (por. fig. 19). Jeżeli zaś x i y są podane jako funkcje zmiennej t, to znaczy *w przedstawieniu parametrowem*, to wzór (83) ma, po wprowadzeniu nowej zmiennej t zapomocą podstawienia $x = \varphi(t)$, postać:

$$W = \frac{1}{2}\int_{t_A}^{t_B} (xy' - x'y)\,dt \tag{84}$$

Liczby t_A i t_B są to wartości parametru t, odpowiadające punktom A i B.

Bardzo prostą formę przyjmuje wzór na pole wycinka przy użyciu spółrzędnych biegunowych. I tak jeżeli równanie linji, ograniczającej wycinek, jest podane w formie biegunowej: $r = r(\varphi)$, to uzyskamy następujące przedstawienie parametrowe:

$$x = r(\varphi)\cos\varphi, \quad y = r(\varphi)\sin\varphi$$

Stąd:

$$dx = (r'\cos\varphi - r\sin\varphi)\,d\varphi, \quad dy = (r'\sin\varphi + r\cos\varphi)\,d\varphi$$

a więc:

$$x\,dy - y\,dx = (rr'\sin\varphi\cos\varphi + r^2\cos^2\varphi - rr'\sin\varphi\cos\varphi + r^2\sin^2\varphi)\,d\varphi = r^2 d\varphi$$

Wzór (83) przyjmuje zatem dla spółrzędnych biegunowych postać:

$$W = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2\,d\varphi \tag{85}$$

Wzory (84) i (85) są *ogólniejsze* od wzoru (83). Zaznaczyliśmy mianowicie wyraźnie, że wzór (83) odnosi się tylko do takich wycinków, których łuk ma z każdą prostą równoległą do osi rzędnych najwyżej jeden punkt wspólny.

Chcąc zaś obliczyć pole takiego wycinka, jak np. wycinek OAB na fig. 21, należałoby go rozłożyć na dwie części: OAC i OCB, obliczyć wartość odciętej c punktu C i stosować dwukrotnie wzór (83). Raz należałoby podstawić za y funkcję $y_1 = f_1(x)$, t. j. równanie dolnej części łuku, a drugi raz $y_2 = f_2(x)$, t. j. równanie górnej części łuku. W ten sposób otrzymuje się na pole takiego wycinka dość zawiły wzór:

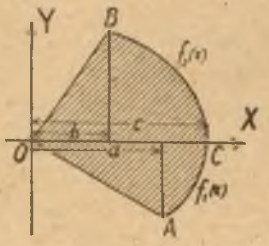


Fig. 21.

$$W = \tfrac{1}{2}\int_a^c (x\,dy_1 - y_1\,dx) + \tfrac{1}{2}\int_c^b (x\,dy_2 - y_2\,dx)$$

Natomiast przy przedstawieniu parametrowem bardzo często nie trzeba zmieniać funkcyj $x(t)$ i $y(t)$, albowiem przy zmianie parametru t od t_A do t_B mogą wartości tych samych funkcyj $x(t)$ i $y(t)$ przebiegać spółrzędne całego łuku $\overset{\frown}{ACB}$ (np. w elipsie, w kole). Otrzymamy więc w takim razie:

$$W = \tfrac{1}{2}\int_{t_A}^{t_C} (xy' - x'y)\,dt + \tfrac{1}{2}\int_{t_C}^{t_B} (xy' - x'y)\,dt = \tfrac{1}{2}\int_{t_A}^{t_B} (xy' - x'y)\,dt$$

W takich więc przypadkach — najpospolitszych w praktyce — można używać wzoru (84) bez żadnej zmiany, natomiast wzór (83) musi ulegać dość znacznym modyfikacjom. To samo odnosi się oczywiście także do wzoru (85), który jest specjalnym przypadkiem wzoru (84).

Zdarza się, że przy zmianie parametru t od t_1 do t_2 punkt (x, y) przebiega jakąś linję zamkniętą. Wtedy wzór (84) lub (85) może służyć do obliczenia nietylko wycinka, lecz całego pola, ograniczonego tą linją zamkniętą, jeżeli się tylko ta linja zamknięta nie przecina sama z sobą (t. j. jeżeli nie ma punktów węzłowych). Przy używaniu tych wszystkich wzorów na pole wycinka trzeba zawsze uważać na kierunek przebiegania łuku. Przy zmianie kierunku należy pomieniać z sobą granice całkowania lub zmienić znak funkcji podcałkowej: jeżeli tego nie uczynimy, to otrzymamy ujemną wartość pola.

Przykłady.

1) Znaleźć pole wycinka linji rozwijającej koła (por. tom I, § 169, str. 513) od $t = 0$ do $t = t_1$ (por. fig. 22). Równania tej linji mają w formie parametrowej postać:

$$x = R(\cos t + t \sin t)$$
$$y = R(\sin t - t \cos t)$$

Gdybyśmy chcieli użyć spółrzędnych prostokątnych, to należałoby to pole rozdzielić na dwie części: OAC i OCB, przyczem punkt C trzebaby wy-

znaczyć zapomocą extremum względem osi y-ów. Pole wycinka jest sumą tych pól. Przy użyciu przedstawienia parametrowego ten rozkład nie jest potrzebny, lecz można odrazu zastosować wzór (84). Ponieważ

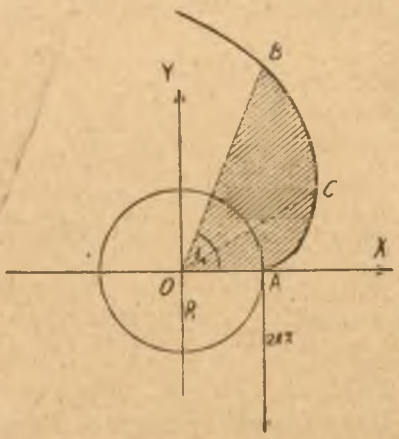


Fig. 22.

$$x' = R(-\sin t + t\cos t + \sin t) = Rt\cos t$$
$$y' = R(\cos t + t\sin t - \cos t) = Rt\sin t$$

przeto:

$$xy' - x'y = R^2t(\sin t\cos t + t\sin^2 t - \sin t\cos t + t\cos^2 t) = R^2t^2$$

Zatem:

$$W = \frac{1}{2}\int_0^{t_1} R^2t^2\,dt = \frac{1}{6}R^2t^3\Big|_0^{t_1} = \underline{\frac{1}{6}R^2t_1^3}$$

2) Obliczyć pole wycinka spiralnej Archimedesa od $\varphi = 0$ do $\varphi = \varphi_1$. Równanie tej spiralnej ma w formie biegunowej postać

$$r = a\varphi$$

Przy użyciu wzoru (85) otrzymujemy

$$W = \frac{1}{2}\int_0^{\varphi_1} a^2\varphi^2\,d\varphi = \frac{1}{6}a^2\varphi^3\Big|_0^{\varphi_1} = \underline{\frac{1}{6}a^2\varphi_1^3}$$

Gdybyśmy obrali $\varphi_1 > 2\pi$, to niektóre części pola byłyby przytem policzone dwukrotnie lub więcej razy.

3) Obliczyć pole, zamknięte lemniskatą. Biegunowe równanie lemniskaty ma postać:

$$r^2 = a^2\cos 2\varphi$$

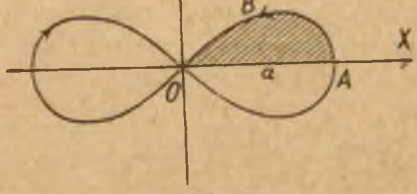


Fig. 23.

Promień r zakreśla ćwiartkę całego pola (zacieniowaną na fig. 23), gdy kąt φ zmienia się od 0 do $\frac{1}{2}\pi$. Zatem pole tej ćwiartki obliczymy z wzoru:

$$\frac{1}{4}P = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos 2\varphi\,d\varphi$$

Stąd:

$$P = 2\cdot\frac{a^2\sin 2\varphi}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \underline{a^2}$$

Zatem pole, zamknięte lemniskatą, jest równe polu kwadratu o boku OA.

§ 228. Planimetr biegunowy.

Obmyślono wiele przyrządów do wyznaczania wielkości pola drogą mechaniczną. Przyrządy te nazywamy *planimetrami*.

Opis i teorję rozmaitych planimetrów znaleźć można w podręczniku A. Galle'go, p. t. *Mathematische Instrumente* (Lipsk 1912 r., str. 66—131).

Najbardziej rozpowszechnionym jest planimetr biegunowy Amslera. Składa się on z dwóch prętów AO i AB (fig. 24), złączonych w punkcie A tak, że mogą się obracać koło tego punktu. Koniec O pręta OA jest przytwierdzony do płaszczyzny rysunku a koniec B pręta AB przesuwamy po obwodzie powierzchni P której pole chcemy wyznaczyć. Do pręta AB jest przytwierdzone kółko K, połączone z mechanizmem zegarowym, który pozwala wyznaczyć dokładnie liczbę obrotów i części obrotów kółka. Oznaczmy odległość punktu A od B literą R. Okazuje się, że wielkość pola P otrzymuje się z bardzo prostego wzoru:

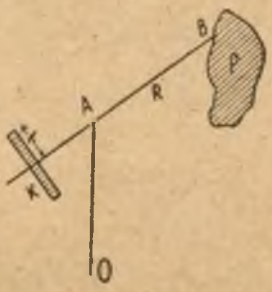


Fig. 24.

$$(a) \qquad P = R \cdot s$$

przyczem s oznacza drogę, zakreśloną przez punkt na obwodzie kółka K. Jeżeli więc r oznacza promień tego kółka a n liczbę obrotów (wraz z ułamkami obrotów), to $s = 2 r \pi n$, a zatem:

$$P = 2 r \pi R \cdot n$$

Stały spółczynnik $2 r \pi R = C$ nazywamy *stałą planimetru*. Wzór na pole przyjmuje zatem postać:

$$(b) \qquad P = C \cdot n$$

Stałej C nie trzeba wyznaczać zapomocą dość żmudnych pomiarów R i r, lecz można ją otrzymać drogą empiryczną. Tak np. rysujemy koło o promieniu 10 cm i obwodzimy je planimetrem. Jeżeli np. mechanizm zegarowy wskaże, że kółko wykonało przytem 32·35 obrotów, to ponieważ pole wynosi 314·159... cm^2, przeto:

$$314{\cdot}159\ldots = C \cdot 32{\cdot}35$$

a stąd otrzymujemy na stałą C wartość $314{\cdot}159\ldots : 32{\cdot}35 = 9{\cdot}71\ldots$

Dokładna teorja tego przyrządu jest dość skomplikowana. Podamy tu tylko poglądowy dowód wzoru (a). Przy wszystkich ruchach planimetru porusza się punkt A (fig. 25) po obwodzie koła o promieniu OA a o środku O. Gdy punkt B obiega obwód danego pola, to pręt AB zakreśla jakąś powierzchnię P'. Oznaczmy literą f tę część powierzchni P', która nie należy do P. Tę część przebiegamy dwukrotnie, przyczem dodajemy ją przy ruchu pręta w jedną stronę a odejmujemy przy ruchu w stronę przeciwną.

Wobec tego:

$$P' = P + f - f = P$$

Aby więc otrzymać szukane pole P, badamy całe pole P', uwzględniając przytem rozmaite znaki części składowych. Weźmy pod uwagę powierzchnię, zakreśloną przez pręt przy dość małej zmianie położenia, jak np. powierzchnię AA_1B_1B na fig. 26. Pręt przeszedł z położenia AB w położenie A_1B_1. Zastąpmy ten ruch pręta dwoma ruchami: najpierw niechaj się pręt porusza w kierunku prostopadłym do AB tak daleko, aż znajdzie się na prostej, na której leży A_1. Pręt zakreśli przytem prostokąt $ABCD$, a kółko, umieszczone na nim, obróci się o kąt, odpowiadający długości łuku Δs. Następnie posuńmy pręt po tej prostej w położenie A_1C', przyczem kółko nie wykona żadnego obrotu. Wkońcu obróćmy pręt około punktu A_1 tak, aby zajął położenie A_1B_1. Zakreśla on przytem wycinek koła $A_1C'B_1$, a kółko nie wykona żadnego obrotu. Powierzchnia, zakreślona przy tych dwóch ruchach, ma pole:

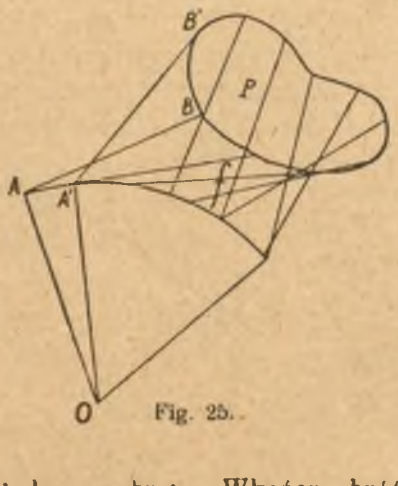


Fig. 25.

$$R \cdot \Delta s + \tfrac{1}{2} R^2 \Delta\varphi$$

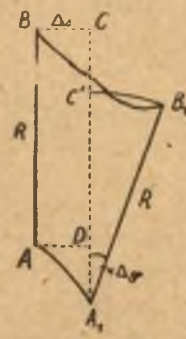


Fig. 26.

Podzielmy całe pole P' na takie elementy AA_1B_1B i każdy z nich zastąpmy w podobny sposób prostokątem i wycinkiem. Otrzymamy sumę:

$$\sum_{i=1}^{n} R\Delta s_i + \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2} R^2 \Delta\varphi_i$$

Gdy rozdrabniamy podział coraz bardziej, tak że wszystkie Δs_i i $\Delta\varphi_i$ dążą do zera, to granica, do której dążą powyższe sumy, daje wielkość pola P', zakreślonego istotnie przez pręt. Granicą pierwszej sumy jest $R \cdot s$, przyczem s oznacza łuk, zakreślony przez obrót kółka przy całkowitym obiegu badanego pola. Granicą drugiej sumy jest całka:

$$\int_{\varphi}^{\varphi_2} \tfrac{1}{2} R^2 d\varphi = \tfrac{1}{2} R^2 (\varphi_2 - \varphi_1)$$

przyczem φ_1 oznacza nachylenie pręta do jakiejś obranej osi na początku ruchu a φ_2 na końcu. Ponieważ pręt wraca po obiegu całego pola spo-

wrotem do swego pierwotnego położenia, przeto $\varphi_2 = \varphi_1$, a więc ta całka ma wartość 0 i zostaje:

$$P' = P = Rs$$

zgodnie z wzorem (a).

Ścisły dowód tego wzoru, polegający na wzorze (83) na pole wycinków, znajdzie czytelnik w podręczniku R. Rothe'go p. t. *Höhere Mathematik*, tom II (Lipsk 1929, str. 71 i nast.). Także w podręcznikach geodezji podaje się zwykle teorję rozmaitych planimetrów.

§ 229. Długość łuku.

Drugiem nadzwyczaj ważnem geometrycznem zastosowaniem pojęcia całki jest definicja i obliczanie *długości łuków* dowolnej linji.

Weźmy pod uwagę łuk $\overset{\frown}{AB}$ linji o równaniu $y = f(x)$ (por. fig. 27). Podzielmy ten łuk punktami $C_1^{(1)}, C_2^{(1)} \ldots C_{n_1-1}^{(1)}$ na n_1 dowolnych, niekoniecznie równych części i wpiszmy w ten łuk linję łamaną, łącząc kolejne punkty podziału A i $C_1^{(1)}$, $C_1^{(1)}$ i $C_2^{(1)}$... cięciwami $c_1^{(1)}, c_2^{(1)}, \ldots c_{n_1}^{(1)}$. Długość $Ł_1$ tej linji łamanej jest równa:

$$Ł_1 = c_1^{(1)} + c_2^{(1)} + \ldots + c_{n_1}^{(1)} = \sum_{i=1}^{n_1} c_i^{(1)}$$

Tworzymy ciąg takich linij łamanych, zwiększając nieograniczenie liczbę cięciw, jednakże w taki sposób, aby ciąg, utworzony z największych cięciw każdego podziału, dążył do zera (wtedy wszystkie ciągi cięciw, wybranych po jednej z każdego podziału, dążą do zera). Jeżeli wszystkie takie ciągi $Ł_1, Ł_2, \ldots Ł_p \ldots$ długości tych linij łamanych posiadają wspólną granicę, to tę granicę nazywamy *długością łuku* od A do B i oznaczamy ją zwykle literą s. Do istnienia skończonej granicy nie wystarczy tu, aby $f(x)$ była funkcją ciągłą w przedziale $\langle a, b \rangle$, albowiem linja, która jest obrazem tej funkcji, może posiadać tak gęste i tak znaczne falowania, że ciąg długości linij łamanych, wpisanych w tę linję, dąży do nieskończoności. Okażemy natomiast, że dostatecznym warunkiem istnienia (skończonej) długości łuku jest, aby pochodna $f'(x)$ była funkcją ciągłą w przedziale $\langle a, b \rangle$.

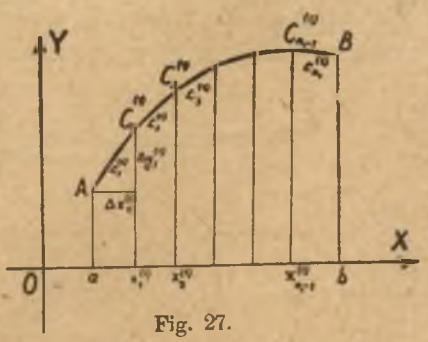


Fig. 27.

Dowód. Długość każdej cięciwy, np. $c_i^{(1)}$, wyrażamy wzorem:

$$c_i^{(1)} = \sqrt{\Delta x_i^{(1)2} + \Delta y_i^{(1)2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i^{(1)}}{\Delta x_i^{(1)}}\right)^2} \cdot \Delta x_i^{(1)}$$

Ale:

$$\Delta y_i^{(1)} = f(x_i^{(1)} + \Delta x_i^{(1)}) - f(x_i^{(1)}) = f'(\xi_i^{(1)}) \cdot \Delta x_i^{(1)}$$

przyczem $\xi_i^{(1)}$ jest jakąś wartością pośrednią pomiędzy $x_i^{(1)}$ a $x_i^{(1)} + \Delta x_i^{(1)}$. Zatem:

$$\frac{\Delta y_i^{(1)}}{\Delta x_i^{(1)}} = f'(\xi_i^{(1)})$$

a więc:

$$c_i^{(1)} = \sqrt{1 + f'^2(\xi_i^{(1)})} \cdot \Delta x_i^{(1)}$$

Podobnie wyrażamy długości innych cięciw i otrzymujemy na długość linji łamanej $Ł_1$ wzór:

$$Ł_1 = \sum_{i=1}^{n_1} \sqrt{1 + f'^2(\xi_i^{(1)})}\, \Delta x_i^{(1)}$$

Oznaczmy $\sqrt{1 + f'^2(x)} = \varphi(x)$ to:

$$Ł_1 = \sum_{i=1}^{n_1} \varphi(\xi_i^{(1)}) \cdot \Delta x_i^{(1)}$$

Według założenia jest $f'(x)$ funkcją ciągłą a więc i $\varphi(x)$ jest funkcją ciągłą. Wraz z cięciwami także i przedziały Δx_i dążą do zera. Ciąg takich sum $Ł_1, Ł_2, \ldots Ł_p \ldots$ posiada zatem granicę, a tą granicą jest całka oznaczona z funkcji $\varphi(x)$ w granicach od a do b (por. § 222). Zatem:

$$s = \lim_{p \to \infty} Ł_p = \lim_{p \to \infty} \sum_{i=1}^{n_p} \varphi(\xi_i^{(p)}) \Delta x_i^{(p)} = \int_a^b \varphi(x)\, dx$$

czyli:

(86)
$$\boxed{s = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx}$$

Otrzymaliśmy w ten sposób **wzór na długość łuku.**

Jeżeli pochodna $f'(x)$ jest nieciągła w skończonej liczbie punktów przedziału $\langle a, b \rangle$, to długość łuku oblicza się przy pomocy odpowiedniej całki uogólnionej lub niewłaściwej, wyrażonej tym samym wzorem (86).

Z wzoru (86) otrzymujemy na długość łuku wartość dodatnią, gdy $a < b$ a ujemną, gdy $a > b$, a więc z wzrostem odciętej x wzrasta długość łuku.

Zatrzymajmy w całce, podającej długość łuku, dolną granicę a a zmieniajmy górną granicę b; zastąpmy literę b literą x, to:

$$s = \int_a^x \sqrt{1 + y'^2}\, dx = s(x)$$

Długość łuku jest zatem funkcją górnej granicy x. Pochodna tej funkcji ma wartość:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2} \tag{86a}$$

a stąd:

$$ds^2 = dx^2(1 + y'^2) = dx^2 + (y'\, dx)^2$$

czyli:

$$\boxed{ds^2 = dx^2 + dy^2} \tag{87}$$

Różniczkę łuku nazywamy często *elementem łuku*; wzór (87) podaje więc kwadrat elementu łuku.

Jeżeli równanie linji jest podane w formie parametrowej

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

to wzór (86) przyjmie postać:

$$s = \int_{t_1}^{t} \sqrt{1 + \left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)^2} \cdot \varphi'(t)\, dt$$

Wciągając $\varphi'(t)$ pod pierwiastek, możemy otrzymać przed pierwiastkiem znak $+$ lub $-$, zależnie od znaku funkcji $\varphi'(t)$. Jeżeli obierzemy stale znak $+$, to wzór na długość łuku przyjmie postać:

$$\boxed{s = \int_{t_1}^{t} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt} \tag{88}$$

Wartość $t = t_1$ odpowiada wartości $x = a$ a $t = t_2$ wartości $x = b$. Z tego wzoru otrzymamy na długość łuku wartość dodatnią, gdy założymy, że łuk wzrasta wraz z wzrastaniem parametru t (a więc umowa co do znaku jest przy użyciu tego wzoru inna, aniżeli przy użyciu wzoru (86)).

Użycie spółrzędnych biegunowych sprowadza się, jak wiadomo, do specjalnej formy przedstawienia parametrowego, a mianowicie gdy równanie linji jest podane w postaci:

$$r = r(\varphi)$$

to $x = r(\varphi)\cos\varphi$, $y = r(\varphi)\sin\varphi$; parametrem jest tu kąt φ.

Ponieważ:

$$x' = r' \cos\varphi - r \sin\varphi, \quad y' = r' \sin\varphi + r \cos\varphi$$

przeto:

$$\sqrt{x'^2(\varphi) + y'^2(\varphi)} =$$

$$= \sqrt{r'^2\cos^2\varphi - 2rr'\sin\varphi\cos\varphi + r^2\sin^2\varphi + r'^2\sin^2\varphi + 2rr'\sin\varphi\cos\varphi + r^2\cos^2\varphi} =$$

$$= \sqrt{r'^2 + r^2}.$$

Wobec tego wzór na długość łuku przyjmuje dla spółrzędnych biegunowych postać:

(89) $$\boxed{s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r'^2 + r^2}\, d\varphi}$$

Obliczanie długości łuku linji krzywej nazywamy *rektyfikacją* (t. j. wyprostowaniem) tej linji.

Zupełnie podobną drogą dochodzi się do definicji i wzoru na długość łuku linji *przestrzennej*, trójwymiarowej.

Jeżeli równania tej linji są podane w postaci:

$$y = y(x), \quad z = z(x)$$

to na długość łuku otrzymuje się wzór:

(90) $$\boxed{s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x) + z'^2(x)}\, dx}$$

Jeżeli zaś równania linji są podane w formie parametrowej:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t)$$

to wzór na długość łuku przyjmuje postać:

(91) $$\boxed{s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)}\, dt}$$

Uważając we wzorze (90) górną granicę całki za zmienną: $b = x$, otrzymujemy na długość łuku funkcję $s(x)$. Tworzymy pochodną tej funkcji według zmiennej x i podnosimy obie strony otrzymanego wzoru do kwadratu. Po pomnożeniu obu stron przez dx^2 otrzymujemy następujący wzór na kwadrat elementu łuku krzywej przestrzennej:

(92) $$\boxed{ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

Przykłady.

1) Obliczyć długość łuku paraboli o równaniu

$$y = ax^2$$

od wierzchołka do dowolnego punktu. Niechaj będzie $a > 0$.

Ponieważ $y' = 2ax$, przeto według wzoru (86) otrzymujemy:

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + 4a^2x^2}\,dx = 2a \int_0^x \sqrt{\frac{1}{4a^2} + x^2}\,dx$$

Całkę tę oblicza się według wzoru (35) (na str. 48), kładąc $k = \frac{1}{4a^2}$ i otrzymuje się.

$$s = a\left(x\sqrt{\frac{1}{4a^2} + x^2} + \frac{1}{4a^2}\log\left(x + \sqrt{\frac{1}{4a^2} + x^2}\right)\right)\Bigg|_0^x$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{1 + 4a^2x^2} + \frac{1}{4a}\log\left(x + \sqrt{\frac{1}{4a^2} + x^2}\right) - \frac{1}{4a}\log\sqrt{\frac{1}{4a^2}}$$

czyli:

$$s = \frac{x}{2}\sqrt{1 + 4a^2x^2} + \frac{1}{4a}\log\left(2ax + \sqrt{1 + 4a^2x^2}\right)$$

Niechaj czytelnik wykaże dla ćwiczenia, że łuk linji łańcuchowej o równaniu $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ od wierzchołka do punktu o odciętej x wyraża się wzorem: $s = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$.

2) Obliczyć długość łuku jednej arkady cykloidy. Równania cykloidy mają w formie parametrowej postać:

$$x = a(t - \sin t)$$
$$y = a(1 - \cos t)$$

Używając wzoru (88), otrzymujemy:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\,dt = a\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{2 - 2\cos t}\,dt$$

czyli:

$$s = a\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{4\sin^2\tfrac{t}{2}}\,dt = 4a\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\sin^2\tfrac{t}{2}}\,d\left(\tfrac{t}{2}\right)$$

Długość łuku jednej arkady otrzymuje się, zmieniając t od 0 do 2π. W tym przedziale ma $\sin\frac{t}{2}$ wartość dodatnią, a więc $\sqrt{\sin^2\frac{t}{2}} = \sin\frac{t}{2}$.

Wobec tego:

$$s = 4a\int_0^{2\pi} \sin\tfrac{t}{2}\, d\left(\tfrac{t}{2}\right) = 4a\left(-\cos\tfrac{t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = 8a$$

Godnem jest uwagi, że w tym wzorze nie występuje liczba π.

3) Obliczyć długość łuku spiralnej logarytmicznej o równaniu:

$$r = a e^{b\varphi} \text{ (przy } a > 0)$$

od φ_0 do dowolnego φ.

Przy pomocy wzoru (89) otrzymujemy:

$$s = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{a^2 e^{2b\varphi} + a^2 b^2 e^{2b\varphi}}\, d\varphi = a\sqrt{1+b^2}\int_{\varphi_0}^{\varphi} e^{b\varphi}\, d\varphi$$

$$s = \frac{\sqrt{1+b^2}}{b}\left(a e^{b\varphi} - a e^{b\varphi_0}\right)$$

Oznaczmy promień, należący do kąta φ_0, literą r_0, to:

$$s = \frac{\sqrt{1+b^2}}{b}(r - r_0)$$

Łuk spiralnej logarytmicznej zmienia się więc proporcjonalnie do promienia.

Niechaj czytelnik okaże, że długość łuku spiralnej Archimedesa, o równaniu:

$$r = c\varphi$$

od $\varphi = 0$ do dowolnego φ, wyraża się wzorem:

$$s = \frac{c}{2}\left(\varphi\sqrt{1+\varphi^2} + \log\left(\varphi + \sqrt{1+\varphi^2}\right)\right)$$

4) Obliczyć długość łuku linji śrubowej. Równania jej mają w formie parametrowej postać:

$$x = r\cos t, \quad y = r\sin t, \quad z = ct$$

(por. tom I, str. 378 wzory (107)). Z wzoru (91) otrzymujemy:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t + c^2}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{r^2 + c^2}\, dt = \sqrt{r^2 + c^2}\,(t_2 - t_1)$$

Długość linji śrubowej, odpowiadająca jednemu krokowi śruby, t. j. od $t = 0$ do $t = 2\pi$, wynosi:

$$s = \sqrt{r^2 + c^2}\, 2\pi$$

Niechaj czytelnik wykaże, że długość łuku linji o równaniach:

$$y = \frac{x^2}{2a}, \quad z = \frac{x^3}{6a^2}$$

liczona od $x = 0$, wyraża się wzorem $s = x + z$. Użyć wzoru (90)!

Rektyfikacja linij krzywych prowadzi tylko w niewielu wypadkach do całek, dających się wyrazić zapomocą funkcyj elementarnych. Zwykle otrzymuje się na długość łuku skomplikowane funkcje przestępne, nieelementarne. Tak np. spróbujmy obliczyć długość łuku elipsy.

Użyjmy formy parametrowej:

$$x = a \sin t$$
$$y = b \cos t$$

Na podstawie wzoru (88) otrzymujemy:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 t}\, dt$$

Oznaczmy literą k mimośród liczbowy, t. j. stosunek $e : a$ czyli $\sqrt{a^2 - b^2} : a$ (wobec czego $k < 1$), to:

$$s = a \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}\, dt$$

Całka ta nie da się wyrazić przy pomocy funkcyj elementarnych. Oznaczmy:

$$\int_0^t \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}\, dt = E(k, t) \tag{93}$$

Funkcję tę nazywamy *całką eliptyczną drugiego rodzaju*. Istnieją tablice, pozwalające obliczyć tę całkę dla rozmaitych wartości k i t, np. Jahnke, *Funktionentafeln* (Lipsk 1933, wyd. 2) lub Hüttte, *Des Ingenieurs Taschenbuch* (Berlin 1925, wyd. 25, str. 42). Używając tego oznaczenia, napiszemy wzór na długość łuku elipsy w postaci:

$$s = a\,(E(k, t_2) - E(k, t_1))$$

Uwaga. Całkę:

$$\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} = F(k, t) \tag{94}$$

nazywamy *całką eliptyczną pierwszego rodzaju*; jest ona także nieelementarną funkcją przestępną. Te całki eliptyczne i funkcje odwrotne względem nich, zwane *funkcjami eliptycznemi*, mają bardzo rozległe zastosowania w rozmaitych działach fizyki i tech-

niki. Do tych całek sprowadza się zapomocą odpowiednich podstawień całki eliptyczne, wspomniane na str. 59. Teorję funkcyj eliptycznych rozwinięto nadzwyczaj szczegółowo, poświęcając jej wiele prac specjalnych i podręczników. Spośród licznych podręczników wymieniamy tu następujące: L. Lévy, *Précis élémentaire de la théorie des fonctions elliptiques avec tables numériques et applications* (Paris, 1898) i H. Burkhardt, *Elliptische Funktionen* (Lipsk, 1906, wyd. 2).

Wartości całki $E(k, t)$ można wyznaczyć dla szczegółowych wartości t, k np. przybliżonym wzorem Simpsona. Dla dokładniejszych obliczeń posługujemy się ogólnem rozwinięciem funkcji podcałkowej na szereg. Metodę tę omówimy w rozdziale, poświęconym teorji szeregów nieskończonych.

Obliczanie łuku hiperboli sprowadza się także do obliczania całek eliptycznych pierwszego i drugiego rodzaju. Pozostawiamy czytelnikowi wyprowadzenie wzoru na długość łuku lemniskaty o równaniu:

$$r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$$

Otrzymamy:

$$s = a\sqrt{2}\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - 2\sin^2\varphi}}$$

Po podstawieniu $\cos 2\varphi = \cos^2 t$ uzyskuje się stąd całkę eliptyczną pierwszego rodzaju, a mianowicie:

$$s = a\int_0^{t} \frac{dt}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 t}} = a\,F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, t\right)$$

§ 230. Zastosowania wzorów na długość łuku w geometrji różniczkowej płaskiej.

Z wzorów na długość i na element łuku wynika kilka wniosków ważnych dla geometrji różniczkowej.

1) I tak z wzoru (86a) wynika:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = \sqrt{\sec^2\alpha} = \frac{1}{|\cos\alpha|}$$

czyli:

$$dx = |\cos\alpha|\,ds \tag{95}$$

Widzieliśmy, że wzór (86) jest prawdziwy pod względem znaku wtedy, gdy długość łuku wzrasta z wzrostem odciętej. Jeżeli w ostatnim wzorze opuścimy symbol wartości bezwzględnej, pisząc wprost:

$$dx = \cos\alpha\,ds \tag{96}$$

to zmienimy przez to tylko założenie, dotyczące kierunku wzrastania łuku. Łatwo mianowicie okazać, iż zakładając, że łuk wzrasta w tym kierunku, który obieramy za dodatni kierunek stycznej, możemy użyć wzoru (96) zamiast wzoru (95). Tak np. na fig. 28a łuk wzrasta w tym

samym kierunku, co odcięta x, a więc, gdy $dx > 0$, to i $ds > 0$. Kąt α stycznej z osią x-ów ma tu wartość z pierwszej ćwiartki, a więc $\cos\alpha > 0$, wobec czego iloczyn $\cos\alpha \cdot ds$ ma znak $+$, zgodny ze znakiem dx. Na fig. 28b łuk wzrasta w kierunku przeciwnym aniżeli x, a więc, gdy $dx > 0$, to $ds < 0$. Kąt α stycznej ma tu wartość z trzeciej ćwiartki, a więc $\cos\alpha < 0$. Wobec tego iloczyn $\cos\alpha \cdot ds > 0$, zgodnie ze znakiem dx. Pozostawiamy czytelnikowi rozważenie innych przypadków (gdy kąt α należy do drugiej lub czwartej ćwiartki).

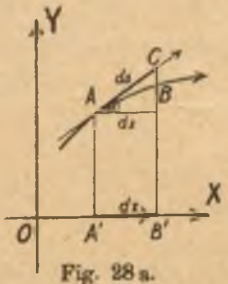


Fig. 28a.

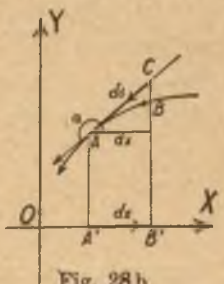


Fig. 28b

Z tych figur jest widoczne, że *element łuku ds równa się odcinkowi AC stycznej od punktu styczności do punktu, w którym przecina styczną rzędna, należąca do odciętej* $x + dx$. Istotnie $AC = \dfrac{dx}{\cos\alpha} = ds$.

Odcinek ten nie jest z reguły równy prawdziwemu przyrostowi łuku, t. j. łukowi $\overset{\frown}{AB} = \Delta s$.

Także różniczkę dy można wyrazić zapomocą elementu łuku.

I tak:

$$dy = y'\,dx = \operatorname{tg}\alpha \cdot dx = \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha \cdot ds$$

czyli:

$$dy = \sin\alpha\, ds$$

Wzory:

(97)
$$\boxed{\begin{aligned} dx &= \cos\alpha\, ds \\ dy &= \sin\alpha\, ds \end{aligned}}$$

bywają często stosowane w rozważaniach geometrji różniczkowej. Zamiast kąta α można wprowadzić kąt β, jaki styczna tworzy z osią y-ów. Ponieważ $\alpha = 90^0 - \beta$, przeto $\sin\alpha = \cos\beta$. Wprowadzając tę wartość w drugi wzór, otrzymujemy bardziej jednolite wzory:

$$dx = \cos\alpha\, ds$$
$$dy = \cos\beta\, ds$$

a stąd:

(98)
$$\boxed{\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds}}$$

Te cosinusy nazywamy cosinusami *kierunkowemi* stycznej (por. t. I, str. 522). *Cosinusy kierunkowe stycznej są zatem pochodnemi odciętej i rzędnej względem łuku.* Podobne rozważania i wzory dotyczą krzywych przestrzennych.

2) Łuk linji krzywej jest zawsze większy od cięciwy, łączącej końce tego łuku. Zbadajmy, do czego dąży *stosunek łuku do cięciwy*, gdy długość cięciwy dąży do zera.

Długość cięciwy, łączącej punkt $A(x, y)$ z punktem $B(x+\Delta x, y+\Delta y)$, ma wartość $\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$, a długość łuku, łączącego te punkty, nazwijmy Δs. Załóżmy, że równanie linji jest podane w formie $y=f(x)$, przyczem $f'(x)$ jest funkcją ciągłą. Chodzi nam o zbadanie granicy:

$$\lim_{c\to 0}\frac{\Delta s}{c}=\lim_{c\to 0}\frac{\Delta s}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$$

Zamiast $c\to 0$ możemy brać $\Delta x\to 0$, albowiem obydwa te warunki są ze sobą równoważne, ponieważ $y=f(x)$ jest funkcją ciągłą. Niechaj będzie $\Delta x>0$. Otóż:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta s}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta s}{\Delta x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}}=\frac{s'(x)}{\sqrt{1+y'^2(x)}}=\frac{s'(x)}{s'(x)}=1$$

Dowiedliśmy więc, że:

$$\lim_{c\to 0}\frac{\Delta s}{c}=1 \tag{99}$$

t. j., że *stosunek łuku do cięciwy dąży do jedności, gdy długość cięciwy dąży do zera*.

3) *Krzywiznę* linji w dowolnym jej punkcie określiliśmy (por. t. I, str. 552 i nast.) jako bezwzględną wartość granicy, do której dąży stosunek kąta $\Delta\alpha$, zawartego między styczną w tym punkcie a styczną w punkcie z jego otoczenia, do *cięciwy* c, łączącej te dwa punkty, gdy długość cięciwy dąży do zera. A więc: $k=\left|\lim_{c\to 0}\frac{\Delta\alpha}{c}\right|$, gdzie α jest kątem stycznej z osią odciętych. Okażemy, że tę definicję można zastąpić nową, równoważną z nią, a lepiej oddającą intuicyjne pojmowanie stopnia zakrzywienia. Bierzemy mianowicie pod uwagę stosunek kąta $\Delta\alpha$ do długości *łuku* Δs, zawartego między temi punktami i badamy granicę bezwzględnej wartości tego stosunku, gdy długość łuku dąży do zera, t. j.:

$$g=\left|\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$$

Zamiast $\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$ możemy napisać $\frac{\Delta\alpha}{c}\cdot\frac{c}{\Delta s}$. Gdy $\Delta s\to 0$, to cięciwa $c\to 0$ i odwrotnie, a więc:

$$g=\left|\lim_{c\to 0}\frac{\Delta\alpha}{c}\cdot\frac{c}{\Delta s}\right|$$

Ponieważ zaś $\lim_{c \to 0} \frac{c}{\Delta s} = 1$, przeto:

$$g = \left| \lim_{c \to 0} \frac{\Delta \alpha}{c} \right|$$

a więc $g = k$. Zatem:

(100)
$$\boxed{k = \left| \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} \right|}$$

A więc *krzywiznę* można też określać jako bezwzględną wartość *granicy, do której dąży stosunek przyrostu kąta α do przyrostu łuku s*.

Wzór na krzywiznę (znany z tomu I) można otrzymać łatwo z definicji, zawartej we wzorze (100). I tak niechaj równanie linji będzie podane w formie $y = f(x)$.

Ponieważ $\operatorname{tg} \alpha = y'(x)$, przeto $\alpha = \operatorname{arc\,tg} y' + n\pi$, a zatem:

$$d\alpha = \frac{y''}{1 + y'^2} dx$$

Wiemy, że:

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

a więc:

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}$$

Stąd:

$$k = \left| \frac{d\alpha}{ds} \right| = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}$$

zgodnie z wzorem (194) z tomu I (str. 553).

4) *Długość łuku ewoluty. Mechaniczna konstrukcja ewolwenty.*

Linję l_2, która jest miejscem geometrycznem środków krzywizny danej linji l_1, nazywamy, jak wiadomo, *ewolutą czyli rozwiniętą linji* l_1 (por. tom I, § 184, str. 555 i nast.), a samą linję l_1 nazywamy *ewolwentą* czyli *rozwijającą* linji l_2.

Niechaj x, y oznaczają spółrzędne punktu bieżącego danej linji l_1, a ξ, η ewoluty l_2. Równania ewoluty mają postać:

$$\xi = x - y' \frac{1 + y'^2}{y''}$$

$$\eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''}$$

Jeżeli σ oznacza długość łuku ewoluty, liczoną od jakiegoś obranego punktu, to:

$$d\sigma^2 = d\xi^2 + d\eta^2$$

a więc:

$$\left(\frac{d\sigma}{dx}\right)^2=\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2$$

Obliczmy pochodne: ξ' i η'. Otóż:

$$\frac{d\xi}{dx}=1-y''\frac{1+y'^2}{y''}-y'\frac{y''\cdot 2y'y''-(1+y'^2)y'''}{y''^2}=y'\frac{(1+y'^2)y'''-3y'y''^2}{y''^2}$$

$$\frac{d\eta}{dx}=y'+\frac{y''\cdot 2y'y''+(1+y'^2)y'''}{y''^2}=\frac{(1+y'^2)y'''-3y'y''^2}{y''^2}$$

Wobec tego:

$$\left(\frac{d\sigma}{dx}\right)^2=(1+y'^2)\left(\frac{y'''(1+y'^2)-3y'y''^2}{y''^2}\right)^2$$

Zupełnie podobny wzór otrzymamy na pochodną promienia krzywizny danej linji l_1. I tak z wzoru:

$$\varrho=\pm\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$$

otrzymujemy:

$$\left(\frac{d\varrho}{dx}\right)^2=\left(\frac{y''\cdot{}^3/_2(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}\cdot 2y'y''-(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}\cdot y'''}{y''^2}\right)^2=$$

$$=(1+y'^2)\left(\frac{3y'y''^2-y'''(1+y'^2)}{y''^2}\right)^2$$

A więc:

$$\left(\frac{d\sigma}{dx}\right)^2=\left(\frac{d\varrho}{dx}\right)^2$$

Stąd:

$$\frac{d\sigma}{dx}=+\frac{d\varrho}{dx}\quad\text{lub}\quad-\frac{d\varrho}{dx}$$

Chcemy usunąć tę wątpliwość co do znaku. Załóżmy w tym celu, że promień wzrasta w całym badanym przedziale zmiennej x lub maleje w całym przedziale, a więc nie ma extremów. Obierzmy za dodatni kierunek wzrastania łuku ten kierunek, w którym ϱ wzrasta, to:

(101) $$\frac{d\sigma}{dx}=\frac{d\varrho}{dx},\quad\text{a stąd:}\quad\sigma=\varrho+C$$

Jeżeli σ_1 oznacza łuk ewoluty a ϱ_1 promień krzywizny danej linji, należące do tej samej wartości x_1, a σ_2, ϱ_2 dla x_2, to:

$$\sigma_1=\varrho_1+C,\quad\sigma_2=\varrho_2+C$$

a stąd wynika:

(102) $$\boxed{\sigma_2-\sigma_1=\varrho_2-\varrho_1}$$

Widzimy stąd, że długość łuku, zawartego między dwoma punktami ewoluty jakiejś linji l_1, można wyznaczyć bez całkowania, obliczając różnicę odpowiednich promieni krzywizny tej linji l_1. Wzór (102) można wyrazić w następujący sposób: *przyrost długości łuku ewoluty równa się przyrostowi promienia krzywizny pierwotnej linji, wziętemu z odpowiednim znakiem.*

Na tym związku łuku ewoluty l_2 z promieniem krzywizny linji l_1 polega mechaniczna (nitkowa) konstrukcja ewolwenty l_1 z danej ewoluty l_2. Niechaj σ_{AB} oznacza długość łuku ewoluty l_2 od A do B (fig. 29), $\varrho_{A'}$ promień krzywizny ewolwenty l_1, należący do punktu A', dla którego A jest środkiem krzywizny, a podobnie $\varrho_{B'}$ dla punktów B' i B. Wiadomo (por. tom I, str. 555), że normalna ewolwenty l_1, na której leży promień krzywizny $\varrho_{A'} = AA'$, styka się z ewolutą w punkcie A (w środku krzywizny, należącym do A'). Niechaj punkt P będzie początkiem liczenia łuku ewoluty. Według wzoru (102) jest:

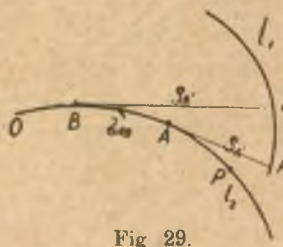


Fig 29.

$$\sigma_{AB} = \sigma_{PB} - \sigma_{PA} = \varrho_{B'} - \varrho_{A'}$$

Gdyby punkt P leżał po drugiej stronie punktu B, jak np. punkt O, to należałoby zmienić znak prawej strony.

Przytwierdźmy nitkę w dowolnym punkcie ewoluty, np. w punkcie O i nawińmy ją wzdłuż ewoluty do punktu A a pozostałą wolną część AA' wyprężmy tak, aby była styczną do ewoluty. Rozwijajmy tę nitkę stopniowo, wyprężając ją zawsze w kierunku stycznej. Przyrost odcinka AA' będzie zawsze równy przyrostowi długości łuku, czyli przyrostowi rozwijanej nitki. Koniec A' zakreśli zatem ewolwentę l_1. Stąd pochodzą nazwy: „rozwijająca“ czyli ewolwenta dla linji l_1, a „rozwinięta“ czyli „ewoluta“ dla linji l_2 (właściwie należałoby pomienić te nazwy z sobą, jednakże powszechnie utarły się one w literaturze matematycznej w sposób podany powyżej).

5) *Równania ewolwenty.*

Znalezienie równań ewoluty danej linji wymaga, jak widzieliśmy, tylko różniczkowania. Natomiast wyznaczenie równań ewolwenty do danej ewoluty wymaga już rachunku całkowego. Niechaj:

$$\eta = f(\xi)$$

przedstawia równanie danej linji, którą uważamy za ewolutę szukanej linji $y = \varphi(x)$. Niechaj α_1 (fig. 30) oznacza kąt stycznej do ewoluty w dowolnym jej punkcie B z osią odciętych. Ponieważ $BB' = \varrho$, przeto:

$$x - \xi = \varrho \cos \alpha_1$$
$$y - \eta = \varrho \sin \alpha_1$$

Z wzoru (101) wynika, że $\varrho = \sigma - c$, a więc

$$x = \xi + (\sigma - c)\cos\alpha_1 \qquad (103)$$
$$y = \eta + (\sigma - c)\sin\alpha_1$$

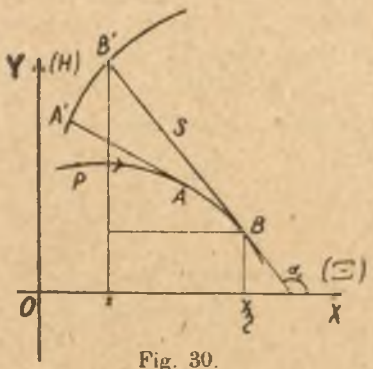


Fig. 30.

Ale $\operatorname{tg}\alpha_1 = \eta'$ a zatem:

$$\cos\alpha_1 = -\frac{1}{\sqrt{1+\eta'^2}}, \quad \sin\alpha_1 = -\frac{\eta'}{\sqrt{1+\eta'^2}}$$

ponieważ α_1 jest kątem rozwartym. Zatem:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \xi - \frac{\sigma - c}{\sqrt{1+\eta'^2}} \\ y &= \eta - \frac{(\sigma - c)\eta'}{\sqrt{1+\eta'^2}} \end{aligned}} \qquad (104)$$

Są to *równania ewolwenty* w formie parametrowej, przyczem parametrem jest ξ, a c stałą dowolną. Widzimy, że w tych równaniach występuje łuk σ danej linji $\eta = f(\xi)$, trzeba zatem wykonać całkowanie:

$$\sigma = \int_{\xi_0}^{\xi} \sqrt{1 + f'^2(\xi)}\, d\xi$$

Ponieważ w otrzymanych wzorach występuje dowolna stała c, przeto otrzymujemy do jednej danej linji całą gromadę jednoparametrową ewolwent. Jest to zgodne z tem, że *każda ortogonalna trajektorja* stycznych do linji $\eta = f(\xi)$ jest ewolwentą tej linji (por. tom I, str. 555). Wszystkie linje tej gromady są, jak łatwo zauważyć, linjami *równoległemi* do siebie. Gdybyśmy obrali na stycznej jako dodatni kierunek nie od B ku B', lecz przeciwnie od B w drugą stronę, to przy wzrastaniu promienia krzywizny malałby łuk, zatem należałoby podstawić $\varrho = -(\sigma - c)$, ale równocześnie kąt α_1 należałby do czwartej ćwiartki, a więc we wzorach na $\cos\alpha_1$ i $\sin\alpha_1$ należałoby zmienić znaki. Wobec tego znaki we wzorach (104) pozostałyby bez zmiany. Niechaj czytelnik rozważy w podobny sposób przypadek, gdy kąt α_1 jest ostry.

Przykład.

Wyznaczyć równanie ewolwenty koła (por. tom I, str. 513). Użyjmy parametrowej formy równania koła, t. j.:

$$\xi = a\cos t$$
$$\eta = a\sin t$$

Do obliczenia długości łuku nie trzeba używać całki, znany jest bowiem dla długości łuku koła wzór:

$$\sigma = at$$

przyczem łuk liczy się od punktu, dla którego $t = 0$, w kierunku wzrastających t. Kąt α_1, utworzony przez dodatni kierunek stycznej z osią odciętych, ma wartość $\alpha_1 = {}^3/_2\pi + t$ (por. fig. 31). Równania ewolwenty otrzymamy tu najprościej z wzorów (103), a mianowicie:

$$x = a\cos t + (at - c)\cos\alpha_1$$
$$y = a\sin t + (at - c)\sin\alpha_1$$

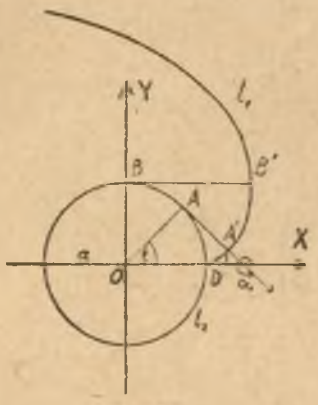


Fig. 31

Ponieważ:

$$\cos\alpha_1 = \cos({}^3/_2\pi + t) = \sin t$$

a $$\sin\alpha_1 = \sin({}^3/_2\pi + t) = -\cos t$$

przeto:

$$x = a\cos t + (at - c)\sin t$$
$$y = a\sin t - (at - c)\cos t$$

Wybierzmy z tej gromady ewolwent tę, dla której $c = 0$, to znaczy:

(105)
$$\boxed{\begin{aligned} x &= a(\cos t + t\sin t) \\ y &= a(\sin t - t\cos t) \end{aligned}}$$

Przechodzi ona przez punkt D na obwodzie koła, ponieważ dla $t = 0$ otrzymujemy z wzorów (105) $x = a$, $y = 0$, a więc spółrzędne punktu D. Inne ewolwenty są krzywemi *równoległemi* do l_1 (definicję krzywych równoległych podano w tomie I, str. 526 i 584).

§ 231. Obliczanie objętości przy pomocy całki pojedyńczej.

Okażemy, że, jeżeli znamy pola wszystkich przekrojów jakiejś bryły, równoległe do jednej stałej płaszczyzny, to objętość jej możemy wyrazić zapomocą całki. Niechaj tą stałą płaszczyzną będzie płaszczyzna boczna YZ. Na fig. 32 przedstawiono bryłę, której objętość chcemy obliczyć, w rzucie na płaszczyznę pionową ZX. Nazwijmy $\varphi(x)$ pole przekroju, leżącego w odległości x od stałej płaszczyzny YZ. Pole to jest oczywiście jakąś funkcją zmiennej x. Zakładamy, że znamy wartość tej funkcji dla każdego x. Podzielmy bryłę zapomocą systemu płaszczyzn równoległych do YZ na warstwy i każdą taką warstwę zastąpmy walcem o wysokości, równej szerokości tej warstwy a o podstawie równej temu przekrojowi tej warstwy, który ma pole najmniejsze: m_i. Objętość walca o podstawie m_i a wysokości Δx_i jest równa $m_i\Delta x_i$. Otrzymamy system walców o łącznej objętości:

(s) $$m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 \ldots + m_n\Delta x_n$$

przyczem m_i oznacza najmniejszą wartość funkcji $\varphi(x)$ w przedziale Δx_i. Wykonując podział na warstwy w rozmaite sposoby, otrzymujemy rozmaite sumy (s). Kres górny tych sum nazywamy objętością danej bryły.

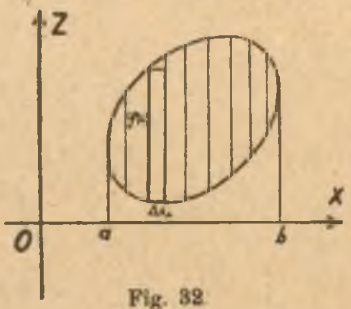


Fig. 32

Ten kres górny jest całką oznaczoną funkcji $\varphi(x)$, a zatem objętość wyraża się wzorem:

$$V = \int_a^b \varphi(x)\,dx \tag{106}$$

przyczem $\varphi(x)$ oznacza pole przekroju prostopadłego do osi x w zależności od odległości tego przekroju od stałej płaszczyzny (bocznej).

W specjalnym przypadku, gdy bryła jest obrotowa, t. j. powstaje przez obrót linji (południkowej) o równaniu $y = f(x)$ w przedziale $\langle a, b\rangle$ około osi x, to każdy jej przekrój płaszczyzną prostopadłą do osi x jest kołem o promieniu y. Pole tego przekroju ma zatem wartość $\varphi(x) = y^2\pi = f^2(x)\pi$, a więc objętość takiej bryły obrotowej wyrażamy wzorem:

$$V = \pi\int_a^b y^2\,dx = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx \tag{107}$$

Z wzoru (106) wynika następujące twierdzenie Cavalieri'ego: *jeżeli przekroje dwóch brył zapomocą płaszczyzn równoległych do jednej stałej płaszczyzny mają parami równe pola, to objętości tych brył są równe.*

Wtedy bowiem $\varphi(x)$ jest tą samą funkcją dla obu brył, a więc na objętość obu brył otrzymujemy tę samą wartość na podstawie wzoru (106).

Przykłady.

1) Dla stwierdzenia, czy przy pomocy nowej definicji objętości otrzymamy na objętość znanych brył te same wartości, które znamy z matematyki elementarnej, obliczmy objętość stożka o dowolnej podstawie (niekoniecznie kołowej), mającej pole D, a o wysokości w. Umieśćmy ten stożek tak, aby płaszczyzna podstawy była prostopadła do osi x a wierzchołek leżał w początku układu (fig. 33). Jeżeli $\varphi(x)$ oznacza pole przekroju w odległości x od wierzchołka, to wiadomo, że:

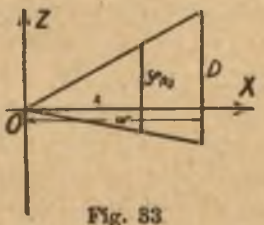


Fig. 33

$$\varphi(x) : D = x^2 : w^2$$

a więc:

$$\varphi(x) = \frac{Dx^3}{w^2}$$

Z wzoru (106) otrzymujemy:

$$V = \int_0^w D\frac{x^2}{w^2}dx = \frac{Dx^3}{3w^2}\Big|_0^w = \frac{Dw^3}{3w^2} = D\cdot\frac{w}{3}$$

zgodnie z wzorem, znanym z geometrji elementarnej.

2) Obliczyć objętość elipsoidy trójosiowej, której powierzchnia ma równanie:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1$$

Przekrój płaszczyzną prostopadłą do osi x w odstępie x od płaszczyzny YZ jest elipsą o równaniu:

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1-\frac{x^2}{a^2}$$

czyli:

$$\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)} = 1$$

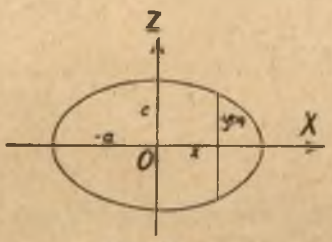


Fig. 34.

Pole tej elipsy jest równe $AB\pi$, gdzie A i B oznaczają połówki osi tej elipsy. Zatem:

$$\varphi(x) = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\cdot c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\cdot\pi = bc\pi\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).$$

Wobec tego objętość całej elipsoidy jest równa:

$$V = \int_{-a}^{+a} bc\pi\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx = bc\pi\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Big|_{-a}^{+a} = \underline{\tfrac{4}{3}abc\pi}$$

Niechaj czytelnik obliczy w podobny sposób objętość, ograniczoną paraboloidą eliptyczną (tom I, str. 43) o równaniu:

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2} = x$$

i płaszczyzną równoległą do płaszczyzny bocznej w odstępie x. (Wynik: $V = \pi ab\,x^2$).

3) Bardzo prosty wzór otrzymuje się na objętość wszystkich brył, których pole $\varphi(x)$ przekroju jest funkcją całkowitą wymierną, nie przekraczającą 3-go stopnia. Niechaj D_1, D_2, D_3 oznaczają pola przekrojów tej bryły w odstępach x_1, x_2, x_3 od płaszczyzny bocznej, przyczem x_2

jest średnią arytmetyczną odciętych x_1 i x_3, t. j. $x_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_3)$. Wysokością tej bryły, należącą do podstawy D_1 lub D_3, jest $w = x_3 - x_1$.

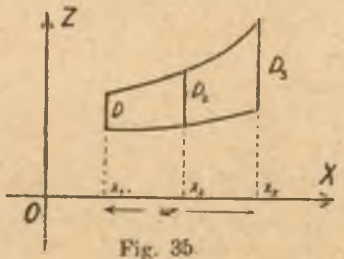


Fig. 35

Według założenia jest:

$$\varphi(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = y$$

przyczem niektóre spółczynniki mogą być zerami. Objętość takiej bryły wyrażamy wzorem:

$$V = \int_{x_1}^{x_3} (ax^3 + bx^2 + cx + d)\,dx$$

Widzieliśmy (w § 220, przykład 6, wzór (65)), że ta całka ma wartość:

$$V = \frac{x_3 - x_1}{6}(\varphi_1 + 4\varphi_2 + \varphi_3)$$

czyli:

(108)
$$\boxed{V = \frac{w}{6}(D_1 + 4D_2 + D_3)}$$

Ten wzór, zwany wzorem Simpsona lub Oughtreda, jest ścisły dla wielu brył graniastych i okrągłych. Tak np. dla stożka (por. fig. 33) $D_1 = 0$, $D_2 : D = \left(\frac{x}{2}\right)^2 : x^2 = \frac{1}{4}$, a więc $D_2 = \frac{1}{4}D$, $D_3 = D$, zatem:

$$V = \frac{w}{6}(0 + 4 \cdot \tfrac{1}{4}D + D) = D \cdot \frac{w}{3}$$

zgodnie ze znanym wzorem.

Dla elipsoidy: $D_1 = 0$, $D_2 = bc\pi$, $D_3 = 0$, zatem:

$$V = \frac{2a}{6}(0 + 4bc\pi + 0) = \tfrac{4}{3}abc\pi$$

zgodnie z wzorem, otrzymanym w przykładzie 2). Niechaj czytelnik zastosuje ten wzór do obliczenia objętości beczki obrotowej, powstałej przez obrót łuku elipsy o równaniu $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ około osi odciętych, biorąc łuk od $x_1 = -\frac{w}{2}$ do $x_2 = +\frac{w}{2}$. (Wynik: $V = \frac{\pi w}{3} \cdot \frac{2S^2 + s^2}{3}$, gdzie s oznacza średnicę dna beczki a S średnicę przekroju średniego). Sprawdzić wynik przy pomocy wzoru (107)!

Wzoru (108) używa się do *przybliżonego* obliczania objętości także wtedy, gdy $\varphi(x)$ nie jest wielomianem stopnia nie przekraczającego 3. Przybliżenie takie jest dogodne wtedy, gdy w rozwinięciu funkcji $\varphi(x)$

na wzór Maclaurina, reszta, następująca po wyrazie trzeciego stopnia, może być w rachunkach pominięta.

4) Obliczyć objętość beczki o łuku parabolicznym. Powstaje ona przez obrót powierzchni, zamkniętej łukiem paraboli o równaniu:

$$y = ax^2 + b$$

od $x_1 = -\frac{w}{2}$ do $x_2 = +\frac{w}{2}$, osią x i rzędnemi w punktach końcowych tego łuku (fig. 36), około osi x-ów.

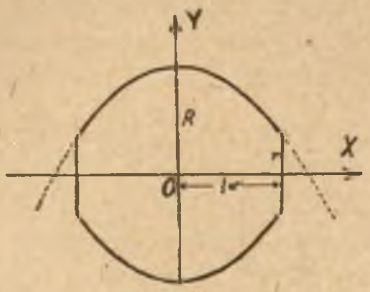


Fig. 36.

Dla $x = 0$ jest $y = b = R$,

„ $x = \frac{w}{2}$ „ $y = a\frac{w^2}{4} + R = r$

a stąd: $a = \frac{4(r-R)}{w^2}$

Stosując wzór (107), otrzymujemy:

$$V = \pi \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} (ax^2 + b)^2\, dx = \pi \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} (a^2x^4 + 2abx^2 + b^2)\, dx$$

Funkcja podcałkowa jest wielomianem 4-go stopnia, a zatem do obliczenia tej całki nie można zastosować wzoru Simpsona.

Całkowanie prowadzi tu do wyniku:

$$V = \pi\left(\frac{2a^2w^5}{5 \cdot 32} + \frac{4abw^3}{3 \cdot 8} + \frac{2b^2w}{2}\right)$$

Podstawiamy wartości za a i b i otrzymujemy po wykonaniu prostych rachunków:

$$V = \frac{\pi w}{15}(8R^2 + 4Rr + 3r^2) = \frac{\pi w}{15}(2S^2 + Ss + \tfrac{3}{4}s^2)$$

gdzie S oznacza średnicę środkowego przekroju beczki a s średnicę dna. Zamiast tego wzoru używa się dla beczek o łuku parabolicznym innego, prostszego wzoru, jednak tylko przybliżonego. Zastępuje się mianowicie objętość tej beczki objętością walca o tej samej wysokości w, przyczem za promień dna bierze się średnią wartość r' promienia, obliczoną zapomocą całki (według wzoru (49) na str. 67):

$$r' = \frac{1}{w}\int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} (ax^2 + b)\, dx = \frac{1}{w}\left(\frac{a}{3}\frac{w^3}{4} + bw\right) = \frac{aw^2}{12} + b = \frac{4(r-R)w^2}{12w^2} + R$$

$$r' = \frac{r + 2R}{3}$$

Zatem:

$$V \approx r'^2 \pi w = \left(\frac{r+2R}{3}\right)^2 \pi w = \frac{\pi w}{4}\left(\frac{s+2S}{3}\right)^2$$

Znacznie trudniejszy wzór otrzymuje się na objętość beczki o łuku kołowym, jeżeli środek tego koła nie leży na osi beczki, lecz np. w odległości q pod osią. Wtedy równanie tego koła ma postać $x^2+(y+q)^2=(q+R)^2$.

Zatem:

$$V = \pi \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \left(\sqrt{(q+R)^2 - x^2} - q\right)^2 dx$$

przyczem R oznacza promień środkowego przekroju beczki. Pozostawiamy czytelnikowi obliczenie tej całki; w wyniku wystąpi funkcja arcus sinus i drugi pierwiastek z funkcji 2-go stopnia.

Uwaga. Obliczaniem objętości beczek zajmowano się wiele ze względów praktycznych (cłowych) jeszcze przed wykryciem rachunku całkowego. Szczególnie interesującem dziełem z tego zakresu jest praca Keplera (1571—1630), p. t. *Nova stereometria doliorum vinariorum*, zawierająca wiele myśli i metod, pokrewnych z rozważaniami rachunku całkowego. Rozmaite przepisy, dotyczące przybliżonego obliczania beczek, znaleźć można w książce Claudel'a, p. t. *Introduction à la science de l'ingénieur*. T. I, str. 587 (wyd. 8, Paryż 1913).

§ 232. Pole powierzchni obrotowej.

Przy pomocy całki można obliczyć pole powierzchni obrotowej. Obierzmy oś obrotu za oś odciętych, a równanie linji obracającej się niechaj ma postać $y = f(x)$ w przedziale $\langle a, b\rangle$. Załóżmy, że w tym przedziale cały łuk $\overset{\frown}{AB}$ leży po jednej stronie osi obrotu, a więc np. że $f(x) \geqq 0$. Gdyby było inaczej, trzebaby rozłożyć łuk na odpowiednie części. Za początek łuku na linji $y = f(x)$ uważajmy dowolny punkt T i oznaczmy długość łuku $\overset{\frown}{TA}$ literą s_a a łuku $\overset{\frown}{TB}$ literą s_b. Całkowita długość łuku $\overset{\frown}{AB}$ ma zatem wartość:

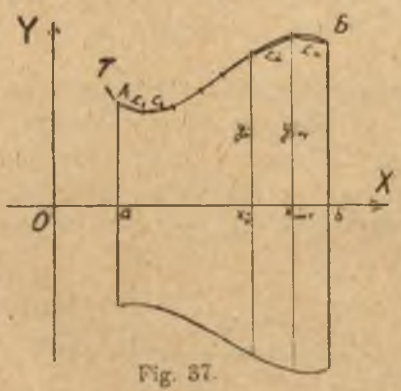


Fig. 37.

$$s = s_b - s_a$$

Podzielmy ten łuk na dowolną ilość części (niekoniecznie równych), np. na n części i zastąpmy każdy łuk częściowy cięciwą. Weźmy pod uwagę powierzchnię obrotową, powstałą przez obrót linji łamanej, złożonej z tych cięciw $c_1, c_2, c_3, \ldots c_n$. Składa się ona z pobocznic stożków ściętych a ewen-

tualnie także z pobocznic walców. Potrafimy zatem obliczyć jej pole P_1, używając znanego z elementarnej geometrji wzoru $2\varrho\pi s$ na pobocznicę stożka ściętego lub walca (ϱ oznacza promień środkowego przekroju a s długość boku). Pobocznica stożka ściętego lub walca, zakreślonego obrotem cięciwy c_i, ma zatem pole $2\frac{y_i+y_{i+1}}{2}\pi c_i$, a cała powierzchnia:

$$\text{(a)} \qquad P_1 = 2\pi \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i + y_{i+1}}{2} c_i$$

Utwórzmy cały ciąg podziałów łuku $\overset{\frown}{AB}$ tak, aby ciąg, utworzony z długości największych łuków składowych z każdego podziału, dążył do zera. Otrzymamy w ten sposób ciąg $P_1, P_2, P_3, \ldots P_r \ldots$ pól powierzchni obrotowych, złożonych ze stożków ściętych lub walców. O ile istnieje granica tego ciągu $\{P_r\}$, niezależna od tego, jaki ciąg podziałów łuku $\overset{\frown}{AB}$ obierzemy (byleby największe łuki składowe dążyły do zera), to tę granicę nazywamy *polem* danej *powierzchni obrotowej*.

Zamiast c_i możemy napisać we wzorze (a) wyrażenie $s_{i+1} - s_i - (s_{i+1} - s_i - c_i)$, przyczem s_i oznacza długość łuku, należącego do cięciwy c_i. Zatem:

$$P_1 = 2\pi \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i + y_{i+1}}{2} \Delta s_i - 2\pi \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i + y_{i+1}}{2} (\Delta s_i - c_i)$$

Nazwijmy literą L_1 pierwszą część prawej strony, a K_1 drugą. Okazuje się, że ciąg, złożony z $K_1, K_2, K_3, \ldots$, dąży do zera.

Dowód. Niechaj M oznacza największą rzędną y z całego przedziału $\langle a, b\rangle$. Ponieważ K_1 jest liczbą dodatnią (bo $\Delta s_i > c_i$), przeto:

$$0 < K_1 < 2\pi \frac{M+M}{2} \sum_{i=1}^{n} (\Delta s_i - c_i) = 2\pi M \left(s - \sum_{i=1}^{n} c_i \right)$$

Gdy rozdrabniamy podział łuku $\overset{\frown}{AB}$ tak, że wszystkie Δs_i a zatem i c_i dążą do zera, to sumy $\sum_{i=1}^{n} c_i$ dążą do s na podstawie definicji długości łuku, a więc całe wyrażenie w nawiasie dąży do zera. Ciąg $K_1, K_2, K_3, \ldots$, odpowiadający tym kolejnym podziałom, jest stale zawarty między dwoma ciągami, dążącemi do zera, a więc dąży także do zera.

Wobec tego ciąg $P_1, P_2, P_3, \ldots$ dąży do tej samej granicy, co ciąg $L_1, L_2, L_3, \ldots$, przyczem:

$$L_1 = 2\pi \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i + y_{i+1}}{2} \Delta s$$

Uważajmy y za funkcję zmiennej s. Możemy to czynić, ponieważ s jest funkcją monotoniczną i ciągłą zmiennej x, a więc odwrotnie x jest jakąś funkcją $\varphi(s)$ zmiennej s, a wobec tego $y = f(x) = f(\varphi(s)) = F(s)$. Wartość $\frac{1}{2}(y_i + y_{i+1})$, pośrednią między y_i a y_{i+1}, przyjmuje funkcja ta na jakiemś miejscu σ_i, pośredniem między s_i a s_{i+1}. A więc:

$$L_1 = 2\pi \sum_{i=1}^{n} y(\sigma_i)\Delta s_i$$

Gdy wszystkie Δs_i dążą do zera, to ciąg takich sum $L_1, L_2, L_3, \ldots$ dąży do całki oznaczonej $\int_{s_a}^{s_b} 2\pi y(s)\,ds$. Ponieważ do tej samej granicy dąży ciąg $P_1, P_2, P_3, \ldots$, przeto otrzymujemy następujący wzór na pole P powierzchni obrotowej:

(109)
$$\boxed{P = 2\pi \int_{s_a}^{s_b} y(s)\,ds}$$

Wprowadźmy zamiast zmiennej s spowrotem zmienną x, to $ds = \sqrt{1 + y'^2(x)}\,dx$, a więc:

(110)
$$\boxed{P = 2\pi \int_{a}^{b} y\sqrt{1 + y'^2}\,dx}$$

Wzór ten można z łatwością dostosować także do parametrowego lub biegunowego przedstawienia danej linji.

Przykład.

Obliczyć powierzchnię elipsoidy obrotowej *spłaszczonej*, t. j. powstałej przez obrót elipsy około osi małej (taką postać ma w przybliżeniu powierzchnia ziemi).

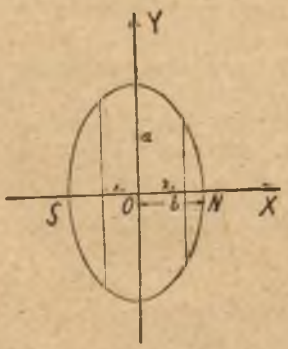


Fig. 38.

Biorąc oś x za oś obrotu, należy przyjąć równanie elipsy obracającej się w postaci:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Stąd otrzymujemy następujące równanie górnej połówki elipsy:

$$y = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - x^2}$$

Stąd:

$$y' = \frac{ax}{b\sqrt{b^2 - x^2}}$$

Obliczmy pole tej elipsoidy, zawarte między kołami, należącemi do odciętych x_1 i x_2.

$$P = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - x^2}\cdot\sqrt{1 + \frac{a^2x^2}{b^2(b^2 - x^2)}}\,dx$$

$$P = \frac{2\pi a}{b}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{b^2 - x^2 + \frac{a^2x^2}{b^2}}\,dx = \frac{2\pi a}{b}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{b^2 + \frac{a^2 - b^2}{b^2}x^2}\,dx$$

Oznaczając $a^2 - b^2 = e^2$, otrzymujemy:

$$P = \frac{2\pi a}{b}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{b^2 + \frac{e^2}{b^2}x^2}\,dx = \frac{2\pi ae}{b^2}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{\frac{b^4}{e^2} + x^2}\,dx$$

Wartość tej całki znamy (str. 48, wzór (35)), a mianowicie:

$$P = \frac{2\pi ae}{b^2}\left[\frac{x}{2}\sqrt{x^2 + \frac{b^4}{e^2}} + \frac{b^4}{2e^2}\log\left(x + \sqrt{x^2 + \frac{b^4}{e^2}}\right)\right]_{x_1}^{x_2}$$

Dla całej elipsoidy należy obrać granice: $x_1 = -b$, $x_2 = +b$; otrzymamy:

$$P = \frac{2\pi ae}{b^2}\left[b\sqrt{b^2 + \frac{b^4}{e^2}} + \frac{b^4}{2e^2}\log\frac{b + \sqrt{b^2 + \frac{b^4}{e^2}}}{-b + \sqrt{b^2 + \frac{b^4}{e^2}}}\right]$$

a stąd po łatwych rachunkach

$$P = 2\pi a\left(a + \frac{b^2}{e}\log\sqrt{\frac{a+e}{a-e}}\right)$$

W podobny sposób otrzymamy dla elipsoidy obrotowej *wydłużonej*, t. j. powstałej przez obrót koło osi wielkiej, wzór:

$$P = 2\pi b\left(b + \frac{a^2}{e}\arcsin\frac{e}{a}\right)$$

Niechaj czytelnik okaże, że dla $a - b$ dążącego do zera otrzymuje się z obydwu wzorów wzór na powierzchnię kuli (wystąpią tu wyrażenia nieoznaczone!).

Dla ćwiczenia poleca się czytelnikowi wykazać, że pole powierzchni obrotowej, zakreślonej przez obrót linji o równaniu

$$9y^2 - x(3 - x)^2 = 0 \quad \text{od} \quad x = 0 \quad \text{do} \quad x = 3$$

koło osi x-ów, ma wartość $P = 3\pi$. Prostemi wzorami wyrażają się także pola powierzchni obrotowych, zakreślonych przez obrót około osi odciętych linji łańcuchowej, kardioidy, lemniskaty, przez obrót spiralnej Archimedesa około osi biegunowej.

§ 233. Moment statyczny łuku

Weźmy pod uwagę zbiór (A), złożony z n dowolnych liczb:

$$m_1, m_2, \ldots m_n$$

i przyporządkujmy im wartości:

$$r_1, r_2, \ldots r_n$$

jakiejś zmiennej r.

Sumę:

$$m_1 r_1 + m_2 r_2 + \ldots + m_n r_n$$

nazywamy *momentem pierwszego stopnia* zbioru (A), sumę:

$$m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots + m_n r_n^2$$

momentem drugiego stopnia, a ogólnie:

$$m_1 r_1^k + m_2 r_2^k + \ldots + m_n r_n^k$$

momentem k-tego stopnia zbioru (A).

Momenty mają bardzo rozległe zastosowania w rozmaitych naukach, np. w statystyce a szczególnie w mechanice, skąd się nawet nazwa wywodzi (*momentum* jest skróceniem słowa *movimentum*, co oznacza czynnik, wpływający na ruch). W mechanice używa się tylko momentów 1-go i 2-go stopnia. I tak, jeżeli liczby $m_1, m_2, \ldots m_n$ oznaczają masy punktów materjalnych a $r_1, r_2, \ldots r_n$ ich odległości od jakiejś osi (linji prostej) z uwzględnieniem znaków, to moment pierwszego stopnia nazywamy *momentem statycznym* tego zbioru punktów materjalnych ze względu na tę *oś*, a moment drugiego stopnia *momentem bezwładności* tego zbioru punktów ze względu na tę *oś*. W podobny sposób określamy moment statyczny i moment bezwładności ze względu na *punkt* i ze względu na *płaszczyznę*, obierając za $r_1, r_2, \ldots r_n$ odległości punktów materjalnych od stale obranego punktu lub od stale obranej płaszczyzny.

Definicje te rozszerzymy na przypadki ogólniejsze, a mianowicie, gdy masy są rozmieszczone w sposób ciągły linjowo, powierzchniowo lub objętościowo.

Zajmiemy się najpierw masami, rozmieszczonemi linjowo, wzdłuż jakichś łuków. Rozmieszczenie takie jest w przybliżeniu zrealizowane w drutach, w nitkach, w linach. Weźmy pod uwagę łuk linji płaskiej o równaniu $y = f(x)$ lub w przedstawieniu parametrowem $x = \varphi(s)$, $y = \psi(s)$, przyczem dla dalszych rozważań najdogodniej jest obrać za parametr długość łuku s, liczoną od jakiegoś obranego punktu tej linji. Weźmy pod uwagę dla zmiennej x przedział $\langle a, b \rangle$ lub odpowiadający mu przedział $\langle s_a, s_b \rangle$ dla zmiennej s.

Niechaj funkcja $\varrho(s)$ oznacza gęstość linjową masy tego łuku. Załóżmy, że $\varrho(s)$ jest funkcją ciągłą. *Gęstość linjową* w każdym punkcie określa się jako granicę, do jakiej dąży stosunek masy łuku Δs, zawierającego ten punkt, do długości tego łuku, gdy Δs dąży do zera. Najpospolitszym w praktyce jest przypadek, gdy masa jest rozmieszczona jednorodnie, t. j gdy gęstość ϱ jest liczbą stałą dla każdego punktu. Podzielmy dany łuk $\overset{\frown}{AB}$ na dowolną ilość części o długościach $\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots \Delta s_n$.

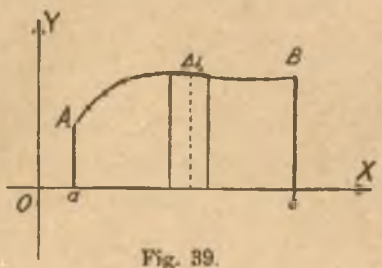


Fig. 39.

Masa łuku o długości Δs_i ma wartość $m_i = \varrho(\sigma_i)\Delta s_i$, gdzie $\varrho(\sigma_i)$ oznacza gęstość w jakimś pośrednim, odpowiednio dobranym punkcie tej cząstki łuku.

Uwaga. Tę średnią wartość gęstości można otrzymać przy pomocy całki:

$$\varrho(\sigma_i) = \frac{\int_{s_i}^{s_{i+1}} \varrho(s)ds}{\Delta s_i}$$

Masę tę mnożymy przez odległość y dowolnego punktu łuku Δs_i od osi odciętych. Możemy obrać ten punkt łuku, który należy do wartości σ_i, a więc brać zawsze $y(\sigma_i)$. Otrzymamy zatem $\varrho(\sigma_i)y(\sigma_i)\Delta s_i$. Tworzymy sumę tych elementów:

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} \varrho(\sigma_i)y(\sigma_i)\Delta s_i$$

i budujemy ciąg $S_1, S_2, S_3, \ldots$ takich sum, dzieląc łuk $\overset{\frown}{AB}$ w rozmaite sposoby na części ale tak, aby największe łuki składowe dążyły do zera. O ile istnieje granica ciągu tych sum, niezależna od sposobu podziału łuku, to nazywamy ją *momentem statycznym łuku* $\overset{\frown}{AB}$ względem osi x-ów. Ta granica jest równa całce oznaczonej:

(111)
$$M_x = \int_{s_a}^{s_b} \varrho(s)\, y\, ds$$

Wzór ten na moment statyczny łuku upraszcza się, gdy gęstość jest stała, wtedy bowiem można wyjąć ϱ przed całkę i otrzymujemy:

(111a)
$$M_x = \varrho \int_{s_a}^{s_b} y\, ds$$

Dla $\varrho = 1$ otrzymuje się wzór:

(112) $$\boxed{M_x = \int_{x_\alpha}^{x_b} y\,ds}$$

Podobnie na moment statyczny łuku względem osi y-ów otrzymuje się (przy $\varrho = 1$) wzór:

(112a) $$\boxed{M_y = \int_{x_a}^{x_b} x\,ds}$$

Wprowadzając za s pierwotną zmienną x, otrzymujemy:

(113) $$\boxed{M_x = \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx, \quad M_y = \int_a^b x\sqrt{1+y'^2}\,dx}$$

Dla spółrzędnych biegunowych wzory te przyjmują (na podstawie wzoru (89) na str. 136) postać:

(114) $$M_x = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r\sin\varphi\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi, \quad M_y = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r\cos\varphi\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi$$

O ile $\varrho \neq 1$, to należy wprowadzić pod całkę jeszcze czynnik ϱ.

Przykład.

Obliczyć moment statyczny pręta z materjału o gęstości stałej ϱ, wygiętego w półkole o promieniu c, względem średnicy tego półkola.

Obieramy prostą, na której leży ta średnica, za oś x-ów. Najdogodniej jest tu użyć biegunowej formy równania koła, a mianowicie $r = c$. Z pierwszego z wzorów (114) otrzymujemy:

$$M_x = \varrho\int_0^\pi c\sin\varphi\sqrt{c^2+0^2}\,d\varphi = \varrho c^2\int_0^\pi \sin\varphi d\varphi = -\varrho c^2\cos\varphi\Big|_0^\pi =$$

$$= \varrho(c^2 - (-c^2)) = 2\varrho c^2$$

Niechaj czytelnik stwierdzi, że moment tego półkola ze względu na oś y-ów ma wartość 0, co zresztą wynika także odrazu z tego, że masy są rozmieszczone symetrycznie względem tej osi (a więc całka od 0 do $\frac{\pi}{2}$ równa się przeciwnej wartości całki od $\frac{\pi}{2}$ do π).

Poleca się czytelnikowi dla ćwiczenia okazać, że moment statyczny

linji łańcuchowej o równaniu $y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$, dla stałej gęstości $\varrho = 1$, względem osi odciętych, wyraża się wzorem:

$$M_x = \frac{a}{4}\left(\frac{a}{2}e^{\frac{x}{a}} + 2x - \frac{a}{2}e^{-\frac{x}{a}}\right)\Big|_{x_1}^{x_2}$$

Pozostawiamy czytelnikowi stwierdzenie, że dla krzywej przestrzennej moment statyczny względem osi np. x-ów wyraża się wzorem:

$$M_x = \int_{s_a}^{s_b} \varrho\sqrt{y^2 + z^2}\, ds$$

i analogicznie dla innych osi.

W podobny sposób można określić moment statyczny łuku względem punktu i względem płaszczyzny Tak np. moment łuku względem początku układu wyraża się wzorem:

$$M_0 = \int_{s_a}^{s_b} \varrho\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, ds$$

a względem płaszczyzny XY wzorem:

$$M_{xy} = \int_{s_a}^{s_b} \varrho\, z\, ds$$

§ 234. Moment statyczny powierzchni płaskiej.

Weźmy pod uwagę jakąś powierzchnię płaską, obłożoną masą powierzchniową, t. j. posiadającą w każdym punkcie jakąś gęstość powierzchniową $\varrho(x, y)$. Takie rozmieszczenie masy mamy zrealizowane w przybliżeniu w blachach płaskich a ściśle w ładunkach (czyli masach) elektrycznych. Zajmiemy się tu najprostszym a najważniejszym w praktyce przypadkiem, gdy masa jest rozmieszczona jednorodnie, t. j. gdy gęstość ϱ jest liczbą stałą. Określimy najpierw moment statyczny prostokąta o podstawie a a wysokości w względem jego podstawy (fig. 40). Obierzmy za oś odciętych prostą, na której leży podstawa prostokąta. Podzielmy prostokąt prostemi równoległemi do podstawy na szereg pasków. Masa paska o szerokości Δy_i ma wartość $\varrho \cdot a \cdot \Delta y_i$. Mnożymy ją przez odległość dowolnego punktu tego paska od osi odciętych, np. przez $\bar{y}_i$ i tworzymy sumę tych iloczynów:

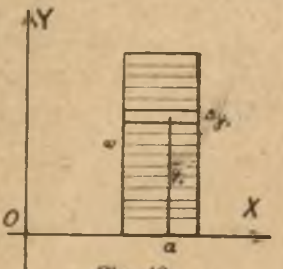


Fig. 40.

$$M_1 = \varrho a \Delta y_1 \cdot \bar{y}_1 + \varrho a \Delta y_2 \cdot \bar{y}_2 + \ldots + \varrho a \Delta y_n \cdot \bar{y}_n$$

Dzielimy następnie ten prostokąt w rozmaite inne sposoby na takie paski i tworzymy cały ciąg takich podziałów tak, aby szerokości wszystkich pasków dążyły do zera. Otrzymujemy w ten sposób ciąg sum:

$$M_1, M_2, M_3, \ldots$$

Granicę ciągu tych sum nazywamy momentem statycznym prostokąta względem osi x-ów. Ta granica istnieje i równa się:

$$M = \int_0^w \varrho a y \, dy = \tfrac{1}{2} \varrho a w^2 \tag{115}$$

Jeżeli P oznacza pole tego prostokąta, równe $a \cdot w$, to wzór przyjmuje postać:

$$\boxed{M = \varrho P \cdot \tfrac{w}{2}} \tag{115a}$$

Moment statyczny prostokąta względem jego podstawy jest równy masie tego prostokąta, pomnożonej przez połowę wysokości.

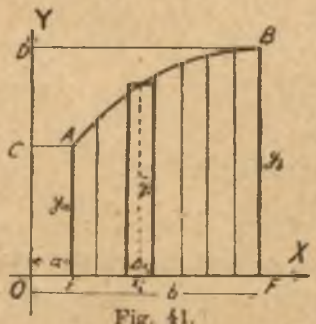


Fig. 41.

Z tego wyniku skorzystamy przy wyznaczaniu momentu powierzchni płaskiej, ograniczonej dowolną linją. I tak weźmy pod uwagę powierzchnię, zamkniętą łukiem linji o równaniu $y = f(x)$, rzędnemi w punktach końcowych tego łuku i osią odciętych. Załóżmy, że $f(x) > 0$. Podzielmy to pole zapomocą prostych równoległych do osi y-ów na paski. Każdy taki pasek zastąpmy prostokątem o tej samej podstawie a o wysokości równej rzędnej $\bar{y}$, należącej do dowolnego punktu jego podstawy (fig. 41). Moment statyczny każdego takiego prostokąta obliczamy przy pomocy wzoru (115), a więc np. dla prostokąta o podstawie Δx_i otrzymujemy: $\frac{1}{2} \varrho \Delta x_i \cdot \bar{y}_i^2$. Tworzymy sumę tych momentów:

$$M_1 = \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2} \varrho \Delta x_i \bar{y}_i^2$$

Następnie tworzymy cały ciąg takich podziałów danego pola na paski ale tak, aby szerokości tych pasków dążyły do zera i otrzymujemy odpowiedni ciąg $M_1, M_2, M_3, \ldots$

Granicę tego ciągu nazywamy *momentem statycznym danej powierzchni względem osi odciętych.* Wartością tej granicy jest całka oznaczona:

(116) $$M_x = \frac{\varrho}{2}\int_a^b y^2\,dx$$

Chcąc otrzymać moment tego samego pola względem osi rzędnych należy masę $\varrho\Delta x_i\bar{y}_i$ każdego prostokąta pomnożyć przez odległość dowolnego punktu tego prostokąta od osi y-ów, np. przez odciętą $\bar{x}_i$, należącą do rzędnej $\bar{y}_i$. Otrzymamy w ten sposób $\varrho\Delta x_i\bar{x}_i\bar{y}_i$. Tworzymy ciąg sum postaci:

$$\sum_{i=1}^{n}\varrho\Delta x_i\bar{x}_i\bar{y}_i$$

a granicę tego ciągu nazywamy *momentem statycznym danej powierzchni względem osi y-ów.* Ta granica ma wartość:

(117) $$M_y = \varrho\int_a^b xy\,dx$$

Uwaga. Do tego wzoru można dojść także bez rozważań granicznych, odejmując od momentu prostokąta *OFBD* moment prostokąta *OEAC* i moment pola *CABD*, obliczony zapomocą wzoru $\frac{\varrho}{2}\int_{y_a}^{y_b} x^2\,dy$. Wzór ten otrzymuje się z wzoru (116), zamieniając z sobą role zmiennych x i y. Trzeba następnie wprowadzić zmienną x zamiast y kładąc $dy = y'\,dx$ i zastosować całkowanie „per partes". Momenty statyczne powierzchni płaskiej, ograniczonej z wszystkich stron *dowolnemi* linjami, omówimy później, po wprowadzeniu całek podwójnych.

Przykłady.

1) Obliczyć moment statyczny półkola o promieniu r, obłożonego masą o stałej gęstości ϱ, względem jego średnicy. Obierzmy tę średnicę na osi x-ów (fig. 42). Z równania koła otrzymujemy $y^2 = r^2 - x^2$, a więc na podstawie wzoru (116) otrzymamy:

$$M_x = \varrho\int_{-r}^{+r}\frac{r^2 - x^2}{2}\,dx = \varrho\left(\frac{r^2}{2}x - \frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_{-r}^{+r} =$$

$$= \varrho\left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) = \underline{\tfrac{2}{3}r^3\varrho}$$

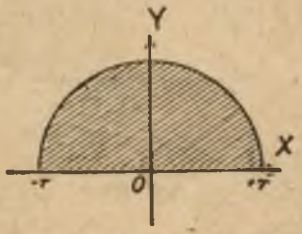


Fig 42.

2) Dla dodatniej połówki elipsy o równaniu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ a gęstości $\varrho = 1$ otrzymujemy następujący moment statyczny względem

osi x-ów:

$$M_x = \tfrac{1}{2}\int_{-a}^{+a} \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)\,dx = \frac{b^2}{2a^2}(a^2x - \tfrac{1}{3}x^3)\Big|_{-a}^{+a} = \underline{\tfrac{2}{3}ab^2}$$

Dla połówki elipsy, należącej do odciętych dodatnich, otrzymujemy moment względem osi y-ów z wzoru (117):

$$\overline{M}_y = 2\int_0^a x\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = -\frac{2b}{3a}(a^2 - x^2)^{3/2}\Big|_0^a = \frac{2b}{3a}(a^2)^{3/2} = \tfrac{2}{3}ba^2$$

Do tego samego wyniku doszlibyśmy, używając wzoru:

$$\overline{M}_y = \tfrac{1}{2}\int_{-a}^{+a} x^2\,dy$$

i wstawiając $x^2 = a^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)$.

§ 235. Środek ciężkości czyli środek masy.

W bezpośrednim związku z momentami statycznemi jest inne pojęcie, bardzo ważne w fizyce i w technice, a mianowicie *środek ciężkości* czyli *środek masy*.

Środkiem masy lub środkiem ciężkości układu dwóch punktów materjalnych A_1 i A_2 o masach m_1 i m_2 nazywamy punkt, dzielący ten odcinek w stosunku odwrotnym do mas (punkt ten leży zatem bliżej masy większej). A więc $A_1S : SA_2 = m_2 : m_1$ (fig. 43).

Utwórzmy rzut odcinka A_1A_2 na oś odciętych. Otrzymujemy:

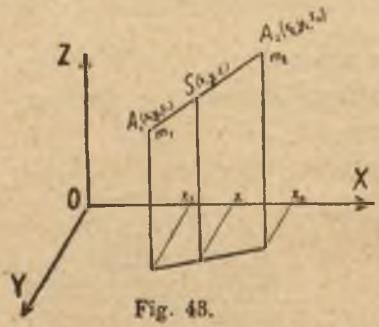


Fig. 43.

$$(x - x_1) : (x_2 - x) = m_2 : m_1$$

a stąd:

$$x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$$

Jest to średnia arytmetyczna *ważona* liczb x_1 i x_2 z wagami m_1 i m_2.

Podobnie:

$$y = \frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1 + m_2}, \qquad z = \frac{m_1z_1 + m_2z_2}{m_1 + m_2}$$

Dobierzmy trzeci punkt A_3 o masie m_3. Chcąc znaleźć środek ciężkości układu tych trzech punktów, umieszczamy w punkcie S masę $m_1 + m_2$ i znajdujemy według poprzednich wzorów środek ciężkości dwóch mas: jednej $m_1 + m_2$, umieszczonej w S, a drugiej m_3, umieszczonej w A_3.

Dobierając kolejno coraz więcej punktów materjalnych o masach $m_1, m_2, \ldots m_n$ i o spółrzędnych $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \ldots (x_n, y_n, z_n)$, otrzymujemy na spółrzędne środka ciężkości następujące wzory:

$$\xi = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}, \quad \eta = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \ldots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}$$

$$\zeta = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \ldots + m_n z_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}$$

Są to średnie arytmetyczne *ważone* spółrzędnych danych punktów, przyczem wagami są masy.

Widzimy, że sumy, znajdujące się w licznikach, są momentami statycznemi systemu punktów materjalnych, a mianowniki całkowitą masą tego systemu. Uwaga ta prowadzi nas do rozszerzenia definicji środka ciężkości na masy, rozmieszczone w sposób ciągły.

Zajmiemy się tu tylko masami, rozmieszczonemi na płaszczyźnie linjowo (t. j. wzdłuż łuków) lub powierzchniowo. Środkiem ciężkości takich mas nazywamy punkt o spółrzędnych:

(118)
$$\boxed{\xi = \frac{M_y}{M}, \quad \eta = \frac{M_x}{M}}$$

przyczem M_x, M_y oznaczają momenty statyczne względem osi spółrzędnych a M całkowitą masę. Pisząc te wzory w postaci:

$$M \cdot \xi = M_y, \quad M \cdot \eta = M_x$$

możemy określić *środek ciężkości* w następujący sposób: *jest to punkt, w którym umieszczona całkowita masa M miałaby taki sam moment statyczny względem osi spółrzędnych, jaki ma ta masa, rozmieszczona wzdłuż danego łuku lub danego pola.*

Środek ciężkości masy, rozmieszczonej linjowo wzdłuż łuku, ma zatem spółrzędne.

$$\xi = \frac{1}{M}\int_{s_0}^{s_1} \varrho\, x\, ds, \qquad \eta = \frac{1}{M}\int_{s_0}^{s_1} \varrho\, y\, ds$$

przyczem M oznacza całkowitą masę danego łuku. Jeżeli gęstość ϱ jest stała, a całkowita długość łuku wynosi S, to:

(119)
$$\boxed{\xi = \frac{1}{S}\int_{s_0}^{s_1} x\, ds, \quad \eta = \frac{1}{S}\int_{s_0}^{s_1} y\, ds}$$

Środek masy, rozmieszczonej powierzchniowo, jednorodnie, na powierzchni płaskiej o polu f, zamkniętej łukiem linji o równaniu $y = f(x)$ od $x = a$ do $x = b$, rzędnemi w punktach końcowych i osią odciętych, ma spółrzędne:

(120)
$$\xi = \frac{1}{f}\int_a^b x\,y\,dx, \qquad \eta = \frac{1}{2f}\int_a^b y^2\,dx$$

Środek ciężkości, uważany za punkt, w którym jest skupiona masa M, ma ze względu na *każdą prostą* (a więc nie tylko ze względu na osie spółrzędnych) ten sam moment statyczny, co masa M, rozmieszczona dowolnie linjowo lub powierzchniowo.

Okażemy to tylko dla masy, rozmieszczonej linjowo. (Dla mas, rozmieszczonych powierzchniowo, trzebaby najpierw określić moment pola, *zamkniętego* dowolną linją, względem dowolnej osi a do tego nadają się lepiej całki podwójne).

Niechaj punkt C (fig. 44) będzie środkiem ciężkości łuku $\overset{\frown}{AB}$ o całkowitej masie M. Jeżeli (ξ, η) są spółrzędnemi tego punktu, to

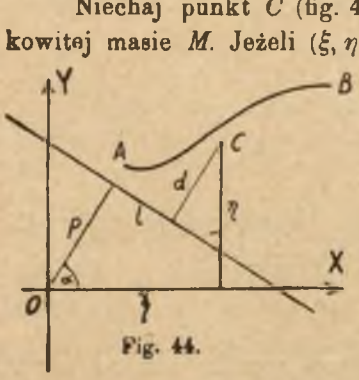


Fig. 44.

$$M \cdot \xi = M \qquad M \cdot \eta = M_x$$

Obliczmy moment punktu materjalnego C o masie M względem dowolnej prostej l, o równaniu (w postaci normalnej):

$$X\cos\alpha + Y\sin\alpha - p = 0$$

a z drugiej strony moment całego łuku $\overset{\frown}{AB}$ względem tej prostej.

Odległość punktu C od prostej l wyraża się wzorem:

$$d = \xi\cos\alpha + \eta\sin\alpha - p$$

a więc moment masy M, umieszczonej w tym punkcie, względem prostej l ma wartość:

$$M_l(C) = (\xi\cos\alpha + \eta\sin\alpha - p)\cdot M = M\xi\cos\alpha + M\eta\sin\alpha - Mp$$

czyli:

$$M_l(C) = \int_a^b \varrho x\,ds\cdot\cos\alpha + \int_a^b \varrho y\,ds\cdot\sin\alpha - pM$$

Natomiast moment łuku $\overset{\frown}{AB}$ względem osi l ma wartość:

$$M_l(\overset{\frown}{AB}) = \int_a^b \varrho y\,ds$$

przyczem δ oznacza odległość punktu bieżącego (x, y) tego łuku od osi l. Z wzoru na odległość punktu od prostej otrzymujemy:

$$\delta = x\cos\alpha + y\sin\alpha - p$$

a więc:

$$M_l(\widehat{AB}) = \int_{s_a}^{s_b} \varrho(x\cos\alpha + y\sin\alpha - p)\,ds = \int_{s_a}^{s_b} \varrho x\,ds \cdot \cos\alpha +$$

$$+ \int_{s_a}^{s_b} \varrho y\,ds \cdot \sin\alpha - p\int_{s_a}^{s_b} \varrho\,ds$$

Ponieważ $\int_{s_a}^{s_b} \varrho\,ds = M$, przeto widzimy, że ten moment jest równy momentowi $M_l(C)$ masy M, umieszczonej w środku ciężkości, c. b. d. o.

Moment statyczny ze względu na oś, przechodzącą przez środek ciężkości, ma wartość zero. Tak np. jeżeli środek ciężkości leży na osi x-ów, to $\eta = 0$, a więc z wzoru (118) wynika, że $M_x = 0$. Każdą zaś inną prostą (oś) możemy sprowadzić przez przesunięcie i obrót do nakrycia z osią x-ów.

Przykłady.

1) Wyznaczyć spółrzędne środka ciężkości łuku, tworzącego półkole o promieniu c, jeżeli masa jest rozmieszczona jednorodnie, t. j. gęstość ϱ jest liczbą stałą

Obliczyliśmy moment względem osi odciętych (str. 158):

$$M_x = 2\varrho c^2$$

Moment względem osi rzędnych ma, jak łatwo stwierdzić, wartość:

$$M_y = 0$$

co zresztą wynika odrazu z symetrycznego rozmieszczenia mas względem osi rzędnych. Całkowita masa półkola wynosi $c\pi \cdot \varrho$, a więc:

$$\xi = \frac{0}{\varrho c\pi} = 0, \quad \eta = \frac{2\varrho c^2}{\varrho c\pi} = \frac{2c}{\pi}$$

Zatem środek C ma spółrzędne:

$$C\left(0, \frac{2c}{\pi}\right)$$

2) Środek ciężkości masy, rozmieszczonej jednorodnie na polu półkola, obliczymy przy pomocy momentów (por. str. 161):

$$M_x = \tfrac{2}{3}\varrho c^3, \quad M_y = 0$$

a mianowicie otrzymujemy:

$$\xi = 0, \quad \eta = \frac{\frac{2}{3}\varrho c^2}{\frac{1}{2}c^2\pi\varrho} = \frac{4}{3}\frac{c}{\pi}$$

A więc: $C\left(0, \frac{4c}{3\pi}\right)$. Widzimy stąd, że środek ciężkości łuku leży w innym punkcie aniżeli środek ciężkości pola, ograniczonego tym łukiem i cięciwą, łączącą jego końce.

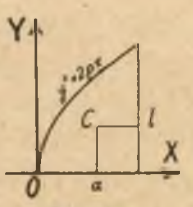


Fig. 45.

3) Obliczyć spółrzędne środka ciężkości pola, ograniczonego dodatnią gałęzią paraboli o równaniu $y^2 = 2px$ (fig. 45), osią odciętych i rzędną w punkcie $x = a$. Gęstość ϱ weźmy równą 1. Nazwijmy daną rzędną l, a więc $l = \sqrt{2pa}$. Z wzorów (116) i (117) otrzymujemy:

$$M_x = \frac{1}{2}\int_0^a y^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^a 2px\,dx = \frac{px^2}{2}\Big|_0^a = \underline{\frac{1}{2}pa^2}$$

$$M_y = \int_0^a xy\,dx = \int_0^a x\sqrt{2px}\,dx = \sqrt{2p}\int_0^a x^{3/2}dx = \frac{\sqrt{2p}x^{5/2}}{5/2}\Big|_0^a = \frac{2}{5}\sqrt{2pxx^2}\Big|_0^a$$

$$\underline{M_y = \frac{2}{5}la^2}$$

Pole tego odcinka ma wartość:

$$f = \int_0^a y\,dx = \int_0^a \sqrt{2p}x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{\sqrt{2p}x^{\frac{3}{2}}}{3/2}\Big|_0^a = \frac{2}{3}la$$

Wobec tego:

$$\xi = \frac{2}{5}la^2 : \frac{2}{3}la = \frac{3}{5}a$$

$$\eta = \frac{1}{2}pa^2 : \frac{2}{3}la = \frac{3}{4}\frac{pa}{l}$$

Ale $2pa = l^2$, więc $\frac{pa}{l} = \frac{l}{2}$, a stąd $\eta = \frac{3}{8}l$.

Zatem: $\underline{C(\frac{3}{5}a, \frac{3}{8}l)}$.

§ 236. Reguły Guldina.

Środek ciężkości łuku i pola mają bardzo interesujące zastosowanie przy obliczaniu powierzchni i objętości brył obrotowych. Związek ten wykryjemy, zestawiając wzory (109) i (107) na pole powierzchni obrotowej i objętość bryły obrotowej:

$$P = 2\pi\int_a^b y\,ds, \qquad V = \pi\int_a^b y^2 dx$$

z wzorami (119) i (120) na rzędną środka ciężkości łuku i środka ciężkości pola, a mianowicie z wzorami:

$$\eta = \frac{1}{S}\int_a^b y\,ds, \quad \eta = \frac{1}{2f}\int_a^b y^2\,dx$$

Ponieważ $\int_a^b y\,ds = \eta \cdot S$, przeto:

(121) $$\boxed{P = 2\pi\eta \cdot S}$$

Wzór ten, zwany *regułą Guldina na obliczanie pola powierzchni obrotowej*, wypowiada się w następującej postaci: *pole powierzchni obrotowej, zakreślonej przez obrót łuku o długości S, równa się długości drogi, zakreślonej przez środek ciężkości tego łuku około osi obrotu, pomnożonej przez długość obracającego się łuku.* Istotnie η jest odległością środka ciężkości od osi obrotu a $2\pi\eta$ obwodem koła, zakreślonego przez środek ciężkości około osi obrotu.

Podobnie wnioskujemy z drugiej pary wypisanych wzorów, że

$$\int_a^b y^2\,dx = 2\eta \cdot f$$

a więc:

(122) $$\boxed{V = 2\pi\eta \cdot f}$$

Wzór ten, zwany *regułą Guldina na obliczanie objętości bryły obrotowej*, wypowiada się w następujący sposób: *objętość bryły obrotowej, zakreślonej przez obrót powierzchni płaskiej o polu f, równa się długości drogi, zakreślonej przez środek ciężkości tego pola około osi obrotu, pomnożonej przez pole obracającej się powierzchni.* Przy pomocy reguł Guldina można obliczyć pole powierzchni obrotowej i objętość bryły obrotowej, jeżeli znamy rzędną środka ciężkości, z drugiej zaś strony można wyznaczyć rzędną środka ciężkości, jeżeli znamy pole odpowiedniej powierzchni obrotowej lub objętość odpowiedniej bryły obrotowej.

Tak np. wiemy, że przez obrót półkola około średnicy powstaje powierzchnia kuli, której pole znamy, a mianowicie $P = 4r^2\pi$.

Stosując zaś wzór (121), otrzymujemy $P = 2\pi\eta S$; ponieważ zaś $S = r\pi$ jako długość półkola, przeto:

$$4r^2\pi = 2\pi\eta \cdot r\pi$$

a stąd:

$$\eta = \frac{2r}{\pi}$$

zgodnie z wynikiem, otrzymanym na str. 165.

Podobnie ze znanego wzoru na objętość kuli: $V = \frac{4}{3}r^3\pi$ i z wzoru (122), w którym $f = \frac{1}{2}r^2\pi$, wnioskujemy, że środek ciężkości pola półkola ma rzędną $\eta = \frac{4r}{3\pi}$, zgodnie z wynikiem, otrzymanym na str. 166

Przykłady.

1) Obliczyć powierzchnię i objętość bryły obrotowej, powstającej przez obrót koła o promieniu r (fig. 46) około osi, leżącej w płaszczyźnie tego koła w odległości $R > r$ od środka tego koła; jest to obręcz kołowa czyli torus.

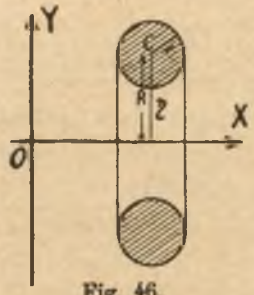


Fig. 46.

Ponieważ długością obracającego się łuku jest obwód koła o promieniu r, a środkiem ciężkości tego łuku jest oczywiście środek tego koła, przeto $S = 2r\pi$, $\eta = R$, a więc pole obręczy wynosi:

$$P = 2R\pi \cdot 2r\pi = \underline{4Rr\pi^2}$$

Ponieważ pole koła obracającego się wynosi $r^2\pi$, a $\eta = R$, przeto z wzoru (122) otrzymujemy:

$$V = 2R\pi \cdot r^2\pi = \underline{2Rr^2\pi^2} = \underline{\tfrac{1}{2}rP}$$

2) Obliczyć ciężar wieńca koła rozpędowego, jeżeli średni promień wieńca wynosi 3 m, przekrój wieńca jest kwadratem o boku 0·25 m, gęstość zaś materjału wynosi $\varrho = 7$.

Z wzoru (122) otrzymujemy (wyrażając objętość w metrach sześciennych):

$$V = 2\pi \cdot 3 \cdot 0{\cdot}25^2 \approx 1{\cdot}178$$

Ponieważ ciężar 1 dm³ wynosi 7 kg, przeto całkowity ciężar wynosi:

$$Q = V \cdot 7000 \text{ kg} \approx 8247 \text{ kg}$$

Uwaga. W architekturze zachodzi często potrzeba wyznaczenia powierzchni lub objętości kopuły, która jest bryłą obrotową, powstającą przez obrót pola, ograniczonego z jednej strony linją, nieraz bardzo skomplikowaną. Do tych obliczeń używa się reguły Guldina; położenie środka ciężkości wyznacza się albo empirycznie albo też jakąś przybliżoną metodą rachunkową albo rysunkową (chodzi tu o przybliżoną wartość odpowiedniej całki).

§ 237. Moment bezwładności łuku.

Już w § 233 określiliśmy moment bezwładności systemu punktów materjalnych ze względu na oś. Rozszerzymy obecnie tę definicję na masy, rozmieszczone w sposób ciągły. Ograniczmy się do rozważania mas o stałej gęstości ϱ. Weźmy najpierw pod uwagę masę, rozmieszczoną linjowo, t. j. wzdłuż jakiegoś łuku $\overset{\frown}{AB}$ (fig. 47). Uważajmy spółrzędne x, y punktów tej linji za funkcje długości łuku s; niechaj odciętej $x = a$ odpowiada długość łuku s_a (liczona od jakiegoś punktu T, stale obranego na linji l), a odciętej $x = b$ długość łuku s_b. Podzielmy łuk $\overset{\frown}{AB}$ na dowolną liczbę części, np. na n części: $\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots \Delta s_n$. Na każdym z tych łuków częściowych obierzmy dowolny punkt pośredni, np. na łuku $\Delta s_i = s_{i+1} - s_i$

punkt σ_i, a więc $s_i \leqq \sigma_i \leqq s_{i+1}$. Rzędna, należąca do tego punktu, ma wartość $y(\sigma_i)$. Pomnóżmy masę $\varrho \Delta s_i$ każdego łuku częściowego przez kwadrat odległości dowolnego punktu tego łuku od osi odciętych, a więc przez $y^2(\sigma_i)$ i utwórzmy sumę:

$$B_1 = \sum_{i=1}^{n} \varrho y^2(\sigma_i) \Delta s_i$$

Wykonujemy cały ciąg takich podziałów tak, aby wszystkie Δs_i dążyły do zera. Otrzymamy odpowiedni ciąg sum:

$$B_1, B_2, B_3, \ldots B_p \ldots$$

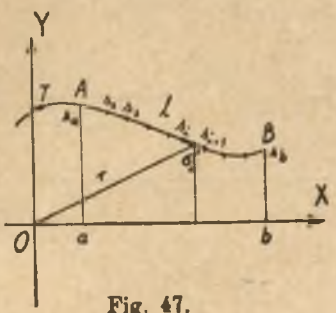


Fig. 47.

Granicę tego ciągu, gdy $p \to \infty$, nazywamy *momentem bezwładności* materjalnego *łuku* $\overset{\frown}{AB}$ *względem osi odciętych*. Wartością tej granicy jest, jak wiadomo, całka oznaczona:

$$B_x = \int_{s_a}^{s_b} \varrho y^2 ds \tag{123}$$

Określając zupełnie podobnie *moment bezwładności* B_y *względem osi rzędnych*, otrzymujemy:

$$B_y = \int_{s_a}^{s_b} \varrho x^2 ds \tag{124}$$

Sumę tych dwóch momentów, t. j.:

$$B_x + B_y = \int_{s_a}^{s_b} \varrho (x^2 + y^2) ds = \int_{s_a}^{s_b} \varrho r^2 ds$$

gdzie r oznacza odległość bieżącego punktu linji l od początku układu, nazywamy *momentem bezwładności danego łuku względem początku układu* i oznaczamy ją symbolem:

$$B_0 = \int_{s_a}^{s_b} \varrho r^2 ds \tag{125}$$

Ten moment B_0 można też określić bezpośrednio, bez powoływania się na momenty B_x i B_y, zapomocą ciągu sum:

$$\sum_{i=1}^{n} \varrho r^2(\sigma_i) \Delta s_i$$

Moment bezwładności względem dowolnej osi można wyrazić zapomocą momentu bezwładności względem osi równoległej do niej i przechodzącej przez środek ciężkości. Tak np. moment bezwładności względem osi OX, przechodzącej przez środek ciężkości C (fig. 48), ma wartość:

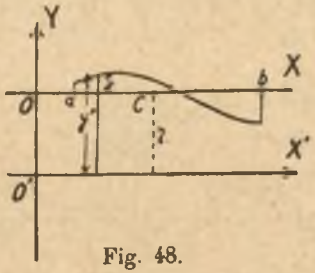


Fig. 48.

$$B_x = \int_{s_a}^{s_b} \varrho y^2 ds$$

Moment bezwładności względem osi $O'X'$, równoległej do OX w odstępie η, ma wartość:

$$B_{x'} = \int_{s_a}^{s_b} \varrho y'^2 ds = \int_{s_a}^{s_b} \varrho (y+\eta)^2 ds = \int_{s_a}^{s_b} \varrho y^2 ds + 2\eta \int_{s_a}^{s_b} \varrho y ds + \eta^2 \varrho S$$

czyli:

(a) $$\underline{B_{x'} = B_x + \eta^2 \cdot M}$$

Całka $\int_{s_a}^{s_b} \varrho y ds$ ma bowiem wartość zero, jako moment *statyczny* względem osi, przechodzącej przez środek ciężkości.

A więc *moment bezwładności względem dowolnej osi jest równy momentowi bezwładności względem osi równoległe do niej poprowadzonej przez środek ciężkości, powiększonemu o moment bezwładności całkowitej masy M, umieszczonej w środku ciężkości, względem danej osi.* Prawo to odnosi się — jak można okazać — nietylko do momentów bezwładności łuków, lecz także do momentów bezwładności pól.

Przykłady.

1) Obliczyć moment bezwładności pręta prostolinjowego o gęstości linjowej ϱ względem osi prostopadłej do niego, a przechodzącej przez jego koniec. Obierzmy prostą, na której leży ten pręt, za oś x-ów. Łuk s liczony od początku pręta, jest w tym wypadku równy x. Zatem:

$$B_x = \int_0^a \varrho x^2 dx = \frac{\varrho x^3}{3}\Big|_0^a = \underline{\tfrac{1}{3}\varrho a^3}$$

Jeżeli oś przechodzi przez środek pręta, to z wzoru (a) otrzymujemy, uważając poprzednio obliczony moment za $B_{x'}$, wartość:

$$B_x = \tfrac{1}{3}\varrho a^3 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \varrho a = \underline{\tfrac{1}{12}\varrho a^3}$$

2) Wyznaczyć moment bezwładności łuku koła o promieniu c od $\varphi = \varphi_1$ do $\varphi = \varphi_2$ względem środka tego koła (fig. 49). Obierzmy gęstość $\varrho = 1$. Ponieważ stale jest $r = c$, przeto z wzoru (125) otrzymujemy:

$$B_0 = \int_{s=c\varphi_1}^{s=c\varphi_2} c^2\,ds = c^2 s \Big|_{c\varphi_1}^{c\varphi_2} = \underline{c^3(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

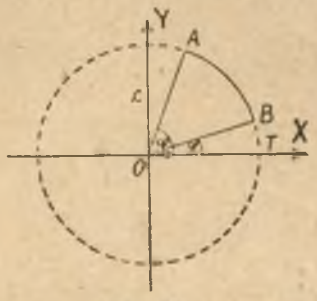


Fig. 49.

Moment bezwładności całego okręgu koła otrzymamy, biorąc φ od 0 do 2π, a więc:

(126) $$\underline{B_0 = 2c^3\pi}$$

Oznaczając obwód koła literą U, otrzymujemy:

(126a) $$\underline{B_0 = U \cdot c^2}$$

3) Wyznaczyć momenty bezwładności całego okręgu koła ze względu na obie osie spółrzędnych (przy gęstości stałej $\varrho = 1$). Wskutek symetrji rozkładu masy widoczne jest, że $B_x = B_y$. Ponieważ zaś $B_x + B_y = B_0$, przeto $2B_x = B_0$ a więc $B_x = \frac{1}{2}B_0$ i tak samo B_y. Opierając się na wyniku poprzedniego przykładu, otrzymujemy zatem:

(127) $$\underline{B_x = B_y = c^3\pi}$$

§ 238. Momenty bezwładności płaskiej powierzchni względem osi.

Zajmiemy się tylko przypadkiem jednorodnego rozmieszczenia masy a więc założymy, że gęstość powierzchniowa ϱ jest stała. Wyznaczymy tu najpierw (podobnie jak przy badaniu momentów statycznych) moment bezwładności prostokąta o podstawie a a wysokości w względem jego podstawy (fig. 50). Podzielmy dany prostokąt na paski prostokątne zapomocą prostych równoległych do osi odciętych. Pasek o szerokości Δy_i ma masę $\varrho a \Delta y_i$.

Pomnóżmy masę każdego takiego paska przez kwadrat odległości dowolnego jego punktu od osi odciętych, np. przez $\bar{y}_i^2$ i utwórzmy sumę tych iloczynów:

$$B_1 = \sum_{i=1}^{n} \varrho a \bar{y}_i^2 \Delta y_i$$

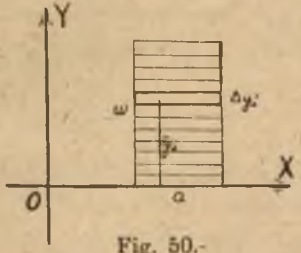


Fig. 50.

Dzielimy następnie dany prostokąt w rozmaite inne sposoby na takie paski i tworzymy cały ciąg takich podziałów tak, by szerokości wszystkich pasków dążyły do zera. Otrzymujemy w ten sposób ciąg sum:

$$B_{1_1}, B_{1_2}, B_{1_3} \ldots B_{1_p}, \ldots$$

Granicę ciągu takich sum, gdy $p \to \infty$, nazywamy *momentem bezwładności danego prostokąta względem osi odciętych*. Wartością tej granicy jest, jak wiadomo, całka oznaczona:

$$B_x = \int_0^w \varrho a y^2 dy = \varrho \frac{a y^3}{3}\Big|_0^w = \underline{\tfrac{1}{3} \varrho a w^3} \tag{128}$$

Masa tego prostokąta ma wartość $M = \varrho \cdot P = \varrho \cdot aw$, a więc możemy napisać wzór (128) w postaci:

$$B_x = M \cdot \frac{w^2}{3} = M \cdot \left(\frac{w}{\sqrt{3}}\right)^2 = Md^2 \tag{128 a}$$

Jeżeli więc obierzemy punkt materjalny o masie równej masie M całego prostokąta w odległości $d = \frac{w}{\sqrt{3}}$ od osi odciętych, to ten punkt ma ten sam moment względem tej osi, co cały prostokąt, obłożony równomiernie tą samą masą. Tę odległość d nazywamy *ramieniem bezwładności* badanej powierzchni względem tej osi.

Należy zwrócić uwagę na to, że d jest *różne* od $\frac{w}{2}$ a więc nie można umieszczać całkowitej masy w środku ciężkości.

Ogólnie dla każdego rozkładu masy M liczbę d, określoną wzorem:

$$B = Md^2$$

gdzie B oznacza moment bezwładności tej masy, nazywamy ramieniem bezwładności tej masy względem danej osi lub danego punktu.

Przykład.

Przy pomocy wzoru (128) oblicza się momenty bezwładności przekrojów rozmaitych belek, zwanych trawersami. Znajomość tych momen-

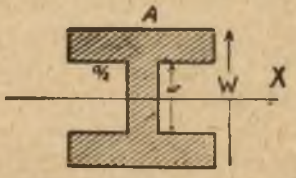


Fig. 51 a.

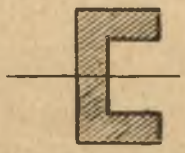


Fig. 51 b.

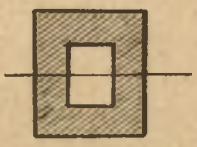


Fig. 51 c.

tów jest bardzo ważna, od nich bowiem zależy wytrzymałość tych trawersów na złamanie.

Obliczmy np. moment przekroju belki o przekroju, uwidocznionym na fig. 51 a, względem osi x-ów. Załóżmy, że gęstość $\varrho = 1$.

Stosując wzór (128), otrzymujemy:

$$B_x = \tfrac{1}{3} A \cdot \left(\frac{W}{2}\right)^3 \cdot 2 - 2 \cdot \tfrac{1}{3} \frac{a}{2} \left(\frac{w}{2}\right)^3 \cdot 2 = 2\left(\frac{AW^3}{24} - \frac{aw^3}{24}\right) = \frac{AW^3}{12} - \frac{aw^3}{12}$$

Niechaj czytelnik wykona podobne obliczenie dla przekrojów postaci, uwidocznionych na figurach 51 b i 51 c.

Opierając się na wzorze (128), wyprowadzimy wzory na momenty bezwładności powierzchni, zamkniętej łukiem dowolnej linji, rzędnemi w punktach końcowych tego łuku i osią odciętych (fig. 52). Postępując tu podobnie jak przy określaniu momentu statycznego (por. § 234), tworzymy momenty bezwładności elementarnych prostokątów: np. dla prostokąta o szerokości Δx_i a wysokości y_i otrzymujemy (z wzoru (128)):

$$\tfrac{1}{3}\varrho\Delta x_i y_i^3$$

Tworzymy sumę:

$$B_1 = \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{3}\varrho\Delta x_i y_i^3$$

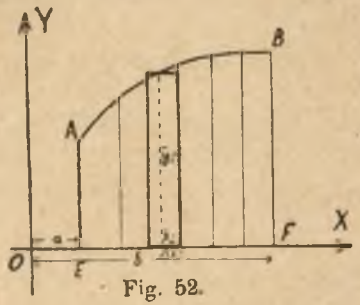


Fig. 52.

Granicę ciągu takich sum $B_1, B_2, B_3, \ldots$ nazywamy *momentem bezwładności powierzchni ABFE względem osi odciętych*. Wartością tej granicy jest całka oznaczona:

(129)
$$B_x = \int_a^b \varrho \frac{y^3}{3}\,dx$$

Moment bezwładności tej powierzchni względem osi rzędnych określamy, mnożąc masę każdego z tych elementarnych prostokątów przez kwadrat odległości dowolnego punktu każdego takiego prostokąta od osi rzędnych.

Obierzmy dla każdego prostokąta odciętą x_i, należącą do rzędnej y_i. Otrzymamy w ten sposób $\varrho\Delta x_i \cdot y_i \cdot x_i^2$. Tworzymy ciąg sum postaci:

$$\sum_{i=1}^{n} \varrho x_i^2 y_i \Delta x_i$$

Granicę tego ciągu nazywamy momentem *bezwładności* danej *powierzchni względem osi rzędnych*. Wartością tej granicy jest całka:

130)
$$B_y = \int_a^b \varrho x^2 y\,dx$$

Przykłady.

1) Obliczyć moment bezwładności powierzchni trójkąta prostokątnego o podstawie a, a wysokości w względem podstawy (biorąc gęstość $\varrho = 1$). Obierzmy podstawę za oś x-ów, a jeden jej wierzchołek za początek układu

(fig. 53). Równanie prostej OA, przechodzącej przez początek układu i przez punkt $A(a, w)$, ma postać:

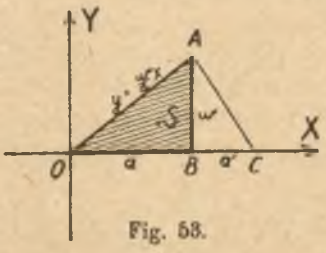


Fig. 53.

$$y = \frac{w}{a} x$$

Z wzoru (129) otrzymujemy:

$$B_x = \tfrac{1}{3} \int_0^a \frac{w^3}{a^3} x^3 \, dx = \frac{w^3}{3a^3} \frac{x^4}{4} \Big|_0^a = \underline{\tfrac{1}{12} a w^3}$$

Stąd łatwo otrzymać moment bezwładności powierzchni dowolnego trójkąta względem podstawy, np. trójkąta OAC. Trzeba tylko dodać $\frac{1}{12} a' w^3$. Oznaczając $a + a' = b$, otrzymujemy dla OAC:

$$B_x = \tfrac{1}{12} b w^3$$

Moment bezwładności trójkąta OAB względem osi y-ów ma, w myśl wzoru (130), wartość:

$$B_y = \int_0^a x^2 \cdot \frac{w}{a} x \, dx = \frac{w}{a} \frac{x^4}{4} \Big|_0^a = \underline{\frac{w a^3}{4}}$$

Niechaj czytelnik obliczy momenty bezwładności trójkąta OAB względem osi, przechodzącej przez jego środek ciężkości: $S(\frac{2}{3} a, \frac{1}{3} w)$ a równoległej do osi spółrzędnych (por. wzór (a) na str. 170).

2) Obliczyć momenty bezwładności elipsy względem obu osi głównych. Z równania elipsy $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ otrzymujemy dla dodatniej połówki:

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

Moment bezwładności całej elipsy względem osi x-ów równa się podwójnemu momentowi połówki elipsy, zatem:

$$B_x = 2 \cdot \int_{-a}^{+a} \frac{y^3}{3} \, dx = \tfrac{2}{3} \frac{b^3}{a^3} \int_{-a}^{+a} (\sqrt{a^2 - x^2})^3 \, dx$$

Całkę tę obliczymy przy pomocy podstawienia $x = a \sin \varphi$ Otrzymujemy:

$$B_x = \tfrac{2}{3} \frac{b^3}{a^3} a^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi \, d\varphi = \frac{2 b^3 a}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi \, d\varphi$$

Przy pomocy wzoru redukcyjnego (str. 21, wzór (20)) otrzymujemy

$$\int \cos^4 \varphi \, d\varphi = \frac{\sin \varphi \cos^3 \varphi}{4} + \tfrac{3}{4} \left(\frac{\sin \varphi \cos \varphi}{2} + \tfrac{1}{2} \int d\varphi \right)$$

a stąd:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi\, d\varphi = \frac{3}{8}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{3}{8}\pi$$

Wobec tego:

$$B_x = \frac{2b^3a}{3}\cdot\frac{3}{8}\pi = \underline{\frac{1}{4}ab^3\pi}$$

Jasnem jest spowodu symetrji, że na moment elipsy względem osi y-ów otrzymamy:

$$\underline{B_y = \frac{1}{4}ba^3\pi}$$

Stąd dla *koła* o promieniu a:

$$\underline{B_x = B_y = \frac{1}{4}a^4\pi}$$

§ 239. Moment bezwładności płaskiej powierzchni względem punktu.

Przy wyznaczaniu momentu bezwładności powierzchni względem punktu dogodnie jest odrazu użyć spółrzędnych biegunowych i badać pola wycinków, ograniczonych łukiem jakiejś linji i promieniami, łączącemi końce tego łuku z punktem, który obieramy za początek układu. Ograniczymy się do jednorodnego rozmieszczenia masy, t. j. do stałej gęstości powierzchniowej ϱ.

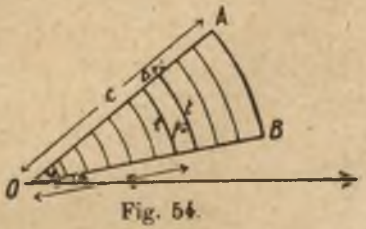


Fig. 54.

Rozpocznijmy od wycinka koła (fig. 54) o promieniu c, należącego do kąta:

$$\alpha = \varphi_2 - \varphi_1$$

Zapomocą kół spółśrodkowych dzielimy ten wycinek na wycinki pierścieni kołowych i jeden wycinek koła przy O.

Masa takiego elementarnego wycinka pierścienia równa się jego polu, pomnożonemu przez gęstość, a to pole, np. p_i, oblicza się przy pomocy wzoru:

$$p_i = \frac{1}{2}(l + L)\cdot\Delta r_i$$

czyli:

$$p_i = \frac{1}{2}(r_i\alpha + (r_i + \Delta r_i)\alpha)\Delta r_i = (r_i + \tfrac{1}{2}\Delta r_i)\alpha\Delta r_i = \bar{r}_i\alpha\Delta r_i$$

Wartość:

$$\bar{r}_i = r_i + \tfrac{1}{2}\Delta r_i = r_i + \tfrac{1}{2}(r_{i+1} - r_i) = \tfrac{1}{2}(r_i + r_{i+1})$$

jest średnią wartością z przedziału $\langle r_i, r_{i+1}\rangle$. Pomnóżmy masę $\varrho\cdot p_i$ przez kwadrat odległości dowolnego jej punktu od punktu O, np. właśnie przez $\bar{r}_i^2$, to otrzymamy elementarny moment bezwładności:

$$\varrho p_i\bar{r}_i^2 = \varrho\bar{r}_i^3\alpha\Delta r_i$$

Tworzymy sumę takich wyrażeń dla całego wycinka koła, t. j.:

$$B_1 = \sum_{i=1}^{n} \varrho \alpha \bar{r}_i^3 \Delta r_i$$

Tworzymy cały ciąg rozmaitych takich podziałów wycinka w taki sposób, by wszystkie Δr_i dążyły do zera i obliczamy odpowiednie sumy $B_1, B_2, B_3, \ldots B_p, \ldots$ Granicę ciągu tych sum, gdy $p \to \infty$, nazywamy momentem bezwładności wycinka OAB względem punktu O. Wartością tej granicy jest całka oznaczona:

$$B_0 = \int_0^c \varrho \alpha r^3 dr = \varrho \alpha \frac{r^4}{4}\Big|_0^c = \underline{\tfrac{1}{4} c^4 \alpha \varrho} \tag{131}$$

Całe koło otrzymamy, kładąc $\alpha = 2\pi$, a więc moment bezwładności powierzchni całego koła względem jego środka ma wartość

$$B_0 = \tfrac{1}{2} \varrho c^4 \pi \tag{132}$$

Opierając się na wzorze (131), określimy moment bezwładności wycinka, ograniczonego łukiem dowolnej linji krzywej o równaniu $r = r(\varphi)$ i promieniami w punktach końcowych tego łuku (fig. 55). Podzielmy ten wycinek w dowolny sposób na n części, wykreślając szereg promieni. Każdy wycinek aproksymujemy wycinkiem koła, biorąc za promień koła np. promień początkowy każdego wycinka. Obliczamy według wzoru (131) moment bezwładności każdego takiego wycinka kołowego względem punktu O. Np. dla wycinka o promieniu r_i a o kącie $\Delta\varphi_i$ otrzymamy:

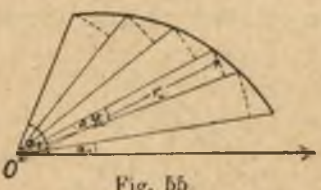


Fig. 55

$$b_i = \tfrac{1}{4} r_i^4 \Delta\varphi_i \cdot \varrho$$

Tworzymy sumę:

$$B_1 = \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{4} r_i^4 \Delta\varphi_i \varrho$$

a następnie ciąg $B_1, B_2, B_3, \ldots$ takich sum, zagęszczając podział tak, aby wszystkie $\Delta\varphi_i$ dążyły do zera. Granicę tego ciągu nazywamy *momentem bezwładności* całego *wycinka względem punktu O*.

Wartością tej granicy jest całka:

$$B_0 = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \tfrac{1}{4} \varrho r^4 d\varphi = \underline{\tfrac{1}{4} \varrho \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} r^4 d\varphi} \tag{133}$$

§ 240. Moment bezwładności powierzchni obrotowej i bryły obrotowej względem osi obrotu.

Z wzoru (126) i (132) na moment bezwładności okręgu koła i pola koła korzysta się, aby określić moment bezwładności powierzchni i bryły obrotowej względem osi obrotu.

Dzielimy łuk linji obracającej się (fig. 56) na części $\Delta s_1, \Delta s_2, \Delta s_3, \ldots$ i przyjmujemy masę każdego takiego łuku skupioną w jednym dowolnym jego punkcie. Niechaj gęstość linjowa łuku będzie $\varrho = 1$. Przez obrót tego punktu materjalnego powstaje okrąg koła o promieniu $\bar{y}_i$, o masie $2\pi\bar{y}_i\Delta s_i$. Moment bezwładności tego koła ma według wzoru (126) wartość:

$$b_i = 2\pi\bar{y}_i^3\Delta s_i$$

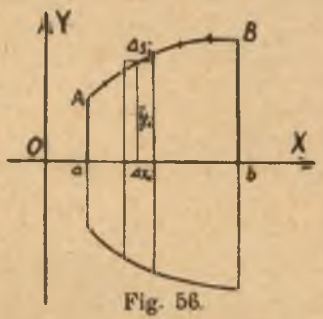


Fig. 56.

Sumując te momenty i tworząc ciąg takich sum, otrzymamy po przejściu do granicy:

(134) $$B_x = 2\pi\int_a^b y^3\,ds$$

Jest to wzór na *moment bezwładności powierzchni obrotowej* względem jej osi obrotu OX.

Celem określenia momentu bezwładności bryły obrotowej, bierzemy zamiast każdej płytki, leżącej między dwoma przekrojami prostopadłemi do osi obrotu, walec o promieniu równym rzędnej $\bar{y}_i$ w dowolnym punkcie pośrednim odpowiedniego łuku Δs_i. Każdy taki walec zastępujemy kołem o promieniu $\bar{y}_i$, obłożonem masą o gęstości Δx_i, równej wysokości tego walca. Moment bezwładności powierzchni tego koła ma według wzoru (132) wartość:

$$b_i = \tfrac{1}{2}\bar{y}_i^4\pi\Delta x_i$$

Stosując tu proces sumowania i przejścia do granicy, otrzymujemy:

(135) $$B_x = \tfrac{1}{2}\pi\int_a^b y^4\,dx$$

Przykłady

1) Obliczyć moment bezwładności walca kołowego o wysokości w a o promieniu a względem jego osi, przyjmując stałą gęstość $\varrho = 1$. Dla powierzchni walca otrzymujemy (fig. 57):

$$B_x = 2\pi\int_0^w a^3\,dx = 2\pi a^3 w = \underline{P \cdot a^2}$$

a dla objętości:

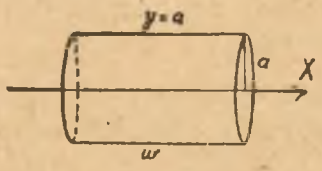


Fig. 57.

$$B_x = \tfrac{1}{2}\pi \int_0^a a^4\,dx = \frac{\pi a^4 w}{2} = V \cdot \frac{a^2}{2}$$

2) Obliczyć moment bezwładności wieńca koła rozpędowego względem jego osi.

Przekrój płaszczyzną, przechodzącą przez oś tego koła, przedstawiono na fig. 58. Trzeba od momentu bezwładności walca o promieniu r_1 odjąć moment bezwładności walca wewnętrznego o promieniu r_2. Stosując wzór, otrzymany w przykładzie 1, otrzymujemy:

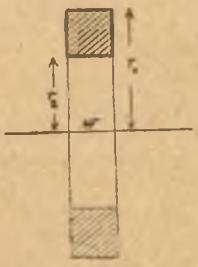


Fig. 58.

$$B_x = \frac{r_1^4 \pi w}{2} - \frac{r_2^4 \pi w}{2} = \frac{\pi w}{2}(r_1^2 - r_2^2)(r_1^2 + r_2^2)$$

Ponieważ objętość wieńca tego koła ma wartość:

$$r_1^2 \pi w - r_2^2 \pi w$$

przeto:

$$B_x = \tfrac{1}{2} V(r_1^2 + r_2^2)$$

3) Obliczyć moment bezwładności objętości kuli o promieniu R względem jej średnicy. Obierzmy tę średnicę za oś obrotu. Ponieważ $x^2 + y^2 = R^2$, przeto:

$$y^4 = (R^2 - x^2)^2 = R^4 - 2R^2x^2 + x^4$$

a więc:

$$B_x = \tfrac{1}{2}\pi \int_{-R}^{+R} (R^4 - 2R^2x^2 + x^4)\,dx = \tfrac{1}{2}\pi \left(R^4 x - \tfrac{2}{3}R^2x^3 + \tfrac{1}{5}x^5\right)\Big|_{-R}^{+R}$$

a stąd:

$$B_x = \tfrac{8}{15} R^5 \pi$$

§ 241. Praca siły, działającej w kierunku drogi.

Jeżeli wzdłuż drogi o długości S działa *stała* siła P w kierunku tej drogi, to pracą tej siły wzdłuż tej drogi nazywamy iloczyn:

$$L = P \cdot S$$

Jeżeli jednak siła P, działająca w kierunku drogi, jest *zmienną*, t. j. zależy od tego, w którym punkcie drogi działa, a więc jest funkcją długości przebytej drogi s (łuku), to trzeba pracę inaczej zdefinjować. Podzielmy drogę, wzdłuż której działa siła $P(s)$, na części $\Delta s_1, \Delta s_2, \Delta s_3, \ldots \Delta s_n$. Każdą taką

część drogi pomnóżmy przez siłę, działającą w dowolnym jej punkcie, np. w punkcie początkowym; otrzymamy w ten sposób dla każdej części drogi pracę, którą wykonałaby siła, gdyby była stałą wzdłuż całej tej części.

Utwórzmy sumę tych iloczynów:

$$L_1 = P(s_1)\Delta s_1 + P(s_2)\Delta s_2 + \ldots + P(s_n)\Delta s_n$$

Wykonajmy następnie cały ciąg takich podziałów drogi ale tak, aby wszystkie Δs_i dążyły do zera. Utwórzmy odpowiadający tym podziałom ciąg sum: $L_1, L_2, L_3, \ldots L_p \ldots$ Granicę tego ciągu nazywamy *pracą siły* (zmiennej), działającej w kierunku drogi, *wzdłuż całej drogi S*. Wartością tej granicy jest, jak wiadomo, całka oznaczona:

$$L = \int_0^S P(s)\,ds \tag{136}$$

Ta całka podaje więc pracę, wykonaną przez siłę $P(s)$, działającą w kierunku drogi, wzdłuż całej drogi o długości S.

Jeżeli siła nie działa w kierunku drogi, lecz jej kierunek tworzy ze stycznemi w rozmaitych punktach drogi rozmaite kąty, to tworzymy w każdym punkcie drogi rzut wektora, przedstawiającego siłę, działającą w tym punkcie, na kierunek stycznej. Niechaj P_t oznacza wielkość tego rzutu siły P na styczną, to pracę określamy przy pomocy sum postaci:

$$L_1 = P_t(s_1)\Delta s_1 + P_t(s_2)\Delta s_2 + \ldots + P_t(s_n)\Delta s_n$$

Na obliczenie tej pracy otrzymujemy wzór:

$$L = \int_0^S P_t(s)\,ds \tag{136a}$$

gdzie $P_t(s)$ oznacza wielkość rzutu siły P na styczną w każdym punkcie drogi. Powrócimy do tych rozważań w ustępie, poświęconym całkom *krzywolinjowym* (por. § 244).

Przykłady.

1) Wydłużamy sprężynę o długość S; wiadomo, że przy każdem wydłużeniu o odcinek s działa siła sprężystości, proporcjonalna do tego wydłużenia, a zatem do pokonania jej trzeba użyć siły $P = k \cdot s$, działającej w kierunku przeciwnym do siły sprężystości, a mianowicie w kierunku wydłużenia. Praca, wykonana przy całkowitem wydłużeniu S, ma zatem wartość:

$$L = \int_0^S ks\,ds = \tfrac{1}{2}kS^2 = \frac{kS}{2} \cdot S$$

t. j. ma taką wartość, jak gdyby działała stała siła $P = \frac{kS}{2}$, równa połowie siły kS, działającej w końcowym punkcie drogi.

2) Obliczyć pracę, wykonaną przez tłok maszyny cieplnej, posuwający się pod wpływem ciśnienia P gazu. Ciśnienie to zmienia się w miarę rozprężania się gazu. Jeżeli pole przekroju tłoku wynosi F, droga przebyta przy jednym ruchu ma długość S a p oznacza ciśnienie gazu na jednostkę pola (prężność), to $P = p \cdot F$ a zatem praca ma wartość:

$$L = \int_0^S p \cdot F ds$$

Wprowadźmy zamiast zmiennej s zmienną $F \cdot s$, oznaczającą objętość v gazu, znajdującego się w danym momencie ruchu pod tłokiem, to:

$$s = \frac{v}{F}, \quad ds = \frac{dv}{F}$$

Niechaj v_1 oznacza objętość początkową, t. j. dla $s = 0$, a v_2 końcową, t. j. dla $s = S$. Otóż:

$$L = \int_{v_1}^{v_2} p\,dv$$

Tak np. przy *izotermicznej* zmianie objętości pod tłokiem związek między objętością o prężności wyraża się wzorem:

$$pv = c$$

a zatem:

$$L = \int_{v_1}^{v_2} \frac{c}{v}\,dv = c \log \frac{v_2}{v_1}$$

Przy *adjabatycznej* zmianie objętości zachodzi między p a v związek:

$$p \cdot v^{1{,}41} = c$$

a więc:

$$L = c \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{v^{1{,}41}} = \frac{cv^{-0{,}41}}{-0{,}41}\Bigg|_{v_1}^{v_2} = \frac{c}{0{,}41}\left(v_2^{-0{,}41} - v_1^{-0{,}41}\right) = \frac{p_1 v_1}{0{,}41}\left(1 - \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{0{,}41}\right)$$

3) Jaką pracę odda masa 1 grama, spadająca pod wpływem siły ciężkości ziemi z wysokości 60 km na powierzchnię ziemi, na wysokość 0 km.

Przyjmijmy za jednostkę siły ciężar 1 grama (przy powierzchni ziemi). W odległości s od środka ziemi działa na masę 1 grama siła $P(s)$

odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości od środka ziemi. Jeżeli R oznacza promień ziemi, to:

$$P(s) : 1 = R^2 : s^2$$

a stąd:

$$P(s) = \frac{R^2}{s^2}$$

A więc praca:

$$L = \int_{R+60}^{R} \frac{R^2}{s^2}\, ds = R^2 \int_{R+60}^{R} s^{-2}\, ds = \frac{R^2 s^{-1}}{-1}\Bigg|_{R+60}^{R} = R^2 \left(\frac{1}{R+60} - \frac{1}{R}\right) = \frac{-60R}{R+60}$$

Ponieważ promień ziemi ma długość około $R = 6370$ km, przeto $L = -59$ kgm (albowiem za jednostkę masy obraliśmy $1\,g = 0{\cdot}001$ kg a za jednostkę długości 1 km $= 1000$ m).

ROZDZIAŁ XX.

Całki z funkcyj dwóch i więcej zmiennych.

Ustęp I.

§ 242. Całki krzywolinjowe.

W poprzednich rozdziałach zajmowaliśmy się wyłącznie całkami z funkcyj jednej zmiennej: funkcja podcałkowa $y = f(x)$ była dotąd zawsze funkcją jednej zmiennej x. Przystąpimy obecnie do badania całek z funkcyj dwóch zmiennych, a więc funkcja podcałkowa:

$$z = P(x, y)$$

będzie funkcją dwóch zmiennych x, y.

Rozpoczniemy od przypadku najbliżej związanego z całkowaniem funkcyj jednej zmiennej, a mianowicie od przypadku, gdy zmienne x, y nie są od siebie niezależne, lecz są ze sobą związane jakiemś równaniem:

(a) $$F(x, y) = 0$$

A więc punkty o spółrzędnych (x, y), które będziemy brali pod uwagę, nie będą wypełniały całej płaszczyzny (X, Y) ani też żadnych obszarów tej płaszczyzny, lecz będą przebiegały w ogólności jakieś linje. Równanie takiej linji (l) może być podane w formie uwikłanej, jak we wzorze (a), albo w formie parametrowej:

(b) $$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

albo też w najprostszym przypadku w formie wyraźnej

(c) $$y = f(x)$$

Zacznijmy od tego ostatniego, najprostszego przypadku. Weźmy pod uwagę łuk $\overset{\frown}{AB}$ linji o równaniu (c), przyczem punkt A należy do odciętej $x = a$, a B do $x = b$. Ponieważ $y = f(x)$ jest jednoznaczną funkcją, przeto do każdej odciętej z tego przedziału należy tylko jedna rzędna. Utwórzmy całkę:

(d) $$\int_a^b P(x, y)\, dx$$

przyczem $y = f(x)$.

Tę całkę z funkcji $P(x, y)$ dwóch zmiennych zamieniamy na całkę z funkcji jednej zmiennej:

$$\int_a^b P(x, f(x))\, dx = \int_a^b U(x)\, dx$$

O funkcjach $P(x, y)$ i $f(x)$ wystarczy uczynić założenia, że $P(x, y)$ jest ciągłą funkcją dwóch zmiennych w jakimś obszarze, zawierającym łuk $\overset{\frown}{AB}$, a $f(x)$ jest funkcją ciągłą w przedziale $\langle a, b\rangle$. Wtedy bowiem funkcja złożona $P(x, f(x)) = U(x)$ jest ciągłą w przedziale $\langle a, b\rangle$, a więc jest całkowalna w tym przedziale. Można też dopuszczać rozmaite nieciągłości dla $P(x, y)$ i $f(x)$, byleby tylko istniała całka uogólniona lub niewłaściwa z $U(x)$.

Taką całkę (d) z funkcji dwóch zmiennych, w której te dwie zmienne są związane równaniem $y = f(x)$, nazywamy **całką krzywolinjową** z funkcji $P(x, y)$, braną po łuku $\overset{\frown}{AB}$ i oznaczamy ją symbolem:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y)\, dx \tag{137}$$

Aby ten symbol miał określone znaczenie, musi być podane ponadto równanie linji, do której należy łuk $\overset{\frown}{AB}$.

Jak widzimy, definicja ta nie wprowadza jeszcze niczego nowego, albowiem ta całka krzywolinjowa równa się zwykłej całce oznaczonej z funkcji złożonej $P(x, f(x))$:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y)\, dx = \int_a^b P(x, f(x))\, dx \tag{137 a}$$

Jeżeli zmienimy porządek granic a, b tej całki, to w symbolu całki krzywolinjowej zmienimy porządek odpowiednich liter A, B. Wiadomo, że przez zmianę porządku granic a, b całka zmieni znak, a więc:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y)\, dx = \int_b^a P(x, f(x))\, dx = -$$

$$- \int_a^b P(x, f(x))\, dx = - \int_{\overset{\frown}{BA}} P(x, y)\, dx$$

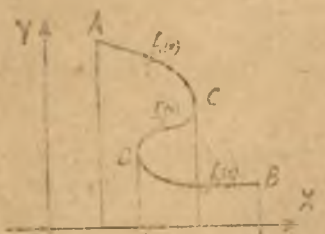


Fig. 59.

Mówimy wtedy, że przebiegamy łuk $\overset{\frown}{AB}$ w kierunku przeciwnym. A więc: *przy zmianie kierunku przebiegania łuku całka krzywolinjowa zmienia znak.*

Weźmy teraz pod uwagę taki łuk, w którym do jednej odciętej należeć może więcej rzędnych, jak np. łuk $\overset{\frown}{AB}$ na fig. 59.

Używając formy wyraźnej, musimy użyć do analitycznego wyrażenia tego łuku trzech funkcyj:

$$y = f_1(x) \text{ w przedziale } \langle a, c\rangle$$
$$y = f_2(x) \quad " \quad \langle c, d\rangle$$
$$y = f_3(x) \quad " \quad \langle d, b\rangle$$

Dla każdego z łuków $\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{CD}$, $\overset{\frown}{DB}$ tworzymy osobno całkę krzywolinjową i obliczamy ją osobno w sposób podany we wzorze (137 a).

Tworzymy następnie sumę tych trzech całek krzywolinjowych:

$$\int_{\overset{\frown}{AC}} P(x, y)\,dx + \int_{\overset{\frown}{CD}} P(x, y)\,dx + \int_{\overset{\frown}{DB}} P(x, y)\,dx$$

Tę sumę nazywamy całką krzywolinjową z funkcji $P(x, y)$ po całym łuku $\overset{\frown}{AB}$ i oznaczamy ją symbolem:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y)\,dx$$

Ogólnie, jeżeli łuk $\overset{\frown}{AB}$ składa się z części $\overset{\frown}{AA_1}$, $\overset{\frown}{A_1A_2}$, ... $\overset{\frown}{A_{n-1}B}$ o równaniach $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, ... $y = f_n(x)$, które każda prostopadła do osi odciętych przecina tylko w jednym punkcie, to **całką krzywolinjową** z $P(x, y)$ według zmiennej x, po całym łuku $\overset{\frown}{AB}$, nazywamy *sumę całek krzywolinjowych* po wszystkich łukach składowych i oznaczamy ją symbolem:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y)\,dx$$

Symbol taki ma zatem następujące znaczenie:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y)\,dx = \int_{a}^{a_1} P(x, f_1(x))\,dx + \int_{a_1}^{a_2} P(x, f_2(x))\,dx + \ldots$$

(138)

$$\ldots + \int_{a_{n-1}}^{b} P(x, f_n(x))\,dx$$

gdzie $a, a_1, a_2, \ldots a_{n-1}, b$ są odciętemi punktów $A, A_1, A_2, \ldots A_{n-1}, B$.

Rozszerzyliśmy w ten sposób znaczenie symbolu (137), nie da się on bowiem w tym ogólnym przypadku wyrazić zapomocą jednej całki według zmiennej x, lecz jest sumą kilku takich całek. Wprawdzie równanie takiego łuku $\overset{\frown}{AB}$ można wyrazić w formie uwikłanej zapomocą jednego wzoru $F(x, y) = 0$ (np. przypadek, przedstawiony na fig. 59, odpowiada równaniu $(y - m)^3 - (x - n) = 0$), ale przy obliczaniu wartości tego symbolu trzeba go rozłożyć na odpowiednią ilość całek.

Ta ogólniejsza definicja całki krzywolinjowej dopuszcza też całki, brane *po linjach zamkniętych*. Tak np. całce krzywolinjowej według zmiennej x z jakiejś funkcji $P(x, y)$, branej po kole K (fig. 60), dajemy następujące znaczenie:

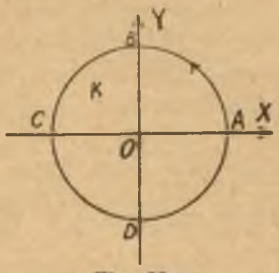


Fig. 60.

$$\int_{ABCDA} P(x, y)\,dx = \int_{ABC} P(x, y)\,dx + \int_{CDA} P(x, y)\,dx$$

Jeżeli to koło ma równanie $x^2 + y^2 - a^2 = 0$, to w pierwszej całce należy za y podstawić $\sqrt{a^2 - x^2}$ a w drugiej $-\sqrt{a^2 - x^2}$. Otrzymamy w ten sposób:

$$\int_{ABCDA} P(x, y)\,dx = \int_{+a}^{-a} P(x, \sqrt{a^2 - x^2})\,dx + \int_{-a}^{+a} P(x, -\sqrt{a^2 - x^2})\,dx$$

Obliczenie całki krzywolinjowej po linji zamkniętej sprowadza się więc w tym przypadku do obliczenia dwóch zwykłych całek oznaczonych.

Sposób pisania: $\int_{ABCDA}$ jest niedogodny, toteż zmieniamy go, oznaczając całą linję kołową jedną literą, np. K. i piszemy krótko: $\int_{(K)} P(x, y)\,dx$.

Ogólnie, oznaczając jakąś linję zamkniętą literą l, oznaczamy całkę krzywolinjową, braną po tej całej linji, symbolem:

$$\int_{(l)} P(x, y)\,dx \tag{139}$$

W takim sposobie pisania tkwiłaby jednak dwuznaczność, gdybyśmy nie ustalili raz na zawsze *kierunku*, w którym obiegamy linję. Otóż ustalono, że symbol (139) oznacza, że przebiegamy linję l w takim kierunku, aby powierzchnia, zamknięta tą linją, pozostawała *po lewej ręce* przy tym obiegu, t. j. obieg ma być przeciwny do ruchu wskazówek na zegarze. Tak więc np. na kole na fig. 60 przebiegaliśmy kolejno punkty A, B, C, D, A, mając wnętrze koła po lewej ręce; wobec tego tę całkę krzywolinjową należało oznaczyć symbolem $\int_{(K)} P(x, y)\,dx$. Gdybyśmy zaś przebiegali te punkty w przeciwnym porządku: A, D, C, B, A, to odpowiednią całkę krzywolinjową należałoby oznaczyć symbolem: $-\int_{(K)} P(x, y)\,dx$. Wynika to stąd, że każda z całek składowych zmieniłaby wtedy znak: np. zamiast $\int_{ABC}$ wystąpiłaby całka $\int_{CBA} = -\int_{ABC}$.

Obliczanie całki krzywolinjowej przy pomocy wzoru (138) jest zwykle dość niedogodne. Używając jednak zamiast wyraźnej formy równań linji, po której całkujemy, formy parametrowej, sprowadzamy zwykle obliczenie całki krzywolinjowej *do jednej*, zwykłej *całki oznaczonej*, wprowadziwszy zamiast zmiennej x zmienną t, służącą do parametrowego przedstawienia danej linji.

Wyjaśnimy to najpierw na przykładzie, a mianowicie na omówionej poprzednio całce po kole. Użyjmy parametrowego przedstawienia koła K o równaniu $x^2 + y^2 - a^2 = 0$, a mianowicie:

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t$$

Całki oznaczone, które służyły do obliczenia całki krzywolinjowej po kole, przyjmą po wprowadzeniu nowej zmiennej t postać:

$$\int_{+a}^{-a} P(x, \sqrt{a^2 - x^2})\,dx = -\int_{t=0}^{t=\pi} P(a\cos t, a\sin t)\,a\sin t\,dt$$

$$\int_{-a}^{+a} P(x, -\sqrt{a^2 - x^2})\,dx = -\int_{t=\pi}^{t=2\pi} P(a\cos t, a\sin t)\,a\sin t\,dt$$

(Ponieważ $\sin t$ ma w przedziale $(\pi, 2\pi)$ wartości ujemne, przeto w drugiej całce trzeba było podstawić $a\sin t$ za $-\sqrt{a^2 - x^2}$).

Sumę tych dwu całek można przedstawić jedną całką od 0 do 2π, a więc:

$$\int_{(K)} P(x, y)\,dx = -\int_{0}^{2\pi} P(a\cos t, a\sin t)\,a\sin t\,dt$$

Tak samo postępuje się w ogólnych przypadkach. To prowadzi nas do wypowiedzenia definicji całki krzywolinjowej w następującej postaci, bardzo dogodnej przy obliczaniu wartości takiej całki.

Jeżeli przy przebieganiu wartości parametru t od t_1 do t_2 punkt o spółrzędnych $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ opisuje łuk $\overset{\frown}{AB}$ dowolnej linji, to całką krzywolinjową z dowolnej funkcji $P(x, y)$ według zmiennej x, braną po tym łuku, jest całka oznaczona od t_1 do t_2 z funkcji $P(\varphi(t), \psi(t))\,\varphi'(t)$ według zmiennej t:

(140)
$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y)\,dx = \int_{t_1}^{t_2} P(\varphi(t), \psi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

Prawą stronę tego wzoru łatwo jest zapamiętać, powstaje ona bowiem przez wprowadzenie w całkę z $P(x, y)\,dx$ zmiennej t, związanej z x zapomocą równania $x = \varphi(t)$. Wtedy dx należy zastąpić przez $\varphi'(t)\,dt$.

Wszystkie poprzednie rozważania można zastosować także do przypadku, gdy uważamy y za zmienną niezależną, a $x = g(y)$ za zmienną zależną. Jeżeli punkt A odpowiada rzędnej $y = \alpha$, a punkt B rzędnej $y = \beta$, to całkę krzywolinjową po łuku $\overset{\frown}{AB}$ według zmiennej y z funkcji $Q(x, y)$ określamy wzorem:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} Q(x, y)\, dy = \int_{\alpha}^{\beta} Q(g(y), y)\, dy$$

w razie, gdy każda prostopadła do osi y-ów przecina łuk $\overset{\frown}{AB}$ najwyżej w jednym punkcie. W ogólnym przypadku używa się parametrowego przedstawienia łuku $\overset{\frown}{AB}$, a ogólna całka krzywolinjowa według zmiennej y jest określona zapomocą wzoru:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} Q(x, y)\, dy = \int_{t_0}^{t_1} Q(\varphi(t), \psi(t))\, \psi'(t)\, dt \tag{141}$$

Jeżeli obydwie całki krzywolinjowe, określone zapomocą wzorów (140) i (141), są brane po tym samym łuku $\overset{\frown}{AB}$, to także sumę ich można przedstawić zapomocą jednej całki oznaczonej. Sumę tę oznaczamy symbolem: $\int_{\overset{\frown}{AB}} (P dx + Q dy)$ a zatem:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} (P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy) = \int_{t_0}^{t_1} (P(\varphi(t), \psi(t))\, \varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\, \psi'(t))\, dt \tag{142}$$

W tej ogólnej postaci występują całki krzywolinjowe najczęściej.

W zupełnie podobny sposób określa się całki krzywolinjowe po łukach linij w przestrzeni trójwymiarowej. I tak mamy podaną funkcję trzech zmiennych: $P(x, y, z)$, które są jednak ze sobą związane tak, że punkt o spółrzędnych x, y, z przebiega łuk $\overset{\frown}{AB}$ jakiejś linji o równaniach:

$$y = f(x), \qquad z = g(x)$$

lub w formie parametrowej:

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t), \qquad z = \chi(t)$$

Niechaj punkt A odpowiada odciętej $x = a$ lub wartości parametru $t = t_A$ a punkt B odciętej $x = b$ lub wartości $t = t_B$. Chodzi o obliczenie całki:

$$\int_a^b P(x, y, z)\, dx = \int_a^b P(x, f(x), g(x))\, dx$$

Tę całkę nazywamy całką krzywolinjową po łuku $\overset{\frown}{AB}$ i oznaczamy ją symbolem $\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y, z)\,dx$. Używając formy parametrowej, mamy:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y, z)\,dx = \int_{t_A}^{t_B} P(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

Podobnie ma się rzecz dla całki z funkcji $Q(x, y, z)$ według zmiennej y i z funkcji $R(x, y, z)$ według zmiennej z.

Ogólną postacią całki krzywolinjowej w przestrzeni trójwymiarowej jest suma trzech takich całek, branych po tym samym łuku, a więc:

$$I = \int_{\overset{\frown}{AB}} (P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz)$$

Najdogodniej jest zwykle obliczać tę całkę zapomocą jednej zwykłej całki oznaczonej, wynikającej z użycia parametrowego przedstawienia linji, po której całkujemy. Wtedy otrzymujemy:

$$I = \int_{t_A}^{t_B} (P(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\,\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\,\psi'(t) + R(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\,\chi'(t))\,dt$$

Wartość każdej całki krzywolinjowej zależy tylko od linji, po której całkujemy, a nie zależy od jej analitycznego przedstawienia.

Przykłady.

1) Obliczyć całkę krzywolinjową z funkcji $x \cdot y$ według zmiennej x po łuku paraboli $y^2 = 2px$ o rzędnych nieujemnych od $A(0, 0)$ do $B(a, b)$ (por. fig. 61). Otrzymujemy

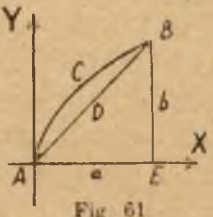


Fig. 61

$$\text{(I)} \quad \int_{\overset{\frown}{ACB}} xy\,dx = \int_0^a x\sqrt{2px}\,dx = \sqrt{2p}\int_0^a x^{\frac{3}{2}}\,dx =$$
$$= \sqrt{2p}\,a^{\frac{5}{2}} : \tfrac{5}{2} = \tfrac{2}{5}a^2\sqrt{2pa} = \underline{\tfrac{2}{5}a^2 b}$$

Obliczmy tę samą całkę po prostej ADB. Równanie tej prostej jest $y = \frac{b}{a}x$, a więc:

$$\int_{\overset{\frown}{ADB}} xy\,dx = \int_0^a x\,\frac{b}{a}\,x\,dx = \frac{b}{a}\int_0^a x^2\,dx = \frac{ba^3}{3a} = \underline{\tfrac{1}{3}a^2 b}$$

Widzimy stąd, że całka krzywolinjowa z tej samej funkcji, między temi samemi punktami końcowemi, ale brana *po różnych łukach*, może mieć *różne wartości*.

Obliczmy jeszcze całkę z tej samej funkcji po drodze łamanej $\widehat{AEB}$.

Równania całej tej linji nie można przedstawić w formie wyraźnej. Natomiast nie trudno uzyskujemy parametrowe przedstawienie tej linji łamanej.

Trzeba położyć:

$$\begin{aligned} x &= t,\ y = 0 && \text{dla} && 0 \leqq t \leqq a \\ x &= a,\ y = t - a && \text{„} && a \leqq t \leqq a + b \end{aligned}$$

Używając wzoru (140), otrzymujemy:

$$\int_{AEB} xy\,dx = \int_0^{a+b} x(t)\,y(t)\cdot x'(t)\,dt = \int_0^a t\cdot 0\cdot 1\,dt + \int_a^{a+b} a(t-a)\cdot 0\cdot dt = \underline{0}$$

Obliczmy jeszcze całkę z tej samej funkcji po konturze zamkniętym $l = ACBEA$. Ponieważ obiegając kontur w tym porządku, mamy pole, zamknięte tym konturem, po *prawej* ręce, przeto należy tę całkę oznaczyć symbolem:

$$\text{(II)} \qquad -\int_{(l)} xy\,dx$$

Wartość jej jest równa sumie całek po łuku $\widehat{ACB}$ i po linji łamanej $\widehat{BEA}$, a zatem jest równa $\frac{2}{3}a^2b + 0 = \frac{2}{3}a^2b$.

Całka (I) zarówno jak i całka (II) przedstawiają, jak wiemy, moment statyczny względem osi rzędnych powierzchni, ograniczonej konturem $ACBEA$.

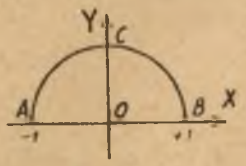


Fig. 62.

2) Obliczyć całki krzywolinjowe (fig. 62):

$$\int_{ACB} (3\,y\,dx + 2\,x\,dy) \quad \text{i} \quad \int_{AOB} (3\,y\,dx + 2\,x\,dy)$$

Pierwsza całka jest brana po półkolu o promieniu 1.

Używając parametrowego przedstawienia: $x = \cos t$, $y = \sin t$, otrzymujemy dla całki po półkolu:

$$\int_{ACB} (3\sin t(-\sin t) + 2\cos^2 t)\,dt = \int_{\pi}^{0} (-3\sin^2 t + 2\cos^2 t)\,dt =$$

$$= \int_0^{\pi} (3 - 3\cos^2 t - 2\cos^2 t)\,dt = 3\int_0^{\pi} dt - 5\int_0^{\pi} \cos^2 t\,dt = 3\pi - 5\cdot\tfrac{\pi}{2} = \underline{\tfrac{1}{2}\pi}$$

W całce po linji prostej AOB jest stale $y = 0$, a więc:

$$\int_{AOB} (3\,y\,dx + 2x\,dy) = \int_{AOB} (3\,y\,dx + 2\,x\,y'dx) = \int_{AOB} (3\cdot 0 + 2x\cdot 0)\,dx = 0$$

a więc otrzymaliśmy inną wartość dla drogi $\overset{\frown}{ACB}$ a inną dla drogi $\overset{\frown}{AOB}$, łączącej te same punkty końcowe A i B.

Niechaj czytelnik stwierdzi w podobny sposób, że całka krzywolinjowa:

$$\int (2xy\,dx + x^2\,dy)$$

ma tę samą wartość po drodze $\overset{\frown}{ACB}$, co po drodze $\overset{\frown}{AOB}$, a mianowicie wartość 0. Można okazać, że ta całka przyjmuje tę samą wartość po każdej drodze, łączącej z sobą punkty A i B.

3) Obliczyć wartość całki krzywolinjowej:

$$I = \int_{\overset{\frown}{AB}} (z\,dx + x\,dy + y\,dz)$$

przyczem $\overset{\frown}{AB}$ jest łukiem linji śrubowej o równaniach (por. tom I, str. 378):

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = at$$

dla łuku, odpowiadającego jednemu krokowi śruby, t. j. od $t = 0$ do $t = 2\pi$ czyli od $A(a, 0, 0)$ do $B(a, 0, 2a\pi)$.

Wyrażamy całkę I zapomocą zwykłej całki oznaczonej, a mianowicie:

$$I = \int_0^{2\pi} (at \cdot (-a\sin t) + a\cos t \cdot a\cos t + a\sin t \cdot a)\,dt =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} (-t\sin t + \cos^2 t + \sin t)\,dt =$$

$$= -a^2 \int_0^{2\pi} t\sin t\,dt + a^2 \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt + a^2 \int_0^{2\pi} \sin t\,dt$$

Po wykonaniu tych prostych całkowań otrzymujemy:

$$I = \underline{3a^2\pi}$$

§ 243. Całki krzywolinjowe w zagadnieniach geometrycznych.

Przy obliczaniu zapomocą całek oznaczonych pól, zamkniętych linjami, natrafiamy na pewne niedogodności, gdy do jednej odciętej należy więcej aniżeli jedna rzędna. Zobaczymy, że unikniemy tych niedogodności, używając całek krzywolinjowych.

I tak pole, zamknięte łukiem $\overset{\frown}{AB}$ linji o równaniu $y = f(x)$ (dla $y > 0$), rzędnemi w punktach końcowych tego łuku i osią odciętych,

wyraziliśmy wzorem:

$$P = \int_a^b y\,dx$$

przyczem a i b są odciętemi punktów końcowych danego łuku.

Tę całkę możemy pojmować jako całkę krzywolinjową z funkcji $P(x, y) = y$ po łuku $\overset{\frown}{AB}$, albowiem:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} y\,dx = \int_a^b y\,dx = P$$

Aby obliczyć przy pomocy całek oznaczonych pole, zamknięte dowolną linją krzywą, np. linją $ADBC$ czyli l na fig. 63, trzeba było rozdzielić tę linję na łuki, w których do jednej odciętej należy zawsze tylko jedna rzędna i obliczyć kilka całek. Tak np. do obliczenia pola, przedstawionego na fig. 63, trzeba użyć dwóch całek:

$$P = \int_a^b y_2(x)\,dx - \int_a^b y_1(x)\,dx$$

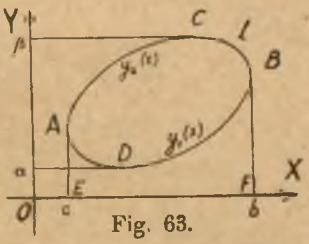


Fig. 63.

Otóż te dwie całki można ująć w jedną całkę *krzywolinjową*, a mianowicie:

$$P = \int_{\overset{\frown}{ACB}} y\,dx - \int_{\overset{\frown}{ADB}} y\,dx = \int_{\overset{\frown}{ACB}} y\,dx + \int_{\overset{\frown}{BDA}} y\,dx = \int_{\overset{\frown}{ACBDA}} y\,dx$$

Obiegając punkty konturu tej powierzchni w porządku A, C, B, D, A, mamy po *prawej* ręce pole, ograniczone tym konturem, a więc, używając symbolu $\int_{(K)}$, należy mu dać znak —. A zatem:

(143)
$$\boxed{P = -\int_{(K)} y\,dx}$$

Widzimy stąd, że pole, zamknięte dowolną linją ciągłą, można wyrazić zapomocą jednej całki krzywolinjowej.

Uważając x za funkcję zmiennej y, możemy to samo pole wyrazić także zapomocą innej całki krzywolinjowej, a mianowicie:

$$P = \int_{\overset{\frown}{DBC}} x\,dy - \int_{\overset{\frown}{DAC}} x\,dy = \int_{\overset{\frown}{DBC}} x\,dy + \int_{\overset{\frown}{CAD}} x\,dy = \int_{\overset{\frown}{DBCAD}} x\,dy$$

czyli:

$$P = +\int_{(\mathcal{K})} x\,dy \tag{144}$$

Całka ma tu znak $+$, albowiem przebiegając punkty konturu w porządku D, B, C, A, D, mamy pole, zamknięte tym konturem, po *lewej* ręce.

Dodając stronami wzory (143) i (144), otrzymujemy:

$$2P = \int_{(\mathcal{K})} x\,dy - \int_{(\mathcal{K})} y\,dx$$

a stąd:

$$P = \tfrac{1}{2}\int_{(\mathcal{K})} (x\,dy - y\,dx) \tag{145}$$

Ten wzór na pole wyprowadziliśmy już właściwie w poprzednim rozdziale, używając przedstawienia parametrowego, a mianowicie wzór (84) na str. 128 jest równoważny z wzorem (145).

Podobnie można przedstawić zapomocą całki krzywolinjowej wzór na objętość bryły obrotowej, zakreślonej obrotem powierzchni, np. *ACBFE* na fig. 63, około osi odciętych, a mianowicie:

$$V = \pi\int_{a}^{b} y^2\,dx = \pi\int_{\overset{\frown}{ACB}} y^2\,dx$$

Jeżeli chodzi o obliczenie objętości bryły, zakreślonej obrotem powierzchni, ograniczonej dowolną linją zamkniętą l, to postępując podobnie, jak dla pola, otrzymujemy wzór:

$$V = -\pi\int_{(\mathcal{K})} y^2\,dx$$

Także wzór na pole powierzchni obrotowej, zakreślonej obrotem łuku dowolnej linji (np. $\overset{\frown}{ACB}$ na fig. 63) około osi odciętych, można interpretować jako całkę krzywolinjową, a mianowicie całkę z funkcji $Q(s, y) = y$ Otóż.

$$P = 2\pi\int_{s_a}^{s_b} y\,ds = 2\pi\int_{\overset{\frown}{ACB}} y\,ds$$

§ 244. Zastosowanie całek krzywolinjowych w fizyce

1. Praca jako całka krzywolinjowa.

Bardzo ważnem zastosowaniem całek krzywolinjowych jest definicja i obliczanie pracy, wykonanej po dowolnej drodze przez dowolną siłę, działającą niekoniecznie w kierunku drogi i zmieniającą swą wielkość i kierunek zależnie od położenia punktu na drodze. W poprzednim rozdziale rozważaliśmy tylko specjalny przypadek, a mianowicie, gdy siła była skierowana wzdłuż drogi. Obecnie zajmiemy się przypadkiem ogólnym. I tak określmy najpierw pracę, wykonaną wzdłuż odcinka AB linji prostej przez siłę F stałą, lecz tworzącą z tą prostą jakiś kąt α (fig. 64). Praca L jest w tym wypadku równa iloczynowi z rzutu siły F na tę prostą i z długości tego odcinka, a więc:

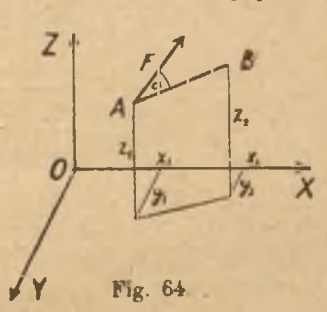


Fig. 64

(a) $$L = F\cos\alpha \cdot AB$$

Uważajmy odcinek AB za wektor i zastąpmy go składowemi w kierunkach trzech osi spółrzędnych. Te składowe mają wartości $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$. Rozłóżmy także wektor F, reprezentujący siłę, na składowe w tych samych kierunkach i nazwijmy je: P, Q, R. Pracę L możemy wyrazić także jako sumę trzech prac, wykonanych wzdłuż tych dróg składowych przez siły składowe, a więc:

(b) $$L = P\cdot(x_2 - x_1) + Q\cdot(y_2 - y_1) + R\cdot(z_2 - z_1)$$

Dowód. Jeżeli wektor F tworzy z osiami kąty α_1, β_1, γ_1, a odcinek AB kąty α_2, β_2, γ_2, to $P = F\cos\alpha_1$, $Q = F\cos\beta_1$, $R = F\cos\gamma_1$, $x_2 - x_1 = AB\cos\alpha_2$, $y_2 - y_1 = AB\cos\beta_2$, $z_2 - z_1 = AB\cos\gamma_2$, a więc:

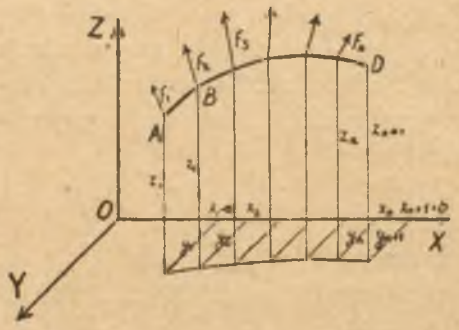
$$P(x_2 - x_1) + Q(y_2 - y_1) + R(z_2 - z_1) = F\cdot AB\cdot(\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2)$$

Wiadomo zaś z geometrji analitycznej, że wyrażenie, zawarte w nawiasie, przedstawia $\cos\alpha$, gdzie α jest kątem, zawartym między wektorami F i AB. A więc istotnie prawe strony wzorów (a) i (b) mają te same wartości.

Chodzi nam teraz o definicję pracy, wykonanej wzdłuż dowolnego łuku $\overset{\frown}{AD}$ (fig. 65), przez siłę F zmienną. Wartości składowych tej siły w kierunku osi spółrzędnych zmieniają się, zależnie od punktu, w którym działa siła, są więc funkcjami spółrzędnych punktu bieżącego na krzywej; oznaczymy je zatem wyrażeniami $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$. Rozłóżmy łuk $\overset{\frown}{AD}$ na dowolną liczbę części, np. na n części a każdy łuk częściowy zastąpmy cięciwą, łączącą jego końce. Zmienną siłę, działającą wzdłuż każdego łuku częściowego, zastąpmy stałą siłą, np. równą

sile, działającej w początkowym punkcie tego łuku. Praca wzdłuż cięciwy AB ma zatem według wzoru (b) wartość:

$$L_1 = P(x_1, y_1, z_1)(x_2 - x_1) + Q(x_1, y_1, z_1)(y_2 - y_1) + R(x_1, y_1, z_1)(z_2 - z_1)$$



Tworzymy sumę tych prac dla wszystkich cięciw, a mianowicie:

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} (P(x_i, y_i, z_i)(x_{i+1} - x_i) + Q(x_i, y_i, z_i)(y_{i+1} - y_i) + R(x_i, y_i, z_i)(z_{i+1} - z_i))$$

Dzielimy następnie łuk $\overset{\frown}{AD}$ w rozmaite sposoby na części tak, aby długości wszystkich łuków częściowych dążyły do zera; wtedy także różnice spółrzędnych dążą do zera. Otrzymamy w ten sposób ciąg takich sum:

$$S_1, S_2, S_3, \ldots S_p \ldots$$

Granicę ciągu tych sum nazywamy *pracą zmiennej siły wzdłuż drogi* $\overset{\frown}{AD}$.

Aby wyznaczyć tę granicę, weźmy najpierw pod uwagę sumę, złożoną z dodajników $P(x_i, y_i, z_i)(x_{i+1} - x_i)$. Jeżeli linja $\overset{\frown}{AD}$ ma równania $y = f(x)$, $z = g(x)$, to:

$$P(x_i, y_i, z_i) = P(x_i, f(x_i), g(x_i)) = U(x_i)$$

jako funkcja złożona zmiennej x_i. Sumy postaci.

$$\sum_{i=1}^{n} P(x_i, y_i, z_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=1}^{n} U(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$

dążą, jak wiemy, do całki:

$$\int_a^b U(x)\,dx = \int_a^b P(x, f(x), g(x))\,dx = \int_{\overset{\frown}{AD}} P(x, y, z)\,dx$$

Podobnie ma się rzecz z dwiema pozostałemi częściami sumy S_1, a więc ciąg $\{S_p\}$ tych sum dąży do całki krzywolinjowej:

$$L = \int_{\overset{\frown}{AD}} (P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz)$$

Tę całkę krzywolinjową możnaby uważać wprost za *definicję pracy*.

Rozumowanie, oparte na równaniach $y = f(x)$, $z = g(x)$, zakłada, że do każdej branej pod uwagę odciętej x należy jeden punkt drogi $\overset{\frown}{AD}$ (i podobnie dla y i z

przy funkcjach $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$). W przypadku ogólnym należy przeprowadzić całe rozumowanie, opierając się na parametrowem przedstawieniu łuku $\overset{\frown}{AD}$. Wtedy, stosując twierdzenie o wartości średniej, otrzymujemy: $x_{i+1} - x_i = x(t_{i+1}) - x(t_i) = x'(\tau_i)(t_{i+1} - t_i)$ i dla tej średniej wartości τ_i trzeba brać wartość funkcji P, a zatem w sumie S_1 wystąpią wtedy wyrażenia:

$$P(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i))\, x'(\tau_i)(t_{i+1} - t_i) = V(\tau_i)(t_{i+1} - t_i)$$

Dalsze rozumowanie przeprowadza się tak, jak poprzednio.

Przykład.

Obliczyć pracę, wykonaną wzdłuż łuku $\overset{\frown}{AB}$ przez siłę, zwróconą w każdym punkcie drogi do stałego punktu i zależną tylko od odległości r od tego stałego punktu. Obieramy ten stały punkt za początek układu O. Wyraźmy równanie linji $\overset{\frown}{AB}$ w formie parametrowej, używając jako parametru odległości r; a więc:

$$x = \varphi(r), \quad y = \psi(r), \quad z = \chi(r)$$

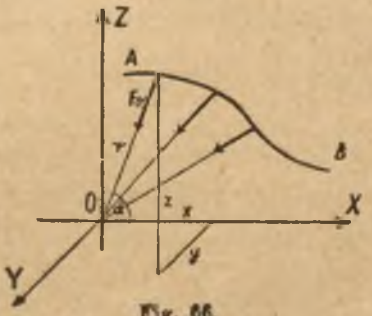


Fig. 66.

Składowe siły $F(r)$ w kierunku osi spółrzędnych mają wartości:

$$P(x, y, z) = F(r)\cos\alpha = F(r)\cdot\frac{x}{r}$$

$$= \frac{F(r)\,\varphi(r)}{r} = H(r)$$

i podobnie:

$$Q(x, y, z) = K(r), \quad R(x, y, z) = M(r)$$

a więc zależą także tylko od $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Wobec tego praca wzdłuż drogi $\overset{\frown}{AB}$ ma wartość:

$$L = \int_{\overset{\frown}{AB}} (H(r)\cdot\varphi'(r) + K(r)\cdot\psi'(r) + M(r)\cdot\chi'(r))\,dr =$$

$$= \int_{\overset{\frown}{AB}} T(r)\,dr = \int_{r_A}^{r_B} T(r)\,dr$$

Jeżeli $U(r)$ jest funkcją pierwotną funkcji $T(r)$, to:

$$L = U(r_B) - U(r_A)$$

Widzimy, że w tym wypadku wartość pracy, wykonanej po drodze $\overset{\frown}{AB}$, zależy tylko od odległości punktów końcowych łuku od stałego punktu O, a *nie zależy od kształtu drogi* $\overset{\frown}{AB}$.

Przypadek ten odgrywa w fizyce nadzwyczaj ważną rolę.

Niechaj czytelnik wykona obliczenie pracy między punktami $A(a, b)$ i $B(x, y)$, leżącemi na płaszczyźnie (XY), w przypadku, gdy siła działa według prawa Newtona, t. j. $F = -\frac{m}{r^2}$.

$$\left(\text{Wynik: } L = \frac{m}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{m}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{m}{r_B} - \frac{m}{r_A}\right).$$

Ćwiczenie. Dla siły o składowych $P = -y$, $Q = x$, $Z = 0$ obliczyć pracę od $A(0, 0, 0)$ do $A(1, 1, 0)$ po prostej AB i po półkolu o średnicy AB. (Wynik $L_1 = 0$, $L_2 = \frac{1}{2}\pi$, a więc prace po tych drogach są różne).

II. Zastosowanie całek krzywolinjowych do procesów termodynamicznych.

W termodynamice charakteryzuje się „stan“ ciała jednorodnego zapomocą jego objętości v i ciśnienia p, jakiemu jest poddane to ciało. Te zmienne v i p są ze sobą związane pewnem równaniem, np. dla gazów doskonałych: $pv = RT$.

Jeżeli początkowemu stanowi ciała odpowiadają wartości v_1, p_1, t. j. ciało ma objętość v_1 i poddane jest ciśnieniu p_1, a następnie doprowadzimy to ciało w jakikolwiek sposób do stanu (v_2, p_2), to zmieni się w ogólności ilość ciepła, zawartego w tem ciele, o Q kaloryj. Użyjmy do przedstawienia związku między zmiennemi v i p układu spółrzędnych (fig. 67). Punkt A odpowiada stanowi (v_1, p_1) a punkt B stanowi (v_2, p_2). Od punktu A do B można dojść rozmaitemi drogami. Tak np. łamana droga ACB oznacza, że najpierw zmieniamy ciśnienie z p_1 na p_2 przy stałej objętości v_1 a potem zmieniamy objętość do wartości v_2. Jeżeli zmieniamy równocześnie v i p według wzoru $pv = RT$ przy stałej temperaturze T, to punkt A porusza się po łuku $\overset{\frown}{ADB}$ hiperboli równobocznej (zmiana izotermiczna) a można się też poruszać po rozmaitych innych drogach: AEB, AFB i t. p. Bardzo ważną kwestją jest badanie, jak się zmienia przy takich procesach ilość ciepła, zawartego w ciele i jego energja wewnętrzna. Otóż okazuje się w termodynamice, że przyrost energji wewnętrznej $u(v, p)$ ciała można wyrazić zapomocą całki krzywolinjowej.

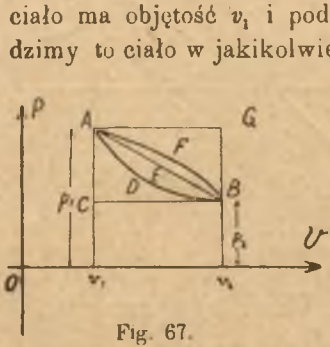


Fig. 67.

Tak np. dla drogi ADB otrzymujemy na ten przyrost energji wzór:

$$\int_{\overset{\frown}{ADB}} (C_v(T, v)dT + (l - p)dv)$$

gdzie C_v oznacza ciepło właściwe przy stałej objętości, a l ciepło utajone (por. tom I, str. 360). Dowodzi się, że ta całka ma taką samą wartość dla różnych dróg, łączących te same dwa punkty. Natomiast zmianę Q ilości ciepła można wyrazić zapomocą całki krzywolinjowej z wyrażenia $\frac{\partial u}{\partial v} dv + \frac{\partial u}{\partial p} dp + p dv$ czyli $du(v, p) + p \cdot dv$, gdzie funkcja $u(v, p)$ jest energją wewnętrzną ciała. Otóż dla drogi np. $\overset{\frown}{ADB}$ otrzymujemy:

$$Q = \int_{\overset{\frown}{ADB}} (du(v, p) + p dv)$$

Dla różnych dróg otrzymuje się naogół różne ilości ciepła.

Jeżeli natomiast podzielimy wyrażenie, znajdujące się pod znakiem całki, przez temperaturę T, która jest funkcją zmiennych v i p $\left(\text{np. dla gazów doskonałych } T = \frac{p \cdot v}{R}\right)$, to otrzymamy całkę krzywolinjową:

$$S = \int_{\overset{\frown}{ADB}} \frac{du(v, p) + p\, dv}{T(v, p)}$$

Otóż okazuje się, że wartość tej całki krzywolinjowej nie zależy od drogi całkowania, a zależy tylko od stanu początkowego $A(v_1, p_1)$ i końcowego $B(v_2, p_2)$. Wyrażenie S nazywamy *entropją* ciała (por. tom I, str. 360). Badanie tych dwóch całek krzywolinjowych odgrywa zasadniczo ważną rolę w termodynamice.

Całki krzywolinjowe znajdują też zastosowania w innych działach fizyki, np. w hydrodynamice i w elektrodynamice.

III. Zastosowanie całek krzywolinjowych do obliczania momentów.

Wyznaczaliśmy momenty statyczne powierzchni, ograniczonych z jednej strony dowolnym łukiem, który proste równoległe do osi y-ów przecinają tylko w jednym punkcie, a z innych stron rzędnemi w punktach końcowych łuku i osią odciętych. Otrzymaliśmy przytem zupełnie inne wzory na momenty statyczne względem osi odciętych a inne względem osi rzędnych. Używając całek krzywolinjowych, możemy wyrazić jednym wzorem moment powierzchni, zamkniętej dowolną linją a ponadto otrzymamy zupełnie analogicznie wzory dla obu osi.

Obierzmy gęstość stałą: $\varrho = 1$. Wtedy moment statyczny powierzchni, zamkniętej linją l (fig. 68), względem osi odciętych, ma wartość:

$$M_x = \tfrac{1}{2} \int_a^b y_1^2\, dx - \tfrac{1}{2} \int_a^b y\, dx$$

jeżeli $y = y_1(x)$ oznacza równanie łuku $\overset{\frown}{ACB}$ a $y = y_2(x)$ łuku $\overset{\frown}{ADB}$. Obydwie te całki możemy jednak uważać za całki krzywolinjowe, a mianowicie:

$$M_x = \tfrac{1}{2}\int_{\overset{\frown}{ACB}} y^2\,dx - \tfrac{1}{2}\int_{\overset{\frown}{ADB}} y^2\,dx = \tfrac{1}{2}\int_{\overset{\frown}{ACB}} y^2\,dx + \tfrac{1}{2}\int_{\overset{\frown}{BDA}} y^2\,dx$$

Stąd:

$$M_x = \tfrac{1}{2}\int_{\overset{\frown}{ACBDA}} y^2\,dx = -\tfrac{1}{2}\int_{(l)} y^2\,dx \tag{146}$$

Znak — pochodzi stąd, że obiegając linję l w porządku A, C, B, D, A, mamy powierzchnię, zamkniętą tą linją, po prawej ręce.

Moment statyczny tej samej powierzchni względem osi rzędnych ma wartość:

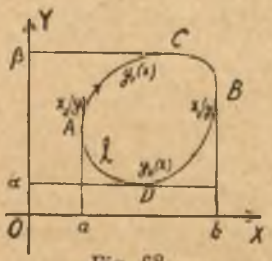


Fig. 68.

$$M_y = \tfrac{1}{2}\int_a^\beta x_1^2\,dy - \tfrac{1}{2}\int_a^\beta x_2^2\,dy =$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_{\overset{\frown}{DBC}} x^2\,dy - \tfrac{1}{2}\int_{\overset{\frown}{DAC}} x^2\,dy = \tfrac{1}{2}\int_{\overset{\frown}{DBCAD}} x^2\,dy$$

a więc:

$$M_y = +\tfrac{1}{2}\int_{(l)} x^2\,dy \tag{147}$$

Otrzymaliśmy więc dla obu momentów wzory, różniące się tylko znakiem i przemianą liter. Podobnie dla momentów bezwładności powierzchni, zamkniętej dowolną linją l, względem obu osi, otrzymujemy przy użyciu całek krzywolinjowych dwa wzory:

$$B_x = -\tfrac{1}{3}\int_{(l)} y^3\,dx, \qquad B_y = \tfrac{1}{3}\int_{(l)} x^3\,dy \tag{148}$$

w których są tylko przemienione litery x, y a znaki zmienione.

§ 245. Zastosowanie całek krzywolinjowych w teorji funkcyj zmiennej zespolonej [1].

Zbiór wszystkich liczb zespolonych przedstawiamy graficznie zapomocą punktów płaszczyzny, zwanej płaszczyzną liczbową (Gaussa). Każdej liczbie zespolonej:

$$z = x + iy$$

[1] Zasadnicze wiadomości o zmiennej zespolonej są podane w rozdziale końcowym.

przyporządkowujemy punkt o spółrzędnych x, y i odwrotnie każdemu punktowi tej płaszczyzny o spółrzędnych x, y przyporządkowujemy liczbę zespoloną $z = x + iy$. Weźmy pod uwagę jakiś obszar (D) tej płaszczyzny (fig. 69). Jeżeli każdej liczbie $z = x + iy$ z tego obszaru przyporządkujemy jakąś liczbę zespoloną $u = P + iQ$, to z nazywamy zmienną niezależną a u zmienną zależną, czyli funkcją tej zmiennej z i piszemy:

$$u = f(z)$$

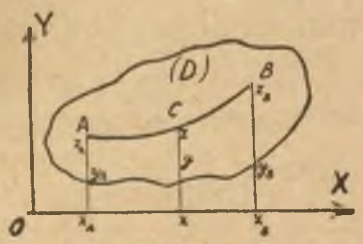


Fig. 69.

Nie można podać obrazu graficznego tej funkcji nawet przy użyciu trzech osi spółrzędnych, albowiem do przedstawienia wartości $u = P + iQ$ trzebaby użyć jeszcze dwóch osi (dwie są potrzebne dla $z = x + iy$), a więc mielibyśmy do czynienia z przestrzenią czterowymiarową, niewyobrażalną.

Natomiast można interpretować graficznie związek $u = f(z)$ między zmiennemi zespolonemi u, z w inny sposób, a mianowicie zapomocą *odwzorowania* płaszczyzny $(X\ Y)$ na inną płaszczyznę $(\bar{P}\ \bar{Q})$ (por. tom I, § 121, str. 364 i nast.).

Każdemu punktowi z z obszaru (D), czyli każdej parze liczb rzeczywistych x, y, które są spółrzędnemi punktu tego obszaru, odpowiada jakieś rzeczywiste P i jakieś rzeczywiste Q. A zatem P i Q są funkcjami rzeczywistemi dwóch zmiennych rzeczywistych x, y. A więc:

$$u = f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$$

Zajmiemy się tu zdefinjowaniem całki oznaczonej z funkcji $f(z)$ zmiennej zespolonej, branej po różnych drogach w granicach od $z = z_A$ do $z = z_B$, odpowiadających punktom A i B obszaru (D). Połączmy w tym celu punkt A z B dowolnym łukiem $\overset{\frown}{ACB}$, leżącym w obszarze (D) i obierzmy na tym łuku dowolną liczbę punktów $z_A = z_1, z_2, z_3, \ldots z_n, z_{n+1} = z_B$, o spółrzędnych $x_1, x_2, \ldots x_{n+1}$; $y_1, y_2 \ldots y_{n+1}$. Utwórzmy sumę:

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} f(z_k)(z_{k+1} - z_k) = \sum_{k=1}^{n} (P(x_k, y_k) + iQ(x_k y_k))(x_{k+1} + iy_{k+1} - x_k - iy_k)$$

to znaczy sumę wyrażeń postaci:

$$P(x_k, y_k)(x_{k+1} - x_k) - Q(x_k, y_k)(y_{k+1} - y_k) +$$
$$+ i[P(x_k, y_k)(y_{k+1} - y_k) + Q(x_k, y_k)(x_{k+1} - x_k)]$$

Utwórzmy następnie ciąg $S_1, S_2, \ldots S_n, \ldots$ takich sum, obierając przedziały częściowe zmiennych x i y tak, aby wszystkie dążyły do zera. Granicę

ciągu tych sum nazywamy całką oznaczoną funkcji $f(z)$ zmiennej zespolonej od $z = z_A$ do $z = z_B$ po drodze $\overset{\frown}{ACB}$. Ta granica składa się z dwóch całek *krzywolinjowych*, a mianowicie:

$$(149)\quad \int_{z_A}^{z_B} f(z)\,dz = \int_{\overset{\frown}{ACB}} (P(x,y)\,dx - Q(x,y)\,dy) + i\int_{\overset{\frown}{ACB}} (P(x,y)dy + Q(x,y)\,dx)$$

Wartość takiej całki zależy w ogólności nietylko od granic całkowania z_A, z_B, lecz także od *drogi*, po której całkujemy. Szczególnie ważne są takie specjalne funkcje zmiennej zespolonej, których całki oznaczone nie zależą od drogi całkowania w pewnym obszarze.

Ustęp II.

RÓŻNICZKOWANIE I CAŁKOWANIE CAŁEK WEDŁUG PARAMETRU.

§ 246. Całki pojedyńcze z funkcyj dwóch zmiennych niezależnych.

Rozważaliśmy dotychczas całki z funkcyj dwóch zmiennych x, y w przypadku, gdy te zmienne były od siebie *zależne*, co prowadziło do całek krzywolinjowych. Obecnie omówimy przypadek, gdy x i y są zmiennemi *niezależnemi*. Funkcję:

$$z = f(x,y)$$

można wtedy całkować według jednej zmiennej, uważając drugą za *parametr*.

Załóżmy, że funkcja $f(x,y)$ jest ciągłą funkcją dwóch zmiennych w obszarze prostokątnym, t. j. dla x, zawartych w przedziale $<a_1, a_2>$, a y w przedziale $<b_1, b_2>$. Jeżeli ustalimy wartość y, to $f(x,y)$ będzie ciągłą funkcją jednej zmiennej x, a więc istnieje całka:

$$(a)\qquad \int_{a_1}^{a_2} f(x,y)\,dx = g(y)$$

a wartość jej zależy od tego, jaką wartość obraliśmy za y. Uwidoczniliśmy to, kładąc tę całkę równą jakiejś funkcji $g(y)$ zmiennej y. Jeżeli więc x uważamy za zmienną całkowania, a y za parametr, to ta całka jest funkcją parametru.

W interpretacji geometrycznej obrazem funkcji $f(x,y)$ jest płat jakiejś powierzchni nad prostokątem (fig. 70). Wartości tej funkcji, odpowiadające stale obranemu y, mają jako obraz linję AB, otrzymaną przez przekrój tej powierzchni zapomocą płaszczyzny równoległej do płasz-

czyzny (XZ) w odstępie y. Wartość $g(y)$ całki (a) jest równa polu przekroju $ABCD$. Gdy zmieniamy y, to pole zmienia się według prawa $g(y)$. Zajmiemy się własnościami tej całki. I tak udowodnimy przedewszystkiem, że *całka* (a) *jest ciągłą funkcją parametru* y, *gdy* $f(x, y)$ *jest ciągła w prostokącie*

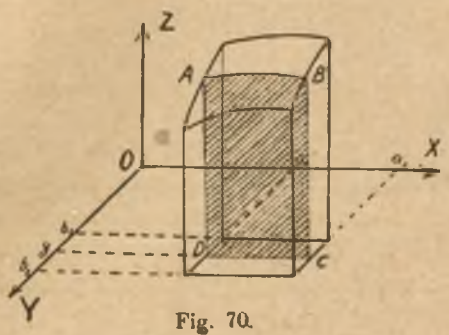


Fig. 70.

Dowód. Tworzymy różnicę:

$$g(y+h)-g(y)=\int_{a_1}^{a_2}(f(x,y+h)-f(x,y))\,dx$$

przyczem wartości y i $y+h$ są wzięte z przedziału $\langle b_1, b_2\rangle$. Na mocy wzoru (60), str. 79, jest:

$$|g(y+h)-g(y)| \leqq \int_{a_1}^{a_2} |f(x,y+h)-f(x,y)|\,dx$$

Ponieważ funkcja $f(x, y)$ jest ciągła w całym obszarze zamkniętym (w prostokącie), przeto jest w nim jednostajnie ciągła. Do każdej dodatniej liczby ε można zatem dobrać takie δ, zależne tylko od ε a niezależne od x, y, że dla wszystkich $|h| < \delta$ jest:

$$|f(x,y+h)-f(x,y)| < \varepsilon$$

Wobec tego:

(b) $$|g(y+h)-g(y)| < \int_{a_1}^{a_2} \varepsilon\,dx = \varepsilon(a_2-a_1) = \varepsilon_1$$

Do każdego ε_1 można więc dobrać takie δ, że dla wszystkich $|h| < \delta$ spełnia się ta nierówność, a to dowodzi, że $g(y)$ jest *ciągłą* funkcją parametru y w przedziale $\langle b_1, b_2\rangle$.

Przykład. Scałkujmy według zmiennej x od 1 do 2 funkcję $f(x, y) = x^y$. Jest ona ciągła np. w prostokącie, określonym warunkami:

$$1 \leqq x \leqq 2, \quad -2 \leqq y \leqq +2$$

Otóż:

$$\int_1^2 x^y\,dx = \frac{x^{y+1}}{y+1}\Big|_1^2 = \frac{2^{y+1}-1}{y+1} \qquad \text{dla} \quad y \neq -1$$

$$= \log x\Big|_1^2 = \log 2 \qquad \text{„} \quad y = -1$$

Moglibyśmy mieć wątpliwość, czy funkcja $g(y)$, określona temi dwoma wzorami, jest ciągła dla $y = -1$. Otóż ta ciągłość wynika z dowiedzionego twierdzenia. Możemy to zresztą sprawdzić także bezpośrednio, obliczając przy pomocy reguły Hospitala:

$$\lim_{y\to -1} \frac{2^{y+1}-1}{y+1} = \lim_{y\to -1} \frac{2^{y+1}\log 2}{1} = \log 2$$

A więc funkcja $g(y)$ dąży do $\log 2$ przy $y \to -1$ i osiąga tę wartość dla $y = -1$, a zatem jest ciągła w punkcie $y = -1$.

Zbadajmy teraz:

$$\int_{a_1}^{a_2} f(x, y)\, dx$$

gdy $f(x, y)$ jest w danym prostokącie nieciągła lecz ograniczona i posiada skończoną liczbę linij nieciągłości, dających się zamknąć w obszar o dowolnie małem polu, wzdłuż których posiada funkcja skończone skoki.

Wyjaśnimy ten przypadek poglądowo. Niechaj np. powierzchnia o równaniu $z = f(x, y)$ posiada jedną linję przerwy, jak na fig. 71.

Otóż funkcja:

(a) $$g(y) = \int_{a_1}^{a_2} f(x, y)\, dx$$

przedstawia dla każdego y pole przekroju bryły, uwidocznionej na rysunku, płaszczyzną równoległą do (ZX), w odstępie y od tej płaszczyzny. Na figurze zacieniowano jeden taki przekrój, należący do $y = y_1$. Jak-

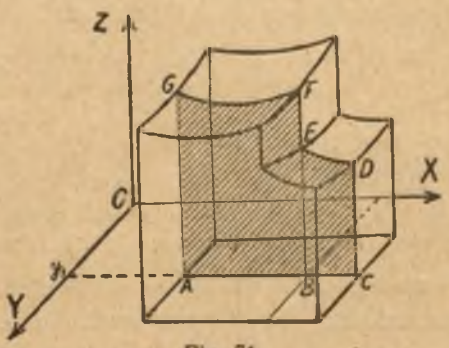


Fig. 71.

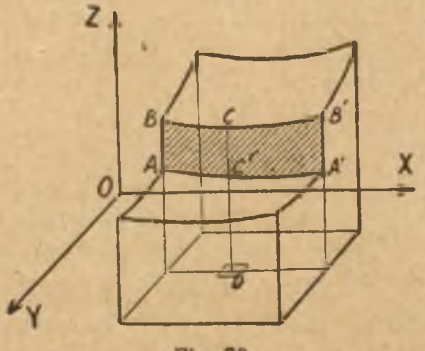


Fig. 72.

kolwiek linja $GFED$, ograniczająca ten przekrój z jednej strony, nie jest ciągła w punkcie E, to jednak jego pole ma skończoną, oznaczoną wartość, wyrażoną zapomocą całki uogólnionej (a).

Gdy zmieniamy y, to przechodzimy do coraz dalszych przekrojów. Zmiana wielkości pola odbywa się przytem w sposób ciągły, a więc $g(y)$ jest ciągłą funkcją zmiennej y.

Jeżeli linja przerwy przebiega równolegle do płaszczyzny (ZX), jak na fig. 72, to przekrój zmienia się w sposób ciągły tak długo, aż dojdziemy do linji przerwy. W tem miejscu następuje skończony przyrost przekroju o $AA'B'B_1$ a więc *skończony skok* funkcji $g(y)$.

§ 247. Różniczkowanie całek właściwych według parametru.

Udowodnimy prawdziwość następującego twierdzenia o różniczkowalności funkcji $g(y)$. *Jeżeli funkcja $f(x, y)$ jest ciągła w prostokącie, określonym warunkami $a_1 \leqq x \leqq a_2$, $b_1 \leqq y \leqq b_2$ i posiada cząstkową pochodną $f_y(x, y)$ ciągłą w tym prostokącie, to całka* (a) *posiada pochodną według parametru y, a oblicza się tę pochodną, różniczkując według tego parametru funkcję podcałkową.*

Twierdzimy więc, że przy tych założeniach zachodzi wzór:

$$\frac{d}{dy}\int_{a_1}^{a_2} f(x, y)\,dx = \int_{a_1}^{a_2} f_y(x, y)\,dx \tag{150}$$

Ten wzór na różniczkowanie całki według parametru nazywamy regułą Leibniza.

Dowód. Chodzi nam o pochodną funkcji $g(y)$, określonej wzorem (a) na str. 200. Iloraz różnicowy ma wartość:

$$A(h) = \frac{g(y+h) - g(y)}{h} = \int_{a_1}^{a_2} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}\,dx$$

Chodzi o obliczenie granicy wyrażenia $A(h)$, gdy $h \to 0$.

Stosując do funkcji podcałkowej twierdzenie o wartości średniej, otrzymujemy:

$$A(h) = \int_{a_1}^{a_2} f_y(x, y + \vartheta h)\,dx$$

Przedstawiamy tę całkę w postaci:

$$A(h) = \int_{a_1}^{a_2} f_y(x, y)\,dx + \int_{a_1}^{a_2} (f_y(x, y + \vartheta h) - f_y(x, y))\,dx$$

Z jednostajnej ciągłości cząstkowej pochodnej $f_y(x, y)$ wynika, że:

$$|f_y(x, y + \vartheta h) - f_y(x, y)| < \varepsilon \quad \text{dla} \quad |h| < \delta$$

a więc:

$$\left| A(h) - \int_{a_1}^{a_2} f_y(x, y)\,dx \right| < \int_{a_1}^{a_2} \varepsilon\,dx = \varepsilon(a_2 - a_1) = \varepsilon_1$$

Do każdego ε_1 można więc dobrać takie δ, że dla $|h| < \delta$ spełnia się ta nierówność. To zaś znaczy, że:

$$\lim_{h \to 0} A(h) = \int_{a_1}^{a_2} f_y(x, y)\,dx$$

czyli:

$$g'(y) = \int_{a_1}^{a_2} f_y(x, y)\,dx$$

c. b. d. o.

Przykład. Nietrudno jest obliczyć wartość całki:

$$g(a)=\int_0^x \frac{dx}{x^2+a} \quad \text{przy} \quad a>0$$

Stosując mianowicie podstawienie $t=\frac{x}{\sqrt{a}}$, sprowadzamy ją do całki z $\frac{1}{1+t^2}$ i otrzymujemy:

(A) $$\int_0^x \frac{dx}{x^2+a}=\frac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{a}}$$

Parametrem jest w tej całce a (trzeba więc we wzorze (150) zastąpić y literą a). Funkcja podcałkowa $\frac{1}{x^2+a}$ jest ciągłą funkcją dwóch zmiennych x, a w każdym prostokącie o dodatnich a, a także jej cząstkowe pochodne wszystkich rzędów według tej zmiennej a są ciągłe w każdym takim prostokącie. Możemy więc do tej całki zastosować regułę Leibniza różniczkowania według parametru. Otrzymujemy w ten sposób:

$$-1\cdot\int_0^x \frac{dx}{(x^2+a)^2}=\frac{d}{da}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{a}}\right)$$

$$(-1)^2\cdot 2!\int_0^x \frac{dx}{(x^2+a)^3}=\frac{d^2}{da^2}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{a}}\right)$$

ogólnie:

(B) $$(-1)^{n-1}(n-1)!\int_0^x \frac{dx}{(x^2+a)^n}=\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{a}}\right)$$

W ten sposób ze znanej całki (A) otrzymujemy szereg trudniejszych, bardziej skomplikowanych całek, nie wykonując żadnego całkowania, tylko różniczkowanie. Otrzymany wzór (B) jest zwięzłem ujęciem wyniku całkowania funkcji $\frac{1}{(x^2+a)^n}$, który to wynik otrzymaliśmy na str. 28 w bardzo zawiłej postaci, opierając się na wzorze redukcyjnym. Niechaj czytelnik wyprowadzi w podobny sposób z prostej całki:

$$\int_0^x x^a\,dx=\frac{1}{a+1} \quad \text{przy} \quad a>0$$

wzór:

$$\int_0^1 x^a(\log x)^n\,dx=\frac{(-1)^n n!}{(a+1)^{n+1}}$$

podający wartość dość skomplikowanej całki.

Regułę Leibniza rozszerzymy także na przypadek, gdy granice całki są zależne od parametru, t. j. na całki postaci:

$$\int_{a_1(y)}^{a_2(y)} f(x,y)\,dx = g(y)$$

Załóżmy, jak poprzednio, że $f(x,y)$ jest ciągła i ma ciągłą pochodną f_y w prostokącie $a_1 \leqq x \leqq a_2$, $b_1 \leqq y \leqq b_2$ a ponadto, że $a_1 \leqq a_1(y) \leqq a_2$, $a_1 \leqq a_2(y) \leqq a_2$ i że pochodne $a_1'(y)$, $a_2'(y)$ są ciągłe w przedziale $<b_1, b_2>$.

Przypadek ten sprowadzimy do poprzedniego, wprowadzając za x nową zmienną t, związaną z x, y wzorem: $x = a_1(y) + (a_2(y) - a_1(y))\,t$. Dla $x = a_1(y)$ jest $t = 0$ a dla $x = a_2(y)$ jest $t = 1$. Otrzymujemy więc całkę o *stałych* granicach, niezależnych od parametru y:

$$g(y) = \int_0^1 f(x(t,y),y)\frac{\partial x}{\partial t}\,dt$$

Do tej całki stosujemy regułę Leibniza z wzoru (150) i otrzymujemy:

$$g'(y) = \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial t} + f\frac{\partial^2 x}{\partial t\,\partial y}\right] dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial t}\,dt + \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial y} + f\frac{\partial^2 x}{\partial t\,\partial y}\right) dt$$

czyli:

$$g'(y) = \int_{a_1(y)}^{a_2(y)} \frac{\partial f}{\partial y}\,dx + \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\left(f\cdot\frac{\partial x}{\partial y}\right) dt = \int_{a_1(y)}^{a_2(y)} f_y(x,y)\,dx + f\frac{\partial x}{\partial y}\Bigg|_{t=0}^{t=1}$$

(151)
$$\boxed{g'(y) = \int_{a_1(y)}^{a_2(y)} f_y(x,y)\,dx + f(a_2(y),y)\frac{da_2}{dy} - f(a_1(y),y)\frac{da_1}{dy}}$$

Przykłady.

1) Obliczyć pochodną całki:

$$g(y) = \int_0^y \sin(xy)\,dx$$

według parametru y. Stosując wzór (151), otrzymujemy:

$$g'(y) = \int_0^y x\cos(xy)\,dx + \sin(y^2)$$

2) Dana jest całka:

$$(M) \qquad g(y) = F_n(y) = \int_0^y \frac{(y-x)^n}{n!} f(x)\,dx$$

przyczem zakładamy, że $f(x)$ jest funkcją ciągłą.

Obliczyć $(n+1)$-szą pochodną tej całki oznaczonej według zmiennej y. Z wzoru (151) otrzymujemy:

$$g'(y) = \int_0^y \frac{n(y-x)^{n-1}}{n!} f(x)\,dx + \frac{(y-y)^n}{n!} f(x) - \frac{(y-0)^n}{n!} \cdot 0 =$$

$$= \int_0^y \frac{(y-x)^{n-1}}{(n-1)!} f(x)\,dx$$

A więc:

$$g'(y) = F_{n-1}(y)$$

Stąd otrzymujemy kolejno:

$$g''(y) = F_{n-2}(y) \quad \text{i t. d.}$$

a ostatecznie:

$$g^{(n)}(y) = F_0(y) = \int_0^y f(x)\,dx$$

Wreszcie:

$$g^{(n+1)}(y) = f(y)$$

Zatem funkcja $g(y)$ ma tę własność, że jej $(n+1)$-sza pochodna ma wartość $f(y)$. (Zarówno sama funkcja $g(y)$ jak i jej pochodne aż do n-tej włącznie mają wartość 0 dla $y = 0$, albowiem wtedy górna granica całki jest równa dolnej). A zatem jeżeli scałkujemy dowolną funkcję ciągłą $f(y)$ $(n+1)$-krotnie, to otrzymany wynik można przedstawić w postaci zwykłej, jednokrotnej całki, używając wzoru (M).

§ 248. Całkowanie całek właściwych według parametru.

Wykazaliśmy już (w § 246), że całka:

$$\int_a^b f(x, y)\,dx = g(y)$$

jest ciągłą funkcją parametru y, jeżeli funkcja $f(x, y)$ jest ciągła w prostokącie. Wobec tego istnieje całka z tej funkcji według zmiennej y. Wykażemy, że tę całkę można obliczyć, wykonując całkowanie według y

pod znakiem całki, odnoszącej się do zmiennej x. Innemi słowami twierdzimy, że prawdziwy jest następujący wzór:

$$\int_{b_1}^{b_2}\left(\int_{a_1}^{a_2} f(x,y)\,dx\right)dy = \int_{a_1}^{a_2}\left(\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)\,dy\right)dx \tag{152}$$

Jeżeli więc mamy całkować funkcję ciągłą dwóch zmiennych x, y w stałych granicach, najpierw według x a wynik według y, to możemy *przemienić porządek całkowania*, t. j. całkować najpierw według y a potem wynik według x.

Dowód.

Weźmy zamiast stałej górnej granicy całkowania b_2 zmienną granicę b i obliczmy pochodne obu stron wzoru (152) według b. Otóż dla:

$$h(b) = \int_{b_1}^{b}\left(\int_{a_1}^{a_2} f(x,y)\,dx\right)dy$$

pochodną jest, jak wiadomo, funkcja podcałkowa, w której zamiast y wstawiono tę górną granicę b, a więc:

$$h'(b) = \int_{a_1}^{a_2} f(x,b)\,dx$$

Dla drugiej strony wzoru (152), t. j. dla:

$$k(b) = \int_{a_1}^{a_2}\left(\int_{b_1}^{b} f(x,y)\,dy\right)dx$$

tworzymy pochodną według reguły Leibniza, a więc:

$$k'(b) = \int_{a_1}^{a_2}\left(\frac{\partial}{\partial b}\int_{b_1}^{b} f(x,y)\,dy\right)dx = \int_{a_1}^{a} f(x,b)\,dx$$

Ponieważ $h'(b) = k'(b)$, przeto te dwie funkcje mogą się różnić tylko o stałą liczbę, a więc $h(b) = k(b) + C$. Aby wyznaczyć tę stałą, połóżmy $b = b_1$. Wtedy $h(b_1) = 0$ i $k(b_1) = 0$ i zostaje $0 = 0 + C$, a więc $C = 0$. Zatem:

$$h(b) = k(b)$$

dla wszystkich b z przedziału $\langle b_1, b_2\rangle$. Podstawmy $b = b_2$, to otrzymamy $h(b_2) = k(b_2)$, a to jest właśnie wzór (152), napisany w skróceniu.

Przykład.

Obliczyć:

$$I=\int_a^b\left(\int_0^1 x^y\,dx\right)dy, \quad \text{przyczem} \quad a>0 \ \text{i} \ b>0.$$

Całkując najpierw według x, a potem według y, otrzymujemy:

$$\int_0^1 x^y\,dx=\frac{x^{y+1}}{y+1}\Bigg|_0^1=\frac{1}{y+1}$$

a więc:

$$I=\int_a^b\frac{1}{y+1}\,dy=\log(y+1)\Big|_a^b=\log\frac{b+1}{a+1}$$

Ten sam wynik musimy otrzymać, całkując w porządku zmienionym, a więc:

$$I=\int_0^1\left(\int_a^b x^y\,dy\right)dx=\log\frac{b+1}{a+1}$$

Całka wewnętrzna ma wartość:

$$\int_a^b x^y\,dy=\frac{x^y}{\log x}\Bigg|_{y=a}^{y=b}=\frac{x^b-x^a}{\log x}$$

a więc:

$$I=\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\log x}\,dx=\log\frac{b+1}{a+1}$$

Otrzymaliśmy w ten sposób wartość całki oznaczonej z takiej funkcji, która się nie da scałkować elementarnemi metodami, a mianowicie z funkcji:

$$\frac{x^b-x^a}{\log x}$$

§ 249. Różniczkowanie i całkowanie całek niewłaściwych według parametru.

Reguły różniczkowania i całkowania całek oznaczonych według parametru wyprowadziliśmy tylko dla całek właściwych. Najważniejsze są jednak właśnie całki niewłaściwe, zależne od parametru. Do takich całek nie zawsze stosują się powyższe reguły, jak to zobaczymy z następujących przykładów.

1) Okażemy (na str. 215), że istnieje całka niewłaściwa:

$$g(y)=\int_0^{\infty}\frac{\sin yx}{x}\,dx=\tfrac{1}{2}\pi \qquad \text{dla } y>0.$$

Pochodna jej $g'(y)$, jako pochodna stałej liczby $\frac{1}{2}\pi$, ma wartość 0.

Gdybyśmy jednak próbowali obliczyć tę pochodną zapomocą reguły **Leibniza**, to otrzymalibyśmy:

$$\int_0^{\infty}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\sin yx}{x}\right)dx=\int_0^{\infty}\cos(yx)\,dx$$

Aby wyznaczyć tę całkę niewłaściwą, obliczamy najpierw:

$$\int_0^{a}\cos(yx)\,dx=\frac{\sin(yx)}{y}\Bigg|_{x=0}^{x=a}=\frac{\sin ya}{y}$$

Ta funkcja nie dąży do żadnej granicy przy a dążącem do ∞, lecz oscyluje pomiędzy $-\frac{1}{y}$ i $+\frac{1}{y}$. A więc nie otrzymaliśmy prawdziwej wartości $g'(y)$, zatem reguły Leibniza nie można stosować w tym przypadku.

2) Podobnie ma się rzecz z całkowaniem całki oznaczonej według parametru. W całkach niewłaściwych nie zawsze można zmieniać porządek całkowania. Weźmy pod uwagę całkę:

$$\int_0^{1}\frac{x-y}{(x+y)^3}\,dx=g(y)=\frac{-x}{(x+y)^2}\Bigg|_0^{1}=-\frac{1}{(1+y)^2}$$

Funkcja podcałkowa jest tu nieciągła dla $x=0$, $y=0$, a więc jest to całka niewłaściwa.

Scałkujmy ją według parametru y od 0 do 1. Otrzymujemy:

$$\int_0^{1}\left(\int_0^{1}\frac{x-y}{(x+y)^3}\,dx\right)dy=\int_0^{1}-\frac{1}{(1+y)^2}\,dy=\frac{1}{1+y}\Bigg|_0^{1}=\tfrac{1}{2}-1=-\tfrac{1}{2}$$

Zmieniwszy zaś porządek całkowania, t. j. całkując funkcję podcałkową najpierw według parametru y, otrzymujemy:

$$\int_0^{1}\left(\int_0^{1}\frac{x-y}{(x+y)^3}\,dy\right)dx=\int_0^{1}\frac{1}{(1+x)^2}\,dx=-\frac{1}{1+x}\Bigg|_0^{1}=-\tfrac{1}{2}+1=\tfrac{1}{2}$$

a więc wynik fałszywy.

Aby zatem do całek niewłaściwych można stosować takie reguły różniczkowania i całkowania według parametru, jak dla całek właści-

wych, nie wystarcza, aby te całki istniały, czyli aby były *zbieżne*. Okażemy natomiast, że wystarczy, jeżeli te całki są zbieżne w pewien szczególny sposób, a mianowicie, jeżeli są *jednostajnie zbieżne*.

Całkę niewłaściwą:

$$\int_a^{\infty} f(x, y)\, dx$$

nazywamy jednostajnie zbieżną w jakimś przedziale zmiennej y, jeżeli do każdej dodatniej liczby ε da się dobrać taka liczba $N_1(\varepsilon)$, zależna tylko od ε, a *niezależna* od y, że:

$$\left| \int_N^{\infty} f(x, y)\, dx \right| < \varepsilon$$

dla wszystkich $N > N_1(\varepsilon)$.

Ponieważ:

$$\int_a^{\infty} f(x,y)\, dx = \int_a^{N} f(x, y)\, dx + \int_N^{\infty} f(x, y)\, dx$$

przeto ten drugi dodajnik można uważać za rodzaj reszty R_N, otrzymanej z danej całki niewłaściwej w granicach od a do ∞, gdy z niej opuścimy część, wziętą w granicach od a do N, przy odpowiednio wielkiem N. Otóż zbieżność jest wtedy jednostajna, gdy się da dobrać takie N_1, wspólne dla wszystkich y, by owa reszta była dowolnie mała, gdy $N > N_1$. Podobnie określamy jednostajną zbieżność dla takich całek niewłaściwych, w których funkcja podcałkowa wzrasta nieograniczenie. Gdy np. takim punktem nieciągłości jest górna granica a_1 całki:

$$\int_a^{a_1} f(x, y)\, dx$$

to całkę nazywamy jednostajnie zbieżną, jeżeli do każdej dodatniej liczby ε da się dobrać takie dodatnie $\delta_1(\varepsilon)$, zależne tylko od ε, a *niezależne* od y, że:

$$\left| \int_{a_1-\delta}^{a_1} f(x, y)\, dx \right| < \varepsilon$$

dla wszystkich δ, spełniających warunki:

$$0 < \delta < \delta_1(\varepsilon)$$

Nietrudno okazać, że jednostajnie zbieżna całka niewłaściwa z funkcji ciągłej jest ciągłą funkcją parametru.

Jednostajną zbieżność całki niewłaściwej można często rozstrzygnąć

zapomocą następującego kryterjum. Jeżeli istnieje taka dodatnia funkcja $\varphi(x)$, niezależna od parametru y, że:

(I) $$|f(x,y)| \leqq \varphi(x)$$

dla wszystkich $x > a$, a $b_1 \leqq y \leqq b_2$ i jeżeli istnieje całka:

(II) $$\int_a^\infty \varphi(x)\,dx$$

to całka $\int_a^\infty f(x,y)\,dx$ jest jednostajnie zbieżna.

Dowód. Wskutek zbieżności całki (II) można dobrać do każdej dodatniej liczby ε taką liczbę N_1, zależną oczywiście tylko od ε, że dla $N > N_1$ jest:

$$\int_N^\infty \varphi(x)\,dx < \varepsilon$$

Wskutek nierówności (I) jest jednak:

$$\left|\int_N^\infty f(x,y)\,dx\right| \leqq \int_N^\infty \varphi(x)\,dx < \varepsilon \qquad \text{dla } N > N_1(\varepsilon),$$

a więc spełnia się warunek jednostajnej zbieżności (albowiem $N_1(\varepsilon)$ nie zależy od y).

Przykłady.

1) $$\int_0^\infty e^{-x}\cos(yx)\,dx$$

jest jednostajnie zbieżna, bo:

$$|e^{-x}\cos(yx)| \leqq e^{-x}$$

a całka $\int_0^\infty e^{-x}\,dx$ istnieje (jest równa 1).

2) $\int_0^\infty e^{-xy}\,dx$ jest jednostajnie zbieżna dla wszystkich $y > l > 0$.

Jeżeli bowiem obierzemy dowolną liczbę stałą $l > 0$ i bierzemy pod uwagę $y > l$, to:

$$|f(x,y)| = e^{-yx} < e^{-lx} = \varphi(x)$$

a ponadto istnieje całka:

$$\int_0^\infty \varphi(x)\,dx = \int_0^\infty e^{-lx}\,dx = \frac{e^{-lx}}{-l}\Big|_{x=0}^{x=\infty} = \frac{0}{-l} - \frac{1}{-l} = \frac{1}{l}$$

Jeżeli całka niewłaściwa z funkcji ciągłej $f(x,y)$, zależna od parametru, jest jednostajnie zbieżna, to można zmieniać porządek całkowania, t. j. można *całkować według parametru* pod znakiem całki i otrzymuje się całkę, która jest także jednostajnie zbieżna.

Dowód. W całce:

$$I = \int_{b_1}^{b_2} \left(\int_a^{\infty} f(x,y)\,dx \right) dy$$

rozłóżmy wewnętrzną całkę w następujący sposób:

$$\text{(c)} \quad \int_a^{\infty} f(x,y)\,dx = \int_a^{N} f(x,y)\,dx + \int_N^{\infty} f(x,y)\,dx = \int_a^{N} f(x,y)\,dx + r_N(y)$$

Wtedy:

$$I = \int_{b_1}^{b_2} \left(\int_a^{N} f(x,y)\,dx \right) dy + \int_{b_1}^{b_2} r_N(y)\,dy$$

W pierwszej całce, która jest całką właściwą, można zmienić porządek całkowania, a więc:

$$I = \int_a^{N} \left(\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)\,dy \right) dx + \int_{b_1}^{b_2} r_N(y)\,dy$$

Wskutek jednostajnej zbieżności całki (c) jest $|r_N(y)| < \varepsilon$ przy odpowiednio wielkiem N, a więc:

$$\left| I - \int_a^{N} \left(\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)\,dy \right) dx \right| < \varepsilon(b_2 - b_1)$$

To dowodzi, że dla $N \to \infty$ całka, występująca w tym wzorze, dąży do I (i to jednostajnie) a więc:

$$I = \int_a^{\infty} \left(\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)\,dy \right) dx$$

Widzimy więc, że tę samą wartość całki I dostajemy, gdy zmienimy porządek całkowania.

Podobnie dowodzi się tego twierdzenia dla takich całek niewłaściwych, w których funkcja podcałkowa wzrasta nieograniczenie dla skończonych wartości x.

W podobny sposób rozszerzamy na całki niewłaściwe regułę Leibniza, dotyczącą różniczkowania całki według parametru.

Jeżeli funkcja $f(x, y)$ *i cząstkowa pochodna* $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ *są ciągłe w przedziale* $b_1 \leqq y \leqq b_2$, *oraz dla* $x > a$ *i jeżeli całki:*

$$g(y) = \int_a^\infty f(x, y)\, dx \quad \text{i} \quad h(y) = \int_a^\infty f_y(x, y)\, dx$$

są jednostajnie zbieżne, to:

$$g'(y) = \int_a^\infty f_y(x, y)\, dx$$

Dowód. Według twierdzenia o całkowaniu według parametru mamy:

$$\int_{b_1}^{b_2} h(y)\, dy = \int_{b_1}^{b_2} \left(\int_a^\infty f_y(x, y)\, dx \right) dy = \int_a^\infty \left(\int_{b_1}^{b_2} f_y(x, y)\, dy \right) dx$$

Całka wewnętrzna ma wartość:

$$\int_{b_1}^{b_2} f_y(x, y)\, dy = f(x, y) - f(x, b_1)$$

A więc:

$$\int_{b_1}^{b_2} h(y)\, dy = \int_a^\infty f(x, y)\, dx - \int_a^\infty f(x, b_1)\, dx = g(y) - g(b_1)$$

Ponieważ $h(y)$ jest funkcją ciągłą, więc istnieje pochodna lewej strony i otrzymujemy:

$$h(y) = g'(y)$$

czyli:

$$g'(y) = \int_a^\infty f_y(x, y)\, dx \qquad \text{c. b. d. o.}$$

Podobnie dowodzi się reguły Leibniza dla innych typów całek niewłaściwych.

Przykłady.

1) Całka niewłaściwa:

(a) $$\int_0^\infty e^{-yx^2}\, dx$$

jest jednostajnie zbieżna dla $y > l > 0$, jak to można wykazać w sposób podobny, jak w przykładzie 2 na str. 211, powołując się na to, że:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

(por. str. 114, wzór (76)). Używając podstawienia $yx^2 = z^2$, obliczamy wartość całki (a), a mianowicie:

$$\int_0^\infty e^{-yx^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,y^{-\frac{1}{2}}$$

Różniczkujemy tę całkę według parametru y i otrzymujemy wartość bardziej skomplikowanej całki:

$$\int_0^\infty x^2 e^{-yx^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\tfrac{1}{2}\,y^{-\frac{3}{2}}$$

Różniczkując całkę (a) n-krotnie, otrzymujemy ogólny wzór:

$$\int_0^\infty x^{2n} e^{-yx^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\cdot\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2^n}\,\frac{1}{y^n\sqrt{y}}$$

Można dowieść, że wszystkie otrzymane całki są jednostajnie zbieżne, a więc stosowanie reguły Leibniza było dozwolone.

2) Chcemy wyznaczyć wartość całki niewłaściwej:

$$\int_0^\infty \frac{\sin z}{z}\,dz$$

Dojdziemy do niej, stosując szereg przekształceń do całki niewłaściwej:

$$\int_0^\infty e^{-x}\cos(yx)\,dx$$

której wartość można wyznaczyć elementarnemi metodami całkowania, znajdując całkę nieoznaczoną (por. str. 27, przykład 14).

Otrzymuje się:

$$\int_0^\infty e^{-x}\cos(yx)\,dx = \frac{1}{1+y^2}$$

Scałkujmy obie strony od 0 do y według parametru y. Ponieważ ta całka jest jednostajnie zbieżna (por. przykład 1 na str. 211), przeto można wykonać całkowanie pod znakiem całki. Otrzymamy w ten sposób nową jednostajnie zbieżną całkę:

$$\int_0^\infty e^{-x}\,\frac{\sin(yx)}{x}\,dx = \operatorname{arctg} y$$

Stosując raz jeszcze całkowanie według y od 0 do y, otrzymujemy po wykonaniu prostych rachunków:

$$\int_0^\infty e^{-x} \frac{1-\cos(yx)}{x^2}\,dx = y \operatorname{arctg} y - \tfrac{1}{2}\log(1+y^2)$$

Wprowadźmy nową zmienną $z = xy$, przyczem $y > 0$, to otrzymamy:

$$\int_0^\infty e^{-\frac{z}{y}} \frac{1-\cos z}{z^2}\,dz = \operatorname{arctg} y - \frac{\log(1+y^2)}{2y}$$

Dla $y \to \infty$ otrzymujemy stąd:

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos z}{z^2}\,dz = \tfrac{1}{2}\pi$$

Zastosujmy do tej całki całkowanie „per partes", kładąc $1-\cos z = u$, $\frac{dz}{z^2} = dv$, a więc $du = \sin z\,dz$, $v = \frac{-1}{z}$.

Otrzymamy:

(153)
$$\boxed{\int_0^\infty \frac{\sin z}{z}\,dz = \tfrac{1}{2}\pi}$$

Całki tej nie można wyznaczyć elementarną drogą zapomocą całki nieoznaczonej.

Interesujący wynik otrzymuje się, wprowadzając w tę całkę parametr α zapomocą podstawienia $z = \alpha x$. Otrzymuje się różne wartości, zależnie od tego, czy ten parametr ma wartość dodatnią, ujemną czy też zero. I tak dla $\alpha > 0$ otrzymujemy:

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx = \tfrac{1}{2}\pi \qquad (\alpha > 0)$$

Dla $\alpha < 0$ otrzymuje się:

$$\int_0^{-\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx = \tfrac{1}{2}\pi$$

ponieważ przy $z \to +\infty$ mamy $x \to -\infty$. Wprowadzając za x zmienną $-x$, otrzymujemy:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx = -\tfrac{1}{2}\pi \qquad (\alpha < 0)$$

Wreszcie dla $\alpha = 0$ jest funkcja podcałkowa stale zerem, a więc:

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx = 0 \quad (\text{dla } \alpha = 0)$$

Mamy tu interesujący przykład funkcji nieciągłej, podanej jednym wzorem.

$$f(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx$$

która dla $\alpha > 0$ ma wartość $\frac{1}{2}\pi$, dla $\alpha = 0$ wartość 0, a dla $\alpha < 0$ wartość $-\frac{1}{2}\pi$, a więc ma w punkcie $\alpha = 0$ skończony skok.

Ustęp III.

CAŁKI PODWÓJNE.

§ 250. Całka podwójna po prostokącie.

Zajmowaliśmy się już w § 248 całkowaniem funkcji $z = f(x, y)$ dwóch zmiennych niezależnych według obu tych zmiennych. I tak całkowaliśmy najpierw według zmiennej x, uważając y za parametr, a otrzymany wynik $g(y)$ całkowaliśmy następnie według zmiennej y i otrzymaliśmy:

(a) $$I = \int_{b_1}^{b_2} \left\{ \int_{a_1}^{a_2} f(x, y)\, dx \right\} dy$$

Dogodniej jest pisać to wyrażenie bez klamer, a mianowicie w postaci:

(b) $$I = \int_{b_1}^{b_2} \int_{a_1}^{a_2} f(x, y)\, dx\, dy$$

Zakładaliśmy przytem, że funkcja $f(x, y)$ jest ciągła w prostokącie P, określonym zapomocą warunków: $a_1 \leqq x \leqq a_2$, $b_1 \leqq y \leqq b_2$.

Całkowania te można wykonać także i wtedy, gdy funkcja $f(x, y)$ nie jest ciągła w całym prostokącie P, lecz jest w nim *ograniczona* i posiada skończoną liczbę linij nieciągłości, dających się zamknąć w obszar o dowolnie małem polu. Widzieliśmy bowiem w § 246, że wtedy funkcja $g(y)$, otrzymana przez pierwsze całkowanie, a mianowicie według zmiennej x, jest albo funkcją ciągłą zmiennej y, albo posiada skończoną liczbę skończonych skoków, a zatem jest w każdym razie funkcją całkowalną według zmiennej y. A więc całka I, wyrażona wzorem (a), istnieje także w tym ogólniejszym przypadku.

Całkę, otrzymaną przez dwukrotne całkowanie funkcji dwóch zmiennych, najpierw według jednej od a_1 do a_2, a następnie według drugiej zmiennej od b_1 do b_2, nazywamy **całką podwójną** *z tej funkcji po prostokącie P, określonym warunkami $a_1 \leqq x \leqq a_2$ i $b_1 \leqq y \leqq b_2$.*

Zobaczymy w dalszym ciągu (w § 251), że wartość całki podwójnej nie zależy od tego, w jakim porządku wykonujemy całkowanie, gdy tylko funkcja spełnia wyżej wymienione warunki ciągłości. Dla funkcyj $f(x, y)$ ciągłych dowiedliśmy tego już w § 248 (por. wzór (152)). Dlatego to w definicji całki podwójnej nie wspominaliśmy nic o porządku całkowania. Krótko oznaczamy taką całkę symbolem

$$\text{(c)} \qquad \int_{(P)}\int f(x, y)\, dx\, dy \quad \text{lub} \quad \int_{P}\int f(x, y)\, dy\, dx$$

Wykażemy, że do całek podwójnych po prostokącie odnosi się podobne *twierdzenie o wartości średniej* jak do całek pojedyńczych. I tak niechaj m oznacza kres dolny a M kres górny wartości funkcji $f(x, y)$ w całym prostokącie P. Z twierdzenia o wartości średniej dla całki pojedyńczej (§ 213, wzór (47)) wynika:

$$m(a_2 - a_1) \leqq \int_{a_1}^{a_2} f(x, y)\, dx \leqq M(a_2 - a_1)$$

Scałkujmy tę nierówność według zmiennej y w granicach od b_1 do b_2 to otrzymamy:

$$\int_{b_1}^{b_2} m(a_2 - a_1)\, dy \leqq \int_{b_1}^{b_2} \left\{ \int_{a_1}^{a_2} f(x, y)\, dx \right\} dy \leqq \int_{b_1}^{b_2} M(a_2 - a_1)\, dy$$

a stąd:

$$m(a_2 - a_1)(b_2 - \quad \leqq \int_{b_1}^{b_2} \left\{ \int_{a_1}^{a_2} f(x, y)\, dx \right\} dy \leqq M(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)$$

Oznaczając literą P pole danego prostokąta, otrzymujemy stąd:

$$\text{(154)} \qquad m \cdot P \leqq \int_{b_1}^{b_2} \left\{ \int_{a_1}^{a_2} f(x, y)\, dx \right\} dy \leqq M \cdot P$$

Dobierając odpowiednio liczbę μ, *pośrednią* pomiędzy m a M i używając skróconego oznaczenia (c), otrzymujemy stąd wzór:

$$\text{(155)} \qquad \int_{(P)}\int f(x, y)\, dx\, dy = \mu \cdot P$$

Ten wzór wyraża *twierdzenie o wartości średniej* dla całki podwójnej o stałych granicach całkowania czyli po prostokącie.

Wniosek. Jeżeli funkcja $f(x, y)$ jest nieujemna w całym prostokącie, to także $\mu \geqq 0$, a więc według wzoru (155) także całka po prostokącie z tej funkcji jest nieujemna. Stąd wynika, że jeżeli w całym prostokąci warunek $f(x, y) \leqq g(x, y)$ spełnia się dla dwóch funkcyj $f(x, y)$ i $g(x, y)$, to także:

$$\int_{(P)}\int f(x, y)\, dx\, dy \leqq \int_{(P)}\int g(x, y)\, dx\, dy$$

Jeżeli $f(x, y)$ jest funkcją *ciągłą* w danym prostokącie, to przyjmuje tę wartość pośrednią μ w jakimś punkcie tego prostokąta, np. w punkcie o spółrzędnych (ξ, η). Wtedy wzór (155) przyjmuje postać:

$$\int_{(P)}\int f(x, y)\, dx\, dy = f(\xi, \eta) \cdot P \tag{156}$$

Wartość μ, obliczoną z wzoru (155), nazywamy *średnią* (całkową) *wartością funkcji* $f(x, y)$ *w prostokącie* P.

Łatwo jest dowieść, że jeżeli podzielimy prostokąt P prostą równoległą do osi x-ów lub y-ów na dwa prostokąty P_1 i P_2, to całkę po całym prostokącie można przedstawić jako sumę całek po prostokątach składowych, a mianowicie:

$$\int_{(P)}\int f(x, y)\, dx\, dy = \int_{(P_1)}\int f(x, y)\, dx\, dy + \int_{(P_2)}\int f(x, y)\, dx\, dy \tag{157}$$

Twierdzenie to odpowiada twierdzeniu o addytywności całki pojedyńczej, poznanemu w § 214.

§ 251. Sumowa definicja całki podwójnej o stałych granicach.

Opierając się na twierdzeniu o wartości średniej, zbudujemy nową definicję całki podwójnej, analogiczną do podanej w § 222 definicji całki pojedyńczej, a mianowicie określimy tę całkę jako granicę ciągu pewnych sum.

Weźmy pod uwagę całkę:

$$I = \int_{b_1}^{b_2}\int_{a_1}^{a_2} f(x, y)\, dx\, dy$$

z funkcji $z = f(x, y)$ ciągłej w prostokącie $ABCD$ (fig. 73) o polu P. Obrazem tej funkcji jest płat powierzchni, w ogólności krzywej, wznoszącej się nad tym prostokątem. Podzielmy przedział $\langle a_1, a_2 \rangle$ na dowolną liczbę części, np. na n_1 części, punktami $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n_1-1}$ a przedział $\langle b_1, b_2 \rangle$ na m_1 części punktami $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{m_1-1}$.

Oznaczmy ponadto $a_1 = x_0$, $a_2 = x_{n_1}$, $b_1 = y_0$, $b_2 = y_{m_1}$.

Przez punkty podziału wykreślmy równoległe do osi X i Y, to prostokąt $ABCD$ rozpadnie się na kratkę drobniejszych prostokącików. Oznaczmy przez $p_{ik}^{(1)}$ pole prostokąta, zawartego między prostemi:

$$x = x_i,\ x = x_{i+1},\ y = y_k,\ y = y_{k+1}$$

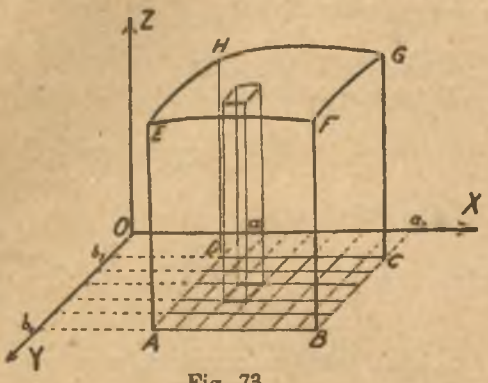


Fig. 73.

Całkę podwójną po całym prostokącie możemy przedstawić jako sumę całek po tych wszystkich prostokątach składowych (w myśl wzoru (157)). Zastosujmy do każdej takiej całki składowej twierdzenie o wartości średniej.

Niechaj $m_{ik}^{(1)}$ i $M_{ik}^{(1)}$ oznaczają najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x, y)$ w obrębie prostokąta $p_{ik}^{(1)}$, to twierdzenie o wartości średniej dla całki po tym prostokącie ma (według wzoru (154)) postać:

$$m_{ik}^{(1)} p_{ik}^{(1)} \leqq \int_{y_k}^{y_{k+1}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y)\, dx\, dy \leqq M_{ik}^{(1)} p_{ik}^{(1)}$$

Utworzywszy te nierówności dla wszystkich całek składowych, sumujemy je stronami i otrzymujemy ostatecznie:

$$\text{(I)} \quad s_1 = \sum_{k=0}^{m_1-1} \sum_{i=0}^{n_1-1} m_{ik}^{(1)} p_{ik}^{(1)} \leqq \int_{b_1}^{b_2} \int_{a_1}^{a_2} f(x, y)\, dx\, dy \leqq \sum_{k=0}^{m_1-1} \sum_{i=0}^{n_1-1} M_{ik}^{(1)} p_{ik}^{(1)} = S_1$$

Zamknęliśmy w ten sposób całkę podwójną między dwie sumy; nazwijmy s_1 *sumą dolną* a S_1 *sumą górną*. Sumy te oznaczamy też krócej symbolami:

$$\sum_{(P)} \sum m_{ik}^{(1)} p_{ik}^{(1)} \quad \text{i} \quad \sum_{(P)} \sum M_{ik}^{(1)} p_{ik}^{(1)}$$

Tworzymy następnie przez dalsze podziały cały ciąg $\{s_p\}$ takich sum dolnych i ciąg $\{S_p\}$ sum górnych w ten sposób, aby przekątna największego z prostokątów składowych w każdym podziale dążyła do zera. Okażemy, że wtedy obydwa ciągi $\{s_p\}$ i $\{S_p\}$ dążą do wspólnej granicy, a mianowicie do całki podwójnej po prostokącie $ABCD$.

Dowód.

Zbadajmy różnicę pomiędzy dowolną sumą górną S_p a dolną s_p:

$$\text{(II)} \quad S_p - s_p = \sum_{k=0}^{m_p-1} \sum_{i=0}^{n_p-1} M_{ik}^{(p)} p_{ik}^{(p)} - \sum_{k=0}^{m_p-1} \sum_{i=0}^{n_p-1} m_{ik}^{(p)} p_{ik}^{(p)} = \sum_{k=0}^{m_p-1} \sum_{i=0}^{n_p-1} (M_{ik}^{(p)} - m_{ik}^{(p)})\, p_{ik}^{(p)}$$

Okażemy najpierw, że ta różnica dąży do zera, t. j. że do każdej dodatniej liczby ε można dobrać takie N, że dla wszystkich $p > N$ jest $|S_p - s_p| = S_p - s_p < \varepsilon$. I tak dzieląc prostokąt P na odpowiednie małe prostokąty (co uzyskamy, biorąc p większe od odpowiednio dobranego N), można uzyskać, że różnica między największą a najmniejszą wartością funkcji ciągłej $f(x, y)$ będzie w każdym prostokącie składowym mniejsza od dowolnej zgóry podanej liczby dodatniej, a więc także mniejsza od $\frac{\varepsilon}{P}$. Wynika to *z jednostajnej ciągłości* tej funkcji w prostokącie P. A więc:

$$M_{ik}^{(p)} - m_{ik}^{(p)} < \frac{\varepsilon}{P} \quad \text{dla} \quad p > N$$

Wobec tego:

$$|S_p - s_p| < \frac{\varepsilon}{P} \cdot \sum_{k=0}^{m_p-1} \sum_{l=0}^{n_p-1} p_{ik}^{(p)}$$

Ale suma podwójna wszystkich prostokątów $p_{ik}^{(p)}$ daje cały prostokąt P, a więc:

$$|S_p - s_p| < \frac{\varepsilon}{P} \cdot P = \varepsilon$$

Z wzoru (I), a raczej z odpowiedniego wzoru, napisanego dla s_p i S_p, wynika, że:

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} \int_{a_1}^{a_2} f(x, y)\, dx\, dy - s_p \right| \leqq S_p - s_p < \varepsilon$$

a więc:

$$\lim_{p \to \infty} s_p = \int_{b_1}^{b_2} \int_{a_1}^{a_2} f(x, y)\, dx\, dy$$

Podobnie:

$$\left| S_p - \int_{b_1}^{b_2} \int_{a_1}^{a_2} f(x, y)\, dx\, dy \right| \leqq S_p - s_p < \varepsilon$$

a więc także:

$$\lim_{p \to \infty} S_p = \int_{b_1}^{b_2} \int_{a_1}^{a_2} f(x, y)\, dx\, dy$$

Na podstawie dowiedzionego twierdzenia możemy podać także następującą definicję całki podwójnej:

całka podwójna *o stałych granicach całkowania jest to granica ciągu takich sum dolnych lub górnych, w których przekątna największego prostokąta składowego dąży do zera*; sumę dolną (górną) tworzy się, dzieląc dany prostokąt na dowolną liczbę prostokątów zapomocą prostych równoległych do osi spółrzędnych, mnożąc pole każdego składowego prostokąta przez najmniejszą (największą) wartość funkcji w tym prostokącie i dodając do siebie wszystkie otrzymane w ten sposób iloczyny.

Zamiast najmniejszych lub największych wartości funkcji można użyć do definicji całki także wartości funkcji w dowolnym innym punkcie (ξ_{ik}, η_{ik}) tego prostokąta składowego. Albowiem:

$$m_{ik} \leqq f(\xi_{ik}, \eta_{ik}) \leqq M_{ik}$$

a więc i każda suma, utworzona przy pomocy tych wartości pośrednich, zawiera się stale pomiędzy odpowiednią sumą dolną i górną, a zatem dąży do tej samej granicy. Stąd wynika, że także ciąg sum pośrednich:

$$\bar{S}_p = \sum_{k=0}^{n_p-1} \sum_{i=0}^{n_p-1} f(\xi_{ik}^{(p)}, \eta_{ik}^{(p)})\, p_{ik}^{(p)}$$

dąży do całki podwójnej o stałych granicach całkowania.

Używaliśmy w naszych rozważaniach *podwójnych* sum i podwójnych wskaźników i i k, aby uwydatnić ich związek z całką *podwójną*. Można jednak także ponumerować wszystkie prostokąciki składowe, używając tylko jednego wskaźnika, np. r, przebiegającego kolejne liczby szeregu naturalnego od 1 do $N_p = m \cdot n$ i przedstawić sumy s_p, S_p, $\bar{S}_p$ zapomocą sum pojedyńczych postaci np:

$$\bar{S}_p = \sum_{r=1}^{N_p} f(\xi_r^{(p)}, \eta_r^{(p)})\, p_r^{(p)}$$

Wszystkie wyniki, uzyskane w tym paragrafie, odnoszą się, jak to zaraz zobaczymy, także do funkcyj $f(x, y)$ *nieciągłych*, lecz ograniczonych, posiadających skończoną liczbę takich nieciągłości, które się dadzą zamknąć w obszar o dowolnie małem polu.

I tak dla funkcyj nieciągłych nie wszystkie różnice $M_{ik}^{(p)} - m_{ik}^{(p)}$, figurujące we wzorze na $S_p - s_p$, dadzą się uczynić dowolnie małemi. Jeżeli bowiem prostokąciki $p_{ik}^{(p)}$ zawierają części linij przerwy (jak na fig. 72, str. 202), to różnice między największą a najmniejszą wartością funkcji $f(x, y)$ w takich prostokącikach nie będą dowolnie małe, lecz będą równe skokowi funkcji (np. odcinkowi CC' na fig. 72 w otoczeniu punktu D). Podzieliwszy cały prostokąt P na drobniejsze prostokąty, rozłóżmy go na dwie części: na jedną $P_1^{(p)}$, w której prostokąty składowe nie zawierają żadnych punktów nieciągłości i na drugą $P_2^{(p)}$, w której prostokąty składowe zawierają punkty nieciągłości. Różnica między sumą górną a dolną, utworzona dla części $P_1^{(p)}$, da się uczynić dowolnie małą, np. mniejszą od $\frac{1}{2}\varepsilon$, ponieważ dla tej części różnice $M_{ik}^{(p)} - m_{ik}^{(p)}$ dążą do zera. W części zaś $P_2^{(p)}$ nie są te różnice dowolnie małe, lecz w każdym razie są mniejsze od $M - m$, przyczem M oznacza kres górny, a m kres dolny wartości funkcji $f(x, y)$ w całym prostokącie P. Część sumy, określonej wzorem (II), przypadająca na $P_2^{(p)}$, będzie zatem mniejsza od $(M - m) \cdot P_2^{(p)}$. Otóż pole $P_2^{(p)}$ możemy uczynić dowolnie małem, albowiem według założenia można zamknąć wszystkie linje nieciągłości w obszar o dowolnie małem polu. Można np. uzyskać, że $P_2^{(p)} < \frac{\varepsilon}{2(M-m)}$, a więc $(M - m) \cdot P_2^{(p)} < \frac{1}{2}\varepsilon$. Razem więc można także dla nieciąg-

łych funkcyj uzyskać, że będzie $|S_p - s_p| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$, a to znaczy, że także teraz jest:

$$\lim_{p\to\infty}(S_p - s_p) = 0$$

Stąd zaś wynikają dalsze konsekwencje tak samo, jak dla ciągłych funkcyj $f(x, y)$.

We wszystkich rozumowaniach tego paragrafu nie grał żadnej roli porządek, w jakim występują zmienne x i y. A więc także całka:

$$\int_{a_1}^{a_2}\left\{\int_{b_1}^{b_2} f(x, y)\,dy\right\}dx \quad \text{czyli} \quad \int_{a_1}^{a_2}\int_{b_1}^{b_2} f(x, y)\,dy\,dx$$

jest granicą tych samych ciągów, ma zatem tę samą wartość, co całka, obliczana najpierw według zmiennej x a potem według y. Wzór (152) na str. 207 stosuje się zatem nietylko do funkcyj ciągłych, lecz także do takich funkcyj nieciągłych, które są ograniczone i posiadają najwyżej skończoną liczbę linij nieciągłości.

Jeżeli więc obliczamy wartość całki podwójnej po prostokącie zapomocą dwóch kolejnych całkowań, to *możemy zmieniać porządek całkowania.*

Uwaga. Całkę podwójną oznaczoną można też zdefinjować jako kres górny sum dolnych lub kres dolny sum górnych, analogicznie jak to czyniliśmy w nauce o pojedyńczych całkach oznaczonych w § 212 i nast.

§ 252. Związek całki podwójnej z objętością.

Przy pomocy całki podwójnej można zdefinjować i obliczać *objętości* rozmaitych brył, których nie można badać metodami matematyki elementarnej. Z drugiej strony uzyskamy w ten sposób dogodną geometryczną interpretację całki podwójnej. Istnieje tu podobny związek między objętością a całką podwójną, jak między polem a całką pojedyńczą.

Weźmy pod uwagę bryłę, zamkniętą prostokątem, płatem dowolnej powierzchni o równaniu $z = f(x, y)$, wznoszącym się nad tym prostokątem i płaszczyznami, rzucającemi ten płat powierzchni na płaszczyznę (XY), np. bryłę $ABCDEFGH$ na fig. 73 (str. 219). Niechaj żaden punkt tej powierzchni nie leży pod płaszczyzną (XY), t. j. niechaj funkcja $f(x, y)$ będzie nieujemną dla wszystkich punktów (x, y), zawartych w badanym prostokącie. Utwórzmy dla tej funkcji sumę dolną nad prostokątem $ABCD$. Każdy jej dodajnik $m_{ik}p_i$ jest równy objętości graniastosłupa o podstawie p_{ik} a o wysokości m - równej kresowi dolnemu wartości z nad tym prostokątem p_{ik}. Cała suma dolna jest równa objętości schodkowej bryły, wpisanej w daną bryłę. Tworząc ciąg takich sum dolnych, w których przekątna największego składowego prostokąta dąży do zera, otrzymujemy ciąg objętości odpowiednich brył schodkowych, aproksymujących coraz lepiej badaną bryłę. Granicę tego ciągu uważamy za objętość danej

bryły. Wiemy zaś z poprzedniego paragrafu, że granicą tego ciągu jest całka podwójna z funkcji $f(x, y)$ po prostokącie. Przyjmujemy zatem następującą **definicję objętości.**

Objętość V bryły, zamkniętej prostokątem, leżącym na płaszczyźnie (XY) o bokach równoległych do osi spółrzędnych, powierzchnią o równaniu $z=f(x\ y)$, wznoszącą się nad tym prostokątem i płaszczyznami, rzucającemi ten płat powierzchni na płaszczyznę (XY), jest to całka podwójna z funkcji $f(x, y)$ po tym prostokącie, a mianowicie:

$$V = \int_{b_1}^{b_2}\int_{a_1}^{a_2} z\,dx\,dy = \int_{b_1}^{b_2}\int_{a_1}^{a_2} f(x, y)\,dx\,dy \tag{158}$$

Dla powierzchni, leżącej pod prostokątem, t. j. dla ujemnych z, ma ta całka wartość ujemną i podaje wartość $-V$. Ogólnie całka podwójna po prostokącie z funkcji, przybierającej dodatnie i ujemne wartości w prostokącie P, przedstawia algebraiczną sumę objętości, leżących nad płaszczyzną (XY) i pod nią.

Przykład 1) Obliczyć objętość bryły, wznoszącej się nad prostokątem, zawartym między prostemi $x = 0$ i $x = a$, tudzież $y = 0$ i $y = b$ na płaszczyźnie (XY) a zamkniętej u góry powierzchnią o równaniu:

$$z = pxy$$

(Jest to paraboloida hiperboliczna, por. tom. I, str. 44).

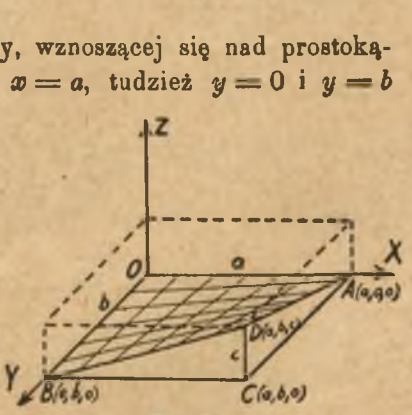


Fig. 74.

Bryłę tę przedstawiono na fig. 74. Oznaczmy literą c wartość funkcji z w wierzchołku C prostokąta, t. j. $c=p\cdot a\cdot b$. Przekrój danej powierzchni płaszczyzną $x = a$, prostopadłą do (XY), jest linją prostą o równaniach: $x = a$, $z = pay$, a podobnie przekrój płaszczyzną $y = b$ jest linją prostą o równaniach $y = b$, $z = pbx$. (Celem plastycznego uwidocznienia zakrzywienia tej powierzchni narysowano siatkę linij prostych, leżących na niej). Objętość badanej bryły wyrażamy wzorem:

$$V = \int_0^b\int_0^a pxy\,dx\,dy$$

Wykonujemy całkowanie najpierw według x a następnie według y i otrzymujemy:

$$V = \int_0^b \tfrac{1}{2} p\,x^2 y \Big|_{x=0}^{x=a} dy = \int_0^b \tfrac{1}{2} pa^2 y\,dy = \tfrac{1}{4} pa^2 y^2 \Big|_0^b = \tfrac{1}{4} pa^2 b^2$$

Ponieważ $pab = c$, przeto:

$$V = \tfrac{1}{4}abc$$

Objętość tej bryły jest więc równa czwartej części objętości prostopadłościanu o tej samej podstawie a o wysokości c. Widzimy stąd analogję z wzorem na pole, ograniczone łukiem paraboli o równaniu $y^2 = 2px$, osią rzędnych i prostą prostopadłą do tej osi (por. § 220, przykład 5).

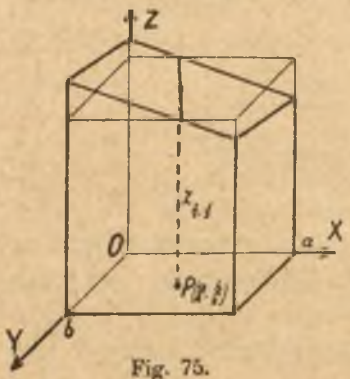


Fig. 75.

Przykład 2) Obliczyć objętość prostopadłościanu, ściętego dowolną płaszczyzną o równaniu:

$$z = Ax + By + C \tag{I}$$

znając krawędzie a i b podstawy.

Umieszczamy ten prostopadłościan tak, aby krawędzie podstawy leżały na dodatnich kierunkach osi X i Y (fig. 75). Objętość bryły, wznoszącej się nad prostokątem P, a zamkniętej u góry płaszczyzną o równaniu (I), wyraża się wzorem:

$$V = \int_0^b \int_0^a (Ax + By + C)\,dx\,dy$$

A więc:

$$V = \int_0^b \left(\tfrac{1}{2}Ax^2 + Bxy + Cx\right)\Big|_0^a dy = \int_0^b \left(\tfrac{1}{2}Aa^2 + Bay + Ca\right) dy$$

$$V = \left(\tfrac{1}{2}Aa^2y + \tfrac{1}{2}By^2 + Cay\right)\Big|_0^b = \tfrac{1}{2}Aa^2b + \tfrac{1}{2}Bab^2 + Cab$$

$$V = ab\left(A \cdot \tfrac{a}{2} + B \cdot \tfrac{b}{2} + C\right)$$

Oznaczmy wysokość z, należącą do punktu środkowego prostokąta P (wysokość ta trafia w środek przekroju, który jest oczywiście równoległobokiem), krótko znakiem $z_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$, to wzór przyjmie postać:

$$V = P \cdot z_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$$

Objętość prostopadłościanu ściętego dowolną płaszczyzną jest zatem równa objętości zwykłego prostopadłościanu o tej samej podstawie a o wysokości równej odległości środka przekroju od podstawy.

Wysokość ta jest średnią arytmetyczną czterech krawędzi bocznych prostopadłościanu ściętego (wykazuje się to, wstawiając w równanie płaszczyzny za (x, y) kolejno $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(0, b)$, (a, b) i biorąc średnią aryt-

metyczną czterech otrzymanych na z wartości). Można więc wyrazić otrzymany wzór także tak: objętość prostopadłościanu ściętego jest równa podstawie, pomnożonej przez średnią arytmetyczną czterech krawędzi bocznych.

§ 253. Całki podwójne po dowolnych obszarach (w zmiennych granicach całkowania).

Omawialiśmy dotychczas tylko całki podwójne nad obszarami prostokątnemi. Takie całki występują nader rzadko w zastosowaniach. Najczęściej mamy do czynienia z ogólniejszemi obszarami; tak np. przy obliczaniu objętości ósemki elipsoidy natrafiamy na całkę podwójną nad obszarem OAB, zamkniętym z jednej strony elipsą (por. fig. 76). Będziemy tu rozważali tylko *obszary domknięte* (por. tom I, str. 17—18), których brzeg składa się ze skończonej liczby linij, dających się przedstawić w postaci $y = \varphi(x)$ lub $x = \psi(y)$. Takie obszary nazywamy obszarami *regularnemi* [1]). Brzeg takiego obszaru regularnego da się zamknąć w obszar o dowolnie małem polu.

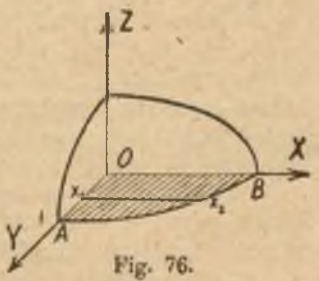


Fig. 76.

Weźmy zatem pod uwagę funkcję $f(x, y)$, określoną w dowolnym obszarze regularnym, jak na fig. 77.

Niechaj $f(x, y)$ spełnia te same warunki ciągłości, co w § 250. Definicję całki po takim obszarze D sprowadzamy do definicji całki po prostokącie. Aby to uskutecznić, opiszmy na obszarze D prostokąt P o bokach równoległych do osi X i Y dwa jego boki przechodzą zatem przez te punkty obszaru D, które mają największą i najmniejszą odciętą, a dwa inne przez te punkty, które mają największą i najmniejszą rzędną. Określmy funkcję pomocniczą $f_1(x, y)$ dla wszystkich punktów prostokąta P w następujący sposób.

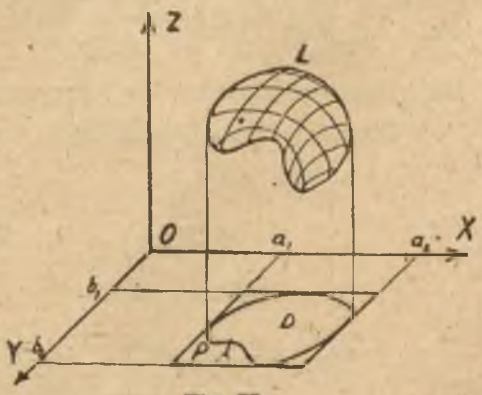


Fig. 77.

Niechaj $f_1(x, y) = f(x, y)$ dla wszystkich punktów obszaru D, a $f_1(x, y) = 0$ dla wszystkich pozostałych punktów płaszczyzny (XY).

[1]) Por podręcznik prof. S. Banacha p. t. *Rachunek różniczkowy i całkowy* Tom II, str. 171.

Całkę podwójną z tej pomocniczej funkcji $f_1(x, y)$ *po* **prostokącie** *P nazywamy całką podwójną z funkcji* $f(x, y)$ *po obszarze D.*

Całkę podwójną po obszarze D oznaczamy symbolem: $\int\limits_{(D)}\int f(x,y)\,dx\,dy$, całkę zaś podwójną po prostokącie P oznaczyliśmy (str. 217) symbolem $\int\limits_{(P)}\int$, a zatem możemy naszą definicję napisać w następujący sposób:

$$\int\limits_{(D)}\int f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{(P)}\int f_1(x,y)\,dx\,dy \quad \text{przyczem} \quad f_1(x,y) = \begin{cases} f(x,y) \text{ w } D \\ 0 \text{ poza } D \end{cases}$$

Uwaga 1. Funkcja $f_1(x, y)$ jest zwykle nieciągła wzdłuż brzegu l obszaru D nawet wtedy, gdy $f(x, y)$ jest funkcją ciągłą (brzeg l tylko wtedy nie byłby linją nieciągłości, gdyby brzeg L danej powierzchni $z = f(x, y)$ leżał na płaszczyźnie (XY)). Wiemy jednak, że całka nad prostokątem istnieje także dla nieciągłej funkcji $f_1(x, y)$, jeżeli tylko ta funkcja jest ograniczona a jej linje nieciągłości dadzą się zamknąć w obszar o dowolnie małem polu. Tutaj zaś właśnie mamy do czynienia z takim przypadkiem.

Uwaga 2. Całkę po dowolnym obszarze można także określić bezpośrednio jako granicę ciągu odpowiednich sum dolnych (lub górnych), otrzymanych przy pomocy podziału obszaru na drobniejsze elementy zapomocą prostych, równoległych do osi X i Y. Nie wszystkie jednak elementy będą prostokątami, albowiem przy brzegu obszaru wystąpią elementy, w których brzeg wchodzą łuki linji l.

Uwaga 3. Jeżeli obszar D rozłożymy zapomocą dowolnej linji na dwie części D_1 i D_2, to można okazać, że:

$$\int\limits_{(D)}\int f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{(D_1)}\int f(x,y)\,dx\,dy + \int\limits_{(D_2)}\int f(x,y)\,dx\,dy$$

Jest to uogólnienie twierdzenia o addytywności całki pojedyńczej (por. § 214).

Okażemy, że obliczenie całki po dowolnym obszarze regularnym sprowadza się — podobnie jak dla całki po prostokącie — do obliczania całek pojedyńczych, w których jednak nie wszystkie granice są liczbami stałemi. Weźmy pod uwagę obszar regularny D, zamknięty taką linją, którą każda prosta równoległa do osi X przecina najwyżej w dwóch punktach (jak na fig. 78). Inne obszary, z któremi będziemy mieli do czynienia, można rozdzielić na obszary tego rodzaju i zastosować następnie twierdzenie z uwagi 3.

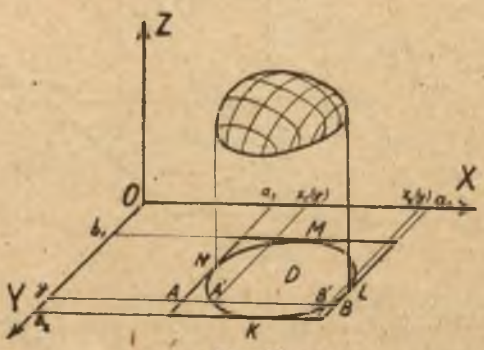


Fig. 78.

Według przyjętej powyżej definicji całki po obszarze D mamy:

$$\text{(b)} \qquad \iint\limits_{(D)} f(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_{b_1}^{b_2} \left\{ \int\limits_{a_1}^{a_2} f_1(x, y)\, dx \right\} dy$$

Obliczmy najpierw całkę wewnętrzną:

$$g(y) = \int\limits_{a_1}^{a_2} f_1(x, y)\, dx$$

Obierzmy jakieś stałe y z przedziału $\langle b_1, b_2 \rangle$ i wykreślmy przez odpowiedni punkt osi Y równoległą do osi X. Przetnie ona opisany prostokąt w punktach A, B, a brzeg obszaru D w punktach A', B' o odciętych $x_1(y)$ i $x_2(y)$.

Zaznaczyliśmy wyraźnie, że te odcięte są *funkcjami zmiennej y*, albowiem do każdego y z przedziału $\langle b_1, b_2 \rangle$ należy jakaś odcięta x_1 na łuku KNM i jakaś odcięta x_2 na łuku KLM. Równania łuków, tworzących brzeg obszaru, mają więc postać: $x = x_1(y)$, $x = x_2(y)$.

Całkę $g(y)$ możemy rozłożyć na trzy całki:

$$g(y) = \int\limits_{a_1}^{a_2} f_1(x, y)\, dx = \int\limits_{a_1}^{x_1(y)} f_1(x, y)\, dx + \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f_1(x, y)\, dx + \int\limits_{x_2(y)}^{a_2} f_1(x, y)\, dx$$

Pierwsza i trzecia całka po prawej stronie mają wartość 0, ponieważ $f_1(x, y) = 0$ poza obszarem D. Natomiast w drugiej całce można zamiast $f_1(x, y)$ napisać $f(x, y)$, ponieważ te funkcje mają w obszarze D te same wartości. Ostatecznie więc:

$$g(y) = \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\, dx$$

Wobec tego wzór (b) przyjmuje postać:

$$\text{(159)} \qquad \boxed{\iint\limits_{(D)} f(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_{b_1}^{b_2} \left\{ \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\, dx \right\} dy}$$

przyczem $x = x_1(y)$ i $x = x_2(y)$ są równaniami dwóch łuków, tworzących brzeg obszaru D, a b_1 i b_2 są wartościami najmniejszej i największej rzędnej punktów brzegu. Widzimy stąd, że obliczenie całki po takim obszarze D sprowadza się do kolejnego obliczenia dwóch całek pojedyńczych, przyczem granice pierwszego całkowania (według x) są *zmienne* a drugiego (według y) stałe. Zwykle opuszczamy klamry i piszemy powyższy wzór w postaci:

$$\text{(159a)} \qquad \iint\limits_{(D)} f(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_{b_1}^{b_2} \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy$$

Całkowanie można wykonać także w innym porządku, wtedy jednak zmienią się granice całkowania, jak to zaraz zobaczymy. Niechaj obszar D ma tę własność, że każda prosta równoległa do osi Y przecina jego brzeg najwyżej w dwóch punktach. W całce, występującej po prawej stronie wzoru (b), można zmienić porządek całkowania, jest to bowiem całka po prostokącie. Otrzymamy w ten sposób zamiast wzoru (b) następujący wzór:

$$\iint_{(D)} f(x, y)\, dx\, dy = \int_{a_1}^{a_2} \left\{ \int_{b_1}^{b_2} f_1(x, y)\, dy \right\} dx$$

Celem obliczenia wewnętrznej całki:

$$h(x) = \int_{b_1}^{b_2} f_1(x, y)\, dy$$

obierzmy dowolne x z przedziału $\langle a_1, a_2 \rangle$ i wykreślmy przez odpowiedni punkt osi X prostą równoległą do osi Y. Przetnie ona brzeg obszaru w dwóch punktach o rzędnych $y_1(x)$ i $y_2(x)$. Rozumując tak, jak w poprzednim przypadku, otrzymamy:

$$h(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, dy$$

Zatem:

(160)
$$\boxed{\iint_{(D)} f(x, y)\, dx\, dy = \int_{a_1}^{a_2} \left\{ \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, dy \right\} dx}$$

przyczem $y = y_1(x)$ i $y = y_2(x)$ są równaniami łuków, tworzących brzeg obszaru D, a a_1 i a_2 wartościami najmniejszej i największej odciętej punktów brzegu. Ten drugi sposób obliczania całki po obszarze D możemy uwidocznić już w jej symbolu, pisząc $dy\, dx$ zamiast $dx\, dy$.

Klamry opuszcza się zwykle, podobnie jak we wzorze (159a).

Najprostszem zastosowaniem całki podwójnej po dowolnym obszarze jest obliczenie pola tego obszaru. Wystarczy w tym celu obrać $f(x, y) = 1$ dla wszystkich punktów obszaru.

Twierdzimy, że:

(161)
$$\boxed{\iint_{(D)} dx\, dy = D}$$

Dowód. Jeżeli każda prosta równoległa do osi Y przecina jego brzeg najwyżej w dwóch punktach, to stosując wzór (160), otrzymujemy:

$$\iint_{(D)} dx\, dy = \iint_{(D)} dy\, dx = \int_{a_1}^{a_2} \left\{ \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \right\} dx = \int_{a_1}^{a_2} (y_2(x) - y_1(x))\, dx$$

Czyli:

$$\iint_{(D)} dx\,dy = \int_{a_1}^{a_2} y_2(x)\,dx - \int_{a_1}^{a_2} y_1(x)\,dx = D$$

(por. str. 191). Jeżeli proste równoległe do osi spółrzędnych przecinają brzeg obszaru w więcej aniżeli dwóch punktach, to rozkładając obszar na takie obszary, które proste równoległe do osi przecinają najwyżej w dwóch punktach, stosujemy do każdego składowego obszaru poprzednią metodę i otrzymujemy także w tym przypadku wzór (161).

Do całek po dowolnym obszarze odnosi się twierdzenie o wartości średniej, podobne jak dla całek po prostokącie, a mianowicie:

(162) $$\boxed{m \cdot D \leqq \iint_{(D)} f(x, y)\,dx\,dy \leqq M \cdot D}$$

Dowód. Ponieważ m oznacza kres dolny wartości funkcji $f(x, y)$ w całym obszarze, zatem:

$$m \leqq f(x, y)$$

Stąd wynika, że także:

$$\iint_{(D)} m\,dx\,dy \leqq \iint_{(D)} f(x, y)\,dx\,dy$$

czyli:

$$m \iint_{(D)} dx\,dy \leqq \iint_{(D)} f(x, y)\,dx\,dy$$

Stąd otrzymujemy na podstawie wzoru (161):

$$m \cdot D \leqq \iint_{(D)} f(x, y)\,dx\,dy$$

W podobny sposób stwierdzamy drugą nierówność, zawartą we wzorze (162). Stąd otrzymuje się na *średnią wartość funkcji* w obszarze D — podobnie jak w § 250 — wzór:

(163) $$\boxed{\mu = \frac{1}{D} \iint_{(D)} f(x, y)\,dx\,dy}$$

Jeżeli $f(x, y)$ jest ciągła w obszarze D, to istnieje taki punkt o spółrzędnych $x = \xi$, $y = \eta$, w którym funkcja przyjmuje tę wartość średnią μ i wtedy zachodzi wzór:

(163a) $$\boxed{\iint_{(D)} f(x, y)\,dx\,dy = f(\xi, \eta) \cdot D}$$

Opierając się na twierdzeniu o wartości średniej, wyrażonem wzorem (162), można okazać, że całka po dowolnym obszarze jest granicą ciągu sum dolnych (lub górnych), otrzymanych przy pomocy podziału obszaru na drobniejsze elementy zapomocą dwóch systemów *dowolnych linij*, prostych lub krzywych (a więc niekoniecznie prostych równoległych do osi spółrzędnych). Trzeba przytem obrać taki ciąg sum, aby średnica największego elementu składowego przy tym ciągu podziałów dążyła do zera. (Średnicą takiego elementu powierzchni nazywamy kres górny odległości dwóch dowolnych jego punktów od siebie).

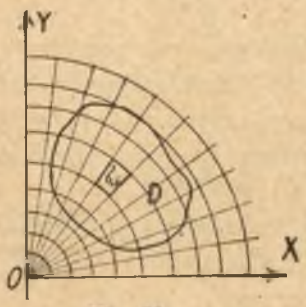


Fig. 79.

Tak np. przy użyciu spółrzędnych biegunowych r, φ dzielimy obszar D zapomocą pęku prostych, określonych warunkiem $\varphi = c$ i gromady kół spółśrodkowych, odpowiadających warunkowi $r = c_1$, na elementy nieprostokątne σ_{ik}, jak to uwidoczniono na fig. 79. Całkę podwójną po obszarze D można wtedy uważać za granicę ciągu sum postaci:

$$\sum_{(D)} \sum m_{ik}\, \sigma_{ik}$$

Określiliśmy (w § 252) objętość, wznoszącą się nad prostokątem. Obecnie możemy uogólnić tę definicję na objętości, wznoszące się nad dowolnemi obszarami. Definicja całki po dowolnym obszarze zapomocą sum dolnych (lub górnych) naprowadza nas na przyjęcie następującej definicji objętości, wznoszącej się nad dowolnym obszarem (jak na fig. 77 lub 78). ***Objętością*** *V bryły, zamkniętej obszarem D, leżącym na płaszczyźnie (XY), powierzchnią o równaniu $z = f(x, y)$, wznoszącą się nad tym obszarem i powierzchnią walcową, rzucającą ten płat powierzchni na płaszczyznę (XY), nazywamy całkę podwójną z funkcji $f(x, y)$ nad tym obszarem*, a mianowicie:

$$(164) \qquad \boxed{V = \int_{(D)} \int z\, dx\, dy = \int_{(D)} \int f(x, y)\, dx\, dy}$$

Dla powierzchni, leżącej pod obszarem D, t. j. dla ujemnych z, całka ta ma wartość ujemną i podaje wartość $-V$. Ogólnie całka podwójna z funkcji, przybierającej dodatnie i ujemne wartości w obszarze D, jest równa algebraicznej sumie objętości nad płaszczyzną (XY) i pod nią (przyczem pierwsze są dodatnie a drugie ujemne).

§ 254. Przykłady całek podwójnych po dowolnych obszarach.

1) Wyznaczyć granice całkowania dwóch całek pojedyńczych, do których się sprowadza obliczanie całki:

$$I = \iint\limits_{(D)} f(x, y)\, dx\, dy$$

jeżeli obszar całkowania jest ograniczony parabolą o równaniu $y = x^2$, prostą $y = 2 - x$ i osią Y (fig. 80). Punkt A ma spółrzędne (0, 2) a punkt B spółrzędne (1, 1), jak to wynika z rozwiązania układu równań $y = x^2$ i $y = 2 - x$. Wykonując najpierw całkowanie według y, trzeba ustalić x. Stałemu x odpowiada prosta równoległa do osi Y. Przecina ona obszar całkowania w dwóch punktach o rzędnych y_1 i y_2, przyczem y_1 należy do łuku paraboli, a więc $y_1 = x^2$ a $y_2 = 2 - x$, jako rzędna prostej AB. Granice zaś dla zmiennej x są stałe, a mianowicie całkujemy od najmniejszego x, t. j. od $x_1 = 0$, do największego: $x_2 = 1$.

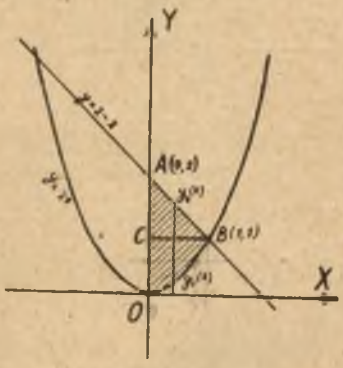


Fig. 80

A więc:

$$I = \int_0^1 \int_{x^2}^{2-x} f(x, y)\, dy\, dx$$

Jeżeli chcemy zmienić porządek całkowania, to należy rozłożyć dany obszar na dwie części: OBC i ABC, albowiem w każdym z tych obszarów będą inne granice (zmienne) dla x. Wobec tego należy także całkę I rozłożyć na dwa dodajniki, w myśl uwagi 3 na str. 226. I tak w obszarze OBC, przy stałem y, zmienia się x od odciętej osi Y do odciętej paraboli, t. j. od $x_1 = 0$ do $x_2 = \sqrt{y}$. Dla zmiennej y granice całkowania są stałe: od $y_1 = 0$ do $y_2 = 1$. W obszarze zaś ABC zmienia się x od $x_1 = 0$ do odciętej prostej AB, t. j. do $x_2 = 2 - y$, a granice dla y są stałe, a mianowicie $y_1 = 1$, $y_2 = 2$. Zatem przy tym porządku całkowania jest:

$$I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y)\, dx\, dy + \int_1^2 \int_0^{2-y} f(x, y)\, dx\, dy$$

2) Zbadać, jaką postać ma obszar całkowania w całce:

$$I = \int_0^a \int_{\sqrt{a^2 - x^2}}^{x+2a} f(x, y)\, dy\, dx$$

Jak się zmieni sposób obliczania tej całki, gdy zmienimy porządek całkowania?

Rzędna zmienia się od $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ do $y = x + 2a$, t. j. od łuku półkola o promieniu a, o środku w początku układu, do linji prostej, przedstawionej na fig. 81. Odcięta zmienia się od $x = 0$ do $x = a$, t. j. od osi rzędnych do prostej równoległej do tej osi w odstępie a. Obszar całkowania ma zatem postać czworokąta krzywolinjowego $ABEF$.

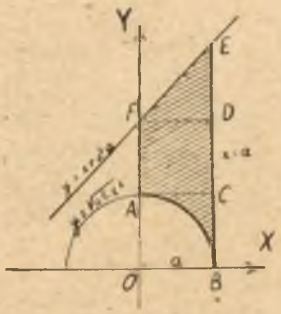


Fig. 81.

Gdybyśmy zmienili porządek całkowania, to trzebaby rozłożyć całkę na 3 dodajniki, odpowiadające obszarom ABC, $ACDF$ i DEF.

Otrzymamy w ten sposób:

$$I = \int_{\sqrt{a^2-x^2}}^{a}\int^{a} f(x,y)\,dx\,dy + \int_{a}^{2a}\int_{0}^{a} f(x,y)\,dx\,dy +$$

$$+ \int_{2a}^{\ldots}\int_{x-2a}^{a} f(x,y)\,dx\,dy$$

3) Wyznaczyć granice całkowania, jeżeli obszar całkowania jest trójkątem o wierzchołkach $A(-1, 0)$, $B(1, 2)$, $C(4, -1)$ (fig. 82). Przy pomocy znanego z geometrji analitycznej wzoru:

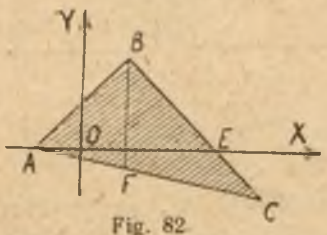


Fig. 82.

$$\frac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \frac{x - x_1}{x_1 - x_2}$$

otrzymujemy równania boków tego trójkąta:

$$AB \ldots y = x + 1$$
$$BC \ldots y = -x + 3$$
$$AC \ldots 5y + x + 1 = 0$$

Jeżeli całkujemy najpierw według x, to trzeba ustalić y. Widzimy, że wtedy otrzyma się inne granice (zmienne) dla x w części AEB, a inne w części AEC. Wobec tego trzeba rozłożyć całkę po całym trójkącie ABC na dwa dodajniki w następujący sposób:

$$I = \int_{(D)}\int f(x,y)\,dx\,dy = \int_{0}^{2}\int_{y-1}^{3-y} f(x,y)\,dx\,dy + \int_{-1}^{0}\int_{-5y-1}^{3-y} f(x,y)\,dx\,dy$$

Przy zmienionym porządku całkowania trzeba inaczej rozłożyć obszar, a mianowicie zapomocą prostej BF. Wtedy:

$$I = \int_{-1}^{1}\int_{-\frac{1}{5}(x+1)}^{x+1} f(x,y)\,dy\,dx + \int_{1}^{4}\int_{-\frac{1}{5}(x+1)}^{-x+3} f(x,y)\,dy\,dx$$

4) Obliczyć pole obszaru, zawartego między parabolą o równaniu $y=x^2$ a elipsą o równaniu $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ (fig. 83). Według wzoru (161) pole tego obszaru ma wartość

$$D=\int\limits_{(D)}\int dx\,dy$$

Gdybyśmy całkowali najpierw według x, to trzebaby obliczać osobno obszar, leżący nad cięciwą AB a osobno pod nią. Dogodniej jest jednak całkować najpierw według y. Wtedy granice dla y są $y_1=x^2$, $y_2=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$. Najmniejszą odciętą jest odcięta $x=-m$ punktu A, w którym parabola przecina elipsę a największą odcięta $x=m$ punktu B. Odcięte te otrzymuje się przez rozwiązanie układu równań: paraboli i elipsy.

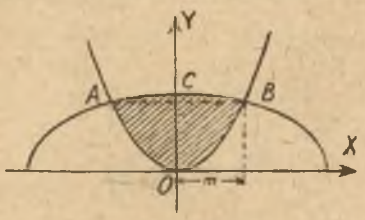


Fig. 83.

Zatem:

$$D=\int\limits_{-m}^{+m}\int\limits_{x^2}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}dy\,dx=\int\limits_{-m}^{+m}\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}-x^2\right)dx$$

Używając dla pierwszej części tej całki wzoru (25a) na str. 25, otrzymujemy:

$$D=\frac{b}{a}\left(m\sqrt{a^2-m^2}+a^2\arcsin\frac{m}{a}\right)-\frac{2}{3}m^3$$

5) Nad ćwiartką D koła o równaniu $x^2+y^2=r^2$ wznosi się powierzchnia krzywa, określona równaniem:

$$z=pxy$$

(jest to paraboloida hiperboliczna; por. przykład 1 na str. 223). Obliczyć średnie wzniesienie z tej powierzchni nad poziom (XY). Chodzi tu o obliczenie średniej wartości μ funkcji pxy nad obszarem D. Z wzoru (163) otrzymujemy:

$$\mu=\frac{1}{D}\int\limits_{(D)}\int pxy\,dx\,dy$$

Pole obszaru jest $D=\frac{1}{4}r^2\pi$. Jeżeli całkujemy najpierw według x, to granicami całkowania dla x są: $x_1=0$, $x_2=\sqrt{r^2-y^2}$ a dla y od $y_2=0$ do $y_1=r$. Zatem:

$$\mu=\frac{4}{r^2\pi}\int\limits_{0}^{r}\int\limits_{0}^{\sqrt{r^2-y^2}}pxy\,dx\,dy$$

Stąd:

$$\mu = \frac{2p}{r^2\pi}\int_0^r x^2 y \Big|_0^{\sqrt{r^2-x^2}} dy = \frac{2p}{r^2\pi}\int_0^r (r^2 - y^2)\, y\, dy = \frac{2p}{r^2\pi}\left(\tfrac{1}{2}r^2y^2 - \tfrac{1}{4}y^4\right)\Big|_0^r =$$

$$= \frac{2p}{r^2\pi}\left(\tfrac{1}{2}r^4 - \tfrac{1}{4}r^4\right) = \frac{pr^2}{2\pi}$$

6) Obliczyć objętość części walca kołowego o promieniu a na fig. 84, wznoszącą się nad trójkątem OAB, który jest połówką kwadratu $OCAB$ o boku a. Równanie walca kołowego tak położonego, jak na fig. 84, ma postać:

$$x^2 + z^2 = a^2$$

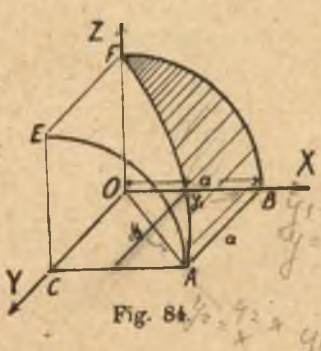


Fig. 84.

Obszarem całkowania jest trójkąt OAB, którego bok OA ma w układzie X, Y równanie $y = x$.

Funkcją, którą mamy całkować, jest $z = \sqrt{a^2 - x^2}$. Użyjmy wzoru (164), a więc:

$$V = \iint_{(D)} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx\, dy$$

Wygodniej będzie całkować najpierw według y, a więc do obliczenia tej całki użyjemy wzoru (160). Przetnijmy obszar całkowania dowolną prostą równoległą do osi Y, to y_1 jest stale równe 0, a $y_2 = x$, jako rzędna punktu, leżącego na prostej OA. Granicami całkowania według y są więc $y_1 = 0$ i $y_2 = x$. Najmniejszą odciętą dla tego obszaru jest $x = 0$, a największą $x = a$, a więc granicami całkowania dla x są $a_1 = 0$, $a_2 = a$. Wobec tego:

$$V = \int_0^a \int_0^x \sqrt{a^2 - x^2}\, dy\, dx = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, y \Big|_0^x dx = \int_0^a x\sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

Ostatnią całkę obliczymy najłatwiej, używając podstawienia: $a^2 - x^2 = t$ a stąd $-2x\,dx = dt$, czyli $x\,dx = -\frac{1}{2}dt$. Dla $x = 0$ jest $t = a^2$, a dla $x = a$ jest $t = 0$ A więc:

$$V = \int_0^a x\sqrt{a^2 - x^2}\, dx = -\frac{1}{2}\int_{a^2}^0 \sqrt{t}\, dt = -\frac{1}{2}\frac{t^{3/2}}{3/2}\Big|_{a^2}^0 = \frac{1}{3}a^3$$

(Niechaj czytelnik okaże, że przy zmianie porządku całkowania należy obrać dla x granice $x_1 = y$, $x_2 = a$, a dla y granice $y_1 = 0$, $y_2 = a$).

Interesującem jest, że wzór na objętość tej części walca nie zawiera liczby π. Objętość części tego walca, wznoszącej się nad całym kwadratem $OCAB$, nie jest bynajmniej równa podwójnej objętości części, wznoszącej

się nad połówką OAB tego kwadratu. Objętość ta bowiem ma wartość $\frac{1}{4}a^3\pi$, jako ćwiartka walca równobocznego o promieniu a, a to jest różne od $2V = \frac{2}{3}a^3$. A więc przez poprowadzenie przekroju OAF rozpada się ćwiartka walca na dwie nierówne części:

$$V = \tfrac{1}{3}a^3 \quad \text{i} \quad V_1 = \tfrac{1}{4}a^3\pi - \tfrac{1}{3}a^3 = a^3(\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{1}{3})$$

Uwaga. Takie bryły spotykamy w architekturze, a mianowicie t. zw. sklepienie *klasztorne* składa się z 8 powierzchni postaci FAB, zestawionych tak, jak to uwidoczniono na fig. 85a w rzucie na płaszczyznę poziomą (kreski na rysunku biegną wzdłuż tworzących walców). Natomiast sklepienie *krzyżowe* składa się z 8 części powierzchni walcowej, mających postać EAF na fig. 84, zestawionych obok siebie tak, jak wskazuje fig. 85b.

Fig. 85a.

Fig. 85b.

7) Przy pomocy całki podwójnej możemy obliczyć objętość elipsoidy trójosiowej o równaniu:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

(Obliczaliśmy ją już w inny sposób w § 231, przykład 2). Weźmy pod uwagę ósemkę tej elipsoidy (por. fig. 76, str. 225). Obszarem całkowania jest ćwiartka elipsy OAB o równaniu:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{czyli} \quad x = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}$$

Funkcja podcałkowa ma postać:

$$z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

Całkując najpierw według x, mamy następujące granice całkowania:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}$$

a dla y:

$$y_1 = 0, \quad y_2 = b$$

Zatem:

$$\tfrac{1}{8}V = \int_0^b \int_0^{\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, dx\, dy$$

Po wykonaniu rachunków otrzyma się:

$$V = \tfrac{4}{3}abc\pi.$$

8) Obliczyć objętość, zawartą między powierzchnią elipsy o równaniu:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

powierzchnią o równaniu:

$$z = Ax^2 + By^2$$

gdzie A i B są liczbami dodatniemi (jest to paraboloida eliptyczna, por. tom I, str. 43) i pomiędzy powierzchnią walca eliptycznego o tworzących prostopadłych do płaszczyzny (XY), mającego tę elipsę za kierownicę.

Obliczmy ćwiartkę tej objętości, a mianowicie objętość nad ćwiartką elipsy. Jeżeli całkujemy najpierw według x, to granice całkowania są takie same, jak w poprzednim przykładzie; jeżeli zaś całkujemy najpierw według y, to granicami całkowania dla y są:

$$y_1 = 0, \quad y_2 = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

granicami zaś dla x są $x_1 = 0$, $x_2 = a$. Rozdzielmy odrazu całkę z funkcji z na sumę dwóch całek i wykonajmy w pierwszej z nich najpierw całkowanie według y, a w drugiej najpierw według x. A więc:

$$\frac{1}{4}V = \int_0^a \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} Ax^2\,dy\,dx + \int_0^b \int_0^{\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}} By^2\,dx\,dy = I_1 + I_2$$

Otóż pierwszą całkę obliczamy w następujący sposób:

$$I_1 = \int_0^a Ax^2 y \Big|_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dx = \frac{Ab}{a}\int_0^a x^2\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

Używając podstawienia $x = a \sin t$, otrzymujemy:

$$I_1 = \frac{1}{4}Aba^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2t)^2\,dt = \frac{1}{8}Aba^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4t)\,dt = \frac{Aba^3\pi}{16}$$

Drugiej całki nie trzeba nawet obliczać, albowiem różni się ona od pierwszej tylko tem, że zamiast A występuje B, a a i b należy pomieniać ze sobą. Wobec tego:

$$I_2 = \frac{Bab^3\pi}{16}$$

a więc:

$$V = \frac{1}{4}\pi ab(Aa^2 + Bb^2)$$

§ 255. Pole powierzchni (Komplanacja powierzchni).

Obliczaliśmy dotąd tylko pola powierzchni obrotowych, a używaliśmy do tego celu całki pojedynczej (por. § 232). Do definicji i obliczania pól dowolnych powierzchni, a więc także nieobrotowych, użyjemy całki podwójnej.

Weźmy pod uwagę część powierzchni o równaniu $z = f(x,y)$, wyciętą przez walec, którego podstawą jest dowolny obszar regularny D, a tworzące są prostopadłe do płaszczyzny (XY) (fig. 86). Załóżmy, że badana powierzchnia posiada płaszczyznę styczną, nie prostopadłą do (XY), w każdym punkcie nad obszarem D. Zapomocą dwóch systemów prostych równoległych do osi X i Y rozkładamy obszar D na elementy $p_1, p_2 \dots p_N$. Nad każdym z nich budujemy słup prosty, ograniczony z jednej strony elementem danej powierzchni, w ogólności krzywym. Każdy taki element p'_r powierzchni zastępujemy ścianką płaską s_r, *styczną* do niego w jakimkolwiek jego punkcie A_r o spółrzędnych ξ_r, η_r, a ograniczoną pobocznicą odpowiedniego słupa o podstawie p_r. Utwórzmy sumę tych ścianek stycznych:

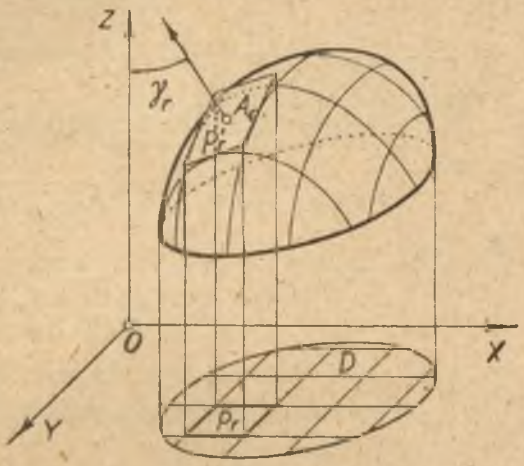


Fig. 86.

$$S_1 = \sum_{r=1}^{N} s_r$$

Tworząc dalsze, coraz drobniejsze podziały obszaru D, otrzymamy w ten sposób *ciąg* $S_1, S_2, \dots S_p \dots$ takich sum.

Definicja. Polem P badanej części powierzchni nazywamy granicę ciągu sum S_p ścianek stycznych, otrzymanych przez ciąg kolejnych podziałów obszaru D (i danej powierzchni) na elementy, których średnice dążą do zera (t. j. przez ciąg tych podziałów, przy których największe średnice dążą do zera).

Okażemy, że ta granica istnieje, gdy funkcja $f(x,y)$ jest ciągła i posiada cząstkowe pochodne: $p = \frac{\partial z}{\partial x} = f_x(x,y)$ i $q = \frac{\partial z}{\partial y} = f_y(x,y)$, ciągłe w obszarze D. I tak p_r jest rzutem płaskiej ścianki stycznej s_r na płaszczyznę (XY), zatem:

$$p_r = s_r \cos \gamma_r \quad \text{czyli} \quad s_r = \frac{p_r}{\cos \gamma_r}$$

gdzie γ_r oznacza kąt ostry, zawarty między płaszczyzną styczną w punkcie $A_r(\xi_r, \eta_r)$ a płaszczyzną (XY). Cosinus tego kąta wyrażamy wzorem (por. tom I, str. 339):

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

czyli:

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}}$$

W $\cos\gamma_r$ należy brać na (x, y) spółrzędne dowolnego punktu prostokąta p_r, np. (ξ_r, η_r).

Mianownik jest funkcją zmiennych x, y; nazwijmy go krótko $\varphi(x, y)$. A więc:

$$s = p_r \cdot \sqrt{1+f_x^2(\xi_r,\eta_r)+f_y^2(\xi_r,\eta_r)} = \varphi(\xi_r,\eta_r)\cdot p_r$$

a:

$$S_1 = \sum_{r=1}^{N} \varphi(\xi_r,\eta_r)\cdot p_r$$

Funkcja $\varphi(x, y)$ jest ciągła w obszarze D, a więc granica ciągu takich sum, gdy średnice elementów p_r dążą do zera, istnieje i w myśl uwagi 2 na str. 226, jest równa całce:

$$\int_{(D)}\int \varphi(x,y)\,dx\,dy \quad \text{czyli} \quad \int_{(D)}\int \sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}\,dx\,dy$$

Zatem pole P badanej części powierzchni jest równe tej całce. Używając skróceń p, q na cząstkowe pochodne, otrzymujemy ostatecznie następujący *wzór na pole powierzchni o równaniu* $z = f(x, y)$ *nad obszarem* D:

(165)
$$\boxed{P = \int_{(D)}\int \sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy}$$

Obliczanie pola powierzchni krzywej nazywamy **komplanacją** tej powierzchni; znając bowiem liczbę P, możemy z łatwością znaleźć *płaską* powierzchnię (np. prostokąt lub koło), mającą pole równe polu tej powierzchni krzywej.

Wzór (165) możemy także pisać w postaci:

(165a)
$$P = \int_{(D)}\int \frac{dx\,dy}{\cos\gamma}$$

przyczem γ jest kątem, zawartym między normalną do badanej powierzchni a osią Z. Wyrażenie, znajdujące się pod całką, nazywamy *elementem powierzchni* i oznaczamy je krótko symbolem $d\sigma$.

A więc:

$$(165b) \qquad d\sigma = \frac{dx\,dy}{\cos\gamma} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy$$

Uwaga. Celem łatwiejszego zapamiętania tego wzoru zwróćmy uwagę na to, że jest on analogiczny do wzoru na długość łuku:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$$

Przykłady.

1) Jak wielką powierzchnię wycina prostopadłościan, którego wierzchołki podstawy mają spółrzędne $A(0, 0)$, $B(3, 0)$, $C(0, 6)$, $D(3, 6)$ z powierzchni o równaniu:

$$z = \sqrt{2xy}$$

(Jest to stożek eliptyczny, którego wierzchołek leży w początku układu a osie X i Y są tworzącemi; oś jego jest symetralną kąta $\sphericalangle XOY$).

Obszarem całkowania jest prostokąt $ABCD$. Zatem:

$$P = \int_0^6 \int_0^3 \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dx\,dy$$

Ale:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \sqrt{2y} \cdot \tfrac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2y}}{2\sqrt{x}}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\sqrt{2x}}{2\sqrt{y}}$$

a więc:

$$P = \int_0^6 \int_0^3 \sqrt{1 + \frac{y}{2x} + \frac{x}{2y}}\,dx\,dy = \int_0^6 \int_0^3 \sqrt{\frac{2xy + y^2 + x^2}{2xy}}\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^6 \int_0^3 \frac{x + y}{\sqrt{2xy}}\,dx\,dy$$

Stąd:

$$P = \int_0^6 \frac{1}{\sqrt{2y}} \int_0^3 (x^{\frac{1}{2}} + y x^{-\frac{1}{2}})\,dx\,dy = \int_0^6 \frac{1}{\sqrt{2y}} \left(\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + 2yx^{\frac{1}{2}}\right)\Big|_0^3 dy =$$

$$= 6^{\frac{1}{2}} \int_0^6 (y^{-\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}})\,dy = 36$$

2) Obliczyć pole powierzchni, wyciętej z kuli o równaniu:

$$(I) \qquad x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$$

przez dwa walce o równaniach:

(II) $x^2 + y^2 - ax = 0$, (III) $x^2 + y^2 + ax = 0$

Na fig. 87 przedstawiono ósemkę kuli.

Kierownicą pierwszego walca jest koło o równaniu (II) a tworzące są równoległe do osi Z.

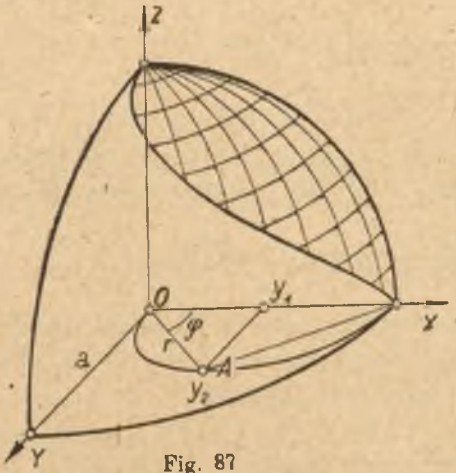


Fig. 87

Pochodne cząstkowe p i q obliczamy z uwikłanej formy (I):

$$p = -\frac{f_x}{f_z} = -\frac{2x}{2z} = -\frac{x}{z}$$

$$q = -\frac{2y}{2z} = -\frac{y}{z}$$

Jeżeli całkujemy najpierw według x, to zmienne granice dla y są $y_1 = 0$, $y_2 = \sqrt{ax - x^2}$, a x zmienia się od $x_1 = 0$ do $x_2 = a$. Całkowita powierzchnia, wycięta z kuli przez ten walec, składa się z 4 takich części: dwie leżą na górnej półkuli, dwie zaś na dolnej. Widocznem jest, że drugi walec wycina dwa okna o równej powierzchni. Zatem:

$$P = 8\int_0^a \int_0^{\sqrt{ax-x^2}} \sqrt{1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}}\, dy\, dx = 8\int_0^a \int_0^{\sqrt{ax-x^2}} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{z}\, dy\, dx$$

czyli:

$$P = 8a\int_0^a \int_0^{\sqrt{ax-x^2}} \frac{dy\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

Obliczenie tej całki jest dość mozolne. Najpierw sprowadza się wewnętrzną całkę zapomocą podstawienia $t = \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ do funkcji arcus sinus a następnie przy całkowaniu według x używa się całkowania „per partes“ Dochodzi się ostatecznie do wyniku:

$$P = 8a^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

Wynik ten uzyskamy w jednym z następnych paragrafów (§ 258) znacznie szybciej, wprowadzając za x i y nowe zmienne w całkę podwójną.

Powierzchnie, wycięte z kuli przez takie dwa walce, stykające się z sobą wzdłuż osi Z, nazywamy *oknami* Viviani'ego.

§ 256. Związek całki podwójnej z całką krzywolinjową. Twierdzenie Greena-Riemanna.

Całka podwójna po obszarze ma bardzo bliski związek z całką krzywolinjową, braną po brzegu tego obszaru.

Weźmy pod uwagę całkę krzywolinjową po linji zamkniętej L z dowolnej funkcji $P(x, y)$, ciągłej w obszarze domkniętym regularnym, zamkniętym tą linją:

$$I = \int_{(L)} P(x, y)\, dx$$

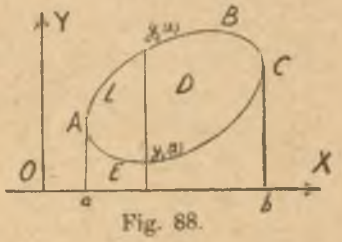


Fig. 88.

Załóżmy o linji L, że każda prosta równoległa do osi Y przecina ją najwyżej w dwóch punktach (jak na fig. 88) i że w równaniach $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ łuków $\overset{\frown}{ABC}$ i $\overset{\frown}{AEC}$, tworzących tę linję zamkniętą, $y_1(x)$ i $y_2(x)$ są funkcjami ciągłemi. Okażemy, że ta całka krzywolinjowa jest równa ujemnej wartości całki podwójnej po obszarze D, zamkniętym tą linją, z funkcji $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y}$. Zakładamy przytem, że ta cząstkowa pochodna jest ciągła w całym danym obszarze domkniętym D. Twierdzimy więc, że:

(166) $$\boxed{\int_{(L)} P(x, y)\, dx = -\iint_{(D)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}\, dx\, dy}$$

Dowód. Wykonajmy w tej całce podwójnej najpierw całkowanie według y. Granicami całkowania dla y są $y_1(x)$ i $y_2(x)$. Granicami zaś całkowania dla x są skrajne odcięte $x_1 = a$, $x_2 = b$. Zatem:

$$\iint_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = -\int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\, dy\, dx$$

Całką z $\frac{\partial P}{\partial y}$ według y jest oczywiście $P(x, y)$, a zatem:

$$-\iint_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = -\int_a^b (P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x)))\, dx =$$

$$= \int_b^a P(x, y_2(x))\, dx + \int_a^b P(x, y_1(x))\, dx$$

Pierwsza z całek prawej strony jest całką krzywolinjową z funkcji $P(x, y)$ po łuku $\overset{\frown}{CBA}$, druga zaś po łuku $\overset{\frown}{AEC}$.

A więc:

$$-\int\limits_{(D)}\int \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int\limits_{\overset{\frown}{CBA}} P(x,y)\,dx + \int\limits_{\overset{\frown}{AEC}} P(x,y)\,dx =$$

$$= \int\limits_{\overset{\frown}{CBAEC}} P(x,y)\,dx = \int\limits_{(L)} P(x,y)\,dx$$

Kierunek obiegu linji L, zaznaczony porządkiem liter $CBAEC$, jest dodatni, albowiem przy takim obiegu mamy powierzchnię D po lewej ręce. A więc całka podwójna po jakimś *obszarze* da się wyrazić zapomocą całki, branej tylko po *brzegu* tego obszaru. Zdawaćby się mogło, że mając wykonać całkowanie po obszarze, trzeba znać wartość funkcji dla wszystkich punktów tego obszaru; tymczasem okazało się, że wystarczy znać wartości tylko na brzegu obszaru, ale wartości innej funkcji, a mianowicie nie funkcji podcałkowej $\frac{\partial P}{\partial y}$, lecz funkcji pierwotnej (względem y) P.

Z czemś podobnem spotkaliśmy się już w całkach pojedyńczych.

I tak:

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Przy tem całkowaniu w przedziale od a do b mogłoby się zdawać, że trzeba znać wartości rzędnych dla każdego punktu tego przedziału; tymczasem wystarczy znajomość rzędnych dla końców przedziału, ale nie dla funkcji $F'(x)$, tylko dla funkcji pierwotnej $F(x)$.

Twierdzenie analogiczne do twierdzenia, wyrażonego wzorem (166), otrzymujemy, wykonując najpierw całkowanie według zmiennej x. Otrzymujemy mianowicie pomiędzy całką krzywolinjową po linji zamkniętej L z funkcji $Q(x,y)$ według y, a całką podwójną z funkcji $\frac{\partial Q}{\partial x}$ po obszarze, zamkniętym tą linją L, następujący związek:

(167)
$$\boxed{\int\limits_{(D)}\int \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int\limits_{(L)} Q(x,y)\,dy}$$

Zakładamy przytem, że $Q(x,y)$ i $\frac{\partial Q}{\partial x}$ są ciągłe w obszarze D, a linja L ma z każdą prostą równoległą do osi X najwyżej dwa punkty wspólne.

Pozostawiamy czytelnikowi szczegółowe przeprowadzenie dowodu.

Utworzywszy sumy całek po obu stronach wzorów (166) i (167), otrzymujemy następujący wzór ogólny:

(168) $$\iint_{(D)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_{(L)} (P\,dx + Q\,dy)$$

Wzór ten zawiera w sobie wzory (166) i (167) jako specjalne przypadki (dla $Q = 0$ lub $P = 0$). Twierdzenie, wyrażone tym wzorem, nazywamy twierdzeniem **Greena-Riemanna**. Dowiedliśmy prawdziwości jego dla obszarów D, zamkniętych takiemi linjami L, które każda prosta równoległa do osi spółrzędnych przecina najwyżej w dwóch punktach. Twierdzenie to jest jednak prawdziwe także dla ogólniejszych obszarów, a mianowicie dla takich, które można rozłożyć na skończoną liczbę obszarów powyższego typu (jak np. na fig. 89). Aby to okazać, wypisujemy dla każdego częściowego obszaru wzór Greena-Riemanna i tworzymy sumy prawych i lewych stron tych wzorów. W ten sposób otrzymamy po lewej stronie jedną całkę podwójną, braną po całym danym obszarze, a po prawej, sumę całek krzywolinjowych. Otóż te części całek krzywolinjowych, które są brane po linjach, rozcinających dany obszar (jak np. po linji AB na fig. 89), odpadną w sumie, ponieważ przebiegamy te linje dwukrotnie, raz w jednym kierunku, a drugi raz w przeciwnym. Wskutek tego otrzymamy ostatecznie po prawej stronie jedną całkę krzywolinjową, braną po linji L, zamykającej cały dany obszar.

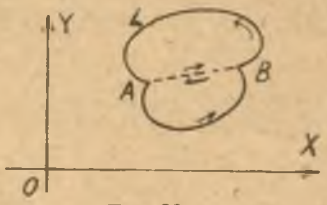


Fig. 89

O funkcjach $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ zakładaliśmy, że są ciągłe w danym obszarze; założenia te są istotne.

§ 257. Zastosowanie twierdzenia Greena-Riemanna do badania całek krzywolinjowych i różniczek zupełnych.

Wiemy, że wartość całki krzywolinjowej $\int_{AB} (P(x,y)dx + Q(x,y)dy)$, branej pomiędzy dwoma punktami A, B, zależy w ogólności nietylko od spółrzędnych tych punktów, lecz także od drogi, łączącej te punkty, po której całkujemy. Nadzwyczaj ważne są w zastosowaniach te przypadki, w których wartość tej całki krzywolinjowej nie zależy od drogi (a zależy tylko od punktów końcowych). Przy pomocy twierdzenia Greena-Riemanna znajdziemy warunek konieczny i dostateczny na to, aby wartość całki krzywolinjowej między stałemi punktami była *niezależna od drogi*.

Niechaj funkcje $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $\frac{\partial P}{\partial y}$ i $\frac{\partial Q}{\partial x}$ będą ciągłe w jakimś obszarze W (fig. 90).

Weźmy pod uwagę dowolne dwa punkty A, B z tego obszaru i dwie drogi ACB, AEB, łączące te punkty, a nie mające pozatem żadnych punktów wspólnych i leżące całkowicie w obszarze W. Żądamy, aby całki krzywolinjowe po tych drogach były sobie równe, t. j. aby się spełniała równość:

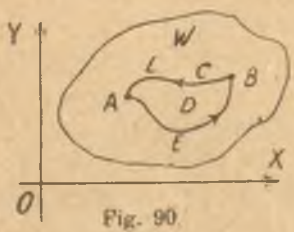


Fig. 90

$$(R) \qquad \int_{AEB} (P\,dx + Q\,dy) = \int_{ACB} (P\,dx + Q\,dy)$$

Przenosimy drugą całkę na lewą stronę i otrzymujemy:

$$\int_{AEBCA} (P\,dx + Q\,dy) = 0$$

Nazwijmy literą L linję zamkniętą $AEBCA$, ograniczającą jakiś obszar D, to całka po tej linji ma postać:

$$\int_{(L)} (P\,dx + Q\,dy) = 0$$

Na podstawie twierdzenia Greena-Riemanna jest także

$$\int\int_{(D)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = 0$$

Koniecznym i dostatecznym warunkiem na to, aby ta całka miała wartość 0 dla każdego obszaru D, zawartego w W, jest, aby zachodziła równość:

(169)
$$\boxed{\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}}$$

dla wszystkich punktów obszaru W.

Istotnie, warunek ten jest *dostateczny*. Wtedy bowiem funkcja podcałkowa jest stale zerem, a stąd wynika na podstawie twierdzenia o wartości średniej, że i całka po każdym obszarze D, zawartym w W, jest zerem.

Warunek ten jest także *konieczny*. Gdybyśmy bowiem mieli w jakimś punkcie obszaru W

$$F(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = a \neq 0, \quad \text{np} \quad a > 0$$

to wskutek ciągłości tej funkcji musiałby istnieć jakiś (niewielki chociażby) obszar D_1, otaczający ten punkt, w którym ta funkcja byłaby stale dodatnia. Wtedy zaś i całka po tym obszarze D_1 byłaby różna od zera.

I. *Warunek (169) jest więc warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby całka krzywolinjowa między dwoma dowolnemi punktami obszaru W była niezależna od drogi.*

Czyniliśmy założenie, że drogi ALB i ACB nie mają żadnych punktów wspólnych prócz końców A, B. Założenie to jest nieistotne. Gdyby bowiem te drogi miały jakieś punkty, a nawet jakieś łuki wspólne, to obierając trzecią drogę AFB, nie mającą z niemi żadnych punktów wspólnych prócz końców, mielibyśmy:

$$\int_{AFB}(P\,dx+Q\,dy)=\int_{AEB}(P\,dx+Q\,dy) \quad \text{i} \quad \int_{AFB}(P\,dx+Q\,dy)=\int_{ACB}(P\,dx+Q\,dy)$$

a stąd wynika równość (R).

Uwaga. Twierdzenie to jest prawdziwe nawet wtedy, gdy się nie uda znaleźć takiej drogi AFB.

Z warunkiem (169) spotkaliśmy się już w rachunku różniczkowym (por. tom I, str. 347), a mianowicie okazano tam, że jest to warunek *konieczny* na to, aby wyrażenie:

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$$

było różniczką zupełną. Obecnie możemy okazać, że jest to także warunek *dostateczny*, to znaczy, że jeżeli ten warunek jest spełniony, to istnieje taka funkcja $u(x, y)$, dla której P jest cząstkową pochodną $\frac{\partial u}{\partial x}$ a Q cząstkową pochodną $\frac{\partial u}{\partial y}$.

Otóż z równości:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y)$$

otrzymujemy:

$$u(x, y) = \int_{a}^{x} P(x, y)\,dx + \varphi(y)$$

gdzie a jest dowolną stałą. Różniczkujemy obie strony według y (stosując do pierwszej całki regułę Leibniza, por. str. 203, wzór (150)) i otrzymujemy:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{a}^{x} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx + \varphi'(y)$$

a to ma być równe $Q(x, y)$. Uwzględniając warunek (169), otrzymujemy zatem:

$$Q(x, y) = \int_a^x \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx + \varphi'(y) = Q(x, y) - Q(a, y) + \varphi'(y)$$

a więc:

$$\varphi'(y) = Q(a, y)$$

czyli:

$$\varphi(y) = \int_b^y Q(a, y)\, dy + C$$

gdzie b jest dowolną stałą.

A więc:

$$u(x, y) = \int_a^x P(x, y)\, dx + \int_b^y Q(a, y)\, dy + C \tag{170}$$

Otrzymaliśmy więc całą gromadę funkcyj (różniących się od siebie tylko o dowolną stałą liczbę), dla których $P\,dx + Q\,dy = du$ jest różniczką zupełną.

II. A więc *warunek (169) jest konieczny i dostateczny na to, aby wyrażenie*:

$$P\,dx + Q\,dy$$

było różniczką zupełną.

Wzór (170) pozwala odrazu scałkować każdą różniczkę zupełną, t. j. znaleźć funkcję, jeżeli podana jest jej różniczka zupełna. Przykłady całkowania różniczek zupełnych bez użycia tego wzoru ogólnego podano już w tomie I (str. 347—349, przykłady 2 i 3). Zastosujmy ogólny wzór do przerobionego tam przykładu:

$$(4y^3 - 2)\,dx + (12xy^2 - 6y)\,dy$$

Funkcja $z(x, y)$, której różniczką zupełną jest to wyrażenie, ma według wzoru (170) postać:

$$z(x, y) = \int_a^x (4y^3 - 2)\,dx + \int_b^y (12ay^2 - 6y)\,dy + C_1$$

$$= (4y^3x - 2x)\Big|_a^x + (4ay^3 - 3y^2)\Big|_b^y + C_1 =$$

$$= 4y^3x - 2x - 3y^2 + 2a - 4ab^3 + 3b^2 + C_1$$

Oznaczając wyrażenie $2a - 4ab^3 + 3b^2 + C_1$ jedną literą C, otrzymujemy:

$$z = 4y^3x - 2x - 3y^2 + C$$

zgodnie z wynikiem, otrzymanym w tomie I.

Z tego twierdzenia II i z I (o niezależności całki od drogi) wynika następujące twierdzenie.

III. *Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby całka krzywoliniowa*:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} (P\,dx + Q\,dy)$$

była niezależna od drogi całkowania, jest, aby wyrażenie pod całką było różniczką zupełną.

Przykłady, omówione w § 242 na str. 189—190, potwierdzają ten wynik.

Tak np. wartość całki krzywoliniowej:

$$\int (3y\,dx + 2x\,dy)$$

zależy od drogi, ponieważ wyrażenie, stojące pod znakiem całki, nie jest różniczką zupełną. Istotnie:

$$\frac{\partial(3y)}{\partial y} = 3 \quad \text{a} \quad \frac{\partial(2x)}{\partial x} = 2, \quad \text{a więc} \quad \frac{\partial(3y)}{\partial y} \neq \frac{\partial(2x)}{\partial x}$$

to zaś znaczy, że nie spełnia się warunek (169). Natomiast w całce:

$$\int (2xy\,dx + x^2\,dy)$$

jest:

$$\frac{\partial(2xy)}{\partial y} = 2x \quad \text{i} \quad \frac{\partial(x^2)}{\partial x} = 2x$$

a zatem wartość tej całki nie zależy od drogi.

Czyniliśmy założenie, że funkcje $P(x, y)$, $Q(x, y)$ i ich cząstkowe pochodne są ciągłe w badanym obszarze. Jeżeli te funkcje są nieciągłe chociażby w jednym punkcie, leżącym między drogami całkowania, to całki krzywoliniowe po tych drogach mogą mieć *różne* wartości, chociaż funkcja podcałkowa jest różniczką zupełną. Tak np. obliczmy całkę krzywoliniową:

$$I = \int_{(L)} \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$$

po kole o równaniu $x^2 + y^2 = 1$. Łatwo zbadać, że wyrażenie, znajdujące się pod całką, jest dla $(x, y) \neq (0, 0)$ różniczką zupełną funkcji $\operatorname{arctg} \frac{y}{x}$. Wartość tej całki otrzymamy, używając dla koła przedstawienia parametrowego: $x = \cos t$, $y = \sin t$. Wtedy:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{1}\,dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

Ta całka po linji zamkniętej ma wartość różną od zera. Obliczając ją po drodze ADC (fig. 91), t. j. po górnem półkolu, otrzymujemy:

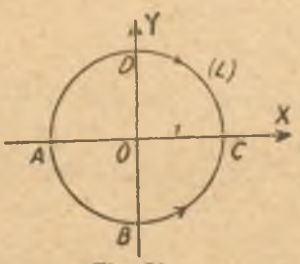


Fig. 91.

$$\int_{\pi}^{0} dt = t\Big|_{\pi}^{0} = -\pi$$

Po dolnem zaś półkolu ma ta całka wartość:

$$\int_{\pi}^{2\pi} dt = t\Big|_{\pi}^{2\pi} = +\pi$$

a zatem otrzymujemy różne wartości po tych dwóch drogach. Pochodzi to stąd, że funkcje:

$$P(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} \quad \text{i} \quad Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

są nieciągłe w punkcie $O(0, 0)$, zawartym między temi drogami całkowania.

Twierdzenia I – III mają szczególnie wielkie znaczenie w fizyce matematycznej. I tak widzieliśmy (w § 244), że praca, wykonana po dowolnej drodze przez dowolną siłę, wyraża się całką krzywolinjową. Ograniczając się narazie do jednej płaszczyzny, otrzymujemy na pracę wzór:

$$L = \int_{AB} (P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy)$$

gdzie P, Q są składowemi siły w kierunkach osi spółrzędnych. Otóż wartość tej pracy nie zależy od drogi wtedy i tylko wtedy, gdy wyrażenie pod całką jest różniczką zupełną jakiejś funkcji $u(x, y)$. Tę funkcję nazywamy *potencjałem*. Teorja potencjału jest bardzo ważnym działem fizyki.

Podobnie w termodynamice przyrost *energji* i *entropja* (por. str. 196 – 197) wyrażają się zapomocą całek krzywolinjowych z różniczek zupełnych; zatem zmiana energji i entropji nie zależą od drogi, po jakiej się odbywa proces termodynamiczny („drogą" nazywamy tu wykres, podający związek ciśnienia z objętością lub z temperaturą).

Podobne pojęcia stosuje się w hydrodynamice, aerodynamice i w nauce o elektryczności.

Omówimy tu jeszcze w krótkości zastosowanie twierdzenia Greena-Riemanna w teorji funkcyj zmiennej zespolonej. Widzieliśmy już w § 245, że całka z funkcji $f(z) = P(x, y) + i \cdot Q(x, y)$ zmiennej zespolonej $z = x + iy$ składa się z dwóch całek krzywolinjowych, branych

po jakiejś linji na płaszczyźnie zmiennej zespolonej, a mianowicie (por. wzór (149) na str. 200):

$$\int_{\widehat{ACB}}^{z_B} f(z)dz = \int_{\widehat{ACB}} (P(x,y)\,dx - Q(x,y)\,dy) + i\int_{\widehat{ACB}} (Q(x,y)\,dx + P(x,y)\,dy)$$

Załóżmy, że P, Q i ich pierwsze cząstkowe pochodne są funkcjami ciągłemi w jakimś obszarze, zawierającym drogi całkowania.

Całka ta nie zależy od drogi wtedy i tylko wtedy, gdy funkcje $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ spełniają warunki:

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial y} &= -\frac{\partial Q}{\partial x}\\ \frac{\partial Q}{\partial y} &= \frac{\partial P}{\partial x}\end{aligned}} \qquad (171)$$

wtedy bowiem całki po prawej stronie są niezależne od drogi. Te dwa warunki są równaniami różniczkowemi cząstkowemi pierwszego rzędu, zwanemi równaniami Cauchy'ego i Riemanna.

Załóżmy, że funkcje P i Q posiadają także drugie cząstkowe pochodne ciągłe. Różniczkując pierwsze z równań (171) według y, a drugie według x, otrzymujemy:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$$

a stąd:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0$$

Podobnie różniczkując pierwsze równanie według x a drugie według y, otrzymujemy:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = 0$$

Widzimy więc, że zarówno funkcja $P(x,y)$ jak i $Q(x,y)$, w razie, gdy całka z $f(z)$ nie zależy od drogi całkowania, branej z pewnego obszaru, spełniają w tym obszarze to samo równanie różniczkowe cząstkowe 2-go rzędu:

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0} \qquad (172)$$

zwane równaniem Laplace'a.

§ 258. Wprowadzenie nowych zmiennych w całkę podwójną.

Widzieliśmy w §§ 207 i 219, jak ważne usługi oddaje przy obliczaniu całek pojedyńczych całkowanie przez podstawienie, czyli wprowadzenie nowej zmiennej $x = \varphi(t)$ zapomocą wzoru:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

Uogólnimy obecnie tę metodę na całki podwójne. Chcemy mianowicie wprowadzić w całkę:

$$I = \int_{(D)}\int f(x, y)\,dx\,dy$$

nowe zmienne u, v zapomocą związków funkcyjnych:

(a) $$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v)$$

Związki takie interpretujemy geometrycznie (por. tom I § 121) jako odwzorowanie płaszczyzny (UV) na płaszczyznę (XY) (fig. 92). Będziemy brali pod uwagę tylko takie odwzorowania wzajemnie jednoznaczne, w których *obszarowi* D' na płaszczyźnie (UV) odpowiada jako jego obraz również jakiś *obszar* D na płaszczyźnie (XY) i to tak, że brzegowi L' odpowiada brzeg L, przebiegany w tym samym kierunku, co L'. Zbadajmy najpierw, na co zmieni się prostsza całka, a mianowicie:

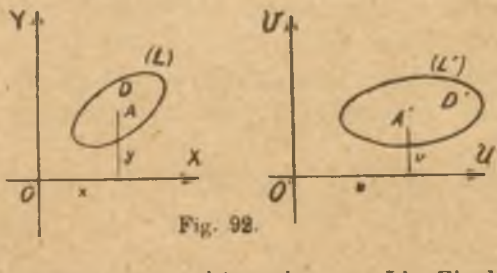


Fig. 92.

(b) $$D = \int_{(D)}\int dx\,dy$$

gdy wprowadzimy za x, y nowe zmienne zapomocą wzorów (a). Całka ta, ak wiadomo (por. wzór (161) str. 228), przedstawia pole obszaru D. Wynik uzyskamy najszybciej, przechodząc przez twierdzenie Greena-Riemanna. I tak, chcąc zastosować do tej całki podwójnej to twierdzenie w postaci wzoru (166), kładziemy $P = y$, a więc $\frac{\partial P}{\partial y} = 1$ i otrzymujemy:

$$D = \int_{(D)}\int 1 \cdot dx\,dy = -\int_{(L)} y\,dx$$

Wprowadźmy nowe zmienne w tę całkę krzywolinjową. Gdy punkt o spółrzędnych (x, y) przebiega na płaszczyźnie (XY) linję (L) o równaniu

$f(x, y) = 0$, to punkt (u, v) przebiega na płaszczyźnie (UV) linję (L') o równaniu $f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) = 0$, a więc zmienne u i v są w tej całce krzywolinjowej w ten sposób od siebie zależne. Otrzymamy więc:

$$D = -\int_{(L)} y\,dx = -\int_{(L')} \psi(u, v)\,d(\varphi(u, v)) = -\int_{(L')} \psi(u, v)\left[\frac{\partial \varphi}{\partial u}\,du + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\,dv\right]$$

czyli:

$$D = -\int_{(L')} \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial u}\,du + \psi \frac{\partial \varphi}{\partial v}\,dv\right)$$

Zastosujmy do tej całki krzywolinjowej znowu twierdzenie Greena-Riemanna (wzór 168), kładąc:

$$\psi \frac{\partial \varphi}{\partial u} = P(u, v), \qquad \psi \frac{\partial \varphi}{\partial v} = Q(u, v)$$

a zatem:

$$D = -\int_{(D')}\int \left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)\right) du\,dv$$

Ale:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial v}\right) = \frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \psi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v\,\partial u}$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) = \frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \psi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\,\partial v}$$

A więc:

$$D = \int_{(D')}\int \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial u}\right) du\,dv$$

Funkcja podcałkowa jest tu jakobjanem (por. tom I, str. 362) funkcyj $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ według zmiennych u, v. Oznaczając ten jakobjan krótko symbolem

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$$

otrzymujemy:

(c) $$D = \int_{(D')}\int \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\,du\,dv$$

Zakładaliśmy, że przy odwzorowaniu brzeg L obszaru D był obiegany w tym samym kierunku, co brzeg L' obszaru D'. Gdyby ten obieg był przeciwny, to całki krzywolinjowe po linji L', występujące w powyższym dowodzie, miałyby znaki przeciwne tak, że ostatecznie otrzymalibyśmy wzór:

(d) $$D = \int_{(D')}\int -\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\,du\,dv$$

Jeżeli uczynimy obecnie jeszcze dodatkowe założenie, że jakobjan nie zmienia znaku w obszarze całkowania, to we wzorze (c) musi on być nieujemny (albowiem wartość całej całki musi być dodatnia, ponieważ jest równa dodatniej liczbie D), a we wzorze (d) niedodatni. Wobec tego we wzorze (c) możemy położyć $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ a we wzorze (d) $-\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$
Otrzymujemy zatem dla obydwu przypadków wspólny wzór:

$$D = \iint_{(D')} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv \tag{173}$$

Uwaga. Założenie, że jakobjan nie zmienia znaku w obszarze D', jest w ścisłym związku z wzajemną jednoznacznością odwzorowania. Można mianowicie wykazać, że gdy jakobjan zmienia znak, to istnieją takie punkty w obszarze D na płaszczyźnie (XY), którym odpowiadają dwa różne punkty w obszarze D'. (Dowód znaleźć można w podręczniku E. Goursat'a p. t. *Cours d'Analyse mathématique*, r. 1902, tom I. str. 299).

Otrzymaliśmy w ten sposób wzór na pole obszaru D, leżącego na płaszczyźnie (XY), wyrażony zapomocą spółrzędnych u, v.

Z wzorów (b) i (173) wynika wzór:

$$\iint_{(D)} dx\,dy = \iint_{(D')} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv \tag{173a}$$

W ten sposób wprowadza się nowe zmienne w całkę podwójną z bardzo prostej funkcji: $f(x,y) = 1$. Opierając się na tym wzorze, wyprowadzimy już z łatwością ogólny wzór, dla dowolnej funkcji podcałkowej $f(x,y)$.

Przedtem jednak zwrócimy jeszcze uwagę na to, jakie znaczenie ma jakobjan dla odwzorowania, określonego równaniami:

$$x = \varphi(u,v) \qquad y = \psi(u,v)$$

Zastosujmy do całki, występującej we wzorze (173), twierdzenie o wartości średniej (wzór 163a na str. 229), to:

$$D = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{\substack{u=\xi\\v=\eta}} \cdot D' \tag{174}$$

a stąd:

$$\frac{D}{D'} = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{\substack{u=\xi\\v=\eta}}$$

Weźmy pod uwagę jakiś stały punkt $u = u_0$, $v = v_0$ obszaru D'.

Gdy średnica δ obszaru D' dąży do zera, to także średnica obszaru D dąży do zera, a granicą ilorazu pól tych obszarów jest:

(175) $$\lim_{\delta \to 0} \frac{D}{D'} = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|_{\substack{u=u_0 \\ v=v_0}}$$

t. j. bezwzględna wartość jakobjanu w punkcie $u = u_0$, $v = v_0$. Granicę stosunku obrazu D obszaru D' do samego obszaru D' nazywamy *stosunkiem zniekształcenia powierzchni* przy odwzorowaniu

Widzimy stąd, że *bezwzględna wartość jakobjanu w każdym punkcie jest równa stosunkowi zniekształcenia powierzchni przy odwzorowaniu.* Stosunek ten gra bardzo ważną rolę w geodezji i w kartografji matematycznej. Odwzorowania, w których jakobjan ma stale wartość 1, nazywamy *wiernopowierzchniowemi.*

Takiemi odwzorowaniami wiernopowierzchniowemi są oczywiście obroty i przesunięcia. Tak np. obrót osi spółrzędnych o stały kąt α jest określony równaniami:

$$x = u \cos \alpha - v \sin \alpha$$
$$y = u \sin \alpha + v \cos \alpha$$

Ponieważ $x_u = \cos \alpha$, $x_v = -\sin \alpha$, $y_u = \sin \alpha$, $y_v = \cos \alpha$, przeto *jakobjan* tego przekształcenia ma wartość:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \cos^2 \alpha - (-\sin^2 \alpha) = 1$$

Podobnie dla przesunięcia osi, określonego wzorami:

$$x = u + a$$
$$y = v + b$$

otrzymuje się:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Istnieje jednak także bardzo wiele innych odwzorowań wiernopowierzchniowych, nieraz bardzo skomplikowanej postaci.

Przejdźmy do wprowadzenia nowych zmiennych w ogólną całkę podwójną:

$$\int_{(D)} \int f(x, y)\, dx\, dy$$

Obszar D' na płaszczyźnie (UV) dzielimy na dowolne elementy σ_i.

Niechaj im odpowiadają w obszarze D na płaszczyźnie (XY) elementy ω_i. Na podstawie wzoru (174) jest:

$$\omega_i = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|_{\substack{\sigma_i \\ u=u_i \\ v=v_i}}$$

gdzie u_i, v_i oznaczają spółrzędne odpowiednio dobranego punktu z obszaru σ_i.

Niechaj $f(x,y) = f(x(u,v), y(u,v)) = F(u,v)$. Tworzymy sumy postaci:

$$\sum f(x_i, y_i)\,\omega_i = \sum F(u_i, v_i) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{\substack{u=u_i\\ v=v_i}} \sigma_i$$

Ciąg takich sum, gdy średnice wszystkich elementów ω_i, σ_i dążą do zera, ma jako granicę odpowiednią całkę podwójną (por. str. 230). Przechodząc więc do granicy, otrzymujemy:

$$(176)\qquad \boxed{\int\limits_{(D)}\int f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{D'}\int f(x(u,v), y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv}$$

Jest to **wzór na wprowadzenie nowych zmiennych w całkę podwójną**: trzeba wprowadzić te zmienne zapomocą wzorów $x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$ w funkcję podcałkową, pomnożyć ją przez bezwzględną wartość jakobjanu i zmienić obszar całkowania. Widzimy tu wyraźną analogję z odpowiednim wzorem dla całek pojedynczych.

Przykłady.

1) Obliczyć pole wycinka pierścienia kołowego (fig. 93) przy pomocy całki podwójnej.

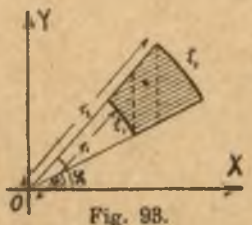


Fig. 93.

Użycie wzoru:

$$D = \int\limits_{(D)}\int dx\,dy$$

byłoby tu bardzo niedogodne, ponieważ trzebaby rozkładać obszar całkowania na 3 części (linjami kreskowanemi na figurze). Natomiast przy użyciu spółrzędnych biegunowych rachunek przedstawi się bardzo prosto, albowiem obszarem całkowania będzie na płaszczyźnie (R, Φ) prostokąt, określony nierównościami:

$$r_1 < r < r_2, \quad \varphi_1 < \varphi < \varphi_2$$

Do użycia wzoru (173) potrzebny jest jakobjan. Otóż:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

zatem $x_r = \cos\varphi$, $y_r = \sin\varphi$, $x_\varphi = -r\sin\varphi$, $y_\varphi = r\cos\varphi$, a więc:

$$I = \begin{vmatrix} \cos\varphi, & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi, & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r$$

Widzimy więc, że *jakobjan przekształcenia spółrzędnych prostokątnych na biegunowe jest równy promieniowi r.*

Wobec tego wzór (173) przyjmuje postać:

$$D = \int\limits_{(D')} \int r\,dr\,d\varphi = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int\limits_{r_1}^{r_2} r\,dr\,d\varphi = \frac{1}{2} \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 \Big|_{r_1}^{r_2} d\varphi = \frac{1}{2}(r_2^2 - r_1^2)(\varphi_2 - \varphi_1)$$

Oznaczmy $\varphi_2 - \varphi_1 = \alpha$, szerokość pierścienia $r_2 - r_1 = s$, a długości łuków, ograniczających ten pierścień, $l_2 = r_2\alpha$, $l_1 = r_1\alpha$. Zatem wzór na pole wycinka pierścienia kołowego przyjmuje postać:

$$D = \frac{1}{2}(r_2 + r_1)(r_2 - r_1)\,\alpha = \frac{1}{2}(l_1 + l_2)s$$

znaną z matematyki elementarnej.

2) Obliczyć powierzchnię 4 okien Viviani'ego (por. str. 240) i objętość, pozostającą z kuli po wydrążeniu dwóch walców, wycinających te okna (fig. 87 str. 240). Otrzymaliśmy przy użyciu spółrzędnych prostokątnych wzór:

$$P = 8a \int\limits_{(D)} \int \frac{dx\,dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

Wprowadźmy spółrzędne biegunowe, to $x^2 + y^2 = r^2$, a za $dx\,dy$ trzeba wprowadzić $r\,dr\,d\varphi$, jak to widzieliśmy w poprzednim przykładzie. Wobec tego:

$$P = 8a \int\limits_{(D')} \int \frac{r\,dr\,d\varphi}{\sqrt{a^2 - r^2}}$$

Jeżeli ustalimy φ, to r zmienia się od $r = 0$ do OA (na fig. 87), t. j. do $r = a \cdot \cos\varphi$. Kąt zaś φ zmienia się w stałych granicach od $\varphi = 0$ do $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Wobec tego:

$$P = 8a \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{a\cos\varphi} \frac{r\,dr}{\sqrt{a^2 - r^2}}\,d\varphi = 8a \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} -\sqrt{a^2 - r^2}\Big|_0^{a\cos\varphi} d\varphi$$

$$P = 8a \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (-a\sin\varphi + a)\,d\varphi = 8a^2(\cos\varphi + \varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{8a^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)}$$

Interesującem jest, że wzór na pole powierzchni, pozostającej z kuli po wycięciu tych 4 okien, nie zawiera liczby π, albowiem:

$$4a^2\pi - P = 4a^2\pi - 4a^2\pi + 8a^2 = 8a^2$$

Objętość v ćwiartki jednego walca, przedstawionego na fig. 87, oblicza się wzorem (164) z § 253 przy użyciu spółrzędnych prostokątnych. W naszym przypadku otrzymujemy:

$$v = \int\limits_{(D)} \int \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,dy\,dx$$

ponieważ równanie górnej półkuli ma postać $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.

Przy użyciu spółrzędnych biegunowych otrzymujemy:

$$v = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a\cos\varphi} \sqrt{a^2 - r^2}\, r\, dr\, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}}{-2 \cdot \frac{3}{2}} \Bigg|_0^{a\cos\varphi} d\varphi = -\frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^3 \sin^3\varphi - a^3)\, d\varphi$$

Całkę z $\sin^3\varphi$ obliczamy, jak wiadomo (str. 56), podstawiając $\cos\varphi = t$ i otrzymujemy:

$$v = -\frac{a^3}{3}\left(\tfrac{1}{3}\cos^3\varphi - \cos\varphi + \varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^3}{3}\left(-\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{2}\pi\right)$$

Wobec tego szukana objętość ma wartość:

$$V = \tfrac{4}{3}a^3\pi - 8v = \frac{4a^3\pi}{3} - \frac{8a^3}{3}\left(-\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{2}\pi\right) = \tfrac{16}{9}a^3$$

3) Wyprowadzić wzór na komplanację powierzchni, mając podane jej przedstawienie parametrowe (por. tom I, str. 378—380):

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v)$$

Gdybyśmy wyrazili z dwóch początkowych równań u i v jako funkcje zmiennych x i y i wstawili te wyrażenia w trzecie równanie, to otrzymalibyśmy z wyrażone w zależności od zmiennych x i y. Możemy jednak bezpośrednio przekształcić wzór (165) na komplanację na nowe zmienne u, v, wprowadzając za x funkcję $\varphi(u, v)$, a za y funkcję $\psi(u, v)$.

Pochodne cząstkowe p i q, potrzebne do tego wzoru, obliczono już w tomie I, na str. 380, a mianowicie:

$$p = z_x = \begin{vmatrix} z_u & y_u \\ z_v & y_v \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}, \quad q = z_y = \begin{vmatrix} x_u & z_u \\ x_v & z_v \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}$$

Są to ilorazy jakobjanów:

$$J_1 = \frac{\partial(z, y)}{\partial(u, v)}, \quad J_2 = \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)}, \quad J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$$

Te pochodne p, q wprowadzamy pod pierwiastek, a ponadto mnożymy funkcję podcałkową przez jakobjan J. Otrzymujemy zatem:

$$P = \int_{(D')} \int \sqrt{1 + \left(\frac{J_1}{J}\right)^2 + \left(\frac{J_2}{J}\right)^2}\, |J|\, du\, dv$$

(przy założeniu, że jakobjan J nie zmienia znaku w obszarze całkowania). Stąd wynika:

$$P = \int_{(D')} \int \sqrt{J^2 + J_1^2 + J_2^2}\, du\, dv$$

czyli:

$$P = \int_{(D')} \int \sqrt{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_u & y_u \\ z_v & y_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_u & z_u \\ x_v & z_v \end{vmatrix}^2} \, du \, dv \tag{177}$$

Wprowadźmy następujące skrócone oznaczenia, używane często w teorji powierzchni:

$$\begin{cases} E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 \\ F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v \\ G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 \end{cases} \tag{178}$$

Po zastosowaniu do sumy kwadratów, znajdujących się pod pierwiastkiem we wzorze (177), identyczności Lagrange'a (por. tom I, str. 481), otrzymamy następującą skróconą formę wzoru (177):

$$P = \int_{(D')} \int \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv \tag{179}$$

Tak np. mając podane równanie powierzchni w postaci:

$$z = F(r, \varphi)$$

gdzie r, φ są spółrzędnemi biegunowemi na płaszczyźnie (XY), związanemi z x, y zapomocą wzorów $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, możemy otrzymać z wzoru (177) wzór, wynikający z niego przez wprowadzenie spółrzędnych biegunowych. I tak wiemy już, że jakobjan:

$$J = \begin{vmatrix} x_r & y \\ x_\varphi & y_\varphi \end{vmatrix} = r$$

Jakobjany J_1 i J_2 mają postać:

$$J_1 = \begin{vmatrix} z_r & y_r \\ z_\varphi & y_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_r & \sin\varphi \\ z_\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\cos\varphi\, z_r - \sin\varphi\, z_\varphi$$

$$J_2 = \begin{vmatrix} x_r & z_r \\ x_\varphi & z_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & z_r \\ -r\sin\varphi & z_\varphi \end{vmatrix} = \cos\varphi\, z_\varphi + r\sin\varphi\, z_r$$

Stąd:

$$J_1^2 + J_2^2 = r^2 z_r^2 + z_\varphi^2$$

a zatem wzór na komplanację przyjmuje postać:

$$P = \int_{(D')} \int \sqrt{r^2 + r^2\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} \, dr \, d\varphi \tag{180}$$

4) Dana jest powierzchnia śrubowa o równaniu:

$$\operatorname{tg}\frac{2\pi z}{k}=\frac{y}{x}$$

(por. tom I, str. 64). Obliczyć pole tej części powierzchni śrubowej, którą wycina z niej walec o równaniu:

$$x^2+y^2=a^2$$

a którą zakreśla prosta (oś x-ów) przez obrót o kąt α od położenia początkowego.

Używając spółrzędnych biegunowych, otrzymujemy:

$$\operatorname{tg}\frac{2\pi z}{k}=\frac{r\sin\varphi}{r\cos\varphi}=\operatorname{tg}\varphi$$

a stąd:

$$\frac{2\pi z}{k}=\varphi+n\pi$$

czyli:

$$z=\frac{k}{2\pi}\varphi+c$$

Używając wzoru (180), otrzymujemy:

$$P=\int\limits_{(D')}\int\sqrt{r^2+\left(\frac{k}{2\pi}\right)^2}\,dr\,d\varphi$$

Obszar całkowania wyznaczamy z następujących warunków: φ zmienia się od 0 do α a r zmienia się od 0 do a, a więc granice całkowania są stałe. Zatem:

$$P=\int\limits_0^a\int\limits_0^\alpha\sqrt{r^2+\left(\frac{k}{2\pi}\right)^2}\,d\varphi\,dr=\alpha\int\limits_0^a\sqrt{r^2+\left(\frac{k}{2\pi}\right)^2}\,dr$$

Stosując do tej całki wzór (35) ze str. 48, otrzymujemy ostatecznie:

$$P=\frac{\alpha}{2}\left[a\sqrt{a^2+\left(\frac{k}{2\pi}\right)^2}+\left(\frac{k}{2\pi}\right)^2\log\frac{2\pi}{k}\left(a+\sqrt{a^2+\left(\frac{k}{2\pi}\right)^2}\right)\right]$$

5) Obliczyć pole powierzchni, wyciętej przez walec o równaniu $x^2+y^2=a^2$ z paraboloidy hiperbolicznej o równaniu:

$$x^2-y^2=2mz$$

(por. tom I, str. 44—45).

Wprowadzamy spółrzędne biegunowe w równanie powierzchni i otrzymujemy:

$$z=\frac{r^2\cos^2\varphi-r^2\sin^2\varphi}{2m}=\frac{r^2\cos 2\varphi}{2m}$$

Stąd:

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{r\cos 2\varphi}{m}, \quad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = -\frac{r^2 \sin 2\varphi}{m}$$

Według wzoru (180) jest:

$$P = \iint_{(D')} \sqrt{r^2 + r^2 \frac{r^2\cos^2 2\varphi}{m^2} + \frac{r^4 \sin^2 2\varphi}{m^2}}\, dr\, d\varphi =$$

$$= \iint_{(D')} \sqrt{r^2 + \frac{r^4}{m^2}}\, dr\, d\varphi$$

więc:

$$P = \int_{(D')}\int \sqrt{1 + \frac{r^2}{m^2}}\, r\, dr\, d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{r}{m}\sqrt{m^2 + r^2}\, dr\, d\varphi$$

Podstawiając $r^2 = t$, otrzymujemy z łatwością:

$$\int_0^a \frac{r}{m}\sqrt{m^2 + r^2}\, dr = \frac{(m^2 + r^2)^{3/2}}{3m}\Big|_0^a = \frac{(m^2 + a^2)^{3/2} - m^3}{3m}$$

Wobec tego:

$$P = \int_0^{2\pi} \frac{(m^2 + a^2)^{3/2} - m^3}{3m}\, d\varphi = \frac{2\pi}{3m}\left[(m^2 + a^2)^{3/2} - m^3\right]$$

6) Obliczyć pole trójkąta sferycznego prostokątnego, znając jego boki i kąty, np. pole trójkąta ABC na fig. 94. Równanie kuli o promieniu R ma postać:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

Po wprowadzeniu współrzędnych biegunowych na płaszczyźnie (XY), otrzymamy dla górnej półkuli:

$$z = \sqrt{R^2 - r^2}$$

a stąd

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{-r}{\sqrt{R^2 - r^2}}$$

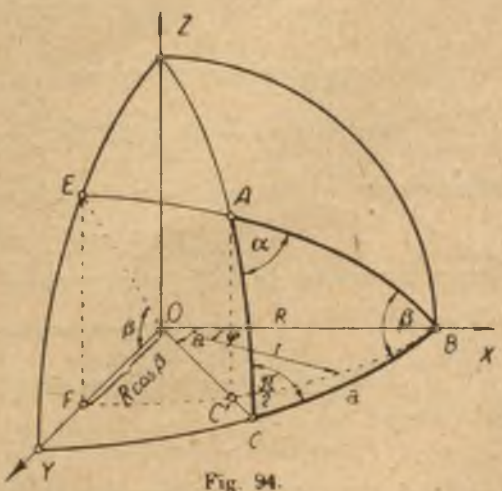


Fig. 94.

A więc:

$$P = \iint_{(D')} \sqrt{r^2 + \frac{r^2}{R^2 - r^2}}\, dr\, d\varphi = \iint_{(D')} \frac{Rr}{\sqrt{R^2 - r^2}}\, dr\, d\varphi$$

Obszarem całkowania jest krzywoliniowy trójkąt BCC' na płaszczyźnie (XY) (fig. 94 i 95), przyczem BC jest łukiem koła, a BC' łukiem elipsy, powsta-

jącej przez rzut koła wielkiego BE na płaszczyznę (XY). Połówkami osi tej elipsy są $OB = R$ i $OF = R\cos\beta$, albowiem β jest kątem nachylenia płaszczyzny BEO do płaszczyzny (XY). Równanie tej elipsy ma postać:

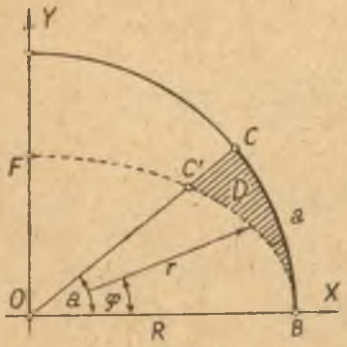


Fig. 95.

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2\cos^2\beta} = 1$$

Wprowadzając tu $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, otrzymamy:

$$(I) \qquad r = \frac{R\cos\beta}{\sqrt{1 - \sin^2\beta\cos^2\varphi}} = f(\varphi)$$

Według zmiennej r trzeba całkować od łuku elipsy do łuku koła, zatem od r podanego wzorem (I) do $r = R$, a dla φ granice są stałe, od $\varphi = 0$ do $\varphi = a$. A więc:

$$P = \int_0^a \int_{f(\varphi)}^{R} \frac{Rr}{\sqrt{R^2 - r^2}}\, dr\, d\varphi$$

Całkowanie według r (przy użyciu podstawienia $r^2 = t$) daje $-R\sqrt{R^2 - r^2}$ a po podstawieniu granic otrzymamy:

$$P = \int_0^a R^2 \frac{\sin\beta\sin\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\beta\cos^2\varphi}}\, d\varphi$$

Używając tu podstawienia $\sin\beta\cos\varphi = z$, otrzymamy:

$$P = -R^2 \arcsin z \Big|_{\cos\beta}^{\sin\beta\cos a} = -R^2 \arcsin(\sin\beta\cos\varphi)\Big|_0^a = R^2[\beta - \arcsin(\sin\beta\cos a)]$$

Bardzo prosto wyraża się ten wzór przy pomocy kąta α. I tak z wzoru:

$$\cos\alpha = \sin\beta\cos a$$

znanego z rozwiązania trójkąta sferycznego prostokątnego, otrzymujemy:

$$\sin(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha) = \sin\beta\cos a$$

a więc:

$$\arcsin(\sin\beta\cos a) = \arcsin(\sin(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha)) = \tfrac{1}{2}\pi - \alpha$$

Wobec tego:

$$P = R^2(\beta - \tfrac{1}{2}\pi + \alpha) = R^2(\alpha + \beta + \tfrac{1}{2}\pi - \pi)$$

Wyrażenie, zawarte w nawiasie, jest nadwyżką sumy kątów trójkąta sferycznego nad kąt półpełny i nazywa się *ekscesem sferycznym* ε. A więc:

$$P = R^2\varepsilon$$

Doszliśmy w ten sposób do wzoru, który się wyprowadza w trygonometrji sferycznej wprost z rozważań geometrycznych i trygonometrycznych.

§ 259. Całki podwójne niewłaściwe.

Dotychczas zajmowaliśmy się tylko takiemi całkami podwójnemi, w których funkcja podcałkowa była ograniczona, a obszar całkowania skończony. Rozszerzymy pojęcie całki także na przypadki, w których funkcja podcałkowa jest nieograniczona w otoczeniu pewnego punktu lub w otoczeniu pewnej linji i na takie przypadki, w których obszar całkowania rozciąga się do nieskończoności.

Omówmy najpierw pierwszy przypadek. Weźmy pod uwagę np. całkę:

$$\iint_{(D)} \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

po kole, określonem nierównością $x^2+y^2 \leqq 1$. Funkcja podcałkowa jest ciągła w całym obszarze całkowania z wyjątkiem *punktu* $O(0,0)$. Gdy się zbliżamy do tego punktu, funkcja $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ wzrasta nieograniczenie. W całce:

$$\iint_{(D)} \frac{dx\,dy}{x-y}$$

branej po tem samem kole, występuje w funkcji podcałkowej *linja* nieciągłości, a mianowicie prosta $y=x$.

Chcąc określić całkę podwójną w takich przypadkach, zamykamy te punkty i linje, w których występuje nieciągłość, w niewielkie obszary, leżące całkowicie w obszarze całkowania. Tworzymy dowolny ciąg D_n takich wyłączonych obszarów, których pola zdążają do zera. Całka podwójna istnieje dla każdego obszaru, otrzymanego z D przez wyłączenie D_n; oznaczmy taki pozostały obszar symbolem $D-D_n$. Jeżeli istnieje granica:

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{(D-D_n)} f(x,y)\,dx\,dy$$

wspólna dla dowolnego ciągu obszarów wyłączonych o polach, dążących do zera, to tę granicę nazywamy **niewłaściwą całką podwójną** z funkcji nieograniczonej $f(x,y)$ po obszarze D i oznaczamy ją tym samym symbolem, co całkę właściwą, a mianowicie:

$$\iint_{(D)} f(x,y)\,dx\,dy$$

Przykład. Obliczyć całkę niewłaściwą:

$$I = \iint_{(D)} \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

po kole $x^2 + y^2 \leqq 1$. Wyłączamy z tego koła kółko spółśrodkowe o promieniu $\delta < 1$. Obliczamy całkę właściwą po pozostałym pierścieniu kołowym, a następnie obliczamy jej granicę, gdy δ dąży do zera. Najdogodniej jest w tym celu wprowadzić spółrzędne biegunowe. Otrzymamy:

$$I = \lim_{\delta \to 0} \int_0^{2\pi} \int_0^{1} \frac{r\,dr\,d\varphi}{\sqrt{r^3}} = \lim_{\delta \to 0} \int_0^{2\pi} (1 - \delta)\,d\varphi = \lim_{\delta \to 0} 2\pi(1 - \delta) = 2\pi$$

Uwaga. Można też było obrać ciąg D_n kół o promieniach, dążących do zera, np. równych $\frac{1}{n}$ i badać granicę całek po obszarach $D - D_n$, gdy $n \to \infty$.

Przejdźmy do drugiego przypadku, a mianowicie do całek podwójnych po nieskończonych obszarach. Przykładami takich nieskończonych obszarów są: cała płaszczyzna, ćwiartka płaszczyzny, część płaszczyzny, zawarta między dodatniemi częściami osi spółrzędnych a dodatnią gałęzią hiperboli równobocznej o równaniu $xy = a^2$, część płaszczyzny, ograniczona z jednej strony parabolą i t. p. Chcąc określić całkę podwójną po takim nieskończonym obszarze D, tworzymy ciąg D_n skończonych obszarów, zawartych w D i *dążących* do D (mamy przez to na myśli, że biorąc dowolnie wielki stały obszar R, możemy dobrać tak wielkie n, że te części obszarów D i D_n, które leżą w R, będą się różnić od siebie dowolnie mało).

Dla każdego skończonego obszaru D_n istnieje całka właściwa:

$$\iint_{(D_n)} f(x, y)\,dx\,dy$$

Jeżeli istnieje granica:

$$\lim_{n \to \infty} \iint_{(D_n)} f(x, y)\,dx\,dy$$

niezależna od tego, jaki ciąg obszarów D_n, dążących do D, obierzemy, to tę granicę nazywamy **niewłaściwą całką podwójną** po nieskończonym obszarze D i oznaczamy ją tym samym symbolem, co całkę właściwą, a mianowicie:

$$\iint_{(D)} f(x, y)\,dx\,dy$$

Dowodzi się, że do całek podwójnych niewłaściwych można stosować szereg twierdzeń, któreśmy poznali przy badaniu całek właściwych (np twierdzenie o wprowadzeniu nowych zmiennych).

Przykłady.

1) Obliczyć całkę

$$I = \iint_{(D)} \frac{1}{x^2(1+y^2)}\, dx\, dy$$

po nieskończonym obszarze D, zawartym między dodatnią gałęzią hyperboli równobocznej o równaniu $y = \frac{1}{x}$, między osią X i prostą $x = 1$ (fig. 96).

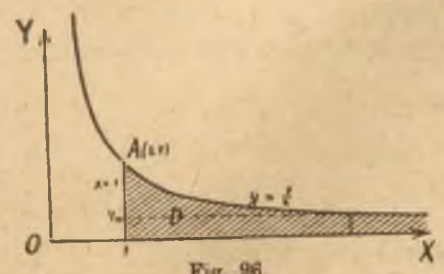


Fig. 96.

Aproksymujmy obszar D zapomocą ciągu obszarów D_n, ograniczonych u dołu nie osią X, lecz prostemi równoległemi do niej w odstępach $\frac{1}{n}$ $\left(\text{o równaniach } y = \frac{1}{n}\right)$.

$$I = \lim_{n\to\infty} \iint_{(D_n)} \frac{dx\,dy}{x^2(1+y^2)} = \lim_{n\to\infty} \int_{y=\frac{1}{n}}^{1} \int_{x=1}^{x=\frac{1}{y}} \frac{dx\,dy}{x^2(1+y^2)} = \lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{1} -\frac{1}{x(1+y^2)} \Bigg|_{1}^{\frac{1}{y}} dy$$

$$I = \lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{1}{1+y^2}(-y+1)\,dy = \lim_{n\to\infty} \left[-\tfrac{1}{2}\log(1+y^2) + \operatorname{arc\,tg} y\right]\Bigg|_{\frac{1}{n}}^{1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[-\tfrac{1}{2}\log 2 + \tfrac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right) + \operatorname{arc\,tg} 1 - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{n}\right]$$

$$I = -\tfrac{1}{2}\log 2 + \tfrac{\pi}{4}$$

Łatwo stwierdzić, że tę samą wartość otrzymamy, aproksymując obszar D zapomocą obszarów D'_n, ograniczonych hyperbolą, osią X, prostą $x = 1$ i prostemi $x = n > 1$. Wtedy trzeba najpierw wykonać całkowanie według y od $y = 0$ do $y = \frac{1}{x}$ a następnie według x od $x = 1$ do $x = n$. Można też stwierdzić, że tę samą granicę otrzymamy dla dowolnych ciągów D_n obszarów, dążących do D.

2) Całkę pojedyńczą niewłaściwą (Laplace'a):

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx$$

obliczyliśmy już w § 224 (przykład 9) w dość skomplikowany sposób, Przy pomocy niewłaściwej całki *podwójnej* rachunki przedstawiają się nader prosto.

I tak weźmy pod uwagę całkę:

$$A = \int\limits_{(D)}\int e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

przyczem obszarem całkowania D niechaj będzie cała pierwsza ćwiartka płaszczyzny. Aproksymujmy obszar D zapomocą ćwiartek kół D' o promieniach R a o środku w początku układu.

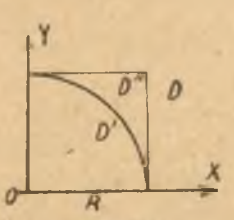


Fig. 97

Wprowadzając spółrzędne biegunowe, otrzymujemy:

$$\int\limits_{(D')}\int e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^R e^{-r^2}\,r\,dr\,d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} -\tfrac{1}{2}\,e^{-r^2}\Big|_0^R d\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \tfrac{1}{2}(1-e^{-R^2})\,d\varphi = \tfrac{\pi}{4}(1-e^{-R^2})$$

Gdy R dąży do ∞, to wartość tej całki właściwej dąży do $\frac{\pi}{4}$.

Zatem całka niewłaściwa A ma wartość:

$$A = \int\limits_{(D)}\int e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \tfrac{\pi}{4}$$

Można okazać, że ta graniczna wartość nie zależy od tego, jakiemi obszarami aproksymujemy D. Chcąc przejść od tej całki do całki pojedyńczej, obliczmy całkę podwójną po obszarze D'', który jest kwadratem o boku R. Otóż:

$$\int\limits_{(D'')}\int e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int\limits_0^R\int\limits_0^R e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int\limits_0^R\left(e^{-y^2}\cdot\int\limits_0^R e^{-x^2}\,dx\right)dy =$$

$$= \int\limits_0^R e^{-x^2}\,dx\cdot\int\limits_0^R e^{-y^2}\,dy = \left(\int\limits_0^R e^{-x^2}\,dx\right)^2$$

Ponieważ obszar D' zawiera się w D'', a D'' w D, funkcja zaś podcałkowa jest dodatnia, przeto:

$$\tfrac{\pi}{4}(1-e^{-R^2}) < \left(\int\limits_0^R e^{-x^2}\,dx\right)^2 < \tfrac{\pi}{4}$$

a stąd:

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\sqrt{1-e^{-R^2}} < \int\limits_0^R e^{-x^2}\,dx < \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

Gdy R dąży do ∞, to pierwsze i ostatnie wyrażenie dążą do tej samej liczby $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. Zatem i całka, zawarta między niemi, dąży do tej samej granicy, a to znaczy, że:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

zgodnie z wynikiem, otrzymanym w § 224.

3) Całką Eulera *drugiego rodzaju* nazwaliśmy (por. § 224, str. 111) funkcję:

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-z} z^{p-1}\,dz$$

przyczem $p > 0$.

Zapomocą podstawienia $z = x^2$ przekształcamy tę całkę na:

$$\Gamma(p) = 2\int_0^\infty e^{-x^2} x^{2p-1}\,dx$$

Zbadajmy iloczyn dwóch takich całek, a mianowicie:

$$\Gamma(p)\cdot\Gamma(q) = 2\int_0^\infty e^{-x^2} x^{2p-1}\,dx \cdot 2\int_0^\infty e^{-y^2} y^{2q-1}\,dy$$

Iloczyn ten można przedstawić w postaci jednej całki podwójnej niewłaściwej:

$$\Gamma(p)\cdot\Gamma(q) = 4\int_{(D)}\int e^{-x^2-y^2} x^{2p-1} y^{2q-1}\,dx\,dy$$

przyczem obszarem całkowania D jest cała pierwsza ćwiartka płaszczyzny. Obszar ten możemy aproksymować — podobnie jak przy badaniu całki Laplace'a — zapomocą ćwiartek kół o środku w początku układu a o promieniach wzrastających nieograniczenie.

Wprowadzając współrzędne biegunowe, otrzymamy zatem:

$$\Gamma(p)\cdot\Gamma(q) = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty e^{-r^2} r^{2p-1+2q-1} \cos^{2p-1}\varphi \sin^{2q-1}\varphi\, r\,dr\,d\varphi =$$

$$= 2\int_0^\infty r^{2p+2q-1} e^{-r^2}\,dr \cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-}\ \varphi \sin^{2q-1}\varphi\,d\varphi$$

Pierwsza całka jest znowu funkcją Γ dla argumentu $p+q$, drugą zaś nazywamy całką Eulera *pierwszego rodzaju*, lub funkcją B (czytaj „beta") zmiennych p i q. A więc:

$$\Gamma(p)\cdot\Gamma(q) = \Gamma(p+q)\cdot B(p,q)$$

Stąd wynika, że całka Eulera pierwszego rodzaju wyraża się w następujący sposób zapomocą całek drugiego rodzaju:

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \tag{181}$$

przyczem:

$$B(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}\varphi\sin^{2q-1}\varphi d\varphi \tag{182}$$

Uwaga. Przez wprowadzenie nowej zmiennej t zapomocą podstawienia $\cos^2\varphi=t$, można tę całkę pierwszego rodzaju sprowadzić do następującej postaci

$$B(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt \tag{182a}$$

tj. do całki oznaczonej dwumiennej (por. uwagę na str. 46). Całki Eulera znalazły liczne zastosowania w rachunku prawdopodobieństwa i przy obliczaniu rozmaitych skomplikowanych całek oznaczonych.

§ 260. Przybliżone metody obliczania całek podwójnych.

W praktyce zachodzi nieraz potrzeba obliczania całek podwójnych z funkcyj bardzo skomplikowanych (np. przy obliczaniu pojemności okrętów przy obliczaniu z planu warstwicowego objętości, wznoszącej się nad jakimś poziomem). Wystarcza przytem zwykle obliczyć *przybliżoną* wartość całki.

Najprostszą nasuwającą się tu myślą jest użycie jako przybliżonych wartości całki tych sum, których używaliśmy przy sumowej definicji całki podwójnej. Mając więc obliczyć całkę:

$$I=\int_{(D)}\int f(x,y)\,dx\,dy$$

dzielimy obszar całkowania zapomocą prostych równoległych do osi spółrzędnych na drobniejsze elementy. Pole p_{ik} każdego takiego elementu mnożymy przez wartość funkcji $f(\xi_i,\eta_k)$, należącą do dowolnego punktu tego elementu i tworzymy sumę tych iloczynów:

$$I=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_k)\,p_{ik} \tag{183}$$

Granica ciągu takich sum, gdy liczba dodajników wzrasta nieograniczenie, jest ściśle równa całce podwójnej; biorąc zaś jakąś jedną sumę, złożoną

a skończonej liczby dodajników, otrzymujemy *przybliżoną* wartość danej całki podwójnej. Jeżeli obszar D jest prostokątem i rozłożymy go na prostokąty równe o bokach h i k, a dla każdego z nich weźmiemy wartość funkcji w lewym dolnym wierzchołku, to otrzymamy:

$$I = hk(f(x_1, y_1) + f(x_1, y_2) + f(x_2, y_1) + f(x_2, y_2) + \cdots + f(x_i, y_k) + \ldots)$$

Wzór ten, dający sumę objętości odpowiednich *prostopadłościanów*, wznoszących się nad obszarem całkowania, jest uogólnieniem poznanej dla całek pojedyńczych metody prostokątów (por. § 226 A).

Nie mamy żadnej wskazówki, dotyczącej stopnia dokładności tego przybliżenia I. Wskazówkę taką otrzymamy, zamykając wartość całki pomiędzy dwie liczby ograniczające. Bierzemy w tym celu z siatki prostokątów, otrzymanych na płaszczyźnie (XY), najpierw tylko te, które leżą całkowicie *wewnątrz* obszaru D i pole każdego z nich mnożymy przez *najmniejszą* wartość, jaką w nim funkcja przyjmuje. Załóżmy, że funkcja $f(x, y)$ jest nieujemna w całym obszarze D.

Otrzymamy w ten sposób sumę:

$$i_1 = p_{11} m_{11} + p_{12} m_{12} + \cdots + p_{kl} m_{kl} \leqq I \tag{183a}$$

gdzie m_{rs} oznacza najmniejszą wartość funkcji w prostokącie p_{rs}.

Suma ta przedstawia sumę objętości prostopadłościanów minimalnych.

Za górne ograniczenie całki I bierzemy sumę iloczynów pól prostokątów zarówno wewnętrznych, jak i tych, które zawierają tylko części obszaru, pomnożonych przez największe wartości funkcji w każdym z tych prostokątów. Otrzymamy w ten sposób sumę:

$$I \leqq i_2 = p_{11} M_{11} + p_{12} M_{12} + \cdots + p_{mn} M_{mn} \tag{183b}$$

gdzie M_{rs} oznacza największą wartość funkcji $f(x, y)$ w prostokącie p_{rs}.

Suma ta przedstawia sumę objętości prostopadłościanów maksymalnych. A więc jest:

$$i_1 \leqq I \leqq i_2$$

Średnia arytmetyczna:

$$I' = \frac{i_1 + i_2}{2} \tag{183c}$$

będzie więc w ogólności wartością bardziej przybliżoną, aniżeli i_1 lub i_2. Wzory te dają zwykle tylko dość grube przybliżenie; aby je zaostrzyć, trzebaby rozkładać obszar całkowania na bardzo wiele drobnych elementów. Lepsze przybliżenie otrzymamy, uogólniając metodę trapezów. Weźmy pod uwagę prostokątny obszar całkowania D, określony warunkami: $a_1 \leqq x \leqq a_2$, $b_1 \leqq y \leqq b_2$ i podzielmy go na równe prostokąty o bokach $h = \frac{a_2 - a_1}{n}$ i $k = \frac{b_2 - b_1}{m}$. Zamiast prostopadłościanu, wznoszącego się

nad każdym takim składowym prostokątem, weźmy *prostopadłościan* ścięty, którego dno górne (pochyłe w ogólności) jest *styczne* do powierzchni o równaniu $z = f(x, y)$ w punkcie, leżącym nad środkiem dolnego dna prostokątnego. Jeżeli wierzchołki tego prostokąta mają spółrzędne (x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_2, y_2), to środek jego ma spółrzędne $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, $\frac{1}{2}(y_1 + y_2)$. Oznaczmy wartość z funkcji $f(x, y)$, należącą do tego środkowego punktu, znakiem:

$$z_{i+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}} = f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}, \frac{y_k + y_{k+1}}{2}\right)$$

Widzieliśmy (w § 252 w przykładzie 2), że objętość takiego prostopadłościanu ściętego ma wartość: $h \cdot k \cdot z_{i+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}}$. Suma objętości takich prostopadłościanów ściętych:

$$I_1 = hk \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}, \frac{y_k + y_{k+1}}{2}\right) \tag{184}$$

lub krótko:

$$I_1 = hk \sum \sum z_{i+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}} \tag{184a}$$

jest bardzo dogodną wartością przybliżoną całki podwójnej, dokładniejszą zazwyczaj, aniżeli wartość, otrzymana z wzorów (183a, b, c). Użycie tego wzoru można uważać za uogólnienie metody trapezów.

Inny wzór przybliżony otrzymujemy, biorąc w każdym prostokącie zamiast wartości $z_{i+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}}$, należącej do środka prostokąta, średnią arytmetyczną czterech wartości, należących do czterech wierzchołków prostokąta, np. w pierwszym prostokącie wartość

$$\tfrac{1}{4}(z_{11} + z_{12} + z_{21} + z_{22})$$

Sumując te wyrażenia, otrzymamy następujący wzór (Bugajewa):

$$I_2 = hk \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{4}(z_{ik} + z_{i+1,k} + z_{i,k+1} + z_{i+1,k+1}) \tag{185}$$

Biorąc średnią arytmetyczną czterech wartości z, należących do środków boków prostokąta, to znaczy np. w pierwszym prostokącie:

$$\tfrac{1}{4}(z_{1,\frac{1}{2}} + z_{\frac{1}{2},1} + z_{2,\frac{1}{2}} + z_{\frac{1}{2},2}) =$$

$$= \tfrac{1}{4}\left(f\left(x_1, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) + f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, y_1\right) + f\left(x_2, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) + f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, y_2\right)\right)$$

otrzymujemy następujący wzór przybliżony (Mansiona):

$$I_3 = hk \sum_{i=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{4}\left(f\left(x_i, \frac{y_i + y_{i+1}}{2}\right) + f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}, y_i\right) + \right.$$

(186)

$$\left. + f\left(x_{i+1}, \frac{y_i + y_{i+1}}{2}\right) + f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}, y_{i+1}\right)\right)$$

Z kombinacji wzorów (184), (185) i (186) powstały najważniejsze i najbardziej rozpowszechnione wzory Wooley'a, a mianowicie:

(187) $$I_4 = \tfrac{1}{3}(2I_3 + I_1)$$

(188) $$I_5 = \tfrac{1}{3}(2I_1 + I_3)$$

Podstawiając w te wzory wartości z, otrzymamy np. dla pierwszego prostokąta w wyrażeniu I_4:

(187a) $$\tfrac{1}{6} hk(z_{1,1/2} + z_{1/2,1} + z_{2,1/2} + z_{1/2,2} + 2z_{1/2,1/2})$$

a w wyrażeniu I_5:

(188a) $$\tfrac{1}{12} hk(8z_{1/2,1/2} + z_{11} + z_{12} + z_{21} + z_{22})$$

Z kombinacji tych wzorów Wooley'a, biorąc:

(189) $$I_6 = \tfrac{1}{3}(I_5 + 2I_4)$$

otrzymujemy uogólnienie wzoru Simpsona. Dla pierwszego prostokąta otrzymujemy np.:

(189a) $$\tfrac{1}{36} hk(z_{11} + z_{12} + z_{21} + z_{22} + 4(z_{1,1/2} + z_{1/2,1} + z_{2,1/2} + z_{1/2,2}) + 16z_{1/2,1/2})$$

Można dowieść, że wzór ten jest uogólnieniem wzoru Simpsona w geometrycznem znaczeniu, polega bowiem na zastępowaniu ścianek danej powierzchni ściankami, wziętemi z odpowiedniej paraboloidy eliptycznej lub hiperbolicznej (o równaniu $z = ax^2 + by^2$).

Ten uogólniony wzór Simpsona jest mniej dogodny aniżeli wzory Wooley'a, ponieważ dla każdego prostokąta składowego trzeba obliczać przy użyciu wzoru (189) 9 wartości funkcji $z = f(x, y)$, podczas gdy w każdym z wzorów (187) i (188) potrzeba tylko 5 wartości z dla każdego prostokąta składowego.

Wyprowadzono wzory na oszacowanie błędu, który popełniamy, używając zamiast prawdziwej wartości całki $I = \int_0^b \int_0^a f(x, y)\, dx\, dy$ wzoru przybliżonego. Tak np. dla wzoru (184) otrzymano przez rozwinięcie funkcji $f(x, y)$ na wzór Taylora w otoczeniu punktu $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{b}{2}$ i przez całkowanie tego wzoru następujące oszacowanie błędu $I - I_1$:

$$|I - I_1| \leq \tfrac{1}{12}\left(\frac{M_1}{m^2} a^3 b + \frac{M_2}{n^2} ab^3\right)$$

gdzie M_1 oznacza największą wartość pochodnej f_{xx} a M_2 pochodnej f_{yy} w całym prostokącie, wyznaczonym zapomocą warunków $0 \leqq x \leqq a$, $0 \leqq y \leqq b$, gdy bok a podzielono na m a bok b na n równych części.

Podobnie dla wzoru (187) Wooley'a otrzymano

$$|I - I_4| \leqq \frac{1}{4!\,5^4}\left(\frac{M_1 a^5 b}{m^4} + 5\,\frac{M_2 a^3 b^3}{m^3 n^3} + \frac{M_3 a b^5}{n^4}\right)$$

przyczem M_1 oznacza największą wartość pochodnej $\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}$, M_2 pochodnej $\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}$, a M_3 pochodnej $\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}$.

Dalsze wskazówki, dotyczące przybliżonych metod obliczania całek podwójnych, znajdzie czytelnik w artykule C. Runge'go i F. Willers'a p. t. *Numerische und graphische Quadratur und Integration gewöhnlicher und partieller Dierentialgleichungen* (*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, tom II, 3, str. 135 i nast.).

Ustęp IV

CAŁKI POTRÓJNE, WIELOKROTNE I POWIERZCHNIOWE.

§ 261. O całkach potrójnych i wielokrotnych.

Weźmy pod uwagę funkcję $u = f(x, y, z)$ trzech zmiennych, określoną w jakimś obszarze trójwymiarowym i spełniającą w nim podobne warunki ciągłości, jakie zakładaliśmy przy badaniu całek podwójnych dla funkcji $z = f(x, y)$ dwóch zmiennych.

Niechaj obszarem tym będzie prostopadłościan P, złożony z punktów o spółrzędnych x, y, z, spełniających warunki:

$$(a) \qquad a_1 \leqq x \leqq a_2, \quad b_1 \leqq y \leqq b_2, \quad c_1 \leqq z \leqq c_2$$

Wyrażenie, otrzymane przez trzykrotne całkowanie funkcji $u = f(x, y, z)$ kolejno według każdej zmiennej (przyczem pozostałe zmienne uważa się za parametry), nazywamy całką potrójną z tej funkcji po prostopadłościanie P i oznaczamy ją symbolem

$$(190) \quad I = \iiint_{(P)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int_{c_1}^{c_2}\left(\int_{b_1}^{b_2}\left(\int_{a_1}^{a_2} f(x, y, z)\,dx\right)dy\right)dz$$

Całkę tę można też pojmować jako granicę odpowiednio wybranych ciągów sum dolnych, górnych lub pośrednich

$$\sum_{i=1}^{N_\nu} m_i p_i, \qquad \sum_{i=1}^{N_\nu} M_i p_i, \qquad \sum_{i=1}^{N_\nu} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\,p_i$$

otrzymanych przez rozkład prostopadłościanu P na N_ν prostopadłościanów p_i zapomocą płaszczyzn równoległych do płaszczyzn spółrzędnych.

Okazuje się, że do tych całek potrójnych stosuje się twierdzenie o wartości średniej, wyrażone wzorem:

$$\iiint_{(P)} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \mu \cdot P \tag{191}$$

gdzie μ oznacza odpowiednio dobraną wartość pomiędzy kresem górnym i dolnym funkcji $f(x, y, z)$ w całym prostopadłościanie P.

Aby określić całkę potrójną po *dowolnym* trójwymiarowym obszarze V, postępujemy podobnie, jak dla całek podwójnych. Wprowadzamy mianowicie funkcję pomocniczą $f_1(x, y, z)$, równą funkcji $f(x, y, z)$ w obszarze V, a równą 0 w pozostałych punktach prostopadłościanu P, zawierającego cały ten obszar V.

Całką potrójną z funkcji $f(x, y, z)$ po obszarze V nazywamy całkę potrójną z tej funkcji pomocniczej $f_1(x, y, z)$ po prostopadłościanie P, a więc:

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_{(P)} f_1(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

Sprowadziliśmy w ten sposób to nowe pojęcie do znanego pojęcia. Rozumując podobnie jak dla całek podwójnych, branych po dowolnych obszarach D, dochodzimy do wniosku, że całkę potrójną po dowolnym obszarze V można obliczyć zapomocą trzech kolejnych całkowań podanej funkcji $f(x, y, z)$ (a nie funkcji pomocniczej $f_1(x, y, z)$), przyczem granice tych całkowań nie będą już wszystkie liczbami stałemi (jak w prostopadłościanie), lecz jedna para granic będzie zawierała dwie zmienne, druga jedną a dopiero trzecia para przedstawia liczby stałe. Granice te wyznacza się z postaci powierzchni, ograniczającej obszar V, w następujący sposób. Niechaj każda prosta prostopadła do płaszczyzny (XY) przecina powierzchnię, ograniczającą obszar V, najwyżej w dwóch punktach (fig. 98). Rzutem obszaru trójwymiarowego V na płaszczyznę (XY) jest dwuwymiarowy obszar D. Walec, rzucający V na płaszczyznę (XY), dzieli powierzchnię ograniczającą V na dwie części o równaniach:

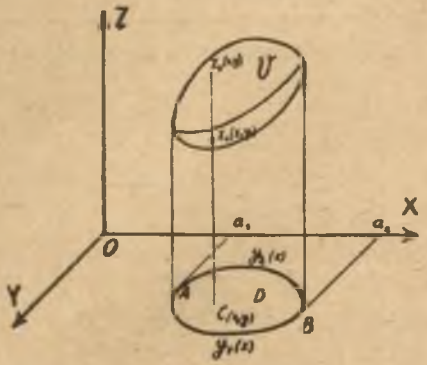


Fig. 98

$$z = z_1(x, y) \quad \text{i} \quad z = z_2(x, y)$$

Niechaj rzutem obszaru D na oś x-ów będzie odcinek, którego końce mają odcięte a_1 i a_2. Punkty A i B, należące do tych odciętych, dzielą rzeg obszaru D na dwie części o równaniach:

$$y = y_1(x) \quad \text{i} \quad y = y_2(x)$$

Całkujmy $f(x, y, z)$ najpierw według zmiennej z. W tym celu trzeba ustalić wartości x, y, t. j. obrać jakiś stały punkt $C(x, y)$ w obszarze D. Wykreślmy przez ten punkt prostopadłą do płaszczyzny (XY); trafi ona powierzchnię obszaru V w dwóch punktach, do których należą wartości z_1 i z_2. Całkowanie według z należy zatem wykonać w granicach od $z_1(x, y)$ do $z_2(x, y)$ i otrzymamy:

$$\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz$$

Wartość tej całki jest jakąś funkcją $F(x, y)$ dwóch zmiennych (parametrów) x i y.

Teraz trzeba obliczyć całkę podwójną z tej funkcji po obszarze D, a mianowicie trzeba ją całkować według zmiennej y w granicach od $y = y_1(x)$ do $y = y_2(x)$ a otrzymany wynik, który będzie już funkcją tylko jednej zmiennej x, należy całkować w stałych granicach od $x = a_1$ do $x = a_2$. Otrzymujemy w ten sposób:

$$(192)\qquad \iiint_{(V)} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_{a_1}^{a_2}\left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz\right) dy\right) dx$$

Podobnie przedstawia się rachunek przy innych, zmienionych porządkach całkowania, tylko trzeba odpowiednio zmienić granice.

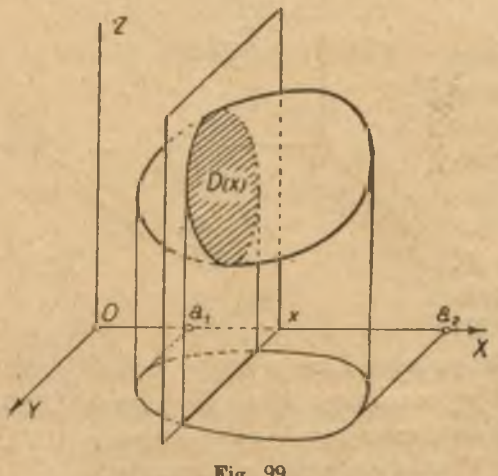


Fig. 99.

Do wzoru (192) można dojść także w inny sposób, a mianowicie sprowadzając całkę potrójną do całki pojedyńczej z całki podwójnej. Obierzmy w tym celu jakąś stałą wartość x; otrzymamy przekrój $D(x)$ obszaru V płaszczyzną równoległą do płaszczyzny bocznej (YZ). Obliczmy najpierw całkę podwójną z funkcji $f(x, y, z)$ według z i y po obszarze $D(x)$. Granice całkowania dla z będą zależne nietylko od y ale także od x, granice zaś dla y nie będą stałe, lecz zależne od x. A więc:

$$\iint_{D(x)} f(x, y, z)\, dz\, dy = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz\right) dy$$

Następnie należy zmieniać x od a_1 do a_2 i wykonać całkowanie według zmiennej x. Otrzymamy w ten sposób znowu wzór (192).

Twierdzenie o wartości średniej stosuje się także do całek potrójnych po dowolnych obszarach i przyjmuje dla nich postać:

(193) $$\boxed{\int\int\int_{(V)} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \mu \cdot V}$$

gdzie V oznacza nie tylko obszar całkowania, lecz zarazem jego objętość a μ oznacza odpowiednio dobraną liczbę pośrednią pomiędzy górnym a dolnym kresem wartości funkcji w obszarze V. Wartość μ, obliczoną z tego wzoru, nazywamy *średnią wartością funkcji trzech zmiennych* $f(x, y, z)$ w obszarze V.

Jeżeli $f(x, y, z)$ ma stale wartość 1, to oczywiście średnia wartość μ jest także równa 1 i otrzymujemy z wzoru (193) następujący **wzór na objętość:**

(194) $$\boxed{\int\int\int_{(V)} dx\, dy\, dz = V}$$

Twierdzenie o wprowadzeniu nowych zmiennych uogólnia się także na całki potrójne, a mianowicie całka:

$$\int\int\int_{(V)} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

przechodzi po wprowadzeniu nowych zmiennych zapomocą wzorów:

$$x = \varphi(u, v, w), \quad y = \psi(u, v, w), \quad z = \chi(u, v, w)$$

na:

$$\int\int\int_{(V')} f(\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \chi(u, v, w)) \cdot |J|\, du\, dv\, dw$$

gdzie J oznacza jakobjan funkcyj φ, ψ, χ a V' jest zmienionym odpowiednio obszarem całkowania.

Przykłady.

1) Obliczyć całkę:

$$I = \int\int\int_{(V)} x\, y\, z\, dx\, dy\, dz$$

po prostopadłościanie, określonym warunkami: $a_1 \leqq x \leqq a_2$, $b_1 \leqq y \leqq b_2$, $c_1 \leqq z \leqq c_2$.

$$I = \int_{c_1}^{c_2}\int_{b_1}^{b_2}\int_{a_1}^{a_2} x\, y\, z\, dx\, dy\, dz = \int_{c_1}^{c_2}\int_{b_1}^{b_2} \tfrac{1}{2} x^2 \Big|_{a_1}^{a_2} y\, z\, dy\, dz =$$

$$= \int_{c_1}^{c_2}\int_{b_1}^{b_2} \tfrac{1}{2}(a_2^2 - a_1^2)\, y\, z\, dy\, dz = \tfrac{1}{2}(a_2^2 - a_1^2) \int_{c_1}^{c_2}\int_{b_1}^{b_2} y\, z\, dy\, dz$$

Widocznie więc:

$$I = \tfrac{1}{2}(a_2^2 - a_1^2) \cdot \tfrac{1}{2}(b_2^2 - b_1^2) \cdot \tfrac{1}{2}(c_2^2 - c_1^2)$$

Można było zatem odrazu przedstawić tę całkę I jako iloczyn trzech całek pojedyńczych. Ogólniej:

$$\int_{a_1}^{a_2}\int_{b_1}^{b_2}\int_{c_1}^{c_2} f(x)\,g(y)\,h(z)\,dx\,dy\,dz = \int_{a_1}^{a_2} h(z)\,dz \cdot \int_{b_1}^{b_2} g(y)\,dy \cdot \int_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx$$

2) Obliczyć objętość ósemki kuli o promieniu a przy pomocy całki potrójnej (fig. 100). Równania powierzchni ograniczających są: $z_1 = 0$ (płaszczyzna (XY)) i $z_2 = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ (kula). Rzutem tej bryły na płaszczyznę (XY) jest ćwiartka koła, zatem $y_1 = 0$, $y_2 = \sqrt{a^2 - x^2}$. Odcięta zaś x zmienia się od $x = 0$ do $x = a$. Zatem:

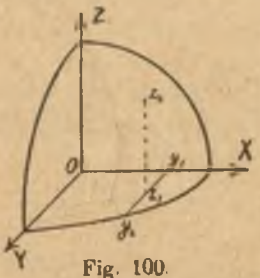


Fig. 100.

$$V = \int\int\int_{(V)} dx\,dy\,dz = \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dx\,dy\,dz$$

Całkę tę najdogodniej jest obliczyć przy pomocy spółrzędnych biegunowych w przestrzeni, t. j. przez wprowadzenie nowych zmiennych (por. tom I, str. 381):

$$x = r \sin\alpha \cos\beta$$
$$y = r \sin\alpha \sin\beta$$
$$z = r \cos\alpha$$

Jakobjanem tych funkcyj jest, jak łatwo stwierdzić:

$$J = r^2 \sin\alpha$$

Aby wyczerpać cały obszar całkowania, trzeba zmieniać r, α, β w stałych granicach, a mianowicie r od 0 do a, α od 0 do $\frac{\pi}{2}$ i β od 0 do $\frac{\pi}{2}$. Wobec tego:

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a r^2 \sin\alpha\,dr\,d\alpha\,d\beta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\beta \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\alpha\,d\alpha \cdot \int_0^a r^2\,dr$$

(por. końcowy wzór w przykładzie 1). Zatem:

$$V = \tfrac{\pi}{2} \cdot (-\cos\alpha)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \tfrac{1}{3} r^3\Big|_0^a = \tfrac{\pi}{2} \cdot 1 \cdot \tfrac{a^3}{3} = \tfrac{1}{6}\pi a^3$$

3) Obliczyć całkę Dirichlet'a:

$$I = \int\int\int_{(V)} x^{p-1} y^{q-1} z^{r-1}\,dx\,dy\,dz$$

po obszarze, ograniczonym powierzchnią o równaniu $\left(\frac{x}{a}\right)^l+\left(\frac{y}{b}\right)^m+\left(\frac{z}{c}\right)^n=1$ (l, m, n są liczbami dodatniemi) i ćwiartkami płaszczyzn spółrzędnych, zawartemi między dodatniemi częściami osi. Wprowadźmy nowe zmienne zapomocą wzorów:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^l=u, \quad \left(\frac{y}{b}\right)^m=v, \quad \left(\frac{z}{c}\right)^n=w$$

Nietrudno obliczyć, że jakobjan ma tu wartość:

$$J=\frac{abc}{lmn}u^{\frac{1}{l}-1}v^{\frac{1}{m}-1}w^{\frac{1}{n}-1}$$

Wobec tego:

$$I=\iiint_{(V')}(au^{\frac{1}{l}})^{p-1}(bv^{\frac{1}{m}})^{q-1}(cw^{\frac{1}{n}})^{r-1}\cdot\frac{abc}{lmn}u^{\frac{1}{l}-1}v^{\frac{1}{m}-1}w^{\frac{1}{n}-1}\,du\,dv\,dw$$

czyli:

$$I=\frac{a^pb^qc^r}{lmn}\iiint_{(V')}u^{\frac{p}{l}-1}v^{\frac{q}{m}-1}w^{\frac{r}{n}-1}\,du\,dv\,dw$$

Obszarem całkowania V' jest czworościan, ograniczony płaszczyzną:

$$u+v+w=1$$

i częściami płaszczyzn spółrzędnych, zawartemi między dodatniemi częściami osi (fig. 101). Jeżeli całkujemy najpierw według w, to granicami całkowania są:

$$w_1=0 \quad \text{i} \quad w_2=1-u-v$$

Przy następnem całkowaniu, według v, należy obrać granice:

$$v_1=0, \quad v_2=1-u$$

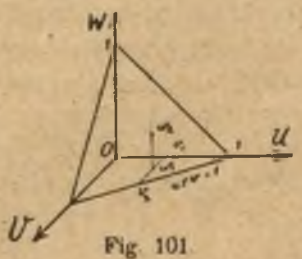


Fig. 101

a wreszcie dla u granice są stałe: $u_1=0$, $u_2=1$. A więc:

$$I=\frac{a^pb^qc^r}{lmn}\int_0^1\left(\int_0^{1-u}\left(\int_0^{1-u-v}u^{\frac{p}{l}-1}v^{\frac{q}{m}-1}w^{\frac{r}{n}-1}\,dw\right)dv\right)du$$

Po wykonaniu całkowania według w otrzymamy:

$$I=\frac{a^pb^qc^r}{lmr}\int_0^1\left(\int_0^{1-u}u^{\frac{p}{l}-1}v^{\frac{q}{m}-1}(1-u-v)^{\frac{r}{n}}\,dv\right)du$$

Celem obliczenia wewnętrznej całki użyjmy podstawienia:

$$v = t\,(1-u), \quad \text{a więc} \quad dv = (1-u)\,dt$$

Granice będą stałe: $t = 0$ i $t = 1$. Otrzymamy zatem:

$$I = \frac{a^p b^q c^r}{lmr} \int_0^1 u^{\frac{p}{l}-1} (1-u)^{\frac{q}{m}+\frac{r}{n}} \int_0^1 t^{\frac{q}{m}-1} (1-t)^{\frac{r}{n}}\, dt$$

Występujące tu całki są całkami Eulera pierwszego rodzaju, czyli funkcjami B (por. § 259, str. 266, uwaga), a więc:

$$I = \frac{a^p b^q c^r}{lmr} B\left(\tfrac{p}{l}, \tfrac{q}{m}+\tfrac{r}{n}+1\right) \cdot B\left(\tfrac{q}{m}, \tfrac{r}{n}+1\right)$$

Używając wzoru (181) na str. 266 i wzoru (a) na str. 111, możemy wyrazić prawą stronę zapomocą całek Eulera drugiego rodzaju, a mianowicie:

$$I = \frac{a^p b^q c^r}{lmn} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{l}\right) \Gamma\left(\frac{q}{m}\right) \Gamma\left(\frac{r}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{l}+\frac{q}{m}+\frac{r}{n}+1\right)}$$

Wszystkie powyższe rozważania rozszerza się bez trudności na całki poczwórne i wogóle wielokrotne.

Całkę n-krotną:

$$\int\int \cdots \int_{(V)} f(x_1, x_2 \ldots x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

oblicza się przez n kolejnych całkowań. Obszar całkowania (V) dla $n > 3$ nie da się już przedstawić geometrycznie, lecz określa się go zapomocą pewnych warunków analitycznych. Pomimoto używa się także wtedy terminologji geometrycznej, mówiąc o utworach przestrzeni wielowymiarowej. Tak np. jeżeli bierzemy jako obszar całkowania zbiór tych wartości $x_1, x_2 \ldots x_n$, które spełniają warunek:

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leqq R^2$$

to nazywamy go „kulą n-wymiarową“ Całkę n-krotną:

$$\int\int\int \cdots \int_{(V_n)} dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

po tej kuli n-wymiarowej nazywamy jej objętością.

Wprowadzając nowe zmienne (które są uogólnieniem spółrzędnych biegunowych przestrzennych):

$$x_1 = r\cos\varphi_1,\ x_2 = r\sin\varphi_1\cos\varphi_2,\ x_3 = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3, \ldots x_{n-1} = \\ = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1},\ x_n = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-1}$$

można okazać, że objętość takiej kuli wyraża się wzorem:

$$V_n = \frac{R^n}{(\frac{n}{2})!}\pi^{\frac{n}{2}} \qquad \text{dla } n \text{ parzystego}$$

$$= \frac{R^n \cdot (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \cdot 2}{3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots n} \qquad \text{dla } n \text{ nieparzystego}$$

Stąd np. dla $n = 2$ otrzymamy $V_2 = R^2\pi$, t. j. powierzchnię koła; dla $n = 3$ jest $V_3 = \frac{R^3 \cdot 2\pi \cdot 2}{3} = \frac{4}{3}R^3\pi$, t. j. objętość kuli 3-wymiarowej. Okazuje się, że gdy liczba wymiarów n wzrasta nieograniczenie, to objętość kuli n-wymiarowej o promieniu R dąży do zera.

§ 262. Zastosowanie całek podwójnych i potrójnych do obliczania mas i momentów.

1. Masa. Jeżeli ciało ma w każdym punkcie taką samą gęstość ϱ, to nazywamy je jednorodnem, a masę jego M obliczamy, mnożąc tę gęstość przez objętość:

$$M = \varrho \int\int\int_{(V)} dx\,dy\,dz = \varrho \cdot V$$

Jeżeli jednak ciało nie jest jednorodne, to wzór na obliczenie masy nie jest już tak prosty. Aby otrzymać taki wzór, trzeba najpierw podać definicję gęstości w każdym punkcie ciała. Otaczamy punkt $A(x, y, z)$ dowolnym elementem o objętości ΔV i tworzymy stosunek masy ΔM, znajdującej się w tym elemencie, do jego objętości ΔV. Granicę tego stosunku:

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta M}{\Delta V} = \varrho(x, y, z)$$

gdy element objętości dąży równocześnie we wszystkich kierunkach do zera, nazywamy gęstością ciała w tym punkcie A. Gęstość ta zależy od położenia punktu A, jest więc funkcją trzech zmiennych x, y, z.

Podzielmy ciało na elementy np. zapomocą płaszczyzn równoległych do płaszczyzn spółrzędnych. Objętość $\Delta x_i\,\Delta y_k\,\Delta z_l$ każdego takiego elementu mnożymy przez gęstość $\varrho(\xi_l, \eta_k, \zeta_l)$ w dowolnym jego punkcie i tworzymy sumę iloczynów:

$$\varrho(\xi_l, \eta_k, \zeta_l)\,\Delta x_i\,\Delta y_k\,\Delta z_l$$

Granicę ciągu takich sum, gdy $\Delta x_i, \Delta y_k$ i Δz_l dążą do zera, nazywamy **masą ciała**. Jest ona zatem równa całce potrójnej:

(195) $$\boxed{M = \int\int\int_{(V)} \varrho(x, y, z)\,dx\,dy\,dz}$$

Podobnie dla mas, rozmieszczonych na płaszczyźnie w obszarze D, wprowadzamy gęstość powierzchniową: $\varrho(x, y)$ a masę obliczamy przy pomocy całki podwójnej.

(196) $$\boxed{M = \int_{D)} \int \varrho(x, y)\, dx\, dy}$$

Dla mas, rozmieszczonych linjowo, wzdłuż odcinka linji *prostej*, otrzymujemy w podobny sposób:

(196a) $$M = \int_a^b \varrho(x)\, dx$$

Do obliczenia mas, rozmieszczonych *linjowo*, wzdłuż łuków dowolnych linij płaskich lub przestrzennych od punktu A do B, używa się wzoru

(196b) $$M = \int_{A}^{B} \varrho(s)\, ds$$

gdzie $\varrho(s)$ oznacza gęstość linjową jako funkcję długości łuku, liczonego od jakiegoś stale obranego punktu na danej linji.

Do obliczenia mas, rozmieszczonych *powierzchniowo*, po dowolnych powierzchniach krzywych (jak np. mas elektrycznych), trzeba używać t. zw. całek powierzchniowych, które wprowadzimy w następnym paragrafie.

II. Momenty. W § 233 określiliśmy momenty statyczne i bezwładności dla systemu punktów materjalnych. Dla punktu materjalnego $A(x, y, z)$ o masie m otrzymujemy w ten sposób następujące *momenty statyczne* względem płaszczyzny (XY), względem osi X i względem punktu O

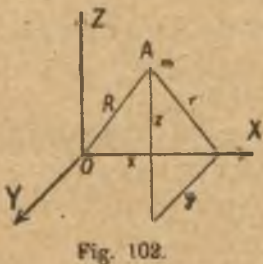


Fig. 102.

$$M_{xy} = m \cdot z$$
$$M_x = m \cdot r = m\sqrt{y^2 + z^2}$$
$$M_0 = m \cdot R = m\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Momenty bezwładności tego punktu względem płaszczyzny (XY), osi X i punktu O wyrażamy wzorami:

$$B_{xy} = mz^2$$
$$B_x = mr^2 = m(y^2 + z^2)$$
$$B_0 = mR^2 = m(x^2 + y^2 + z^2)$$

Podobnie tworzy się momenty wyższych stopni.

Chcąc określić momenty mas, rozmieszczonych w przestrzeni trójwymiarowej w sposób ciągły w jakimś obszarze V, rozdzielamy ten obszar na elementy i mnożymy masę każdego elementu przez odpowiednią odległość lub kwadrat odległości. Te elementarne momenty sumujemy, przechodzimy

do granicy i otrzymujemy w ten sposób odpowiednie całki potrójne. I tak momentem statycznym względem płaszczyzny (XY) masy o gęstości $\varrho(x, y, z)$, rozmieszczonej w obszarze V, nazywamy całkę potrójną:

$$M_{xy} = \iiint_{(V)} \varrho(x, y z) \cdot z\, dx\, dy\, dz \tag{197}$$

Podobne wzory stosują się do innych płaszczyzn, trzeba tylko zastąpić odległość z punktu bieżącego od płaszczyzny (XY) odpowiednio inną odległością.

Dla masy, rozmieszczonej jednorodnie, jest gęstość liczbą stałą, można zatem wyłączyć ϱ przed znak całki i otrzymamy:

$$M_{xy} = \varrho \iiint_{(V)} z\, dx\, dy\, dz$$

Moment statyczny tej samej masy względem osi X określamy wzorem:

$$M_x = \iiint_{(V)} \varrho \cdot \sqrt{y^2 + z^2}\, dx\, dy\, dz \tag{198}$$

i analogicznie dla innych osi.

Moment zaś statyczny względem punktu O określamy wzorem:

$$M_0 = \iiint_{(V)} \varrho \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dx\, dy\, dz$$

Podobnie momenty bezwładności ciał trójwymiarowych określamy wzorami:

$$B_{xy} = \iiint_{(V)} \varrho z^2\, dx\, dy\, dz \tag{199a}$$

$$B_x = \iiint_{(V)} \varrho(y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz \tag{199b}$$

$$B_0 = \iiint_{(V)} \varrho(x^2 + y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz \tag{199c}$$

Dla mas, rozmieszczonych powierzchniowo na płaszczyźnie, określiliśmy już momenty statyczne i bezwładności w §§ 234, 238, 239 i w § 244 III zapomocą całek pojedyńczych i krzywolinjowych. Właściwszem jednak narzędziem matematycznem do przedstawienia takich momentów są całki podwójne. Tak np. moment statyczny względem osi x-ów masy o gęstości $\varrho(x, y)$, rozmieszczonej w obszarze płaskim D, otrzymamy, mnożąc masę

każdego elementu $\Delta x \cdot \Delta y$ przez odległość y dowolnego jego punktu od osi x-ów, sumując te iloczyny i przechodząc do granicy. Za definicję momentu tej masy przyjmujemy zatem całkę podwójną:

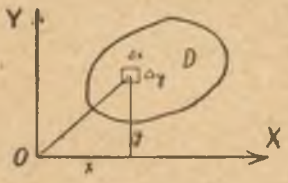


Fig. 103.

(200a) $$M_x = \int\limits_{(D)}\int \varrho(x, y)\, y\, dx\, dy$$

i analogicznie względem osi y-ów:

(200b) $$M_y = \int\limits_{(D)}\int \varrho(x, y)\, x\, dx\, dy$$

Moment statyczny względem punktu O określamy wzorem:

(200c) $$M_0 = \int\limits_{(D)}\int \varrho(x, y)\sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy$$

Podobnie momenty bezwładności względem obu osi i względem początku układu określamy wzorami:

(201a) $$B_x = \int\limits_{(D)}\int \varrho(x, y)\, y^2\, dx\, dy$$

(201b) $$B_y = \int\limits_{(D)}\int \varrho(x, y)\, x^2\, dx\, dy$$

(201c) $$B_0 = \int\limits_{(D)}\int \varrho(x, y)(x^2 + y^2)\, dx\, dy$$

Widzimy, że te wzory (200) i (201) są symetryczne względem x i y, a wskutek tego łatwiejsze do zapamiętania, aniżeli wzory, wyrażające te momenty zapomocą całek pojedyńczych.

III. Środek ciężkości. W § 235 określiliśmy środek ciężkości pola lub łuku jako punkt, w którym umieszczona całkowita masa ma taki sam moment statyczny względem każdej osi jak masa, rozmieszczona w całem badanem ciele.

Podobnie określamy środek ciężkości mas, rozmieszczonych w przestrzeni trójwymiarowej: jest to taki punkt, w którym skupiona cała masa tego ciała ma ten sam moment statyczny względem każdej płaszczyzny, co całkowite ciało. Oznaczmy spółrzędne tego punktu S literami ξ, η, ζ. W myśl definicji muszą się spełniać warunki:

$$M_{xy} = \zeta \cdot M, \quad M_{xz} = \eta \cdot M, \quad M_{yz} = \xi \cdot M$$

a więc:

$$\xi = \frac{M_{yz}}{M}, \quad \eta = \frac{M_{xz}}{M}, \quad \zeta = \frac{M_{xy}}{M} \tag{202}$$

Gdy masa jest rozmieszczona jednorodnie, to czynnik ϱ odpada i pozostaje:

$$\xi = \frac{\iiint_{(V)} x\,dx\,dy\,dz}{V}, \quad \eta = \frac{\iiint_{(V)} y\,dx\,dy\,dz}{V}$$

$$\zeta = \frac{\iiint_{(V)} z\,dx\,dy\,dz}{V} \tag{202a}$$

Można okazać, że ten punkt ma żądaną własność nietylko ze względu na trzy płaszczyzny spółrzędnych, lecz także ze względu na każdą inną płaszczyznę.

Podobnie możemy wyrazić spółrzędne środka ciężkości masy, rozmieszczonej powierzchniowo, w obszarze płaskim D, zapomocą całek podwójnych, a mianowicie, używając wzorów (200 a, b), otrzymamy dla ciał jednorodnych:

$$\xi = \frac{\iint_{(D)} x\,dx\,dy}{D}, \quad \eta = \frac{\iint_{(D)} y\,dx\,dy}{D} \tag{203}$$

Zestawiając wzory (202a) i (203) z wzorami, wyrażającemi średnią wartość funkcji dwóch lub trzech zmiennych, widzimy, że spółrzędna ξ środka ciężkości bryły jednorodnej jest średnią wartością odciętej x w obszarze V; podobnie η jest średnią wartością rzędnej y, a ζ średnią wartością zmiennej z.

Przykłady.

1) Obliczyć masę słupa postaci walca prostego o wysokości w, którego gęstość zmienia się z wysokością z według prawa $\varrho = f(z)$. Niechaj D oznacza obszar, zamknięty kierownicą na płaszczyźnie (XY).

Otóż:

$$M = \iiint_{(V)} f(z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^w \left(\iint_{(D)} f(z)\,dx\,dy \right) dz = \int_0^w \left(f(z) \cdot \iint_{(D)} dx\,dy \right) dz$$

$$= \int_0^w f(z)\,dz \cdot \iint_{(D)} dx\,dy = \int_0^w f(z)\,dz \cdot D$$

Stosując do pozostałej całki twierdzenie o wartości średniej, otrzymujemy:

$$M = f(\zeta) \cdot w \cdot D$$

Masa tego słupa równa się zatem masie, rozmieszczonej w sposób jednorodny, o gęstości stałej, równej gęstości w wysokości średniej $z = \zeta$.

2) Wyznaczyć środek ciężkości wycinka koła o promieniu R, o kącie środkowym 2γ, jeżeli gęstość ϱ jest stała. Umieśćmy ten wycinek tak, jak na fig. 104. Widocznem jest, że środek ciężkości leży na osi x-ów, a więc $\eta = 0$. Odciętą ξ obliczymy z wzoru (203), a mianowicie:

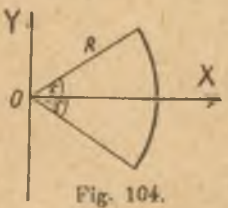


Fig. 104.

$$\xi = \frac{\varrho \iint\limits_{(D)} x\,dx\,dy}{\varrho D}$$

Po wprowadzeniu spółrzędnych biegunowych na płaszczyźnie, t. j. $x = r\cos\alpha$, $y = r\sin\alpha$, otrzymujemy:

$$\xi = \frac{\int\limits_{-\gamma}^{+\gamma}\int\limits_{0}^{R} r^2\cos\alpha\,dr\,d\alpha}{R^2\gamma} = \frac{1}{R^2\gamma}\int\limits_{-\gamma}^{+\gamma}\frac{R^3}{3}\cos\alpha\,d\alpha = \frac{R}{3\gamma}\sin\alpha\Big|_{-\gamma}^{+\gamma} = \frac{2}{3}R\frac{\sin\gamma}{\gamma}$$

3) Wyznaczyć środek ciężkości masy, wypełniającej jednorodnie półkulę o promieniu 1. Przyjmijmy równanie kuli w formie:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

i weźmy pod uwagę górną półkulę.

Środek ciężkości leży oczywiście na osi z, a więc $\xi = 0$, $\eta = 0$, a pozostaje do obliczenia ζ. Z wzorów (202a) otrzymujemy:

$$\zeta = \frac{\iiint\limits_{(V)} z\,dx\,dy\,dz}{\frac{2}{3}\cdot 1^3\pi}$$

Wprowadziwszy spółrzędne biegunowe przestrzenne, otrzymujemy:

$$\zeta = \frac{3}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{1} r\cos\alpha\, r^2\sin\alpha\,dr\,d\alpha\,d\beta = \frac{3}{2\pi}\int\limits_0^{1} r^3\,dr\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\alpha\cos\alpha\,d\alpha\cdot\int\limits_0^{2\pi} d\beta =$$

$$= \frac{3}{2\pi}\cdot\frac{1}{4}r^4\Big|_0^1\cdot\left(-\frac{\cos 2\alpha}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot 2\pi = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{3}{2\pi} = \frac{3}{8}$$

4) Obliczyć moment bezwładności kuli jednorodnej o promieniu R, o gęstości ϱ, względem dowolnej średnicy.

Obierzmy środek kuli za początek układu i obliczmy jej momenty bezwładności względem 3 osi spółrzędnych. Stosujemy wzór (199b), a więc:

$$B_x = \varrho \int\int\int_{(V)} (y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz$$

$$B_y = \varrho \int\int\int_{(V)} (x^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz$$

$$B_z = \varrho \int\int\int_{(V)} (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz$$

Wskutek symetrji te 3 momenty są równe, możemy je więc oznaczyć tą samą literą B. Suma:

$$B_x + B_y + B_z = 3B = \varrho \int\int\int_{(V)} (2x^2 + 2y^2 + 2z^2)\, dx\, dy\, dz$$

Do obliczenia tej całki dogodnie jest użyć spółrzędnych biegunowych przestrzennych. Wiemy już, że wtedy należy element objętości $dx\, dy\, dz$ zastąpić przez $r^2 \sin\alpha\, dr\, d\beta\, d\alpha$. Granice całkowania będą stałe, więc:

$$B = \tfrac{3}{8}\varrho \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{R} r^2 \cdot r^2 \sin\alpha\, dr\, d\beta\, d\alpha = \tfrac{3}{8}\varrho \int_0^{R} r^4\, dr \cdot \int_0^{2\pi} d\beta \cdot \int_0^{\pi} \sin\alpha\, d\alpha$$

$$= \tfrac{3}{8}\varrho \tfrac{R^5}{5} \cdot 2\pi \cdot 2 = \tfrac{8}{15} R^5 \pi \varrho$$

§ 263. Potencjał.

Weźmy pod uwagę dwa punkty materjalne: stały punkt $A(a, b, c)$ o masie m' i punkt bieżący $B(x, y, z)$ o masie m. Takie dwa punkty przyciągają się z siłą:

$$f = k\frac{m\,m'}{r^2}$$

gdzie k oznacza stałą grawitacyjną, a r odległość tych dwu punktów od siebie. Biorąc $m' = \frac{1}{k}$, mamy:

$$f = \frac{m}{r^2} = \frac{m}{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$$

Składowe siły f w kierunku osi spółrzędnych mają wartości:

$$f_x = f \cdot \cos\alpha, \quad f_y = f \cdot \cos\beta, \quad f_z = f \cdot \cos\gamma$$

gdzie α, β, γ oznaczają kąty, zawarte między kierunkiem siły i osiami spółrzędnych.

Weźmy teraz pod uwagę zamiast punktu materjalnego B masę o gęstości $\varrho(x, y, z)$, wypełniającą jakąś część przestrzeni V i zbadajmy, jakie siły działają na stały punkt $A(a, b, c)$, leżący *zewnątrz* tego ciała, w t. zw. polu grawitacyjnem. Rozkładamy w tym celu obszar V na elementy i sumujemy składowe sił przyciągania, wywieranych przez poszczególne elementy na punkt A w kierunku osi X, Y, Z. Po zsumowaniu i przejściu do granicy otrzymamy na całkowitą siłę składową w kierunku osi x-ów wzór:

$$F_x = \iiint_{(V)} \frac{\varrho(x, y, z) \cos\alpha \, dx\, dy\, dz}{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$$

i analogicznie na składowe w kierunku innych osi. Ponieważ:

$$\cos\alpha = \frac{x-a}{r}, \quad \cos\beta = \frac{y-b}{r}, \quad \cos\gamma = \frac{z-c}{r}$$

przeto

$$F_x = \iiint_{(V)} \frac{\varrho(x, y, z)(x-a)\,dx\,dy\,dz}{r^3}, \quad F_y = \iiint_{(V)} \frac{\varrho(x, y, z)(y-b)\,dx\,dy\,dz}{r^3}$$

$$F_z = \iiint_{(V)} \frac{\varrho(x, y, z)(z-c)\,dx\,dy\,dz}{r^3}$$

Te trzy siły składowe są *pochodnemi* jednej funkcji, a mianowicie funkcji:

(204)
$$\boxed{u = \iiint_{(V)} \frac{\varrho(x, y, z)\,dx\,dy\,dz}{r}}$$

Zróżniczkujmy mianowicie tę funkcję według parametru a. Podobnie jak dla całek pojedyńczych, można tu wykonać różniczkowanie pod znakiem całki i otrzymamy:

$$\frac{\partial u}{\partial a} = \iiint_{(V)} \varrho(x, y, z) \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{r}\right) dx\, dy\, dz$$

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial a}$$

Ponieważ:

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$$

przeto:

$$2r\frac{\partial r}{\partial a} = -2(x-a)$$

$$\frac{\partial r}{\partial a} = -\frac{x-a}{r}$$

a zatem:

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{r}\right) = +\frac{x-a}{r^3}$$

Wobec tego pochodna:

$$\frac{\partial u}{\partial a} = \int\int\int_{(\mathfrak{M})} \frac{\varrho(x,y,z)(x-a)}{r^3}\,dx\,dy\,dz = F_x$$

Podobnie:

$$\frac{\partial u}{\partial b} = F_y, \quad \frac{\partial u}{\partial c} = F_z$$

Tę funkcję $u(a,b,c)$, *której pochodnemi cząstkowemi są składowe siły przyciągania wzdłuż osi spółrzędnych, nazywamy* **potencjałem** *pola grawitacyjnego, wywołanym przez daną masę.*

Funkcja ta odgrywa bardzo ważną rolę nietylko w badaniach pola grawitacyjnego, lecz także w badaniach pól innych sił, działających odwrotnie proporcjonalnie do kwadratu odległości. np. sił elektrycznych i magnetycznych.

Utwórzmy drugie pochodne potencjału ze względu na a, b, c Po wykonaniu rachunków otrzymamy:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial a^2} = \int\int\int_{(\mathfrak{M})} \left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3(x-a)^2}{r^5}\right) \varrho\,dx\,dy\,dz$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial b^2} = \int\int\int_{(\mathfrak{M})} \left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3(y-b)^2}{r^5}\right) \varrho\,dx\,dy\,dz$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial c^2} = \int\int\int_{(\mathfrak{M})} \left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3(z-c)^2}{r^5}\right) \varrho\,dx\,dy\,dz$$

Utworzywszy sumę tych całek, otrzymujemy:

(205) $$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial c^2} = 0}$$

Dla każdego punktu, leżącego *zewnątrz* mas, potencjał spełnia zatem, przy dowolnym rozkładzie mas, równanie różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu (205), zwane równaniem Laplace'a.

Jeżeli punkt $A(a,b,c)$ leży *wewnątrz* ciała, to całki, przedstawiające potencjał i siły składowe, są niewłaściwe, albowiem dla takiego punktu jest $x = a$, $y = b$, $z = c$, a więc $r = 0$, a to r występuje w mianowniku. Można jednak dowieść, że te całki są zbieżne. Okazuje się, że dla punktów A, leżących wewnątrz ciała, potencjał spełnia następujące równanie różniczkowe:

(206) $$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial c^2} = -4\pi\varrho(a,b,c)}$$

zwane równaniem Poisson'a.

Teorja potencjału jest jednym z najważniejszych i najszerzej opracowanych działów analizy wyższej. Spośród licznych podręczników, poświęconych temu przedmiotowi, wymieniamy tu: A. Wangerin, *Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen* (2 tomy, Sammlung Schubert, 1921–2) i W. Sternberg, *Potentialtheorie* (2 tomy, Sammlung Göschen, rok 1925—6).

Przykład.

Obliczyć potencjał w dowolnym punkcie A przestrzeni, jeżeli w tej przestrzeni znajduje się kula o promieniu a, wypełniona w sposób jednorodny masą o gęstości $\varrho = 1$.

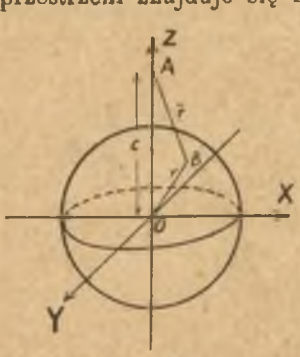


Fig. 105.

Nazwijmy odległość punktu A od środka O kuli literą c (fig. 105). Za oś Z obierzmy prostą, łączącą A z O, a początek układu przyjmijmy w środku kuli.

Punkt A ma wtedy spółrzędne $A(0, 0, c)$ o dodatniem c. Odległość punktu A od dowolnego punktu $B(x, y, z)$, leżącego wewnątrz lub na powierzchni kuli, wyrażamy wzorem:

$$\bar{r} = \sqrt{x^2 + y^2 + (c - z)^2}$$

a więc potencjał ma w punkcie A wartość:

$$u = \int\int\int_{(\bar{r})} \frac{dx\,dy\,dz}{\bar{r}} = \int\int\int_{(\bar{r})} \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + (c - z)^2}}$$

Celem obliczenia tej całki wprowadzamy spółrzędne biegunowe przestrzenne zapomocą wzorów:

$$x = r \sin\alpha \cos\beta, \quad y = r \sin\alpha \sin\beta, \quad z = r \cos\alpha$$

Ponieważ jakobjan tych funkcyj ma wartość $r^2 \sin\alpha$, przeto:

$$u = \int_{r=0}^{r=a}\int_{\alpha=0}^{\alpha=\pi}\int_{\beta=0}^{\beta=2\pi} \frac{r^2 \sin\alpha\, d\beta\, d\alpha\, dr}{\sqrt{r^2 \sin^2\alpha + (c - r\cos\alpha)^2}} = 2\pi \int_0^a\int_0^\pi \frac{r^2 \sin\alpha\, d\alpha\, dr}{\sqrt{r^2 + c^2 - 2cr\cos\alpha}}$$

Przy obliczaniu całki według zmiennej α uważamy r za parametr. Wprowadźmy zamiast α zmienną $\bar{r}$ zapomocą podstawienia:

$$\bar{r}^2 = r^2 + c^2 - 2cr\cos\alpha$$

Dla $\alpha = 0$ jest $\bar{r}^2 = (r - c)^2$, a więc $\bar{r} = |r - c|$, ponieważ $\bar{r}$ jest zawsze dodatnie, a dla $\alpha = \pi$ jest $\bar{r} = |r + c| = r + c$.

Ponieważ $2\bar{r}\,d\bar{r} = +2cr\sin\alpha\,d\alpha$, przeto:

$$I = \int_0^\pi \frac{r^2 \sin\alpha\, d\alpha}{\sqrt{r^2 + c^2 - 2cr\cos\alpha}} = \int_{|r-c|}^{r+c} r^2 \cdot \frac{\bar{r}\,d\bar{r}}{cr} \cdot \frac{1}{\bar{r}} = \frac{r}{c}\int_{|r-c|}^{r+c} d\bar{r} = \frac{r}{c}(r + c - |r - c|)$$

Stąd otrzymujemy dla $c > r$

$$I = \frac{r}{c}(r + c - c + r) = \frac{2r^2}{c}$$

a dla $c < r$:

$$I = \frac{r}{c}(r + c - r + c) = 2r$$

Jeżeli punkt A leży *zewnątrz* kuli, to jest $c > a$, a zatem stale $c > r$. Wtedy:

$$u = 2\pi \int_0^a \frac{2r^2}{c}\, dr = \frac{4}{3}\frac{a^3\pi}{c}$$

Potencjał ma zatem w punkcie zewnętrznym taką wartość, jak gdyby cała masa była skoncentrowana w środku kuli $\left(M = \frac{4}{3}a^3\pi \cdot 1,\ r = c,\ u = \frac{M}{r}\right)$.

Jeżeli punkt A leży *wewnątrz* kuli, to trzeba rozdzielić przedział całkowania $\langle 0, a\rangle$ na dwie części, od 0 do c i od c do a.

W pierwszym z nich jest $c > r$, a więc $I = \frac{2r^2}{c}$, w drugim zaś jest $c < r$, a więc $I = 2r$. Otrzymujemy więc w tym przypadku

$$u = 2\pi \int_0^c \frac{2r^2}{c}\, dr + 2\pi \int_c^a 2r\, dr = \frac{4}{3}\pi\frac{c^3}{c} + 2\pi(a^2 - c^2) = 2\pi\left(a^2 - \frac{c^2}{3}\right)$$

Taką wartość ma potencjał w punkcie, leżącym *wewnątrz* kuli w odległości c od jej środka.

Dla punktu, leżącego na powierzchni kuli, t. j. dla $c = a$, otrzymujemy z obu wzorów tę samą wartość $\frac{4}{3}a^2\pi$.

§ 264. Całki powierzchniowe.

W fizyce matematycznej zachodzi często potrzeba badania mas (zwłaszcza elektrycznych), rozmieszczonych na powierzchniach krzywych, momentów takich mas i ich potencjałów. Aby stworzyć narzędzie matematyczne, odpowiednie dla tych badań, wprowadzono jeszcze jedno rozszerzenie pojęcia całki, a mianowicie *całki powierzchniowe*.

Zanim to pojęcie wprowadzimy, podamy najpierw pewną modyfikację pojęcia całki podwójnej po obszarze D. Przy definicji tej całki nie zwracaliśmy uwagi na to, w jakim kierunku obiegamy obszar D. Odróżnienie tych kierunków jest jednak w wielu przypadkach korzystne. Tak np. przy obieganiu brzegu obszaru D w kierunku dodatnim (przeciwnym do obrotu wskazówek zegara) otrzymujemy z wzoru:

$$D = \int_{(D)}\int dx\, dy$$

dodatnią liczbę na pole tego obszaru, przy obieganiu zaś ujemnem, liczbę ujemną. Możemy zatem wprowadzić oznaczenia:

$$\iint_{D+} dx\,dy = \iint_{(D)} dx\,dy$$

$$\iint_{D-} dx\,dy = -\iint_{(D)} dx\,dy$$

z których pierwsze oznacza całkę podwójną o obiegu dodatnim, drugie zaś o ujemnym. Podobnie ogólnie kładziemy:

$$\iint_{D+} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{(D)} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$\iint_{D-} f(x,y)\,dx\,dy = -\iint_{(D)} f(x,y)\,dx\,dy$$

i nazywamy takie całki podwójne, z odróżnieniem kierunku obiegu, całkami *zorjentowanemi*.

Weźmy teraz pod uwagę powierzchnię S o równaniu:

$$z = \varphi(x,y)$$

wznoszącą się nad obszarem płaskim D i ustalmy dla niej jakiś kierunek obiegania przez obranie kierunku obiegania brzegu.

Ten sam kierunek obiegu trzeba przypisać rzutowi D tej powierzchni na płaszczyznę (XY). Uważajmy dla każdej normalnej do powierzchni ten kierunek za dodatni, który wraz z kierunkiem obiegania brzegu powierzchni wyznacza ruch śrubowy prawoskrętny. Kąt tej normalnej z dodatnim kierunkiem osi Z oznaczmy literą γ.

Utwórzmy całkę podwójną *zorjentowaną* z dowolnej funkcji $R(x,y,z)$ trzech zmiennych, przyczem te zmienne nie są od siebie niezależne, lecz spełniają równanie powierzchni $z = \varphi(x,y)$. Tworzymy więc całkę:

$$\iint_{D+} R(x,y,z)\,dx\,dy = \iint_{D+} R(x,y,\varphi(x\,y))\,dx\,dy \quad \text{lub} \quad \iint_{D-} R(x,y,z)\,dx\,dy$$

zorjentowaną tak, jak dana powierzchnia, to znaczy, że obieg obszaru D jest taki, jaki wynika z obiegu brzegu danej powierzchni. Każdą z tych całek nazywamy **całką powierzchniową** z funkcji $R(x\,y,z)$, braną po powierzchni S z obranym kierunkiem obiegu i oznaczamy je obydwie wspólnym symbolem:

$$\iint_{(S)} R(x,y,z)\,dx\,dy \quad \text{lub} \quad \iint_{(S)} R(x,y,z)\cos\gamma\,d\sigma$$

przyczem należy jeszcze podać, w którym kierunku obiegamy daną powierzchnię. Symbol $d\sigma$ nazywamy elementem powierzchni; ma on wartość $dx\,dy : \cos\gamma$. Zamiast mówić o różnych kierunkach obiegania powierzchni, możemy mówić, że bierzemy całkę powierzchniową po różnych *stronach* powierzchni, zależnie od tego, po której stronie powierzchni leży dodatni promień normalnej; albowiem dodatni kierunek normalnej został ustalony na podstawie kierunku obiegu.

Widzimy stąd, że *całkę powierzchniową, braną po dowolnej powierzchni, np. krzywej, można zawsze przedstawić jako całkę podwójną po obszarze płaskim, o obiegu dodatnim lub ujemnym, zależnie od tego, po której stronie powierzchni bierzemy całkę powierzchniową.*

A więc:

$$\iint\limits_{(S)} R(x, y, z)\,dx\,dy = \iint\limits_{D+} R(x, y, \varphi(x, y))\,dx\,dy$$

lub:

$$\iint\limits_{D-} R(x, y, \varphi(x, y))\,dx\,dy$$

czyli:

$$\iint\limits_{(S)} R(x, y, z)\,dx\,dy = \begin{cases} \iint\limits_{(D)} R(x, y, \varphi(x, y))\,dx\,dy, & \text{jeżeli obieg brzegu powierzchni jest dodatni} \\ -\iint\limits_{(D)} R(x, y, \varphi(x, y))\,dx\,dy, & \text{jeżeli obieg brzegu powierzchni jest ujemny.} \end{cases}$$

Zakładaliśmy, że powierzchnia S da się przedstawić w postaci równania $z = \varphi(x, y)$. Jeżeli tak nie jest, lecz gdy powierzchnia da się rozłożyć na części, spełniające ten warunek, to za całkę powierzchniową po całej powierzchni uważamy sumę całek powierzchniowych po tych częściach składowych. Jeżeli zaś jakaś część powierzchni jest prostopadła do płaszczyzny (XY) (jest częścią powierzchni walcowej), to za całkę powierzchniową po tej części powierzchni uważamy zero.

Tak np. całka powierzchniowa po kuli jest sumą całek powierzchniowych po obu półkulach, na które się rozpada kula przez poprowadzenie koła wielkiego, równoległego do płaszczyzny (XY).

Podobnie określa się całki powierzchniowe:

$$\iint\limits_{(S)} P(x, y, z)\,dy\,dz \quad \text{i} \quad \iint\limits_{(S)} Q(x, y, z)\,dx\,dz$$

jeżeli równanie powierzchni da się przedstawić w postaci $x = \psi(y, z)$ lub $y = \chi(x, z)$ nad obszarami płaskiemi D' lub D''.

Ogólną całką powierzchniową po powierzchni S jest suma:

$$\int\int_{(S)} (P(x, y, z)\, dy\, dz + Q(x, y, z)\, dx\, dz + R(x, y, z)\, dx\, dy)$$

czyli:

$$\int\int_{(S)} (P(x, y, z) \cos\alpha + Q(x, y, z) \cos\beta + R(x, y, z) \cos\gamma)\, d\sigma$$

Uwaga. Całkę powierzchniową $\int\int_{(S)} R(x, y, z)\, dx\, dy$ można też określić jako granicę ciągu sum, otrzymanych w ten sposób, że dzieli się powierzchnię na elementy $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \ldots \Delta\sigma_n$ i każdy z nich mnoży się przez wartość funkcji $R(x, y, z) \cos\gamma$ w dowolnym punkcie każdego elementu a następnie dodaje się te iloczyny. Tworzy się ciąg sum postaci:

$$\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cos\gamma_i \Delta\sigma_i$$

gdy średnice elementów $\Delta\sigma_i$ dążą do zera i okazuje się, że ta granica ma wartość:

$$\int\int_{(D)} R(x, y, \varphi(x, y))\, dx\, dy = \int\int_{(S)} R(x, y, z)\, dx\, dy =$$

$$= \int\int_{(S)} R(x, y, z) \cos\gamma\, d\sigma$$

§ 265. Związek całki powierzchniowej z całką krzywolinjową przestrzenną.

Widzieliśmy, że pomiędzy całką podwójną a całką krzywolinjową płaską zachodzi bardzo ważny i interesujący związek, wyrażony twierdzeniem Greena-Riemanna (por. § 256). Okażemy, że podobny związek zachodzi między całką powierzchniową a całką krzywolinjową przestrzenną.

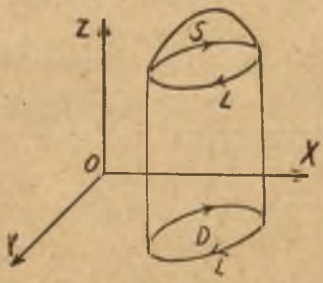


Fig. 106.

Weźmy pod uwagę powierzchnię S (fig. 106) o równaniu $z = \varphi(x, y)$, wznoszącą się nad obszarem płaskim D. Brzegiem tej powierzchni jest linja L a rzutem tej linji na płaszczyznę (XY) jest brzeg l obszaru D. Zajmijmy się całką krzywolinjową:

$$I = \int_{(L)} P(x, y, z)\, dx$$

braną po brzegu powierzchni, przyczem obiegajmy ten brzeg w takim

kierunku, aby rzut jego l był obiegany w kierunku dodatnim. Ponieważ $z = \varphi(x, y)$, przeto:

$$I = \int_{(L)} P(x, y, \varphi(x, y))\, dx = \int_{(\sigma)} P_1(x, y)\, dx$$

Zastosujmy do tej całki krzywolinjowej po linji płaskiej twierdzenie Greena-Riemanna (str. 241, wzór (166)). Otrzymamy:

$$I = -\int_{(D)}\int \frac{\partial P_1}{\partial y}\, dx\, dy$$

Ale:

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}$$

a więc:

$$I = \int_{(D)}\int -\frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy + \int_{(D)}\int -\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\, dx\, dy =$$

$$= \int_{(S)}\int -\frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy + \int_{(S)}\int -\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\, dx\, dy$$

Tu już występują całki powierzchniowe, ponieważ $z = \varphi(x, y)$. Drugą z tych całek można napisać w postaci:

$$I_1 = \int_{(S)}\int -\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\cos\gamma\, d\sigma$$

gdzie γ jest kątem normalnej z osią Z. Wiadomo z geometrji różniczkowej (por. tom I, str. 339), że:

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad \text{a} \quad \cos\beta = \frac{-\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

gdzie β jest kątem normalnej z osią Y. Stąd wynika, że:

$$-\frac{\partial z}{\partial y}\cos\gamma = \cos\beta$$

a więc:

$$I_1 = \int_{(S)}\int \frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta\, d\sigma = \int_{(S)}\int \frac{\partial P}{\partial z}\, dx\, dz$$

Zatem:

$$I = \int_{(L)} P(x, y, z)\, dx = \int_{(S)}\int -\frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy + \int_{(S)}\int \frac{\partial P}{\partial z}\, dx\, dz$$

W podobny sposób przekształcamy całki krzywolinjowe:

$$\int_{(L)} Q(x, y, z)\, dy \quad \text{i} \quad \int_{(L)} R(x, y, z)\, dz$$

Dodajemy te trzy całki do siebie i otrzymujemy:

$$(207)\quad \boxed{\int_{(S)}\int \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\, dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\, dx\right] = \int_{(L)} (P\,dx + Q\,dy + R\,dz)}$$

Jest to wzór Stokes'a, podający związek całki krzywolinjowej przestrzennej z całką powierzchniową. Jest on uogólnieniem twierdzenia Greena-Riemanna.

Z twierdzenia Greena-Riemanna wysnuliśmy wniosek, że całka krzywolinjowa po krzywej zamkniętej jest równa zeru, gdy wyrażenie, znajdujące się pod całką, jest różniczką zupełną jakiejś funkcji dwóch zmiennych, a stąd wynikło, że całka krzywolinjowa z różniczki zupełnej nie zależy od drogi całkowania. Taki sam wniosek wysnuwa się z twierdzenia Stokes'a dla różniczki zupełnej z funkcji trzech zmiennych.

A mianowicie, gdy wyrażenie:

$$P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz$$

jest różniczką zupełną, to:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$$

a więc lewa strona wzoru Stokes'a jest zerem, a stąd wynika, że i prawa jest zerem. A zatem *całka po krzywej zamkniętej z różniczki zupełnej funkcji trzech zmiennych jest zerem, a stąd wynika, że całka krzywolinjowa z różniczki zupełnej funkcji trzech zmiennych nie zależy od drogi całkowania.*

Twierdzenie Stokes'a ma liczne zastosowania w fizyce. Tak np. gdy $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ są składowemi siły F w polu sił w kierunkach osi spółrzędnych, to całka krzywolinjowa $\int_{(L)} (P\,dx + Q\,dy + R\,dz)$ przedstawia pracę, wykonaną przez tę siłę wzdłuż drogi L. Jeżeli wyrażenie pod całką jest różniczką zupełną jakiejś funkcji $U(x, y, z)$, to praca nie zależy od drogi, łączącej dwa dane punkty. Wtedy P, Q, R są pochodnemi cząstkowemi jednej funkcji $U(x, y, z)$, a mianowicie:

$$P = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial U}{\partial z}$$

$U(x, y, z)$ jest *potencjałem* tego pola sił. Jeżeli więc pole sił posiada potencjał, to praca nie zależy od drogi. Wzór Stokes'a znajduje również ważne zastosowanie w hydrodynamice i w elektrodynamice

Ma on również bardzo interesującą interpretację w teorji wektorów

§ 266. Twierdzenie Gaussa i twierdzenie Greena dla przestrzeni trójwymiarowej.

W poprzednim paragrafie poznaliśmy związek całki powierzchniowej z całką krzywoliniową. Istnieje również związek całki powierzchniowej z całką potrójną, pozwalający sprowadzić obliczenie całki potrójnej do całki powierzchniowej. I tak wykonując całkowanie według z w całce potrójnej, dowodzi się, podobnie jak przy płaskiem twierdzeniu Greena-Riemanna, że z całki $\iiint_{(V)} \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz$ otrzymamy $\iint_{(S)} R\, dx\, dy$, gdzie S jest powierzchnią, ograniczającą obszar trójwymiarowy V

Podobnie:

$$\iiint_{(V)} \frac{\partial P}{\partial x}\, dx\, dy\, dz = \iint_{(S)} P\, dy\, dz$$

$$\iiint_{(V)} \frac{\partial Q}{\partial y}\, dx\, dy\, dz = \iint_{(S)} Q\, dx\, dz$$

Sumując te trzy równania stronami, otrzymujemy wzór:

$$(208)\qquad \boxed{\iiint_{(V)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz = \iint_{(S)} (P\, dy\, dz + Q\, dx\, dz + R\, dx\, dy)}$$

Wzór ten, zwany wzorem Gaussa, znajduje liczne zastosowania w fizyce matematycznej. Posiada on także prostą interpretację w analizie wektoralnej.

Z wzoru Gaussa wyprowadza się twierdzenie Greena dla przestrzeni, wyrażające się następującym wzorem:

$$(209)\qquad \boxed{\iiint_{(V)} (U\Delta V - V\Delta U)\, dx\, dy\, dz = \iint_{(S)} \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n}\right) d\sigma}$$

gdzie U i V są funkcjami trzech zmiennych x, y, z, $\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$ i podobnie ΔV, a $\frac{\partial V}{\partial n}$ oznacza pochodną funkcji V w kierunku normalnej i ma wartość:

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \cos\alpha + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \cos\beta + \frac{\partial V}{\partial z} \cdot \cos\gamma \quad \text{i podobnie} \quad \frac{\partial U}{\partial n}$$

(α, β, γ są kątami normalnej z osiami spółrzędnych).

Dowód tego wzoru przeprowadza się, stosując wzór Gaussa do całki:

$$I = \int\int\int_{(V)} \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z} \right) dx\,dy\,dz$$

Ponieważ:

$$\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(U\frac{\partial V}{\partial x} \right) - U\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

przeto:

$$I = \int\int\int_{(V)} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(U\frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(U\frac{\partial V}{\partial y} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial z}\left(U\frac{\partial V}{\partial z} \right) \right] dx\,dy\,dz - \int\int\int_{(V)} U\Delta V\,dx\,dy\,dz$$

Stosując do pierwszej całki twierdzenie Gaussa, otrzymujemy:

$$I = \int\int_{(S)} U\left(\frac{\partial V}{\partial x}\,dy\,dz + \frac{\partial V}{\partial y}\,dx\,dz + \frac{\partial V}{\partial z}\,dx\,dy \right) - \int\int\int_{(V)} U\Delta V\,dx\,dy\,dz$$

Ale $dy\,dz = \cos\alpha\,d\sigma$, $dx\,dz = \cos\beta\,d\sigma$, $dx\,dy = \cos\gamma\,d\sigma$, a więc wyrażenie w nawiasie w pierwszej całce jest pochodną funkcji V w kierunku normalnej, pomnożoną przez $d\sigma$. Zatem:

$$I = \int\int_{(S)} U\frac{\partial V}{\partial n}\,d\sigma - \int\int\int_{(V)} U\Delta V\,dx\,dy\,dz$$

Przekształcając tę samą całkę analogicznie przez użycie wzoru:

$$\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(V\frac{\partial U}{\partial x} \right) - V\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

otrzymujemy:

$$I = \int\int_{(S)} V\frac{\partial U}{\partial n}\,d\sigma - \int\int\int_{(V)} V\Delta U\,dx\,dy\,dz$$

Tworząc różnicę tych dwóch wyrażeń na I, otrzymujemy ostatecznie wzór Greena.

Szczegółową dyskusję twierdzeń, podanych w §§ 264—266 i liczne ich zastosowania znajdzie czytelnik np. w podręczniku R. Courant'a p. t. *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung* (tom II, str. 259—287, Berlin 1929) i w podręcznikach, poświęconych teorji wektorów; np. w polskim języku istnieje z tej dziedziny podręcznik W. Pogorzelskiego p. t. *Zarys teorji wektorów* (Lwów—Warszawa 1925 r.).

Nota.

O liczbach zespolonych.

Zarówno dla potrzeb matematyki czystej jak i stosowanej okazało się bardzo pożyteczne rozszerzenie zakresu liczb przez wprowadzenie obok liczb *rzeczywistych* także liczb *zespolonych*. Liczbami zespolonemi nazywamy *pary* liczb rzeczywistych (a, b), dla których ustalono następujące cztery związki i reguły działań arytmetycznych.

I. *Równość*:

$(a, b) = (c, d)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = c$, $b = d$

II. *Reguła dodawania*:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

III. *Reguła mnożenia*:

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd,\ bc + ad)$$

IV. *Związek z liczbami rzeczywistemi*:

$$(a, 0) = a$$

Każdą taką parę uważamy za jedną całość, za *jeden* element i oznaczamy ją często jedną literą, np. $(a, b) = z$. Postępujemy tu więc podobnie jak przy ułamkach, które są także parami, a mianowicie parami liczb całkowitych, np. $\frac{3}{8}, \frac{7}{5}$, ogólnie $\frac{a}{b}$, a mimoto uważamy każdy ułamek za *jeden* element i piszemy np. $\frac{a}{b} = u$.

Uwaga. Także ułamki można wprowadzać zapomocą łączenia liczb całkowitych a, b w pary. Łatwo stwierdzić, że związki I—IV mają dla ułamków postać:

I'. $(a, b) = (c, d)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \cdot d = b \cdot c$.

II'. $(a, b) + (c, d) = (ad + bc, bd)$.

III'. $(a, b) \cdot (c, d) = (ac, bd)$.

IV'. $(a, 1) = a$.

Z tych czterech założeń można wyprowadzić wszystkie własności ułamków i wszystkie twierdzenia o rachowaniu ułamkami.

Założenia I — IV są tak dobrane, aby można było rachować liczbami zespolonemi tak, jak dwumianami $a + b\omega$, $c + d\omega$, z tem tylko uzupełnieniem, że zamiast ω^2 należy podstawić -1.

Okażemy mianowicie, że każdą liczbę zespoloną, t. j. każdą parę (a, b), czyniącą zadość założeniom I — IV, można przedstawić w postaci $a + b \cdot i$ gdzie i jest skróconem oznaczeniem pewnej specjalnej pary, a mianowicie pary $(0, 1)$, mającej tę własność, że $(0, 1)^2 = -1$.

I tak każdą parę (a, b) można napisać w postaci:

$$(a, b) = (a + 0,\ 0 + b)$$

Na podstawie reguły II jest więc:

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b)$$

Stąd, na podstawie związku IV, otrzymujemy:

$$(a, b) = a + (0, b)$$

Drugi składnik tej sumy można napisać w postaci:

$$(0, b) = (b, 0) \cdot (0, 1)$$

albowiem z reguły III wynika, że:

$$(b, 0) \cdot (0, 1) = (b \cdot 0 - 0 \cdot 1,\ b \cdot 1 + 0 \cdot 0) = (0, b)$$

Wobec tego:

$$(a, b) = a + (b, 0) \cdot (0, 1)$$

Stąd zaś, na podstawie związku IV, otrzymujemy:

$$(a, b) = a + b \cdot (0, 1)$$

Kwadrat liczby zespolonej $(0, 1)$ ma wartość -1; istotnie według reguły III jest:

$$(0, 1)^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1,\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0)$$

a więc według IV jest:

$$(0, 1)^2 = -1$$

Tę specjalną parę $(0, 1)$ nazywamy *jednostką urojoną* i oznaczamy ją symbolem i. Zatem:

$$(0, 1) = i$$

Liczba i ma więc tę własność, że:

$$i^2 = -1$$

Używając tego sposobu oznaczania, mamy więc:

$$(a, b) = a + b \cdot i$$

Dowiedliśmy w ten sposób, że *każdą liczbę zespoloną można przedstawić w postaci sumy, której pierwszy składnik jest liczbą rzeczywistą a drugi iloczynem liczby rzeczywistej i jednostki urojonej.*

Używając tego sposobu przedstawienia liczb zespolonych, piszemy cztery zasadnicze prawa I—IV, charakteryzujące te liczby, w następującej postaci:

1) $a + bi = c + di$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełniają się równocześnie dwie równości: $a = c$, $b = d$;

2) $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$;

3) $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$;

4) $a + 0i = a$.

Z własności 1) wynika, że każde równanie, zachodzące pomiędzy liczbami zespolonemi, jest równoważne z układem *dwóch równań*, zachodzących pomiędzy odpowiedniemi liczbami rzeczywistemi.

Zwróćmy jeszcze uwagę na regułę mnożenia liczb zespolonych, która odróżnia mnożenie liczb zespolonych $a + bi$ od mnożenia dwumianów $a + bx$. I tak mnożąc przez siebie dwie liczby zespolone tak, jak zwyczajne dwumiany, otrzymujemy:

$$(a + bi)(c + di) = ac + bdi^2 + (ad + bc)i$$

Różnica występuje dopiero w tem, że za i^2 należy podstawić -1. Uczyniwszy to, otrzymujemy istotnie prawą stronę wzoru 3).

Z tych czterech praw I—IV lub 1)—4) wyprowadza się już całą arytmetykę liczb zespolonych. Okazuje się przytem, że wszystkie prawa arytmetyki liczb rzeczywistych zachowują swą ważność także w tej szerszej klasie liczb (jak np. prawa przemienności i łączności w dodawaniu i mnożeniu, prawo rozdzielności dodawania i mnożenia). Ponadto przybywają jednak jeszcze nowe definicje i nowe wyniki.

I tak liczbę zespoloną, której część rzeczywista jest zerem, nazywamy liczbą *urojoną* lub *czysto urojoną*. Dwie liczby zespolone:

$$z = a + bi, \qquad \bar{z} = a - bi$$

mające tę samą część rzeczywistą, a różniące się tylko znakiem współczynnika, stojącego przy jednostce urojonej, nazywamy liczbami zespolonemi *sprzężonemi*. Zarówno suma jak i iloczyn dwóch liczb sprzężonych jest liczbą rzeczywistą, a mianowicie:

$$(a + bi) + (a - bi) = 2a$$
$$(a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2$$

Widzimy więc, że działania, wykonywane na liczbach zespolonych, mogą prowadzić do wyników rzeczywistych.

Wyniki działań, wykonywanych na liczbach zespolonych, należy zawsze sprowadzać do postaci $x + iy$, gdzie x, y są liczbami rzeczywistemi. Dla *dodawania* i *mnożenia* uzyskuje się przedstawienie wyniku w takiej postaci odrazu z wzorów 2), 3).

Przy *dzieleniu* można uzyskać takie przedstawienie w następujący sposób. Mnożymy licznik i mianownik wyrażenia $\frac{a+bi}{c+di}$ przez liczbę sprzężoną z mianownikiem. Otrzymujemy w ten sposób:

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac+bci-adi-bdi^2}{c^2-(di)^2}$$

Zatem:

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

Szukane liczby rzeczywiste x, y mają tu zatem wartości:

$$x=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \qquad y=\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

Do tego samego wyniku można też dojść ogólniejszą metodą, a mianowicie kładąc:

$$\frac{a+bi}{c+di}=x+iy$$

Stąd:

$$a+bi=(x+yi)(c+di)=cx-dy+(dx+cy)i$$

To równanie spełnia się (w myśl zasady I) wtedy i tylko wtedy, gdy spełniają się dwa równania:

$$cx-dy=a$$
$$dx+cy=b$$

Rozwiązaniem tego układu równań są, jak łatwo sprawdzić, otrzymane powyżej wartości na x i y.

Przykład.

$$\frac{43-6i}{4+7i}=\frac{(43-6i)(4-7i)}{(4+7i)(4-7i)}=\frac{172-42-24i-301i}{16+49}=\frac{130-325i}{65}$$

a więc:

$$(43-6i):(4+7i)=2-5i$$

Przy *potęgowaniu* liczb zespolonych występują rozmaite potęgi jednostki urojonej i. Wszystkie te potęgi należy przedstawić w postaci $a+bi$ (przyczem a lub b może być zerem). Otóż:

$$i^1=i, \quad i^2=-1, \quad i^3=i^2\cdot i=-i, \quad i^4=i^2\cdot i^2=+1$$

Wyższe zaś potęgi sprowadzają się do tych czterech i powtarzają się perjodycznie, albowiem:

$$i^{4n+k}=i^{4n}\cdot i^k=+1\cdot i^k=i^k$$

przy całkowitych dodatnich n, k. Wobec tego także każdą potęgę $(a+bi)^n$ potrafimy przedstawić w postaci $x+iy$: trzeba w tym celu podnieść

ten dwumian do n-tej potęgi według wzoru Newtona, a następnie za wszystkie potęgi i podstawić odpowiednio i, -1, $-i$ lub $+1$.

Pierwiastkowanie liczb zespolonych wyjaśnimy zapomocą przykładu. Chcemy obliczyć drugi pierwiastek z liczby $5-12i$, to znaczy znaleźć takie dwie liczby rzeczywiste x, y, aby liczba zespolona $x+iy$ spełniała równanie:

$$(x+iy)^2 = 5 - 12i$$

czyli:

$$x^2 - y^2 + 2xyi = 5 - 12i$$

Równanie to spełnia się wtedy i tylko wtedy, gdy liczby *rzeczywiste* x, y spełniają następujący układ dwóch równań:

$$x^2 - y^2 = 5$$
$$2xy = -12$$

Stąd otrzymujemy $x = -\frac{6}{y}$ a następnie $\frac{36}{y^2} - y^2 = 5$, $36 - y^4 = 5y^2$.

Stąd:

$$y^2 = 4 \quad \text{albo} \quad y^2 = -9$$

Tę drugą ewentualność: $y^2 = -9$ należy odrzucić, ponieważ y ma być liczbą rzeczywistą. Wobec tego $y_1 = +2$, $y_2 = -2$, a zatem $x_1 = -3$, $x_2 = +3$. Otóż drugi pierwiastek z liczby zespolonej $5 - 12i$ ma dwie następujące wartości:

$$(\sqrt{5-12i})_1 = -3 + 2i, \quad (\sqrt{5-12i})_2 = 3 - 2i$$

Niechaj czytelnik stwierdzi, że:

$$(\sqrt{-1})_1 = +i, \quad (\sqrt{-1})_2 = -i, \quad (\sqrt{i})_1 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad (\sqrt{i})_2 = -\frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

Widzimy stąd, że w zbiorze liczb zespolonych istnieje drugi pierwiastek z każdej liczby, podczas gdy w zbiorze liczb rzeczywistych nie istnieją drugie pierwiastki z liczb ujemnych.

Z tem wiąże się, że w zbiorze liczb zespolonych *każde równanie drugiego stopnia posiada dwa rozwiązania*, podczas gdy w zbiorze liczb rzeczywistych równania drugiego stopnia o wyróżniku ujemnym nie posiadają rozwiązań.

Przykład. Równanie:

$$x^2 - 4x + 13 = 0$$

posiada rozwiązania:

$$x_1 = 2 + \sqrt{-9}, \quad x_2 = 2 - \sqrt{-9}$$

czyli:

$$x_1 = 2 + 3i, \quad x_2 = 2 - 3i$$

Natomiast to równanie nie posiada rozwiązań rzeczywistych.

Okazano ogólnie, że każde równanie algebraiczne n-tego stopnia posiada n pierwiastków, przyczem niektóre, a nawet wszystkie mogą być liczbami zespolonemi.

Jeżeli równanie algebraiczne o spółczynnikach rzeczywistych posiada pierwiastek zespolony $x_1 = p + qi$, to także sprzężona z x_1 liczba $x_2 = p - qi$ jest pierwiastkiem tego równania.

Dowód. Podstawiwszy w równanie algebraiczne:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = 0$$

za x wartość $x_1 = p + qi$, wykonujemy zaznaczone działania i przedstawiamy lewą stronę w postaci $A + Bi$. Jeżeli zaś podstawiamy za x wariość x_2, sprzężoną z x_1, to otrzymamy oczywiście wynik $A - Bi$. Ponieważ x_1 spełnia dane równanie, przeto $A + Bi = 0$ czyli $A + Bi = 0 + 0i$ a stąd wynika, że $A = 0$ i $B = 0$. Wobec tego także $A - Bi = 0$, a to znaczy, że liczba $x_2 = p - qi$ spełnia także dane równanie. c. b. d. o.

Wiadomo, jak ważne usługi oddaje przy liczbach rzeczywistych ch geometryczne przedstawienie zapomocą punktów *osi liczbowej*. Do przedstawienia geometrycznego liczb zespolonych używa się całej płaszczyzny, zwanej *płaszczyzną liczbową*, wprowadzonej przez Gaussa. Obrazem geometrycznym liczby zespolonej $z = x + iy$ jest punkt o spółrzędnych x, y. Tak np. punkt A na fig. 107 przedstawia liczbę $z = 2 + 3i$. Obrazami liczb rzeczywistych są punkty osi x-ów, liczb czysto urojonych punkty osi y-ów.

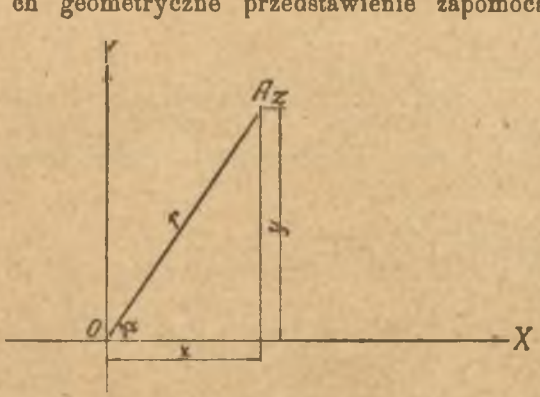


Fig. 107.

Obrazem każdej liczby zespolonej jest zatem jakiś punkt płaszczyzny liczbowej i naodwrót, każdemu punktowi płaszczyzny liczbowej odpowiada jakaś liczba zespolona. Istnieje zatem odpowiedniość doskonała pomiędzy zbiorem wszystkich liczb zespolonych a zbiorem wszystkich punktów obranej płaszczyzny.

Odległość r punktu, przedstawiającego liczbę zespoloną z, od początku układu spółrzędnych nazywamy *wartością bezwzględną* tej liczby z i oznaczamy ją symbolem $|z|$. Widoczne jest, że $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, a zatem:

$$|z| = |x + yi| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Tak np. $|2 + 3i| = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$, $|3 + 4i| = \sqrt{9 + 16} = 5$. Definicja

ta pozostaje w zgodzie z definicją bezwzględnej wartości liczby rzeczywistej, np. $|-4| = |-4+0i| = \sqrt{4^2+0^2} = 4$.

Używając odległości r punktu A od początku układu i kąta α, jaki tworzy promień OA z osią x-ów, możemy przedstawić każdą liczbę zespoloną zapomocą *spółrzędnych biegunowych*.

I tak:

$$x = r\cos\alpha, \qquad y = r\sin\alpha$$

a zatem:

$$z = x + yi = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

czyli:

$$z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

przyczem $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ a $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$. Każdą więc liczbę zespoloną można przedstawić jako iloczyn z jej wartości bezwzględnej i z liczby zespolonej $\cos\alpha + i\sin\alpha$, której wartością bezwzględną jest 1. Istotnie:

$$|\cos\alpha + i\sin\alpha| = \sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = 1$$

Kąt α nazywamy *argumentem* liczby zespolonej.

Posługując się obrazami geometrycznemi liczb zespolonych, możemy w bardzo prosty sposób wykonywać graficznie działania arytmetyczne

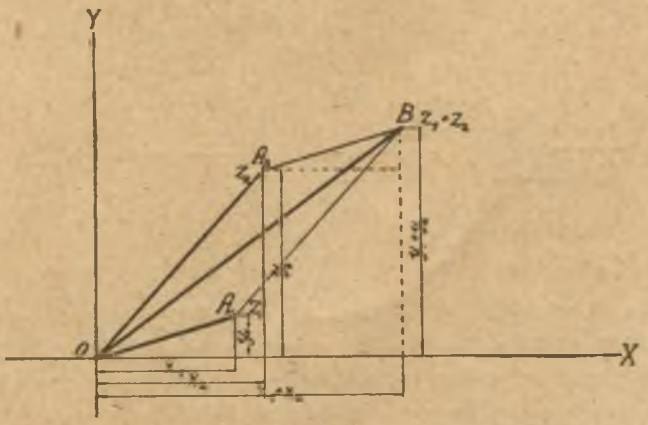


Fig. 108.

na tych liczbach. I tak jeżeli punkty A_1 i A_2 (fig. 108) są obrazami geometrycznemi liczb zespolonych:

$$z_1 = x_1 + y_1 i, \qquad z_2 = x_2 + y_2 i$$

to obrazem geometrycznym ich sumy:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) i$$

jest punkt B, leżący na końcu przekątnej równoległoboku, utworzonego z boków OA_1 i OA_2. Widzimy stąd, że dodawanie liczb zespolonych można wykonywać na ich obrazach geometrycznych tak jak dodawanie wektorów.

Aby znaleźć sposób wykonywania *mnożenia* liczb zespolonych z_1 i z_2 na ich obrazach geometrycznych (fig. 109), dogodnie jest użyć ich przedstawienia zapomocą spółrzędnych biegunowych, a mianowicie:

$$z_1 = r_1(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1), \quad z_2 = r_2(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)$$

Wobec tego:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos\alpha_1\cos\alpha_2 - \sin\alpha_1\sin\alpha_2 + i(\sin\alpha_1\cos\alpha_2 + \sin\alpha_2\cos\alpha_1))$$

czyli:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i\sin(\alpha_1 + \alpha_2))$$

Widzimy stąd, że iloczynem dwóch liczb zespolonych jest liczba zespolona, której *wartość bezwzględna* jest *iloczynem wartości bezwzględnych*

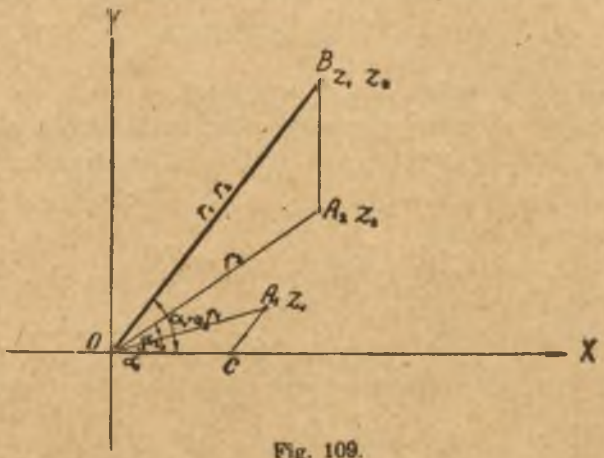


Fig. 109.

danych liczb, a *argument* jest *sumą argumentów* tych liczb. Aby więc otrzymać obraz geometryczny liczby $z_1 \cdot z_2$, należy *obrócić* promień OA_2, należący do liczby z_2, o kąt α_1, należący do liczby z_1 i powiększyć ten obrócony promień r_2 tyle razy, ile razy r_1 jest większe od jednostki. Najłatwiej jest uskutecznić tę konstrukcję przy pomocy trójkątów podobnych: $OCA_1 \sim OA_2B$, przyczem $OC = 1$.

Nietrudno jest znaleźć podobny wzór i podobną konstrukcję na *dzielenie* liczb zespolonych.

Z wzoru na $z_1 \cdot z_2$ wynika bardzo prosty wzór na *potęgowanie* liczby zespolonej z. Przedstawmy ją w postaci $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ i zastosujmy n-krotnie wzór na $z \cdot z$. Otrzymamy:

$$z^n = r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$$

Dla $r = 1$ otrzymujemy stąd następujący wzór Moivre'a, bardzo ważny w algebrze i w teorji funkcji zmiennej zespolonej:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$$

Powrócimy do tego wzoru w tomie III.

Z rozważań tych widzimy, że liczby zespolone nie są bynajmniej, jak dawniej sądzono, jakiemiś mistycznemi „urojonemi" fikcjami matematycznemi, lecz są równie realne, jak ułamki lub inne liczby rzeczywiste i posiadają zupełnie jasną, „rzeczywistą" interpretację geometryczną. Znajdują one coraz szersze zastosowanie w technice, w fizyce i w innych naukach.

Uwaga. Geometryczne dodawanie liczb zespolonych mogłoby nasuwać przypuszczenie, że mamy tu do czynienia z *wektorami*, dobrze znanemi z rozmaitych działów fizyki (np. z mechaniki). Aby usunąć rozmaite, zdarzające się nieporozumienia, przedstawimy tu jeszcze pokrótce stosunek teorji liczb zespolonych do teorji wektorów. Aby ten stosunek jasno wystąpił, zajmiemy się ogólniejszemi liczbami „zespolonemi", złożonemi z czterech części, a mianowicie *kwaternjonami*. Kwaternjony są to *czwórki* liczb rzeczywistych: (a_0, a_1, a_2, a_3), które można określić zapomocą związków podobnych do związków I—IV, charakteryzujących liczby zespolone dwujednostkowe (t. j. złożone z jednostek rzeczywistych 1 i z jednostek urojonych i). Prościej jest jednak wyjść odrazu z przedstawienia takiej czwórki a w postaci:

$$a = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot i + a_2 \cdot j + a_3 \cdot k$$

1, i, j, k nazywamy jednostkami kwaternjona. Mnożenie tych jednostek przez siebie określamy zapomocą następujących wzorów:

$$\begin{array}{lll} i^2 = -1 & ij = k & ik = -j \\ ji = -k & j^2 = -1 & jk = i \\ ki = j & kj = -i & k^2 = -1 \end{array}$$

Rezygnujemy tu zatem z prawa przemienności w mnożeniu (albowiem np. $ij \neq ji$).

Kwaternjon składa się z części rzeczywistej: a_0, zwanej *skalarną* częścią kwaternjona i z części $a_1 \cdot i + a_2 \cdot j + a_3 \cdot k$, zwanej *wektorjalną* częścią kwaternjona. Część wektorjalną można przedstawić geometrycznie w układzie trzech osi spółrzędnych prostopadłych, uważając punkt A o spółrzędnych a_1, a_2, a_3 za obraz geometryczny tej części wektorjalnej; odcinek OA, łączący ten punkt z początkiem układu, nazywamy *wektorem*.

Wykonując mnożenie wektorjalnych części α, β dwóch kwaternjonów według zwykłych reguł mnożenia trójmianów i zastępując następnie iloczyny jednostek innemi jednostkami, według przyjętych powyżej reguł, otrzymujemy:

$$\bar{\alpha} \cdot \bar{\beta} = -(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) + (a_2 b_3 - a_3 b_2) i + (a_3 b_1 - a_1 b_3) j + (a_1 b_2 - a_2 b_1) k$$

Część skalarną tego iloczynu, wziętą ze znakiem przeciwnym, t. j.:

$$S(\bar{\alpha} \cdot \bar{\beta}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

nazywamy *iloczynem skalarnym* dwóch wektorów, a część wektorjalną, t. j.:

$$V(\bar{\alpha} \cdot \bar{\beta}) = (a_2 b_3 - a_3 b_2) i + (a_3 b_1 - a_1 b_3) j + (a_1 b_2 - a_2 b_1) k$$

nazywamy *wektorjalnym iloczynem* dwóch wektorów.

Właściwiej byłoby jednak nie odróżniać *dwóch* rodzajów mnożenia wektorów, tylko mówić o *części* skalarnej i wektorjalnej *jednego* iloczynu.

Okazuje się, że iloczyn wektorjalny przedstawia się w obrazie geometrycznym jako nowy wektor, prostopadły do płaszczyzny dwóch danych wektorów. Rozważania te tworzą arytmetyczną podstawę teorji wektorów. Nie będziemy się tutaj zajmowali tą teorją, a wskażemy tylko na związek tych pojęć z pojęciem zwyczajnej liczby zespolonej (dwujednostkowej). Otóż specjalnemi przypadkami kwaternjonów są:

1° liczba rzeczywista a_0, jeżeli $a_1 = a_2 = a_3 = 0$;

2° wektor $a_1 i + a_2 j + a_3 k$ w przestrzeni trójwymiarowej, jeżeli $a_0 = 0$;

3° wektor $a_2 j + a_3 k$ na płaszczyźnie, jeżeli $a_0 = 0$, $a_1 = 0$ i podobnie $a_1 i + a_3 k$, $a_1 i + a_2 j$;

4° liczba zespolona $a_0 + a_1 i$, jeżeli $a_2 = a_3 = 0$.

Widzimy stąd, że zupełnie co innego oznacza wektor na płaszczyźnie, a co innego liczba zespolona. Mają one wprawdzie te same prawa dodawania, lecz różne zupełnie prawa mnożenia. Iloczynem dwóch liczb zespolonych jest liczba, mająca swój obraz w tej samej płaszczyźnie, podczas gdy iloczyn dwóch wektorów, leżących na tej samej płaszczyźnie, składa się z części skalarnej i z części wektorjalnej, którą przedstawia wektor, *prostopadły* do danej płaszczyzny.

Alfabetyczny spis rzeczy.

Spis rzeczy.

CZĘŚĆ IV.

Rozdział XVII.

O całkach nieoznaczonych.

Rozdział XVIII.

O całkach oznaczonych.

Str.

Rozdział XIX.

Zastosowania całek oznaczonych do geometrji i do mechaniki.

Rozdział XX.

Całki z funkcyj dwóch i więcej zmiennych.

Ustęp I. Całki krzywolinjowe.

Ustęp II. Różniczkowanie i całkowanie całek według parametru.

Ustęp III. Całki podwójne.

Ustęp IV Całki potrójne, wielokrotne i powierzchniowe

Nota.